arXiv:2303.14268v1 [math.CV] 24 Mar 2023

二维单项式多面体的伯格曼核

RASHA ALMUGHRABI

Abstract. 我们显式地计算了所有二维单项式多面体的伯格曼核。二维单项式多面体是一类区域，其中包括 Hartogs 三角形及其若干推广。我们利用这类区域可表示为圆盘与穿孔圆盘的乘积之商这一性质来计算其核。

1. Introduction

伯格曼核是现代复分析中一个备受关注的基本对象。一般而言，无法以显式闭式计算某个区域的伯格曼核。主要的例外是球及其他有界对称域 [7]。

除此之外，原则上也可以利用伯格曼核的变换律，计算那些作为已知伯格曼核的区域之商而得到的区域的伯格曼核。然而，这类计算会带来复杂的代数和计算问题。

本文将明确计算一类称为单项式多面体 的区域的伯格曼核。这类区域是乘积域的商，其中各因子为圆盘或穿孔圆盘。尽管这个问题在 $\mathbb{C}^n$中颇有意义，本文将在此给出 $n = 2$情形的完整计算。单项式多面体可视为著名的*Hartogs* 三角形 $\mathcal{H}(1, -1) = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < |z_2| < 1\}$的一种推广。它们是复分析中当前备受关注的研究对象，参见 [1] 和 [6]。

我们首先描述所研究的区域类。这里的区域 指 $\mathbb{C}^n$中的一个开连通集，其中 $n \geq 1$。

定义1。 设 $\mathcal{U} \subset \mathbb{C}^n$ 是一个有界区域。如果存在一个整数矩阵 $B \in M_n(\mathbb{Z})$ ，使得 $\mathcal{U}$ ，则称 $\mathcal{U}$ 为单项式多面体 。

$$\mathcal{U} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : |z_1|^{b_1^j} \cdots |z_n|^{b_n^j} < 1, 1 \leq j \leq n \right\}, \tag{1}$$

其中， b_j^i 表示 B 中第 i行、第 j列的元素。

如果 $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ 是一个单项式多面体，那么它就是一个莱因哈特域，也就是说，如果 $z \in \Omega$ 和 $\theta_j \in \mathbb{R}$ 对于 $j = 1, \cdots, n$，那么我们有

$$\left(e^{i\theta_1} z_1, \cdots, e^{i\theta_n} z_n\right) \in \Omega.$$

如果 Ω 是 $\mathbb{C}^n$中的一个莱因哈特域，那么它的影 是 $\mathbb{R}^n$ 的子集 $|\Omega|$ ，定义如下

$$|\Omega| = \{(|z_1|, \cdots, |z_n|) : z \in \Omega\}.$$

事实上，单项式多面体是一种所谓的伪凸域，这是多复变函数论中最重要的一类区域。单项式多面体通常在原点处有一个奇点，见 [10]。

文献中有许多关于单项式多面体的伯格曼核计算的特殊例子。Bremermann 在 [2] 计算了经典 Hartogs 三角形的伯格曼核。Edholm 在 [5] （另见 [6]）明确计算了瘦 Hartogs 三角形和胖 Hartogs 三角形的伯格曼核。在 [3], , Chakrabarti、Konkel、Mainkar 和 Miller 给出了初等 Reinhardt 域伯格曼核的显式形式。在 [4], , Chen 给出了 n 维广义 Hartogs 三角形伯格曼核的公式。Chen 运用变换公式，求得了 n 维广义 Hartogs 三角形的伯格曼核。随后，Zhang 在 [11], 明确计算了 n 维广义 Hartogs 三角形的伯格曼核。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 32A36。

1.1. 两个例子。 本节给出两个应用本文一般公式的例子。据我们所知，文献中此前尚未提及这两个例子的伯格曼核。

例 1. 考虑 $\mathbb{C}^2$ 中给定的区域：

$$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^4 < |z_2| < |z_1|^{\frac{1}{3}}\}.$$

$\mathcal{U}$ 中区域的关联矩阵为 $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，而 $\mathcal{U}$ 的莱因哈特影如图 1 所示。

利用下文的定理 1 和定理 2，可得 $\mathcal{U}$ 的伯格曼核为

$$K_{\mathcal{U}}(z,w) = \frac{1}{11\pi^2} \cdot \frac{g(t_1,t_2)}{(t_2 - t_1^4)^2 (t_1 - t_2^3)^2},$$

其中

$$\begin{aligned} g(t_1,t_2) \quad &= 7t_2^5 + 6t_2^6 + 4t_1t_2^2 + 16t_1t_2^3 + 30t_1t_2^4 + 24t_1t_2^5 + 10t_1t_2^6 + 3t_1^2t_2 + 20t_1^2t_2^2 + 45t_1^2t_2^3 + 54t_1^2t_2^4 \\ &+35t_1^2t_2^5 + 8t_1^2t_2^6 + 12t_1^3t_2 + 42t_1^3t_2^2 + 80t_1^3t_2^3 + 72t_1^3t_2^4 + 40t_1^3t_2^5 + 27t_1^4t_2 + 70t_1^4t_2^2 + 121t_1^4t_2^3 \\ &+70t_1^4t_2^4 + 27t_1^4t_2^5 + 40t_1^5t_2 + 72t_1^5t_2^2 + 80t_1^5t_2^3 + 42t_1^5t_2^4 + 12t_1^5t_2^5 + 8t_1^6 + 35t_1^6t_2 + 54t_1^6t_2^2 + 45t_1^6t_2^3 \\ &+20t_1^6t_2^4 + 3t_1^6t_2^5 + 10t_1^7 + 24t_1^7t_2 + 30t_1^7t_2^2 + 16t_1^7t_2^3 + 4t_1^7t_2^4 + 6t_1^8 + 7t_1^8t_2. \end{aligned}$$

例 2. 考虑 $\mathbb{C}^2$ 中给定的区域：

$$\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^{1/2} < |z_2| < |z_1|^{1/4}\}.$$

$\mathcal{V}$ 该区域的关联矩阵在 $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$，而 $\mathcal{V}$ 的莱因哈特影如图 1 所示。

利用下文的定理 1 和定理 2，可得 $\mathcal{V}$ 的伯格曼核为

$$K_{\mathcal{U}}(p,q) = \frac{t_2^8 + t_1t_2^4 + 4t_1t_2^5 + t_1t_2^6 + t_1^2t_2^2}{2\pi^2 (t_2^2 - t_1)^2 (t_1 - t_2^4)^2}.$$

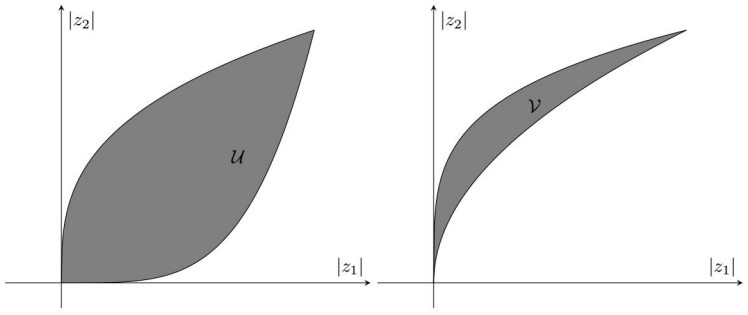

FIGURE 1. $\mathcal{U}$ 的莱因哈特影（左）和 $\mathcal{V}$（右）。

1.2. 主要结果。 设 $B=\begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{bmatrix}\in M_2(\mathbb{Z})$ 是一个 2×2 整数矩阵，使得区域

$$\mathcal{U}=\left\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2:|z_1|^{b_1^1}|z_2|^{b_2^1}<1,\ |z_1|^{b_1^2}|z_2|^{b_2^2}<1\right\} \tag{2}$$

有界，因此是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个单项式多面体。定义矩阵 $A\in M_2(\mathbb{Z})$ 如下：

$$A=\begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{b_2^2}{\gcd(b_2^2,b_1^2)} & \dfrac{-b_2^1}{\gcd(b_2^1,b_1^1)} \\ \dfrac{-b_1^2}{\gcd(b_2^2,b_1^2)} & \dfrac{b_1^1}{\gcd(b_2^1,b_1^1)} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

不难看出，只有当 $\det(B)\neq 0$ 时，(2) 才表示一个有界区域。不失一般性，假设 $\det(B)>0$；否则，我们可以交换 B 的两行，这不会改变区域$\mathcal{U}$。我们的第一个主要结果是

定理 1. 在 (2) 中定义的区域 $\mathcal{U}$ 的伯格曼核具有如下形式：

$$K_{\mathcal{U}}(z,w)=\frac{1}{\pi^2\det(A)}\cdot\frac{g(t_1,t_2)}{\left(t_2^{a_2^1}-t_1^{a_2^2}\right)^2\left(t_1^{a_1^2}-t_2^{a_1^1}\right)^2}, \tag{4}$$

其中 z、$w\in\mathcal{U}$、$t_j=z_j\overline{w_j}$ $j=1$、2 和 $g(t_1$、$t_2)\in\mathbb{Z}[t_1,t_2]$ 是一个整数系数多项式，其具体形式将在下面的定理 *2* 中描述。

为了描述定理 1 中的多项式 g，我们引入以下函数。对于整数$k\geq 1$ 和 r，令

$$D_k(r)=\begin{cases} 1+r, & 0\leq r\leq k-1, \\ 2k-(1+r), & k\leq r\leq 2k-2, \\ 0, & r<0 \quad \text{or} \quad r>2k-2. \end{cases} \tag{5}$$

下面的引理说明了我们为何要这样定义 D_k，其证明显然。

引理 1. 对于正整数 k，我们有

$$\left(\frac{1-x^k}{1-x}\right)^2=\sum_{r=0}^{2k-2}D_k(r)x^r, \tag{6}$$

其中 D_k 如(5)所示。

除 D_k 外，我们还需要以下记号。

(1) 矩阵 $P=\begin{bmatrix} p_1^1 & p_2^1 \\ p_1^2 & p_2^2 \end{bmatrix}$ 的积和式记作 $\operatorname{perm}(P)$。回顾一下，$\operatorname{perm}(P)$

$=p_1^1p_2^2+p_2^1p_1^2$.

(2) 对于矩阵 P和 $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in\mathbb{N}^2$，我们定义

$$N(P,\gamma)=p_1^1\gamma_1+p_1^2\gamma_2-2p_1^1p_1^2+p_1^1+p_1^2-1-\operatorname{perm}(P)+|\det(P)|\,. \tag{7}$$

（本文中，$\mathbb{N}$ 表示正整数集）。

（3）令 R 表示矩阵

$$R=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

定理 2。 在公式 (4) 中，采用上述记号可得

$$g(t_1,t_2)=\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^2}D_{\det(A)}(N(A,\gamma))D_{\det(A)}(N(AR,\gamma))t_1^{\gamma_1}t_2^{\gamma_2},$$

其中求和是有限的；事实上，只有在以下情况下， g 的系数才可能非零

$$\begin{aligned} 0 \le \gamma_1 \le 2a_1^2 + 2a_2^2 - 2, \\ 0 \le \gamma_2 \le 2a_1^1 + 2a_2^1 - 2. \end{aligned} \tag{8}$$

事实上，可以更精确地描述指标集合 $\gamma \in \mathbb{N}^2$： 其中 $t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2}$在 $g(t_1, t_2)$ 中的系数可能非零。此类 γ 必须满足以下不等式

$$\begin{aligned} 0 \le a_1^1\gamma_1 + a_1^2\gamma_2 - 2a_1^1a_1^2 + a_1^1 + a_1^2 - 2a_1^2a_2^1 - 1 \le 2\det(A) - 2, \\ 0 \le a_2^1\gamma_1 + a_2^2\gamma_2 - 2a_1^2a_2^1 + a_2^1 + a_2^2 - 2a_2^1a_2^2 - 1 \le 2\det(A) - 2. \end{aligned} \tag{9}$$

从图形上看，同时满足 (9) 中两个不等式的区域由一个平行四边形围成。

1.3. 致谢。 我谨向论文导师 D. Chakrabarti 教授表示感谢，感谢他提出的有益意见，并感谢他给予的支持性建议。我也感谢博士论文委员会的支持：T. Gilsdorf 教授、S. Narayan 教授和 Y. Zeytuncu 教授。

2. Preliminary Results about Matrices

为了证明第 1.2 节中的主要结果，我们需要以下基本引理，以及一个用于分解整数矩阵的命题。下面观察的证明是显然的。

引理 2。 设 $\Lambda \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$ 满足 $\det(\Lambda) = 1$。若对于 p、q、r、$s \in \mathbb{Z}$，有

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}, \quad \textit{then } \gcd(p,q) = \gcd(r,s).$$

下一个命题与整数矩阵的埃尔米特分解 密切相关。更多详情请参见 [9]。

命题1。 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{Z})$，$\det(A) > 0$，$\gcd(a,c) = \gcd(b,d) = 1$。则存在唯一的数 $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}$，使得

$$\begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ -c & a \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & \det(A) \end{bmatrix}, \quad \textit{where} \quad h = \ell_1 b + \ell_2 d, \tag{10}$$

and

(1) $0 \le h < \det(A)$ 且 $\gcd(h, \det(A)) = 1$,

(2) 如果 $L = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ -c & a \end{bmatrix}$，则 $\det(L) = 1$。

证明。 由于 $\gcd(a,c) = 1$，存在整数 α, γ，使得

$$\alpha a + \gamma c = 1. \tag{11}$$

Define $L_1 = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ -c & a \end{bmatrix}$, then $L_1 A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & \det(A) \end{bmatrix}$, where $h_1 = \alpha b + \gamma d$.

Si由于 $\det(A) > 0$，因此存在唯一的整数 q，并且

$$h_1 = q\det(A) + h, \quad 0 \le h < \det(A).$$

令 $\ell_1 = \alpha + qc$ 和 $\ell_2 = \gamma - aq$，并如命题陈述中所述，回忆 $L = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ -c & a \end{bmatrix}$。注意，由 (11) 可知 $\det(L) = \ell_1 a + \ell_2 c = (\alpha + qc)a + (\gamma - aq)c = \alpha a + \gamma c = 1$，这证明了条件 (2)。注意

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & \det(A) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & h_1 - q\det(A) \\ 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{bmatrix} L_1 A \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -q \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ -c & a \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \alpha + qc & \gamma - aq \\ -c & a \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ -c & a \end{bmatrix} A = LA, \end{aligned}$$

且 (10) 得以满足。因此 $h = \ell_1 b + \ell_2 d$。由于我们已经知道 $0 \le h < \det(A)$，条件 (1) 的第一部分得证。

我们断言 $\gcd(h, \det(A)) = 1$。我们可以将这两个方程 $h = \ell_1 b + \ell_2 d$ 和 $\det(A) = ad - cb$ 写成以下方程组

$$\begin{bmatrix} h \\ \det(A) \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}.$$

由于 $\det(L) = 1$ 且 $\gcd(b, d) = 1$，根据上面的引理 2，我们有 $\gcd(h, \det(A)) = \gcd(b, d) = 1$，这就证明了条件 (1) 的第二部分。

为了完成证明，我们必须证明 ℓ_1 和 ℓ_2 是满足性质 (1) 和 (2) 的仅有的数。为此，令

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : ax + cy = 1, \ \ 0 \le bx + dy < \det(A)\}.$$

该集合非空，因为 $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{S}$。这意味着线性丢番图方程 $ax + cy = 1$ 的通解为

$$x = \ell_1 + nc, \quad y = \ell_2 - na, \tag{12}$$

其中 $n \in \mathbb{Z}$。若 $(x, y) \in \mathbb{S}$，则 $0 \le bx + dy < \det(A)$，即

$$0 \le b(\ell_1 + nc) + d(\ell_2 - na) < \det(A).$$

化简上式并利用 $h = \ell_1 b + \ell_2 d$，我们得到

$$0 \le h - n\det(A) < \det(A), \quad \text{i.e.} \quad n\det(A) \le h < (n+1)\det(A).$$

但我们知道

$$0 \le h < \det(A). \tag{13}$$

注意，对于不同的整数 n，集合 $\{\lambda \in \mathbb{N} \mid n\det(A) \le \lambda < (n+1)\det(A)\}$ 两两不相交，因此 h 恰好属于其中一个集合，而根据 (13)，该集合对应于 $n = 0$。所以，$n = 0$，由 (12) 可得 $x = \ell_1$ 和 $y = \ell_2$。因此 ℓ_1, ℓ_2 是唯一的。□

3. Bergman Kernel of Generalized Hartogs Triangle

本节中，我们计算一个特定的二维单项式多面体的伯格曼核，即由下式定义的广义 Hartogs 三角形 $\mathcal{H}(k_1, -k_2)$

$$\mathcal{H}(k_1, -k_2) = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^{k_1} < |z_2|^{k_2} < 1\},$$

Edholm 在 [5]（另见 [6]）中求出了 $\mathcal{H}(1, -k_2)$ 和 $\mathcal{H}(k_1, -1)$ 的伯格曼核。在 [3], Chakrabarti、Konkel、Mainkar 和 Miller 给出了 $\mathbb{C}^n$ 中广义 Hartogs 三角形的伯格曼核的显式形式；这些是初等 Reinhardt 域的特例。

经典 Hartogs 三角形 $\mathcal{H}(1, -1)$ 是多复变函数中的一个重要例子。它是一个广为人知的非光滑伪凸区域。

命题 2。设 k_1, k_2 为正整数，满足 $\gcd(k_1, k_2) = 1$ 且 $0 \le k_2 < k_1$。则 $\mathcal{H}(k_1, -k_2)$ 的伯格曼核为

$$K_{\mathcal{H}(k_1,-k_2)}(z, w) = \frac{\displaystyle\sum_{\beta \in \mathbb{N}^2} D_{k_1}(\beta_1) D_{k_1}(k_1\beta_2 + \beta_1 k_2 + k_1 + k_2 - 1 - 2k_1k_2) t_1^{\beta_1} t_2^{\beta_2}}{\pi^2 k_1 \left(t_2^{k_2} - t_1^{k_1}\right)^2 (1 - t_2)^2},$$

其中求和是有限的，$t_i = z_i w_i$ 对于 $i = 1, 2$，且只有当 $0 \le \beta_1 \le 2k_1 - 2$, $0 \le \beta_2 \le 2k_2$ 时，分子中的求和项才可能非零。

证明。令 $\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$ 且 $\mathbb{D}^*=\{z\in\mathbb{C}:\ 0<|z|<1\}$。广义 Hartogs 三角形 $\mathcal{H}(k_1,-k_2)$ 的关联矩阵 B 以及矩阵 $C=\text{adj}(B)$ 为

$$B=\begin{bmatrix} k_1 & -k_2\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} 1 & k_2\\ 0 & k_1\end{bmatrix}.$$

定义映射 $\phi:\ \mathbb{D}\times\mathbb{D}^*\to\mathcal{H}(k_1,\ -k_2)$，使得

$$\phi(p_1,p_2) \quad = \quad (p_1p_2^{k_2},p_2^{k_1}). \tag{14}$$

容易看出，ϕ 是一个商型真全纯映射，参见 [8]。为了应用 Bell 变换定理，取 $\Omega_1=\mathbb{D}\times\mathbb{D}^*$ 和 $\Omega_2=\mathcal{H}(k_1,-k_2)$，我们需要计算式（14）中定义的映射$\phi$ 的雅可比行列式，其表达式为

$$\det\phi'(p_1,p_2) \quad = \quad \det\begin{pmatrix} p_2^{k_2} & k_2p_1p_2^{k_2-1}\\ 0 & k_1p_2^{k_1-1}\end{pmatrix}=k_1p_2^{k_1+k_2-1}. \tag{15}$$

现在，我们需要计算 ϕ^{-1}的局部分支。由 [1], 中的定理 3.12 可知，局部共有 $\det A=k_1$ 个分支，记为 Φ_j、$j=0$、$\cdots$、k_1-1。为了求出 $\Phi_j(q)$，我们需要解方程 $\phi(p_1,\ p_2)=(q_1,\ q_2)$。我们看到，对于 $j=0,\ \cdots,\ k_1-1$，有 $p_1^{(j)}=q_1q_2^{-k_2/k_1}\zeta^{-jk_2}$和 $p_2^{(j)}=q_2^{1/k_1}\zeta^j$，其中

$$\zeta=\exp\left(\frac{2\pi i}{k_1}\right). \tag{16}$$

由此可知，我们可以取

$$\Phi_j(q_1,q_2)=(q_1q_2^{-k_2/k_1}\zeta^{-jk_2},q_2^{1/k_1}\zeta^j),\quad j=0,\cdots,k_1-1. \tag{17}$$

下一　　步是计算 Φ_j 的雅可比行列式，计算如下　　s

$$\begin{aligned}\det\Phi'(q_1,q_2) \quad &= \quad \det\begin{pmatrix} q_2^{-k_2/k_1}\zeta^{-jk_2} & \frac{-k_2}{k_1}q_1q_2^{-k_2/k_1-1}\zeta^{-jk_2}\\ 0 & \frac{1}{k_1}q_2^{1/k_1-1}\zeta^j\end{pmatrix}\\ &= \quad \frac{1}{k_1}q_2^{\frac{1-k_1-k_2}{k_1}}\zeta^{j(1-k_2)}.\end{aligned} \tag{18}$$

注意，单位圆盘的伯格曼核与穿孔圆盘的伯格曼核相同，因此

$$K_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}^*}(p_1,p_2,q_1,q_2)=\frac{1}{\pi^2(1-p_1\overline{q_1})^2(1-p_2\overline{q_2})^2}. \tag{19}$$

将 Bell 变换公式应用于（14）中定义的映射 ϕ，得到

$$\det\phi'(p)K_{\mathcal{H}(k_1,-k_2)}(\phi(p),q)=\sum_{j=0}^{k_1-1}K_{\mathbb{D}\times\mathbb{D}^*}(p,\Phi_j(q))\cdot\overline{\det\Phi'(q)}. \tag{20}$$

将（15）至（19）代入（20），得到

$$k_1p_2^{k_1+k_2-1}K_{\mathcal{H}(k_1,-k_2)}(\phi(p),q)=\sum_{j=0}^{k_1-1}\frac{\frac{1}{k_1}\left(\overline{q_2}\right)^{\frac{1-k_1-k_2}{k_1}}\zeta^{-j(1-k_2)}}{\pi^2(1-p_1\overline{q_1}\ \left(\overline{q_2}\right)^{-k_2/k_1}\zeta^{jk_2})^2(1-p_2\left(\overline{q_2}\right)^{1/k_1}\zeta^{-j})^2}. \tag{21}$$

解出 (21) 中的 $K_{\mathcal{H}(k_1,-k_2)}(\phi(p)\ q)$，可得

$$K_{\mathcal{H}(k_1,-k_2)}(\phi(p),q)=\frac{\left(\overline{q_2}\right)^{\frac{1-k_1-k_2}{k_1}}}{\pi^2k_1^2p_2^{k_1+k_2-1}}\sum_{j=0}^{k_1-1}\frac{\zeta^{-j(1-k_2)}}{(1-A\zeta^{jk_2})^2(1-B\zeta^{-j})^2}, \tag{22}$$

其中 $A=p_1\overline{q_1}\left(\overline{q_2}\right)^{-k_2/k_1}$ 和 $B=p_2(q_2)^{1/k_1}$。我们的目标现在是计算式 (22) 中的和。为此，注意到

$$\prod_{j=0}^{k_1-1}(1-A\zeta^{jk_2})^2(1-B\zeta^{-j})^2=(1-A^{k_1})^2(1-B^{k_1})^2.$$

因此，我们可以将式 (22) 改写如下

$$K_{\mathcal{H}(k_1,-k_2)}(\phi(p),q)=\frac{(\overline{q_2})^{\frac{1-k_1-k_2}{k_1}}}{\pi^2k_1^2p_2^{k_1+k_2-1}}\frac{h(A,B)}{(1-A^{k_1})^2(1-B^{k_1})^2},\tag{23}$$

其中

$$h(A,B)=\sum_{j=0}^{k_1-1}\left(\frac{1-A^{k_1}}{1-A\zeta^{jk_2}}\right)^2\left(\frac{1-B^{k_1}}{1-B\zeta^{-j}}\right)^2\zeta^{-j(1-k_2)}.\tag{24}$$

我们声称， h 满足以下对称性

$$h(\zeta^{k_2}A,\zeta^{-1}B)=\zeta^{1-k_2}h(A,B).\tag{25}$$

为此，注意到

$$\begin{aligned}h(\zeta^{k_2}A,\zeta^{-1}B) &= \sum_{j=0}^{k_1-1}\left(\frac{1-(\zeta^{k_2}A)^{k_1}}{1-(\zeta^{k_2}A)\zeta^{jk_2}}\right)^2\left(\frac{1-(\zeta^{-1}B)^{k_1}}{1-(\zeta^{-1}B)\zeta^{-j}}\right)^2\zeta^{-j(1-k_2)}\\ &= \sum_{j=0}^{k_1-1}\left(\frac{1-A^{k_1}}{1-\zeta^{k_2(1+j)}A}\right)^2\left(\frac{1-B^{k_1}}{1-\zeta^{-(1+j)}B)}\right)^2\zeta^{-j(1-k_2)}\\ &= \sum_{\ell=1}^{k_1}\left(\frac{1-A^{k_1}}{1-\zeta^{k_2\ell}A}\right)^2\left(\frac{1-B^{k_1}}{1-\zeta^{-\ell}B)}\right)^2\zeta^{-(\ell-1)(1-k_2)}\\ &= \zeta^{(1-k_2)}h(A,B).\end{aligned}\tag{26}$$

令 $\ell=1+j$，即可得到等式 (26)；最后一个等式则是通过重新排列各项，并注意到当 $\ell=k_1$ 和当 $\ell=0$时一般项相同而得到的，由此便完成了 (25) 中h 的对称性的证明。

现在，注意到 $\dfrac{1-A^{k_1}}{1-\zeta^{k_2\ell}A}$ 是关于 A的 k_1-1 次多项式，因此 $\left(\dfrac{1-A^{k_1}}{1-\zeta^{k_2\ell}A}\right)^2$ 是关于 A的 $2k_1-2$ 次多项式。

由此可得

$$h(A,B)=\sum_{\alpha_1=0}^{2k_1-2}\sum_{\alpha_2=0}^{2k_1-2}h_{\alpha_1,\alpha_2}A^{\alpha_1}B^{\alpha_2}.$$

这里，$h_{\alpha_1,\ \alpha_2}$ 取决于 ζ， k_2 和 j。由 h 的对称性，如式 (25) 所示，我们得到

$$\sum_{\alpha_1=0}^{2k_1-2}\sum_{\alpha_2=0}^{2k_1-2}h_{\alpha_1,\alpha_2}(\zeta^{k_2}A)^{\alpha_1}(\zeta^{-1}B)^{\alpha_2}=\zeta^{1-k_2}\sum_{\alpha_1=0}^{2k_1-2}\sum_{\alpha_2=0}^{2k_1-2}h_{\alpha_1,\alpha_2}A^{\alpha_1}B^{\alpha_2},$$

由此可得

$$\sum_{\alpha_1=0}^{2k_1-2}\sum_{\alpha_2=0}^{2k_1-2}h_{\alpha_1,\alpha_2}(\zeta^{k_2\alpha_1-\alpha_2}-\zeta^{1-k_2})A^{\alpha_1}B^{\alpha_2}=0,$$

因此，若 $h_{\alpha_1,\ \alpha_2}\neq 0$，则应有

$$\zeta^{k_2\alpha_1-\alpha_2+k_2-1}=1.$$

因此， $k_1|(k_2\alpha_1-\alpha_2+k_2-1)$，因为 $\zeta=e^{2\pi i/k_1}$ 即存在 $\nu\in\mathbb{Z}$ 使得

$$k_2\alpha_1-\alpha_2+k_2-1=\nu k_1.\tag{27}$$

在引理 1 的式 (6) 中以 $\zeta^{jk_2}A$ 替换 x，我们得到

$$\left(\frac{1-A^{k_1}}{1-\zeta^{jk_2}A}\right)^2 = \sum_{\alpha_1=0}^{2k_1-2} D_{k_1}(\alpha_1)A^{\alpha_1}\zeta^{jk_2\alpha_1}, \tag{28}$$

同样，我们可以写成

$$\left(\frac{1-B^{k_1}}{1-\zeta^{-j}B}\right)^2 = \sum_{\alpha_2=0}^{2k_1-2} D_{k_1}(\alpha_2)B^{\alpha_2}\zeta^{-j\alpha_2}. \tag{29}$$

将（28）和（29）代入公式（24）中的 $h(A,\ B)$，得到

$$\begin{aligned}
h(A,B) &= \sum_{j=0}^{k_1-1}\left(\sum_{\alpha_1=0}^{2k_1-2} D_{k_1}(\alpha_1)A^{\alpha_1}\zeta^{jk_2\alpha_1}\right)\left(\sum_{\alpha_2=0}^{2k_1-2} D_{k_1}(\alpha_2)B^{\alpha_2}\zeta^{-j\alpha_2}\right)\zeta^{-j(1-k_2)} \\
&= \sum_{j=0}^{k_1-1}\sum_{\alpha_1=0}^{2k_1-2}\sum_{\alpha_2=0}^{2k_1-2} D_{k_1}(\alpha_1)D_{k_1}(\alpha_2)A^{\alpha_1}B^{\alpha_2}\zeta^{j(k_2\alpha_1-\alpha_2-1+k_2)} \\
&= \sum_{j=0}^{k_1-1}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}}\sum_{\alpha_1,\alpha_2=0}^{2k_1-2} D_{k_1}(\alpha_1)D_{k_1}(\alpha_2)A^{\alpha_1}B^{\alpha_2}\zeta^{jk_1\nu}, \quad \text{since } k_2\alpha_1-\alpha_2-1+k_2=\nu k_1, \nu\in\mathbb{Z} \\
&= \sum_{j=0}^{k_1-1}\sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=0\\ \nu\in\mathbb{Z}}}^{2k_1-2}\sum_{\substack{k_2(\alpha_1+1)\\ -(\alpha_2+1)=\nu k_1}} D_{k_1}(\alpha_1)D_{k_1}(\alpha_2)A^{\alpha_1}B^{\alpha_2}, \qquad \text{since } \zeta=e^{2\pi i/k_1},\ \text{so } \zeta^{jk_1\nu}=1 \quad (30) \\
&= k_1\sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=0\\ \nu\in\mathbb{Z}}}^{2k_1-2}\sum_{\substack{k_2(\alpha_1+1)\\ -(\alpha_2+1)=\nu k_1}} D_{k_1}(\alpha_1)D_{k_1}(\alpha_2)A^{\alpha_1}B^{\alpha_2}. \qquad (31)
\end{aligned}$$

我们在（31）中得到 k_1，因为（30）中的求和项与 j无关。然后将（31）代入（23），得到

$$K_{\mathcal{H}(k_1,-k_2)}(\phi(p),q) = \frac{(\overline{q_2})^{\frac{1-k_1-k_2}{k_1}}}{\pi^2 k_1 p_2^{k_1+k_2-1}}\cdot\frac{\displaystyle\sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=0\\ \nu\in\mathbb{Z}}}^{2k_1-2}\sum_{\substack{k_2(\alpha_1+1)\\ -(\alpha_2+1)=\nu k_1}} D_{k_1}(\alpha_1)D_{k_1}(\alpha_2)A^{\alpha_1}B^{\alpha_2}}{(1-A^{k_1})^2(1-B^{k_1})^2}. \tag{32}$$

将（32）中的 $A=p_1q_1\,(q_2)^{-k_2/k_1}$ 和 $B=p_2(q_2)^{1/k_1}$ 的值代入，可得

$$
\begin{aligned}
K_{\mathcal{H}(k_1,-k_2)}(\phi(p),q) &= \frac{(\overline{q_2})^{\frac{1-k_1-k_2}{k_1}} \sum\limits_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=0\\ \nu\in\mathbb{Z}}}^{2k_1-2} \sum\limits_{\substack{k_2(\alpha_1+1)\\ -(\alpha_2+1)=\nu k_1}} D_{k_1}(\alpha_1)D_{k_1}(\alpha_2)\left(p_1\overline{q_1}\,(\overline{q_2})^{-k_2/k_1}\right)^{\alpha_1}\left(p_2\,(\overline{q_2})^{1/k_1}\right)^{\alpha_2}}{\pi^2 k_1 p_2^{k_1+k_2-1}\left(1-\left(p_1\overline{q_1}\,(\overline{q_2})^{-k_2/k_1}\right)^{k_1}\right)^2\left(1-\left(p_2\,(\overline{q_2})^{1/k_1}\right)^{k_1}\right)^2}\\
&= \frac{\sum\limits_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=0\\ \nu\in\mathbb{Z}}}^{2k_1-2} \sum\limits_{\substack{k_2(\alpha_1+1)\\ -(\alpha_2+1)=\nu k_1}} D_{k_1}(\alpha_1)D_{k_1}(\alpha_2)\left(p_1^{k_1}\,(\overline{q_1})^{k_1}\,(\overline{q_2})^{-k_2}\right)^{\alpha_1/k_1}\left(p_2^{k_1}\overline{q_2}\right)^{\alpha_2/k_1}}{\pi^2 k_1\left(p_2^{k_1}\overline{q_2}\right)^{(k_1+k_2-1)/k_1}\left(1-p_1^{k_1}\,(\overline{q_1})^{k_1}\,(\overline{q_2})^{-k_2}\right)^2\left(1-p_2^{k_1}\overline{q_2}\right)^2}\\
&= K_{\mathcal{H}(k_1,-k_2)}(p_1p_2^{k_2},p_2^{k_1},q_1,q_2). \qquad (33)
\end{aligned}
$$

令（33）中的 $z_1=p_1p_2^{k_2}$、 $z_2=p_2^{k_1}$、 $w_1=q_1$ 和 $w_2=q_2$，可得

$$
K_{\mathcal{H}(k_1,-k_2)}(z,w)=\frac{\sum\limits_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=0\\ \nu\in\mathbb{Z}}}^{2k_1-2} \sum\limits_{\substack{k_2(\alpha_1+1)\\ -(\alpha_2+1)=\nu k_1}} D_{k_1}(\alpha_1)D_{k_1}(\alpha_2)\left(\frac{z_1^{k_1}\overline{w_1}^{k_1}}{(z_2\overline{w_2})^{k_2}}\right)^{\alpha_1/k_1}(z_2\overline{w_2})^{\alpha_2/k_1}}{\pi^2 k_1\,(z_2\overline{w_2})^{(k_1+k_2-1)/k_1}\left(\frac{(z_2\overline{w_2})^{k_2}-z_1^{k_1}(\overline{w_1})^{k_1}}{(z_2\overline{w_2})^{k_2}}\right)^2(1-z_2\overline{w_2})^2}. \qquad (34)
$$

设 $t_1=z_1\overline{w_1}$ 和 $t_2=z_2\overline{w_2}$ 属于 (34)，这意味着

$$
\begin{aligned}
K_{\mathcal{H}(k_1,-k_2)}(z,w) &= \frac{\sum\limits_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=0\\ \nu\in\mathbb{Z}}}^{2k_1-2} \sum\limits_{\substack{k_2(\alpha_1+1)\\ -(\alpha_2+1)=\nu k_1}} D_{k_1}(\alpha_1)D_{k_1}(\alpha_2)\frac{(t_1^{k_1})^{\alpha_1/k_1}}{(t_2^{k_2})^{\alpha_1/k_1}}t_2^{\alpha_2/k_1}}{\pi^2 k_1 t_2^{(k_1+k_2-1)/k_1}\frac{\left(t_2^{k_2}-t_1^{k_1}\right)^2}{t_2^{2k_2}}(1-t_2)^2}\\
&= \frac{\sum\limits_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=0\\ \nu\in\mathbb{Z}}}^{2k_1-2} \sum\limits_{\substack{k_2(\alpha_1+1)\\ -(\alpha_2+1)=\nu k_1}} D_{k_1}(\alpha_1)D_{k_1}(\alpha_2)t_1^{\alpha_1}t_2^{\frac{\alpha_2-\alpha_1k_2-k_1-k_2+1+2k_1k_2}{k_1}}}{\pi^2 k_1\left(t_2^{k_2}-t_1^{k_1}\right)^2(1-t_2)^2}. \qquad (35)
\end{aligned}
$$

（35）中的分子可写为

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=0\\ \nu\in\mathbb{Z}}}^{2k_1-2} \sum_{\substack{k_2(\alpha_1+1)\\ -(\alpha_2+1)=\nu k_1}} D_{k_1}(\alpha_1)D_{k_1}(\alpha_2)t_1^{\alpha_1}t_2^{\frac{(\alpha_2+1)-k_2(\alpha_1+1)-k_1(1-2k_2)}{k_1}}\\
&= \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=0\\ \nu\in\mathbb{Z}}}^{2k_1-2} \sum_{\substack{k_2(\alpha_1+1)\\ -(\alpha_2+1)=\nu k_1}} D_{k_1}(\alpha_1)D_{k_1}(\alpha_2)t_1^{\alpha_1}t_2^{\frac{-k_1\nu-k_1(1-2k_2)}{k_1}}
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=0 \\ \nu\in\mathbb{Z}}}^{2k_1-2} \sum_{\substack{k_2(\alpha_1+1) \\ -(\alpha_2+1)=\nu k_1}} D_{k_1}(\alpha_1)D_{k_1}(\alpha_2)t_1^{\alpha_1}t_2^{-\nu-(1-2k_2)}. \tag{36}$$

将（36）代入（35），得到

$$K_{\mathcal{H}(k_1,-k_2)}(z,w) = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{\alpha_1,\alpha_2=0 \\ \nu\in\mathbb{Z}}}^{2k_1-2} \sum_{\substack{k_2(\alpha_1+1) \\ -(\alpha_2+1)=\nu k_1}} D_{k_1}(\alpha_1)D_{k_1}(\alpha_2)t_1^{\alpha_1}t_2^{-\nu-(1-2k_2)}}{\pi^2 k_1\left(t_2^{k_2}-t_1^{k_1}\right)^2(1-t_2)^2}. \tag{37}$$

设 $\beta_2 = \frac{1}{k_1}(\alpha_2 - \alpha_1 k_2 - k_1 - k_2 + 1 + 2k_1k_2)$. 由 (27) 可知

$$k_2\alpha_1 - \alpha_2 + k_2 - 1 = \nu k_1.$$

因此 $\beta_2 = -\nu - (1-2k_2)$ 是整数。设 $\beta_1 = \alpha_1$，由 (37) 得

$$K_{\mathcal{H}(k_1,-k_2)}(z,w) = \frac{1}{\pi^2 k_1}\cdot\frac{\displaystyle\sum_{\beta\in\mathbb{N}^2} D_{k_1}(\beta_1)D_{k_1}(k_1\beta_2+\beta_1k_2+k_1+k_2-1-2k_1k_2)t_1^{\beta_1}t_2^{\beta_2}}{\left(t_2^{k_2}-t_1^{k_1}\right)^2(1-t_2)^2}. \tag{38}$$

由于 $0 \le \alpha_1$， $\alpha_2 \le 2k_1 - 2$，根据 β_1 和 β_2 的定义可得

$$0 \le \beta_1 \le 2k_1 - 2, \tag{39}$$

$$0 \le k_2\beta_1 + k_1\beta_2 + k_1 + k_2 - 1 - 2k_1k_2 \le 2k_1 - 2. \tag{40}$$

因此 (38) 中的和是有限的。命题 (2) 的证明至此完成。 □

4. Proof of Theorem 1 and Theorem 2

现在，我们准备证明定理 1 和定理 2，并计算 (2) 中区域的伯格曼核。

$$\mathcal{U} = \left\{(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2 : |z_1|^{b_1^1}|z_2|^{b_2^1} < 1,\ |z_1|^{b_1^2}|z_2|^{b_2^2} < 1\right\}.$$

我们将使用以下结果。

定理3 ([1],定理3.12). 设单项式多面体 $\mathcal{U}$（即定义*1*中定义的区域）有界，并设 B 是 $\mathcal{U}$ 的关联矩阵，且令 $C = \mathrm{adj}(B)$。那么映射$\phi_C(z) = z^C$ 将 $\mathbb{D}^n_{L(B)}$ 映射到 $\mathcal{U}$，如此定义的映射

$$\phi_C : \mathbb{D}^n_{L(B)} \to \mathcal{U}$$

是一个商型真全纯映射，其群为 Γ，由以下自同构组成

$$\sigma_v : \mathbb{D}^n_{L(B)} \to \mathbb{D}^n_{L(B)}$$

给出如下

$$\sigma_v(z) = \exp\left(2\pi i C^{-1}\right)\odot v$$

对于 $v\in\mathbb{Z}^n$。此外，群 Γ 恰有 $\det(C)$ 个元素。

回想一下

$$B = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{bmatrix}$$

是区域 $\mathcal{U}$ 的关联矩阵。代数中一个众所周知的事实是：$B^{-1} = {}^{1}\!/_{\text{行列式 } B} \cdot \operatorname{adj}(B)$，其中 $\operatorname{adj}(B) = \begin{bmatrix} b_2^2 & -b_2^1 \\ -b_1^2 & b_1^1 \end{bmatrix} = C$ 表示 B 的伴随矩阵 。 C 中每一列元素的最大公因子不一定等于 1。因此，我们将 C 中的每个元素除以其所在列元素的最大公因数。由此得到矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix}$，如式 (3) 所示。特别地,

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{b_2^2}{\gcd(b_2^2, b_1^2)} & \dfrac{-b_2^1}{\gcd(b_2^1, b_1^1)} \\ \dfrac{-b_1^2}{\gcd(b_2^2, b_1^2)} & \dfrac{b_1^1}{\gcd(b_2^1, b_1^1)} \end{bmatrix}.$$

我们可以将 C 写成

$$C = AG, \quad \text{where} \quad G = \begin{bmatrix} \gcd(b_2^2, b_1^2) & 0 \\ 0 & \gcd(b_2^1, b_1^1) \end{bmatrix}.$$

注意到

$$\det(A) = \frac{b_2^2 b_1^1}{\gcd(b_2^2, b_1^2)\gcd(b_2^1, b_1^1)} - \frac{b_2^1 b_1^2}{\gcd(b_2^2, b_1^2)\gcd(b_2^1, b_1^1)} = \frac{\det(B)}{\gcd(b_2^2, b_1^2)\gcd(b_2^1, b_1^1)}.$$

因此，$\det(A) > 0$，因为根据假设，$\det(B) > 0$。

将命题1应用于矩阵 A，并令 ℓ_1、ℓ_2 和 h 如命题1所述，我们得到 $A = L^{-1}H$，其中

$$L = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ -a_1^2 & a_1^1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & h \\ 0 & \det(A) \end{bmatrix},$$

满足 $h = \ell_1 a_2^1 + \ell_2 a_2^2$ 且 $\det(L) = \ell_1 a_1^1 + \ell_2 a_1^2 = 1$，以及 $0 \le h < \det(A)$。注意 th at

$$\phi_A(z) = z^A = z^{L^{-1}H} = \left(z^H\right)^{L^{-1}} = \phi_{L^{-1}}(z^H) = \phi_{L^{-1}}(\phi_H(z)) = (\phi_{L^{-1}} \circ \phi_H)(z). \tag{41}$$

映射 $\phi_C \colon \mathbb{D} \times \mathbb{D}^* \to \mathcal{U}$ 是一个商型真全纯映射，见定理3，且 $C = AG$，因此

$$\phi_C = \phi_{AG} = \phi_A \circ \phi_G, \quad \text{by (41)},$$

但是 $\phi_G(z_1, z_2) = (z^{\gcd(b_2^2, b_1^2)}\,1\,, z^{\gcd(b_2^1, b_1^1)}\,2\,) \in \mathbb{D} \times \mathbb{D}^*$，由此可得 $\phi_G(\mathbb{D} \times \mathbb{D}^*) = \mathbb{D} \times \mathbb{D}^*$。此外，$\phi_G$ 是一个商型真全纯映射。我们断言 $\phi_A \colon \mathbb{D} \times \mathbb{D}^* \to \mathcal{U}$ 是一个真全纯映射。只需证明，对于每个紧致 $K \subset \mathcal{U}$，$\phi_A^{-1}(K) \subset \mathbb{D} \times \mathbb{D}^*$ 是紧致的。假设存在一个集合 K，使得 $\phi_A^{-1}(K) \subset \mathbb{D} \times \mathbb{D}^*$ 不是紧致的。那么，由表示式 $\phi_G(z_1, z_2) = (z^{\gcd(b_2^2, b_1^2)}\,1\,, z^{\gcd(b_2^1, b_1^1)}\,2\,)$ 可得，$\phi_G^{-1}(\phi_A^{-1}(K)) \subset \mathbb{D} \times \mathbb{D}^*$ 也不是紧致的，也就是说 $\phi_C^{-1}(K)$ 不紧致，这与 ϕ_C 的真性矛盾。由（41），真全纯映射 $\phi_A \colon \mathbb{D} \times \mathbb{D}^* \to \mathcal{U}$ 可分解为真全纯映射 ϕ_H 和双全纯映射 $\phi_{L^{-1}}$。下图展示了这三个映射。

$$\mathbb{D} \times \mathbb{D}^* \xrightarrow[\text{proper holo.}]{\phi_H} \phi_H(\mathbb{D} \times \mathbb{D}^*) \xrightarrow[\text{biholo.}]{\phi_{L^{-1}}} \mathcal{U}$$

其中 $\phi_H(\mathbb{D} \times \mathbb{D}^*)$ 是一个广义 Hartogs 三角形，借助命题 $H = A$ 2.

$\phi_H(\mathbb{D} \times \mathbb{D}^*)$ 的伯格曼核，由于 $\gcd(\det(A)\ h) = 1$ 且 $0 \le h < \det(A)$，我们将命题 2 应用于 ϕ_H，得到

$$k_1 = \det(A) \quad \text{and} \quad k_2 = h.$$

我们得到

$$K_{\phi(\mathbb{D}\times\mathbb{D}^*)}(z,w)=\frac{\sum_{\beta\in\mathbb{N}^2}D_{k_1}(\beta_1)D_{k_1}(k_2\beta_1+k_1\beta_2+k_1+k_2-2k_1k_2-1)u_1^{\beta_1}u_2^{\beta_2}}{\pi^2k_1\left(u_2^{k_2}-u_1^{k_1}\right)^2(1-u_2)^2},\tag{42}$$

其中 $u_j=z_j\overline{w_j}$, $j=1,2$，且求和是有限的， β_1 和 β_2 满足 (39) 和 (40)，即

$$\begin{aligned}0&\leq\beta_1\leq 2k_1-2,&(43)\\0&\leq k_2\beta_1+k_1\beta_2+k_1+k_2-1-2k_1k_2\leq 2k_1-2.&(44)\end{aligned}$$

为了计算 $\mathcal{U}$ 的伯格曼核，我们在双全纯映射 ϕ_L 上应用变换公式，得到

$$K_{\mathcal{U}}(p,q)=\det\phi_L'(p)K_V(\phi_L(p),\phi_L(q))\overline{\det\phi_L'(q)}.\tag{45}$$

注意， $\phi_L(p)=(p_1^{\ell_1}p_2^{\ell_2},p_1^{-a_1^2}p_2^{a_1^1})$， $\phi_L(q)=(q_1^{\ell_1}q_2^{\ell_2},q_1^{-a_1^2}q_2^{a_1^1})$，因此

$$\det\phi_L'(p)=p_1^{\ell_1-a_1^2-1}p_2^{\ell_2+a_1^1-1},\quad \det\phi_L'(q)=q_1^{\ell_1-a_1^2-1}q_2^{\ell_2+a_1^1-1}.\tag{46}$$

将 (46) 代入 (45)，得到

$$K_{\mathcal{U}}(p,q)=(p_1\overline{q_1})^{\ell_1-a_1^2-1}(p_2\overline{q_2})^{\ell_2+a_1^1-1}K_V(\phi_L(p),\phi_L(q)).\tag{47}$$

令 $z=(p_1^{\ell_1}p^{\ell}\quad{}_2{}^2\ p_1^{-a_1^2}p_2^{a_1^1})$ 和 $w=(q_1^{\ell_1}q_2^{\ell_2},q_1^{-a_1^2}q_2^{a_1^1})$ 代入 (42)，得到 $K_V(p_1^{\ell_1}p_2^{\ell_2},p_1^{-a_1^2}p_2^{a_1^1},q_1^{\ell_1}q_2^{\ell_2},q_1^{-a_1^2}q_2^{a_1^1})=$

$$\frac{\sum_{\beta\in\mathbb{N}^2}D_{k_1}(\beta_1)D_{k_1}(k_2\beta_1+k_1\beta_2+k_1+k_2-2k_1k_2-1)s_1^{\beta_1}s_2^{\beta_2}}{\pi^2k_1\left(s_2^{k_2}-s_1^{k_1}\right)^2(1-s_2)^2},\tag{48}$$

其中

$$s_1=(p_1\overline{q_1})^{\ell_1}(p_2\overline{q_2})^{\ell_2},\quad s_2=(p_1\overline{q_1})^{-a_1^2}(p_2\overline{q_2})^{a_1^1},$$

以及 $0\leq\beta_1\leq 2k_1-2$ 和 $0\leq k_2\beta_1+k_1\beta_2+k_1+k_2-2k_1k_2-1\leq 2k_1-2$。将 (48) 代入 (47)，得到$K_{\mathcal{U}}(p,q)=$

$$\frac{\sum_{\beta\in\mathbb{N}^2}D_{k_1}(\beta_1)D_{k_1}(k_2\beta_1+k_1\beta_2+k_1+k_2-2k_1k_2-1)t_1^{\ell_1\beta_1-a_1^2\beta_2+\ell_1-a_1^2-1}t_2^{\ell_2\beta_1+a_1^1\beta_2+\ell_2+a_1^1-1}}{\pi^2k_1\left(t_1^{-k_2a_1^2}t_2^{k_2a_1^1}-t_1^{\ell_1k_1}t_2^{\ell_2k_1}\right)^2\left(1-t_1^{-a_1^2}t_2^{a_1^1}\right)^2},\tag{49}$$

其中 $t_j=p_jq_j$, $j=1,2$，并且（49）中的求和是有限的， β_1 和 β_2 满足（43）和（44）。为了简化分母，由于 $\ell_1a_1^1+\ell_2a_1^2=1$，我们有

$$\begin{aligned}\ell_1k_1+k_2a_1^2&=\ell_1\det A+ha_1^2=\ell_1(a_1^1a_2^2-a_1^2a_1^2)+(\ell_1a_2^1+\ell_2a_2^2)a_1^2\\&=\ell_1a_1^1a_2^2+\ell_2a_2^2a_1^2=a_2^2(\ell_1a_1^1+\ell_2a_1^2)=a_2^2,\end{aligned}\tag{50}$$

and

$$\begin{aligned}\ell_2k_1-k_2a_1^1&=\ell_2\det A-ha_1^1=\ell_2(a_1^1a_2^2-a_1^2a_1^2)-(\ell_1a_2^1+\ell_2a_2^2)a_1^1\\&=-\ell_2a_1^2a_2^1-\ell_1a_2^1a_1^1=-a_2^1(\ell_2a_1^2+\ell_1a_1^1)=-a_2^1.\end{aligned}\tag{51}$$

对（49）中的分母进行处理，并利用（50）和（51），我们得到

$$\begin{aligned}\left(t_1^{-k_2a_1^2}t_2^{k_2a_1^1}-t_1^{\ell_1k_1}t_2^{\ell_2k_1}\right)^2\left(1-t_1^{-a_1^2}t_2^{a_1^1}\right)^2 &= t_1^{-2k_2a_1^2-2a_1^2}t_2^{2k_2a_1^1}\left(1-t_1^{\ell_1k_1+k_2a_1^2}t_2^{\ell_2k_1-k_2a_1^1}\right)^2\left(t_1^{a_1^2}-t_2^{a_1^1}\right)^2\\ &= t_1^{-2k_2a_1^2-2a_1^2}t_2^{2k_2a_1^1}\left(1-t_1^{a_1^2}t_2^{-a_2^1}\right)^2\left(t_1^{a_1^2}-t_2^{a_1^1}\right)^2\\ &= t_1^{-2k_2a_1^2-2a_1^2}t_2^{2k_2a_1^1-2a_2^1}\left(t_2^{a_2^1}-t_1^{a_2^2}\right)^2\left(t_1^{a_1^2}-t_2^{a_1^1}\right)^2. \qquad (52)\end{aligned}$$

将 (52) 代入 (49)，得到

$$K_{\mathcal{U}}(p,q)=\frac{\sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^2}D_{k_1}(\beta_1)D_{k_1}(\beta_2k_1+\beta_1k_2+k_1+k_2-2k_1k_2-1)t_1^{\gamma_1}t_2^{\gamma_2}}{\pi^2k_1\left(t_2^{a_2^1}-t_1^{a_2^2}\right)^2\left(t_1^{a_1^2}-t_2^{a_1^1}\right)^2}, \qquad (53)$$

其中

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \ell_1\beta_1-a_1^2\beta_2+\ell_1+2k_2a_1^2+a_1^2-1,\\ \gamma_2 &= \ell_2\beta_1+a_1^1\beta_2+\ell_2-2k_2a_1^1+a_1^1+2a_2^1-1.\end{aligned}$$

并且 (53) 中的和是有限的， β_1 和 β_2 满足 (39) 和 (40)。

解出表达式 γ_1 和 γ_2 中的 β_1 和 β_2，得到

$$\begin{aligned}\beta_1 &= a_1^1\gamma_1+a_1^2\gamma_2-2a_1^1a_1^2+a_1^1+a_1^2-2a_1^2a_2^1-1, \qquad (54)\\ \beta_2 &= -\ell_2\gamma_1+\ell_1\gamma_2+\ell_2a_1^2-\ell_1a_1^1+2k_2-\ell_2+\ell_1-2a_2^1\ell_1. \qquad (55)\end{aligned}$$

定义 $\eta=\beta_1k_2+\beta_2k_1+k_1+k_2-2k_1k_2-1$。将上面的 β_1 和 β_2 的值代入 η，并利用 (50) 和 (51)，得到

$$\begin{aligned}\eta &= \beta_1k_2+\beta_2k_1+k_1+k_2-2k_1k_2-1\\ &= \left(a_1^1\gamma_1+a_1^2\gamma_2-2a_1^1a_1^2+a_1^1+a_1^2-2a_1^2a_2^1-1\right)k_2\\ &\quad+\left(-\ell_2\gamma_1+\ell_1\gamma_2+\ell_2a_1^2-\ell_1a_1^1+2k_2-\ell_2+\ell_1-2a_2^1\ell_1\right)k_1+k_1+k_2-2k_1k_2-1\\ &= \gamma_1(-\ell_2k_1+k_2a_1^1)+\gamma_2(\ell_1k_1+k_2a_1^2)+\ell_2a_1^2k_1-\ell_1a_1^1k_1-\ell_2k_1\\ &\quad+\ell_1k_1-2a_2^1\ell_1k_1-2a_1^1a_1^2k_2+a_1^1k_2+a_1^2k_2-2a_1^2a_2^1k_2+k_1-1\\ &= a_2^1\gamma_1+a_2^2\gamma_2+\ell_2a_1^2k_1-\ell_1a_1^1k_1-\ell_2k_1+\ell_1k_1-2a_2^1\ell_1k_1-2a_1^1a_1^2k_2+a_1^1k_2+a_1^2k_2-2a_1^2a_2^1k_2+k_1-1\\ &= a_2^1\gamma_1+a_2^2\gamma_2+\ell_2a_1^2k_1-\ell_1a_1^1k_1+a_2^1+a_2^2-2a_2^1a_2^2-2a_1^1a_1^2k_2+k_1-1\\ &= a_2^1\gamma_1+a_2^2\gamma_2-a_1^2a_2^1-a_1^1a_2^2+a_2^1+a_2^2-2a_2^1a_2^2+k_1-1\\ &= a_2^1\gamma_1+a_2^2\gamma_2-2a_1^2a_2^1+a_2^1+a_2^2-2a_2^1a_2^2-1.\end{aligned} \qquad (56)$$

将 (54)–(56) 代入 (39) 和 (40)，并利用 $k_1=\det(A)$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}0\le a_1^1\gamma_1+a_1^2\gamma_2-2a_1^1a_1^2+a_1^1+a_1^2-2a_1^2a_2^1-1\le 2k_1-2,\\ 0\le a_2^1\gamma_1+a_2^2\gamma_2-2a_1^2a_2^1+a_2^1+a_2^2-2a_2^1a_2^2-1\le 2k_1-2.\end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned}m_1\le a_1^1\gamma_1+a_1^2\gamma_2\le n_1, \qquad (57)\\ m_2\le a_2^1\gamma_1+a_2^2\gamma_2\le n_2. \qquad (58)\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}m_1 &= 2a_1^1a_1^2-a_1^1-a_1^2+2a_1^2a_2^1+1, \quad m_2=2a_1^2a_2^1-a_2^1-a_2^2+2a_2^1a_2^2+1,\\ n_1 &= 2a_1^1a_2^2-a_1^1-a_1^2+2a_1^1a_1^2-1, \quad n_2=2a_1^1a_2^2-a_2^1-a_2^2+2a_2^1a_2^2-1.\end{aligned} \qquad (59)$$

将（57）乘以负整数（$-a_2^2$），并交换上界和下界，再加上（58）乘以正整数（a_1^2），即可得到

$$m_2a_1^2 - n_1a_2^2 \leq -\det(A)\cdot\gamma_1 \leq n_2a_1^2 - m_1a_2^2. \tag{60}$$

将（60）除以负量 –det(A)，得到

$$\frac{n_2a_1^2 - m_1a_2^2}{-\det(A)} \leq \gamma_1 \leq \frac{m_2a_1^2 - n_1a_2^2}{-\det(A)}. \tag{61}$$

同样，将（57）乘以负整数（$-a_2^1$），交换上界和下界后，再加上乘以正整数（a_1^1）的（58），得到

$$m_2a_1^1 - n_1a_2^1 \leq \det(A)\cdot\gamma_2 \leq n_2a_1^1 - m_1a_2^1. \tag{62}$$

将（62）除以 det(A) > 0，得到

$$\frac{m_2a_1^1 - n_1a_2^1}{\det(A)} \leq \gamma_2 \leq \frac{n_2a_1^1 - m_1a_2^1}{\det(A)}. \tag{63}$$

利用 （59），计算（61）和（63）中 γ_1 和 γ_2 的下界与上界，得到

$$\begin{aligned}
\frac{n_2a_1^2 - m_1a_2^2}{-\det(A)} &= -1 + \frac{a_1^2 + a_2^2}{\det(A)} > -1, &(64)\\
\frac{m_2a_1^2 - n_1a_2^2}{-\det(A)} &= 2a_1^2 + 2a_2^2 - 1 - \frac{a_1^2 + a_2^2}{\det(A)} < 2a_1^2 + 2a_2^2 - 1, &(65)\\
\frac{m_2a_1^1 - n_1a_2^1}{\det(A)} &= -1 + \frac{a_1^1 + a_2^1}{\det(A)} > -1, &(66)\\
\frac{n_2a_1^1 - m_1a_2^1}{\det(A)} &= 2a_1^1 + 2a_2^1 - 1 - \frac{a_1^1 + a_2^1}{\det(A)} < 2a_1^1 + 2a_2^1 - 1. &(67)
\end{aligned}$$

将 (64)-(65) 代入 (61)，将 (66)-(67) 代入 (63)，并利用 γ_1 和 γ_2 均为整数这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}
0 \leq \gamma_1 \leq 2a_1^2 + 2a_2^2 - 2,\\
0 \leq \gamma_2 \leq 2a_1^1 + 2a_2^1 - 2.
\end{aligned}$$

这表明 γ_1 和 γ_2 的取值范围均为非负数，且 (53) 中的和是有限的，从而证明了 (8)。

将（56）代入（49），并且由于 k_1 =det(A)，我们得到

$$K_{\mathcal{U}}(p,q) = \frac{1}{\pi^2\det(A)}\cdot\frac{\displaystyle\sum_{\gamma\in\mathbb{N}^2} D_{\det(A)}(\nu)D_{\det(A)}(\eta)t_1^{\gamma_1}t_2^{\gamma_2}}{\left(t_2^{a_2^1} - t_1^{a_2^2}\right)^2\left(t_1^{a_1^2} - t_2^{a_1^1}\right)^2},$$

其中

$$\begin{aligned}
\nu &= a_1^1\gamma_1 + a_1^2\gamma_2 - 2a_1^1a_1^2 + a_1^1 + a_1^2 - 2a_1^2a_2^1 - 1,\\
\eta &= a_2^1\gamma_1 + a_2^2\gamma_2 - 2a_1^2a_2^1 + a_2^1 + a_2^2 - 2a_2^1a_2^2 - 1.
\end{aligned}$$

根据式（7）中定义的 $N(\cdot,\ \cdot)$ 的定义，对矩阵 A

$$N(A,\gamma) = a_1^1\gamma_1 + a_1^2\gamma_2 - 2a_1^1a_1^2 + a_1^1 + a_1^2 - 1 - \mathrm{perm}(A) + |\det(A)|\,.$$

由于 det(A) > 0，我们有

$$\begin{aligned}
N(A,\gamma) &= a_1^1\gamma_1 + a_1^2\gamma_2 - 2a_1^1a_1^2 + a_1^1 + a_1^2 - 1 - \left(a_1^1a_2^2 + a_1^2a_2^1\right) + \left(a_1^1a_2^2 - a_1^2a_2^1\right)\\
&= a_1^1\gamma_1 + a_1^2\gamma_2 - 2a_1^1a_1^2 + a_1^1 + a_1^2 - 2a_1^2a_2^1 - 1.
\end{aligned}$$

由此可得 $\nu = N(A,\ \gamma)$。类似地,

$$\begin{aligned} N(AR,\gamma) &= a_2^1\gamma_1 + a_2^2\gamma_2 - 2a_2^1a_2^2 + a_2^1 + a_2^2 - 1 - \operatorname{perm}(AR) + |\det(AR)|\,. \\ &= a_2^1\gamma_1 + a_2^2\gamma_2 - 2a_2^1a_2^2 + a_2^1 + a_2^2 - 1 - \left(a_2^1a_1^2 + a_1^1a_2^2\right) + \left|a_2^1a_1^2 - a_1^1a_2^2\right| \\ &= a_2^1\gamma_1 + a_2^2\gamma_2 - 2a_2^1a_2^2 + a_2^1 + a_2^2 - 1 - \left(a_2^1a_1^2 + a_1^1a_2^2\right) + |-\det(A)| \\ &= a_2^1\gamma_1 + a_2^2\gamma_2 - 2a_2^1a_2^2 + a_2^1 + a_2^2 - 1 - \left(a_2^1a_1^2 + a_1^1a_2^2\right) + \det(A) \\ &= a_2^1\gamma_1 + a_2^2\gamma_2 - 2a_2^1a_2^2 + a_2^1 + a_2^2 - 1 - \left(a_2^1a_1^2 + a_1^1a_2^2\right) + a_1^1a_2^2 - a_1^2a_2^1 \\ &= a_2^1\gamma_1 + a_2^2\gamma_2 - 2a_2^1a_2^2 + a_2^1 + a_2^2 - 1 - 2a_1^2a_2^1 \\ &= a_2^1\gamma_1 + a_2^2\gamma_2 - 2a_1^2a_2^1 + a_2^1 + a_2^2 - 2a_2^1a_2^2 - 1. \end{aligned}$$

由此可得 $N(AR,\ \gamma) = \eta$. 我们可以看到完整公式

$$K_{\mathcal{U}}(z,w) = \frac{1}{\pi^2\det(A)} \cdot \frac{g(t_1,t_2)}{\left(t_2^{a_2^1} - t_1^{a_2^2}\right)^2 \left(t_1^{a_1^2} - t_2^{a_1^1}\right)^2}$$

with

$$g(t_1,t_2) = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^2} D_{\det(A)}(N(A,\gamma)) D_{\det(A)}(N(AR,\gamma)) t_1^{\gamma_1} t_2^{\gamma_2}.$$

这就完成了定理 1 和定理 2 的证明。

References

[1] Chase Bender、Debraj Chakrabarti、Luke Edholm 和 Meera Mainkar。商域上伯格曼投影的 L^p-正则性。*Canad. J. Math.*，74(3)：732–772，2022。[2] H. J. Bremermann。多复变函数中核函数的全纯延拓与伯格曼度量。载于 *Lectures on functions of a complex variable*，第 349–383 页。密歇根大学出版社，密歇根州安娜堡，1955 年。[3] Debraj Chakrabarti、Austin Konkel、Meera Mainkar 和 Evan Miller。初等 Reinhardt 域的伯格曼核。*Pacific J. Math.*，306(1)：67–93，2020。[4] Liwei Chen。一类有界哈托格斯域上伯格曼投影的 L^p 有界性。 *J. Math. Anal. Appl.*，448 1 598 610，2017（）：–。[5] Luke D. Edholm。某些广义 Hartogs 三角形的伯格曼理论。 *Pacific J. Math.*，284(2)：327–342，2016。[6] Luke David Edholm。 *The Bergman kernel of fat Hartogs triangles*。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2016。博士论文——俄亥俄州立大学。[7] 华罗庚。 *Harmonic analysis of functions of several complex variables in the classical domains*。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1963 年。由 Leo Ebner 和 Adam Kor´anyi 从俄文译出。[8] William S. Massey。 *A basic course in algebraic topology*，*Graduate Texts in Mathematics*第 127 卷。施普林格出版社，纽约，1991 年。[9] Morris Newman。 *Integral matrices*。纯粹数学与应用数学第 45 卷。学术出版社，纽约—伦敦，1972 年。[10] R. Michael Range。 *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables* 108 *Graduate* , *Texts in Mathematics* 1986

[11] 卷。施普林格出版社，纽约， L^p 。 nShuo Zhang。*Bull. Korean Math. Soc.*二维广义 Hartogs 三角形上伯格曼投影的索博列夫映射性质。，58(6)：1355–1375，2021。

Department of Mathematics, Central Michigan University, Mt.Pleasant,MI 48859, USA

Email address: almug1ra@cmich.edu