arXiv:2303.14319v3 [math.AG] 1 May 2024

Hanlon-Hicks-Lazarev 定理的简短证明

MICHAEL K. BROWN 和 DANIEL ERMAN

Abstract. 我们为 Hanlon-Hicks-Lazarev 关于环面簇的一项近期结果给出一个简短的新证明。与他们的工作一样，这也导出了对 Berkesch-Erman-Smith 关于虚拟分解的猜想的证明，并给出了单纯形情形下对角线的一个消解。

1. Main result

我们为 Hanlon-Hicks-Lazarev 关于环面簇及其多重分次 Cox 环的一项近期结果给出一个简短的新证明。全文中，设 X 是代数闭域 k 上的一个单纯、射影环面簇，其 Cox 环 S按 Cl(X) 分次。我们的主要结果（定理 1.2 ）最初由 [HHL23], 证明，但我们的证明不依赖于他们的方法。我们的方法更偏代数且更简单，而他们的方法更为显式，并与更广泛的主题相关，包括辛几何和同调镜像对称。另请参阅 Favero-Huang 的工作 [FH23], ，该工作与 [HHL23] 同时完成，其主要结果与 Hanlon-Hicks-Lazarev 的部分结果相同。

我们对这些主题的兴趣始于一项研究计划：将关于 Syzygy 的结果推广到多重分次或环面情形。Berkesch-Erman-Smith 在 [BES20], 中提出的基本观点是，只要用更灵活的虚拟分解概念取代极小自由分解，许多关于极小自由分解的经典结果在环面情形下也会有强有力的对应结论。

定义 1.1. 设 M 为一个有限生成的 Cl(X)-分次 S-模。 M 的虚拟分解是一个由 S-模构成的自由复形 $F_\bullet$ ，且存在一个由 $\mathcal{O}_X$-模构成的复形之间的拟同构 $\widetilde{F_\bullet} \xrightarrow{\simeq} \widetilde{M}$ 。[1]

以下结论是 Hanlon-Hicks-Lazarev 的主要结果 [HHL23，定理 A] 的推论。

定理 1.2. 设 Y 为一个正规环面簇，且 $Y \hookrightarrow X$ 是一个环面态射的闭浸入 [CLS11，定义 3.3.3]。记 $Y \hookrightarrow X$（定义 2.1）的定义理想为 I 。 S-模 S/I 存在长度为 codim($Y \subseteq X$) 的虚拟分解。

下面给出我们对定理 1.2 的简短证明。该证明依赖于一些关于环面簇的初等事实，我们将在下文的引理 2.2 中回顾这些事实。

定理 1.2 的证明。Cox 环 S of X 按 Cl(X) 分次且分次为正 [BE21，定义 A.1，例 A.2], ，因此我们可以考虑 Cl(X)-分次的 Cl(X)-分次 S-模的极小自由分解。令 R 为 S/I 的正规化，并令 $F_\bullet$ 为 R ~ 作为 S-模的最小自由分解。由于 Y 正规， $R = \mathcal{O}_Y$ 是 X 上的层，因此 $F_\bullet$ 是一个虚拟分解

日期：2024年5月2日。第二作者受到美国国家科学基金会资助项目 DMS-2200469 的资助。[1]若 X 光滑，则 $\widetilde{F_\bullet}$ 由线丛的和组成，有时称为线丛分解。关于单纯形情形，请参见注记 3.4。

of S/I_Y。由引理 2.2(1) 和 [CLS11，定理 1.1.17 及命题 1.3.8]，可知，环 R 是若干维数相同的仿射半群环的乘积。因此，Hochster 定理意味着 R 的每个分支都是科恩–麦考利环 [Hoc72，定理 1]。由此可知，R 也是科恩–麦考利 S/I-模：事实上，$\dim(R) = \dim(S/I)$，且由于 R 是有限生成的 S/I-模 [Eis95，定理 4.14]，，S/I 上的任意参数系都是 R 每个分支上的参数系，因而是正则序列。$F_\bullet$ 的长度是 R 的投射维数；根据奥斯兰德–布赫斯鲍姆公式 [Eis95，定理 19.9]，，其值等于 $\operatorname{depth} S(S) - \operatorname{depth} S(R) = \dim(S) - \dim(S/I)$（尽管我们引用的奥斯兰德–布赫斯鲍姆公式版本针对局部环，多项式环 S 的所需结果可由 [BH93，命题 1.5.15] 得出）。因此，由引理 2.2(2) 可知，F 的长度等于 $\operatorname{codim}(Y \subseteq X)$。□

我们现在介绍定理 1.2 的应用及其历史。更全面的讨论请参见 [HHL23, §1]。我们从一个特殊情形开始，该情形最早由 Hanlon-Hicks-Lazarev 证明：

定理 1.3（[HHL23]推论 B）。对角嵌入 $X \subseteq X \times X$ 的坐标环存在一个长度为 $\dim X$ 的虚拟分解。

定理 1.3 的特殊情形曾在 [BE21,BS22,Can03], 以及 [BPS01, And23]中得到研究，相关问题也得到了深入探讨。人们早已知道，这一结果可以直接导出两个同样受到独立关注的猜想的证明。第一个猜想由 Berkesch-Erman-Smith 提出，见 [BES20, Question 1.3]，并由 Hanlon-Hicks-Lazarev 证明：

定理 1.4（[HHL23] 推论 C）。定义 1.1 中的任意模 M 都有一个长度为 $\leq \dim X$ 的虚拟分解。

希尔伯特合冲定理给出的上界为 $\dim S = \dim X + \operatorname{rank} \operatorname{Cl}(X)$；定理 1.4 表明，虚拟分解所带来的灵活性可以显著缩短消解，尤其是在 $\operatorname{rank} \operatorname{Cl}(X)$ 较大时。关于这一现象的许多例子，参见 [BES20、HNVT22、BKLY21] 等文献。在 [HHL23], 之前，定理 1.4 已在若干特殊情形下得到证明：当 $\operatorname{rank} \operatorname{Pic}(X) = 1$ 时，它基本上可由希尔伯特合冲定理推出；对于射影空间的乘积，[BES20 的定理 1.2] 证明了这一结论（另见[EES15，推论 1.14]）；Yang 证明了它适用于光滑环面簇的 Cox 环中的任意单项式理想 [Yan21]；Brown-Sayrafi 则证明了它适用于皮卡秩为 2 [BS22] 的光滑射影托里克簇。

由 Orlov 提出的第二个猜想，是 [Orl09 中关于环面簇的猜想 10]的特例。Favero-Huang 首先在 [FH23, 定理 1.2], 中证明了这一猜想；几乎同时，Hanlon-Hicks-Lazarev 也独立地在 [HHL23, 推论 E]中给出了实质相同的证明。

定理 1.5。$D^b(X)$ 的 Rouquier 维数等于 $\dim X$。

在 Favero-Huang 和 Hanlon-Hicks-Lazarev 给出一般性证明之前，定理 1.5 的一些特例已在 [BC23, BF12, BDM19, BFK19] 中得到证明。Orlov 猜想的完整版本指出，定理 1.5 可推广到任意光滑拟射影簇；该猜想已知特例的列表见[BC23, §1.2]。

定理 1.2 很容易推出定理 1.3、1.4 和 1.5。要证明定理 1.3，只需注意到对角线 $X \subseteq X \times X$ 满足定理 1.2 的条件。要证明定理 1.4，只需沿用 [BES20 证明定理 1.2] 的方法。对于定理 1.5，可以使用导出范畴中的标准技巧；例如，参见 [HHL23 推论 E] 的证明。

定理 1.2 的证明相当简单，考虑到上文引用的关于这些问题的已有部分结果，甚至简单得令人有些难为情。目前尚不清楚如何将我们的消解与 [HHL23]，中得到的消解进行比较，但我们相信，在定理 1.3 的情形下，这两种构造是一致的。他们的工作为构造这些消解提供了富有创意的视角，其动机源自镜像对称函子的辛几何一侧，并融合了广泛的思想。[2] 他们得到的消解相当显式；事实上，他们对对角线的消解给出了任意正规托里克簇的导出范畴的典范生成集，从而证明了 Bondal [HHL23 推论 D] 中的一个断言。然而，他们构造中的某些代数方面较难确定。例如，若 $F_\bullet$ 是与他们某个消解相对应的由 S-模构成的自由复形，他们的工作表明，模 $H_i(F_\bullet)$ 对应于 X 上的零层，对所有 $i > 0$ 均如此；但尚不清楚 $H_i(F_\bullet)$ 是否确实等于零模，也就是说，不清楚 $F_\bullet$ 是否作为由 S-模构成的复形是无环的。由 $H_0(F_\bullet)$ 产生的 S-模也不明确。相比之下，我们的构造所产生的复形总是无环的，并且它们消解坐标环的正规化。不过，我们无法对这些复形的各项给出同样显式的描述。若能更好地比较这些复形，并将它们与 [BE21,BS22] 中的复形进行比较，将会非常有趣。Favero-Huang 的方法 [FH23] 几乎肯定也能得到上述所有结果，若能将其与那些消解进行比较，也会很有意思。

注 1.6. 由于我们在定理 1.2 中得到的消解仅依赖于标准代数构造，因此可以直接在 Macaulay2 [M2] 中计算。[HHL23] 中的构造是显式的，但由于它们较为新颖，实际计算起来需要更多工作。当然，如果能够证明这两种构造一致，将有助于我们更深入地理解二者。

2. Some elementary facts about toric varieties

定义 2.1. 设 X、Y 和 S 如定理 1.2 中所述，$B \subseteq S$ 为X的无关理想，Z 为 Y 在典范满射π: 谱(S)$\backslash V(B) \to X$下的原像在 Spec(S)中的闭包。Y在 X 中的定义理想是根理想 $I \subseteq S$，对应于闭子集 $Z \subseteq$Spec(S)。

引理 2.2. 设 Z 和 I 如定义 2.1 中所述。

(1) Z 的不可约分支是维数相同的仿射托里克簇。此外，如果除子类群 Cl(X) 无挠，则 Z 不可约。(2) 我们有 dim(S) − dim(S/I) = codim($Y \subseteq X$)。

证明。由于 $Y \hookrightarrow X$ 是环面态射，它在代数环面上诱导嵌入 $T_Y \hookrightarrow T_X$，因此得到格的满射 p: $M_X \twoheadrightarrow M_Y$。对满射 p 和典范映射 $M_X \to \mathbb{Z}^{\dim S}$ 取推出，得到态射

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M_X & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{\dim S} & \longrightarrow & \mathrm{Cl}(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle q} & & \downarrow{\scriptstyle \cong} & & \\ 0 & \longrightarrow & M_Y & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & \mathrm{Cl}(X) & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{2.3}$$

[2]另一方面，我们可参阅 Borisov 的著作 [Bor00]，其中给出了 Hochster 定理[Hoc72、定理 1] 的另一种证明——这是我们证明定理 1.2 的主要组成部分——并解释了其中所用技巧与镜像对称之间的关系。

正合序列的态射。阿贝尔群 M' 同构于 $\mathbb{Z}^r \oplus A$，其中 r 定义为 $\dim(S) - \dim(X) + \dim(Y)$，而 A 是某个有限阿贝尔群。我们注意到，I 与 J 的根基相同：$= \ker(S \hookrightarrow k[\mathbb{Z}^{\dim S}] \xrightarrow{q} k[M'])$；注意，当 $\mathrm{char}(k) \neq 0$ 时，$k[M']$ 不一定是约化的，因为 M' 可能含有挠元，因此 J 不一定是根基。我们来验证 $I = \mathrm{rad}(J)$：由于 p 是满射，蛇引理表明 q 是满射，因此 J 是 $\mathrm{Spec}(k[M'])$ 在 $\mathrm{Spec}(S)$ 中闭包的定义理想。图 (2.3) 诱导如下代数群短正合序列的态射：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longleftarrow & T_X & \xleftarrow{\alpha} & \mathrm{Spec}(k[\mathbb{Z}^{\dim S}]) & \longleftarrow & \ker(\alpha) & \longleftarrow & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \cong & & \\ 0 & \longleftarrow & T_Y & \xleftarrow{\beta} & \mathrm{Spec}(k[M']) & \longleftarrow & \ker(\beta) & \longleftarrow & 0. \end{array}$$

由此可知，$\alpha^{-1}(T_Y)$ 等于 $\mathrm{Spec}(k[M'])$ 在 $\mathrm{Spec}(k[\mathbb{Z}^{\dim S}])$ 中的像。由于 Z 等于 $\alpha^{-1}(T_Y)$ 在 $\mathrm{Spec}(S)$ 中的闭包，我们得出 $I = \mathrm{rad}(J)$。

写作 $R = k[\mathbb{Z}^r]$ 和 $A = \bigoplus_{i=1}^t \mathbb{Z}/(n_i)$，我们有

$$k[M'] \cong R[z_1, \ldots, z_t]/(z_1^{n_1} - 1, \ldots, z_t^{n_t} - 1).$$

$k[M']$ 对其幂零根取商后，因此是若干个 R 的直积，所以 I 是由环同态 $S \to R$ 的核所对应的素理想的有限交。因此，由 [CLS11，命题 1.1.8] 可知，Z 的不可约分支是维数为 r 的仿射托里克簇。若 $\mathrm{Cl}(X)$ 无挠，则图式 (2.3) 的底行分裂，因此 $A = 0$，这意味着 I 是素理想。这就证明了 (1)。至于 (2)：我们已经证明 $\dim(Z) = r$，这恰好是 $\dim(S) - \mathrm{codim}(Y \subseteq X)$。□

3. Examples

例 3.1. 令 $X = \mathbb{P}^n$ 和 $T = k[x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n]$为 $X \times X$的 Cox 环。令$I_\Delta \subseteq T$ 为对角线 $X \subseteq X \times X$的定义理想（定义 2.1），即对应于下列点集闭包的理想：$\mathrm{Spec}(T)$ 中形如 $(x_0, \ldots, x_n, tx_0, \ldots, tx_n)$ 的点，其中 $t \in k^*$。容易验证，I_Δ 是映射 $S \to k[x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n, t]$的核，该映射由 $x_i \mapsto x_i$ 和 $y_i \mapsto tx_i$给出，因此 T/I_Δ 同构于正规半群环$k[x_0, \ldots, x_n, tx_0, \ldots, tx_n]$。理想 I_Δ 由矩阵$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ y_0 & y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$.的 2×2 阶子式生成。具体而言，这些子式在 Δ上消失；由于这是一个一般矩阵，2×2 阶子式所生成的理想是余维为 n的素理想。由于 T/I_Δ 已经正规，由定理 1.2 得到的 T/I_Δ 的虚拟分解恰好是T/I_Δ的最小自由分解，它由该矩阵上的 Eagon-Northcott 复形给出。

例 3.2. 令 X 为加权射影空间 $\mathbb{P}(1, 1, 2)$，T 为 $X \times X$ 的 Cox 环 $k[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2]$。通过与例 3.1 类似的计算可得，环 T/I_Δ 同构于半群环 $k[x_0, x_1, x_2, tx_0, tx_1, t^2x_2]$。该半群环不是正规环，因为$tx_2$ 属于分式域，且满足整方程 $(tx_2)^2 - x_2 \cdot (t^2x_2) = 0$。令$R$为 T/I_Δ 的正规化。将 R 视为 T-模时，其表示矩阵如下所示：

其中各行分别对应生成元 1 和 tx_2:

$$\begin{matrix} 1 \\ tx_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} x_1y_0 - x_0y_1 & x_2y_0 & x_2y_1 & x_0y_2 & x_1y_2 \\ 0 & -x_0 & -x_1 & -y_0 & -y_1 \end{pmatrix}.$$

R 作为 T-模的自由消解为:

$$\begin{matrix} T \\ \oplus \\ T(-1,-1) \end{matrix} \xleftarrow{\begin{bmatrix} x_1y_0-x_0y_1 & x_2y_0 & x_2y_1 & x_0y_2 & x_1y_2 \\ 0 & -x_0 & -x_1 & -y_0 & -y_1 \end{bmatrix}} \begin{matrix} T(-1,-1) \\ \oplus \\ T(-2,-1)^2 \\ \oplus \\ T(-1,-2)^2 \end{matrix} \xleftarrow{\begin{bmatrix} -x_2 & 0 & -y_2 \\ x_1 & -y_1 & 0 \\ -x_0 & y_0 & 0 \\ 0 & -x_1 & -y_1 \\ 0 & x_0 & y_0 \end{bmatrix}} \begin{matrix} T(-3,-1) \\ \oplus \\ T(-2,-2) \\ \oplus \\ T(-1,-3) \end{matrix} \leftarrow 0. \tag{3.3}$$

此外: 我们有短正合列 $0 \to T/I_\Delta \to R \to Q \to 0$, 以及 $Q = \sim tx_2 \cdot k[x_2, y_2]$。可以直接计算得出, 与 Q 对应的层 Q 在 $X \times X$上是零层。事实上, 由于 Q 被 x_0、x_1、y_0和 y_1湮灭, 我们可以转而检验$\widetilde{}$ $\widetilde{}$: Q 在仿射开片 D（x_2y_2）上也为零。Q 在此开片上的整体截面为$Q[x_2^{-1}, y_2^{-1}]_{(0,0)} = 0$, 因此 $\widetilde{Q} = 0$ 如所求。

注记 3.4. 由于 $\mathcal{O}(-1)$ 和 $\mathcal{O}(-3)$ 不是 $\mathbb{P}(1, 1, 2)$ 上的向量丛, 消解 (3.3) 并不会导出对角线的局部自由消解。事实上, 除非 X 光滑, 否则虚拟分解并不保证能导出 $\mathcal{O}_X$-模的局部自由消解。或者, 如 [HHL23], 中所述, 也可以考虑相应的环面叠。

注记 3.5. 在定理 1.4 先前已知的许多情形中, 已经证明了一个稍强的结果。具体而言, 已证明, 对于任意这样的 M, 都存在另一个模 M'satisfying$\sim$ $\sim M = M'$and pdim(M') $\leq$di m X; 参见 [EES15、BHS21、Yan21]。若能确定这一结论是否普遍成立, 将会很有意思。

Acknowledgments

我们非常感谢 Andrew Hanlon、Jeff Hicks 和 Oleg Lazarev 耐心地与我们讨论他们的工作, 并与我们进行了几次启发性的交谈。我们之所以找到这一方法, 正是因为努力理解了他们优美的结果。我们也感谢 Christine Berkesch、Lauren Cranton Heller、Mahrud Sayrafi 和 Jay Yang 提供的有益意见和讨论。最后, 我们感谢匿名审稿人提出的许多有益建议。

References

[和23] R. Anderson, 环面 Deligne-Mumford 叠对角线的一个消解, arXiv:2303.17497（2023）。[BC23] S. Bai 和 L. Cˆot´e, 关于缠绕 Fukaya 范畴的 Rouquier 维数及 Orlov 猜想, 《组合数学》159（2023）, 第3期, 437–487。[BDM19] M. R. Ballard、A. Duncan 和 P. K. McFaddin, 环面 Frobenius 态射及 Orlov 猜想, 《欧洲数学杂志》5（2019）, 第3期, 640–645。[BE21] M. K. Brown 和 D. Erman, 环面簇上的 Tate 消解, 即将在《欧洲数学会杂志》（JEMS）发表（2021）。[BES20] C. Berkesch、D. Erman 和 G. G. Smith, 射影空间的乘积的虚分解, 《代数几何》7（2020）, 第4期, 460–481。[BF12] M. Ballard 和 D. Favero, 倾斜对象的 Hochschild 维数, 《国际数学研究通报》IMRN 11（2012）, 2607–2645。

[BFK19] M. Ballard、D. Favero 和 L. Katzarkov，几何不变理论商的变分与导出范畴，《纯粹与应用数学杂志》746（2019），235–303。[BH93] W. Bruns 和 J. Herzog，《科恩–麦考利环》，剑桥高等数学研究丛书，第39卷，剑桥大学出版社，剑桥，1993。[BHS21] J. Bruce、L. C. Heller 和 M. Sayrafi，刻画射影空间的乘积上的多重分次正则性，2021。arXiv:2110.10705。[BKLY21] C. Berkesch、P. Klein、M. C. Loper 和 J. Yang，虚科恩–麦考利层的组合方面，S´em. Lothar. Combin. 85B（2021），文章63，13页。[Bor00] L. A. Borisov，环面奇点的弦上同调，《代数几何杂志》9（2000），第2期，289–300。[BPS01] D. Bayer、S. Popescu 和 B. Sturmfels，幺模劳伦斯理想的 Syzygy，《纯粹与应用数学杂志》534（2001），169–186。[BS22] M. K. Brown 和 M. Sayrafi，皮卡秩为2的光滑射影托里克簇对角线的一个短消解，即将在《代数与数论》发表（2022）。[Can03] A. Canonaco，加权射影空间上的贝林森分解，《巴黎科学院数学报告》336（2003），第1期，35–40。[CLS11] D. A. Cox、J. B. Little 和 H. K. Schenck，《环面簇》，第124卷，美国数学会，2011。[EES15] D. Eisenbud、D. Erman 和 F.-O. Schreyer，射影空间的乘积的 Tate 消解，《越南数学学报》40（2015），第1期，5–36。[Eis95] D. Eisenbud，《交换代数》，数学研究生教材，第150卷，施普林格出版社，纽约，1995。着眼于代数几何。[FH23] D. Favero 和 J. Huang，正规环面簇的 Rouquier 维数等于克鲁尔维数，arXiv 预印本 arXiv:2302.09158（2023）。[HHL23] A. Hanlon、J. Hicks 和 O. Lazarev，托里克子簇的线丛消解及其应用，2023。arXiv:2303.03763。[HNVT22] M. Harada、M. Nowroozi 和 A. Van Tuyl，$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$中点的虚分解，《纯粹与应用代数杂志》226（2022），第12期，论文编号107140，18页。[Hoc72] M. Hochster，代数环面的不变量环、由单项式生成的科恩-麦考利环及多面体，《数学年刊》（第2辑）96（1972），318–337。[M2]Macaulay2——一个用于代数几何与交换代数计算的系统，由 D. Grayson 和 M. Stillman 编写。[Orl09] D. Orlov，关于三角范畴的生成元与维数的评论，《莫斯科数学杂志》9（2009），第1期，153–159，附录。[Yan21] J. Yang，环面簇上单项式理想的虚分解，《美国数学会会刊》B辑8（2021），100–111。

Department of Mathematics and Statistics, Auburn University, Auburn, AL电子邮件地址：mkb0096@auburn.edu

Department of Mathematics, University of Hawai‘i at Mānoa, Honolulu, HI电子邮件地址：erman@hawaii.edu