arXiv:2303.14271v1 [math.LO] 24 Mar 2023

可证良基严格偏序

Toshiyasu Arai 数理科学研究科 东京大学 日本东京目黑区驹场 3-8-1，邮编 153-8914
tosarai@ms.u-tokyo.ac.jp

摘要

本文通过无穷推导表明，ACA_0 中每个可证良基严格偏序都允许嵌入到一个序数$< \varepsilon_0$中。

1 可证良基关系

严格偏序 $\prec$ 是一种反自反的 $\forall n\,(n \not\prec n)$ 且传递的 $\forall n、\ m、\ k\,(n \prec m \prec k \to n \prec k)$ 关系，定义在 ω 上。令"$\prec$ 是严格偏序"表示公式 $\forall n\,(n \not\prec n) \wedge \forall n、\ m、\ k\,(n \prec m \prec k \to n \prec k)$。 $<_{\varepsilon_0}$ 表示标准的 ε_0 序，而 $<_\omega$ 表示 ω 上的通常序。

定理 1.1 设对于原始递归关系 $\prec$，$\mathsf{ACA}_0 \vdash \mathrm{TI}(\prec)$ 成立。那么存在一个序数 $\alpha_1 < \varepsilon_0$ 和一个原始递归函数 f，使得 $\mathrm{I}\Sigma_1$ 证明

$$\prec \ \textit{is a strict partial order} \ \to \forall n, m\,(n \prec m \to f(n) <_{\varepsilon_0} f(m) <_{\varepsilon_0} \alpha_1)\,.$$

定理 1.1 通过根据 Gentzen 的有限证明 [3] 改写 Takeuti 在 [4,5] 中的证明而在 [1] 中得到证明。本文通过无穷推导证明定理 1.1。

推论1.2 设对于原始递归关系 $\prec$，$\mathsf{ACA}_0 \vdash \mathrm{TI}(\prec)$ 成立。那么存在 $\prec$ 的一个扩张 $\prec'$，使得 $\prec'$ 是原始递归的、一个良序，并且 $\mathsf{ACA}_0 \vdash \mathrm{TI}(\prec')$。

证明。令 $n \prec' m :\Leftrightarrow f(n) <_{\varepsilon_0} f(m) \vee (f(n) = f(m) \wedge n <_\omega m)$。 □

2 证明

假设对于原始递归关系 $\prec$，有 $\mathsf{ACA}_0 \vdash \mathrm{TI}(\prec)$。下文将在 $\mathrm{I}\Sigma_1$ 中进行论证，并假设 $\prec$ 是一个严格偏序。存在一个序数$\alpha_0 < \varepsilon_0$，使得 cf. [2]

$$\forall n\,[\vdash_0^{\alpha_0} E(n)] \tag{1}$$

其中，$\vdash_c^\alpha \Gamma$ 表示“存在一个（原始递归的）无穷推导，Γ 带有 ω-规则以及以下推理规则（prg）和（Rep）

$$\frac{\{\vdash_c^\beta \Gamma, E(m)\}_{m\prec n}}{\vdash_c^\alpha \Gamma}\ (prg)$$

其中，$\beta <_{\varepsilon_0} \alpha$, E 是一个新的谓词符号，且 $(E(n)) \in \Gamma$。$\vdash_0^{\alpha_0} \Gamma$ 中的下标 0 表示带见证的推导是无切的。

$$\frac{\vdash_c^\beta \Gamma}{\vdash_c^\alpha \Gamma}\ (Rep)$$

其中 $\beta <_{\varepsilon_0} \alpha$。

形式上，我们将（1）理解为以下事实：存在一棵原始递归树 $T \subset {}^{<\omega}\omega$ 和一个原始递归函数 H，使得对于每个节点 $\sigma \in T$，由 H赋予五个数据 $H(\sigma) = (seq(\sigma)\ ord(\sigma)\ rul(\sigma)\ crk(\sigma)\ num(\sigma))$。令 $\Gamma = seq(\sigma)$、$\alpha = ord(\sigma)$、$c = crk(\sigma)$ 和 $n = num(\sigma)$。那么，$H(\sigma)$ 表示相继式 Γ 可由深度至多为 α、切秩为 c的推导导出。$J = rul(\sigma)$ 是最后一个推理规则。

$$\frac{\{\sigma_i \vdash_c^{\beta_i} \Gamma_i\}_{i\in I}}{\sigma \vdash_c^\alpha \Gamma}\ (J)$$

对于每个 i，它必须相对于推理规则 $(\vee)$、$(\wedge)$、$(\exists)$、$(\forall)$、(cut)、(prg) 和 (Rep) 局部正确，并且 $\beta_i <_{\varepsilon_0} \alpha$。此外，当 $J = rul(\sigma) = (prg)$ 时，$(E(n)) \in \Gamma = seq(\sigma)$，其中 $n = num(\sigma)$ 是 (prg) 的主公式。那么，对每个 n，$^1H(\langle n\rangle) = (\{E(n)\}, \alpha_0, rul(\langle n\rangle), 0)$。尽管没有假定 T是良基的，但对于每个 $\sigma \in T$，$rul(\sigma)$ 要么是 (prg)，要么是 (Rep)。因此，$seq(\sigma) \subset \{E(n)\colon\ n \in \omega\}$。我们假设

$$\frac{\{\sigma * \langle m\rangle \vdash_c^\beta \Gamma, E(m)\}_{m\prec n}}{\sigma \vdash_c^\alpha \Gamma}\ (prg)\quad \frac{\sigma * \langle 0\rangle \vdash_c^\beta \Gamma}{\sigma \vdash_c^\alpha \Gamma}\ (Rep)$$

首先，我们按归纳法如下定义节点 $\sigma_m \in T$ m $\beta_m =$。令 $(\ )$ 和 $(\ )$ 以及 $(\ )$。也就是说，。它具有 $ord\ \sigma_m$ $\Gamma_m = seq\ \sigma_m$ $J_m = rul\ \sigma_m$ $\sigma_m \vdash_0^{\beta_m} \Gamma_m$。

$$\forall n((E(n)) \in \Gamma_m \Rightarrow m \preceq n) \tag{2}$$

情形 1。$\neg\exists n <_\omega m (m \prec n)$：令 $\sigma_m = \langle m\rangle$。这意味着 $\beta_m = \alpha_0$ 且 $\Gamma_m = \{E(m)\}$。

情形 2。$\exists n <_\omega m (m \prec n)$：令 $n_0 <_\omega m$ 为满足 $m \prec n_0$ 且 $\beta_{n_0} = \mathsf{min}_{<_{\varepsilon_0}}\{\beta_n :\ n <_\omega m, m \prec n\}$ 的 $<_\omega$-最小数。考察 $\sigma_{n_0} \vdash_0^{\beta_{n_0}} \Gamma_{n_0}$ 的推导中最后一条推理规则 $J_{n_0} = rul(\sigma_{n_0})$。

情形 2.1。最后一条推理规则 J_{n_0} 是一个（prg）：

$$\frac{\{\sigma_{n_0} * \langle n\rangle \vdash_0^\beta \Gamma_{n_0}, E(n)\}_{n\prec n_1}}{\sigma_{n_0} \vdash_0^{\beta_{n_0}} \Gamma_{n_0}}\ (prg)$$

对于树的根 $\langle\ \rangle$，$^1H(\langle\ \rangle)$ 是任意的。

其中 $\beta <_{\varepsilon_0} \beta_{n_0}$，并且 $(E(n_1)) \in \Gamma_{n_0}$，且 $n_1 = num(\sigma_{n_0})$。根据 (2)，我们有 $m \prec n_0 \preceq n_1$。接着令 $\sigma_m = \sigma_{n_0} * \langle m \rangle$。令 $\beta_m = \beta$，且 $\Gamma_m = \Gamma_{n_0} \cup \{E(m)\}$。如果 $(E(n)) \in \Gamma_{n_0}$，那么根据 (2)，$m \prec n_0 \preceq n$。因此，对于 σ_m，(2) 成立，因为假设 $\prec$ 具有传递性。

情形 2.2。最后一个推理规则 J_{n_0} 是一个（Red）：

$$\frac{\sigma_{n_0} * \langle 0 \rangle \vdash_0^{\beta} \Gamma_{n_0}}{\sigma_{n_0} \vdash_0^{\beta_{n_0}} \Gamma_{n_0}} \ (Rep)$$

其中 $\beta < \beta_{n_0}$。接着令 $\sigma_m = \sigma_{n_0} * \langle 0 \rangle$。这意味着 $\beta_m = \beta$ 和 $\Gamma_m = \Gamma_{n_0}$。同样，由于 $\prec$的传递性，(2) 对 σ_m 成立。

引理 2.1 $\forall m \forall n <_\omega m \, [m \prec n \Rightarrow \beta_m <_{\varepsilon_0} \beta_n]$。

证明。在情形 2 中，若 $n <_\omega m$ 且 $m \prec n$，则 $\beta_m <_{\varepsilon_0} \beta_{n_0} \leq_{\varepsilon_0} \beta_n$。 □

现在定义 $\alpha_1 = \omega^{\alpha_0}$ 和 f 如下。

$$f(n) = \max_{<_{\varepsilon_0}} \{\omega^{\beta_{n_0}} \# \cdots \# \omega^{\beta_{n_{\ell-1}}} \# \omega^{\beta_{n_\ell}} : \forall i < \ell (n_i \prec n_{i+1} \,\&\, n_i <_\omega n_\ell = n)\}$$

其中 # 表示自然和。注意，对于 $i < j \leq \ell$，有 $n_i \neq n_j$，因为假设 $\prec$ 是严格偏序。下面的引理 2.2 证明定理 1.1。

引理 2.2 $\forall n, m \left[n \prec m \Rightarrow f(n) <_{\varepsilon_0} f(m) < \omega^{\alpha_0+1} = \alpha_1 \right]$。

证明。设 $n_0, \ldots, n_{\ell-1} <_\omega n_\ell = n \prec m$ 满足 $n_0 \prec \cdots \prec n_{\ell-1} \prec n_\ell$且

$$f(n) = \omega^{\beta_{n_0}} \# \cdots \# \omega^{\beta_{n_{\ell-1}}} \# \omega^{\beta_{n_\ell}}.$$

于是 $n_i \prec m$ 且 $n_i \neq m$。设 $A = \{i \leq \ell : m <_\omega n_i\}$且 $B = \{i \leq \ell : n_i <_\omega m\}$。于是 $A \cup B = \{0, \ldots, \ell\}$ 且 $A \cap B = \emptyset$。由引理 2.1 得到$\forall i \in A(\beta_{n_i} <_{\varepsilon_0} \beta_m)$，因此

$$\sum \{\omega^{\beta_{n_i}} : i \in A\} <_{\varepsilon_0} \omega^{\beta_m} \tag{3}$$

其中 $\sum\{\alpha_0, \ldots, \alpha_n\} = \alpha_0 \# \cdots \# \alpha_n$。另一方面，设

$$\gamma := \max_{<_{\varepsilon_0}} \{\omega^{\beta_{m_0}} \# \cdots \# \omega^{\beta_{m_{k-1}}} : \forall i < k (m_i \prec m_{i+1} \,\&\, m_i <_\omega m_k = m)\}$$

且 $B = \{n_{i_0} \prec \cdots \prec n_{i_{\ell-1}}\}$。于是对每个 $n_j \in B$，$n_{i_0} \prec \cdots \prec n_{i_{\ell-1}} \prec m$ 且 $n_j <_\omega m$，因为假设 $\prec$ 具有传递性。因此

$$\sum \{\omega^{\beta_{n_i}} : i \in B\} \leq_{\varepsilon_0} \gamma \tag{4}$$

由 (4) 和 (3) 可得

$$f(n) = \sum \{\omega^{\beta_{n_i}} : i \in B\} \# \sum \{\omega^{\beta_{n_i}} : i \in A\} <_{\varepsilon_0} \gamma \# \omega^{\beta_m} = f(m).$$

□

当 $\prec$ 是初等递归时， f 也如此。对于几乎所有理论 T，只要给出了合理的 T 序数分析，将序数 ε_0 替换为 T 的证明论序数，定理 1.1 仍然成立。

参考文献

[1] T. Arai, 《切消去、可证明良序、归纳与反射的一些结果》。《纯粹与应用逻辑年刊》95（1998）93-184。[2] T. Arai, 《序数分析：附证明论导论》，施普林格，2020。[3]G. Gentzen, 《关于纯数论中超限归纳初始公式的可证性与不可证性》，《数学年刊》119（1943）140-161。[4] G. Takeuti, 《关于 Gentzen 论文〈关于纯数论中超限归纳初始公式的可证性与不可证性〉的一点说明》，《日本学士院纪要》39（1963）263-269。[5]G. Takeuti, 《证明论》第二版，North-Holland，阿姆斯特丹（1987）；2013 年由多佛出版社重印。