一种全新的生产函数方法

Samidh Pal 经济科学系，华沙大学ORCID 编号：
https://orcid.org/0000-0001-9227-6431

摘要

本文提出了一种全新的嵌套生产函数，专门用于分析发展中和发达地区制造业的资本和劳动密集度。本文为这一生产函数提供了严谨的理论基础，并通过行业样本对其表现进行了实证分析。分析表明，该生产函数可用于准确估算各行业的资本和劳动密集度水平，并分析这些行业的产能利用率。

引言：

在新古典微观经济学框架下，产能利用率和效率是衡量企业行为的重要指标。根据这一框架，企业旨在通过调整生产水平来实现利润最大化，使产能利用率与可用投入和产出价格相匹配，同时力求达到最高效的生产水平（曼昆，2014）。

分析发展中国家制造业的资本和劳动密集度，对于识别促进生产率增长的因素、确定国际竞争力以及制定有效的劳动力市场政策至关重要（Rodriguez-Clare，2010）。然而，现有生产函数存在局限，包括假设投入之间可以完全替代、无法捕捉投入与产出之间的非线性关系，以及难以充分考虑技术、基础设施和政府政策的影响（Bartelsman、Haltiwanger 和 Scarpetta，2017）。

为解决这些局限，一种新型嵌套生产函数应运而生，成为传统生产函数的潜在替代方案。该模型将三种投入——资本、劳动和资本密集度——纳入一个嵌套生产函数，以便考察每种投入的变化如何影响产出。与传统生产函数相比，这种新型嵌套生产函数更加灵活，能够体现投入之间不同程度的可替代性和互补性，从而更准确地捕捉现实生产过程的复杂性和异质性。

新型嵌套生产函数的潜在应用十分广泛。它可用于分析市场条件或公共政策变化对企业产出和盈利能力的影响，比较不同行业和地区企业的相对效率和生产率，并探究投入与产出之间的关系。此外，该模型还可用于研究技术进步和创新提升企业绩效的潜力。

总之，产能利用率和效率是新古典微观经济学框架下衡量企业行为的重要指标。分析发展中国家制造业的资本和劳动密集度，对于促进可持续经济增长与发展至关重要。新的嵌套生产函数是经济学领域的一项重要进展，为分析生产过程及其对经济增长与发展的影响提供了一种更为细致、灵活的方法。

文献综述：
生产函数广泛应用于经济学中，用于研究生产过程中投入与产出之间的关系。假设规模报酬不变的新古典生产函数，数十年来一直是经济分析中占主导地位的模型。然而，该模型因无法捕捉发展中国家和欠发达国家复杂的生产过程而受到批评。

现有文献表明，新古典生产函数并不适合用于分析这些国家的生产，因为它假设完全竞争、投入同质性以及不存在市场不完善。事实上，发展中国家和欠发达国家的生产往往存在程度较高的市场不完善，例如信贷渠道有限、交易成本高昂以及基础设施不足（Chowdhury & Mavrotas，2006）。

此外，新古典生产函数假设投入之间可以完全替代，但这在实践中未必成立。在许多发展中国家和欠发达国家，资本与劳动并非完全替代品，而且不同类型的劳动和资本在生产率方面存在显著差异（Dollar & Hallward-Driemeier，2000）。

为克服这些局限，人们提出了一种新的嵌套生产函数，可用于刻画发展中国家和欠发达国家复杂的生产过程。该模型允许投入之间具有不同程度的可替代性，并能纳入市场不完善因素（Caves & Christensen，1980）。

此外，复合投入分析已被证明是了解发展中国家和欠发达国家各行业资本和劳动密集度的有效工具。通过分析不同投入对产出的相对贡献，复合投入分析能够帮助我们深入了解不同地区和行业的劳动与资本生产率。

总的来说，现有生产函数的局限性凸显了开发一种新型嵌套生产函数的必要性，这种函数能够反映发展中国家和欠发达国家生产活动的独特特征。此外，复合投入分析可以为了解这些国家各行业的资本和劳动密集度提供有价值的见解。

Proof 关于 V 作为生产理论中的三投入嵌套生产函数 :

我们首先将函数 $\mathrm{h}(K,L)$ 定义为:

$$\mathrm{h}(K,L) = \delta(K^{-q}) + (1-\delta)(L^{-q}) \quad (1)$$

这里，δ 是一个参数，用于确定赋予资本投入（K）的权重，而（$1-\delta$）是赋予劳动投入（L）的权重。参数q 决定了该函数的曲率。

接下来，我们将函数$g(x,y)$定义为:

$$g(x,y) = \left[(\sigma) * (x+y)^{-\frac{p}{q}} + (1-\sigma) * y^{-p}\right]^{-\frac{1}{p}} \quad (2)$$

这里，σ 是一个参数，用于确定赋予资本投入（x）的权重，而（$1-\sigma$）是赋予复合投入（$y = K/L$）的权重。参数p 决定了该函数的曲率。

现在，我们可以将生产函数V 定义为:

$$V = A * g\left(h(K,L), \frac{K}{L}\right) \quad (3)$$

这里，A是 表示技术水平和技术效率的参数 .

为了说明V 是一个三投入嵌套生产函数，我们需要证明它可以表示为两个函数的复合，其中第一个函数接受两个投入（$K\ and\ L$），第二个函数则将第一个函数的产出和复合投入（K/L）作为投入。

首先，我们可以将函数V 改写为:

$$V = A * g\left(h(K,L), \frac{K}{L}\right) \quad (4)$$

$$V = A\left[(\sigma)\{\delta(K^{-q}) + (1-\delta)(L^{-q})\}^{-\frac{p}{q}} + (1-\sigma)\left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{-\frac{1}{p}} \quad (5)$$

接下来，我们将第一个函数 $f(K,L)$定义为:

$$f(K,L) = \{\delta * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})\} + \left(\frac{K}{L}\right)^{-p} \quad (6)$$

这里，$f(K,L)$接受两个投入（$K\ and\ L$），并返回$\mathrm{h}(K,L)\ and\ K/L$ 的$-p$次幂。

现在，我们可以将 V 用 $f(K,L)\ and\ g(x,y)$ 表示为:

$$V = A * g(f(K,L), K/L) \quad (7)$$

这表明，函数 V 是两个函数的复合，其中第一个函数 $f(K,L)$ 接受两个投入（$K\ and\ L$），第二个函数 $g(x,y)$ 则将 $f(K,L)$ 的产出和复合投入（K/L）作为投入。因此，V 是一个三投入嵌套生产函数。

生产函数的性质:

弹性：该生产函数包含一个用于刻画资本与劳动投入之间替代弹性的项。这一性质对于理解企业在相对投入价格变化时调整投入组合的能力至关重要。要分析该模型的弹性:

引理:
将生产函数 V 定义如下:

$$V = A * \left[\sigma * \left[\{(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})\}^{-\frac{p}{q}}\right] + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (8)$$

其中， V 为产出， A 为全要素生产率， K 为资本投入， L 为劳动投入，sigma 为总投入中的资本份额，delta 为资本投入中实物资本的份额， p 为曲率参数， q 为复合投入 K/L 的等产量曲线的曲率程度。

命题 1:
产出相对于资本投入的弹性取决于曲率参数 p。

假设:
设 V 为引理中定义的生产函数。设 K 为资本投入， L 为劳动投入。设 p 为曲率参数。

证明:
我们首先计算产出相对于资本投入的弹性:

$$\varepsilon K = \left(\frac{\partial V}{\partial K}\right) * \left(\frac{K}{V}\right) \quad (9)$$

利用链式法则，我们得到:

$$\frac{\partial V}{\partial K} = A * \left[-\sigma * \{(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})\}^{-\frac{p}{q}} * \left(\frac{p}{q}\right) * \{(\delta) * K^{-q-1}\} + (1-\sigma) * (-p) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p-1} * \left(\frac{L}{K^2}\right)\right] * \left(-\frac{1}{p}\right)^{1+p} \quad (10)$$

化简并重新排列后，我们得到:

$$\frac{\partial V}{\partial K} = A * \left[-\sigma * (\delta) * K^{-q-p} * \{(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})\}^{-\frac{p}{q}-1} * \frac{p}{q} + (1-\sigma) * p * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p-1} * \left(\frac{L}{K^2}\right)\right] * \left(-\frac{1}{p}\right)^{1+p} \quad (11)$$

因此，产出相对于资本投入的弹性为:

$$\varepsilon K = A * \left[-\sigma * (\delta) * K^{-q-p} * \{(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})\}^{-\frac{p}{q}-1} * \frac{p}{q} + (1-\sigma) * p * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p-1} * \left(\frac{L}{K^2}\right)\right] * \left(-\frac{1}{p}\right)^{1+p} * \left(\frac{K}{V}\right) \quad (12)$$

命题2:
产出相对于劳动投入的弹性取决于参数 q。

假设:
设 V 为引理中定义的生产函数。设 K 为资本投入， L 为劳动投入。设 q 为复合投入 K/L 的等产量曲线的曲率程度。

证明:
我们想要计算 劳动投入的产出弹性，其定义如下:

$$\varepsilon L = \left(\frac{\partial V}{\partial L}\right) * \left(\frac{L}{V}\right) \tag{13}$$

我们可以对生产函数两边取自然对数来简化这个表达式:

$$\ln V = -p * \ln\left[\sigma * (\delta * K^{-q} + (1-\delta)L^{-q})^{-\frac{1}{q}} + (1-\sigma)\left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right] \tag{14}$$

使用链式法则，我们可以对两边关于 $\ln L$ 求导:

$$\frac{d \ln V}{d \ln L} = \left(\frac{\partial \ln V}{\partial L}\right) * \left(\frac{\partial L}{\partial \ln L}\right) = \left(\frac{\partial \ln V}{\partial L}\right) * \left(\frac{L}{V}\right) \tag{15}$$

其中（$\frac{\partial \ln V}{\partial L}$）是 $ln\, V$ 相对于 L 的弹性。

现在，我们可以再次使用链式法则，对 $\ln V$ 关于 L 求导:

$$\frac{d \ln V}{d \ln L} = \left(\frac{\partial \ln V}{\partial K}\right) * \left(\frac{\partial K}{\partial L}\right) + \left(\frac{\partial \ln V}{\partial L}\right) \tag{16}$$

注意，$\partial \ln\left(\frac{V}{\partial K}\right)$是$ln\, V$ 相对于K的弹性，我们已在命题 1 中计算得出:

$$\left(\frac{\partial \ln V}{\partial K}\right) = \varepsilon K = \delta * s * \left(\frac{K}{L}\right)^{1-p} \tag{17}$$

而（$\frac{\partial K}{\partial L}$）是资本边际产量（MPK），其表达式为:

$$\left(\frac{\partial K}{\partial L}\right) = \alpha * A * \left(\frac{L}{K}\right)^{1-q} \tag{18}$$

其中， α 是产出中的资本份额，A 是技术水平。
将这些表达式代入$\frac{d}{d}\frac{V}{L}$lnln 的方程，得到:

$$\frac{d \ln V}{d \ln L} = \delta * s * \left(\frac{K}{L}\right)^{1-p} * \alpha * A * \left(\frac{L}{K}\right)^{1-q} + \left(\frac{\partial \ln V}{\partial L}\right) \tag{19}$$

化简此表达式，得到:

$$\varepsilon L = \left(\frac{\partial \ln V}{\partial L}\right) * \left(\frac{L}{V}\right) = (1-q) * (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p} \tag{20}$$

因此，我们证明了，对于给定的生产函数，产出相对于资本和劳动投入的弹性可以用生产函数参数的闭式函数表示。这些表达式使我们能够分析产出对资本和劳动投入变化的响应程度，并研究这些投入之间的可替代性或互补性。

这些表达式的一个有趣推论是，产出相对于资本投入的弹性取决于曲率参数 p，而该参数决定了资本与劳动投入之间的替代程度。如果 $p = 1$，那么生产函数就会简化为柯布-道格拉斯形式，投入之间具有常替代弹性（CES）。在这种情况下，产出相对于资本投入的弹性就是产出中的资本份额，且不取决于资本和劳动投入的水平。然而，如果 $p < 1$，那么随着资本投入水平提高，产出相对于资本投入的弹性会降低，这反映了资本投入的边际报酬递减。相反，如果 $p > 1$，那么产出

相对于资本投入的弹性会随着资本投入水平的提高而增加，这表明资本投入的边际报酬递增。

另一个有趣的含义是，产出相对于劳动投入的弹性取决于参数 q，而 q 决定了复合投入 K/L 的等产量曲线的曲率程度。如果 $q = 1$，那么等产量曲线是线性的，产出相对于劳动投入的弹性为常数。然而，如果 $q < 1$，那么等产量曲线是凹的，产出相对于劳动投入的弹性会随着劳动投入水平的提高而降低，这反映了劳动投入的边际报酬递减。反之，如果 $q > 1$，那么等产量曲线是凸的，产出相对于劳动投入的弹性会随着劳动投入水平的提高而上升，这表明劳动投入的边际报酬递增。

总的来说，这些表达式为分析企业和行业如何应对投入品价格、技术和市场条件的变化提供了有用工具。

齐次性：该生产函数是一次齐次的，这意味着如果我们将所有投入乘以同一个常数因子，产出也会乘以相同的因子。这一性质对于分析规模变动对生产率的影响十分重要。为分析该模型的齐次性：

引理：
由以下方程描述的生产函数 V：

$$V = A * \left[\sigma * \left[\{(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})\}^{-\frac{p}{q}}\right] + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (21)$$

是一次齐次函数。

命题：
如果所有投入（$K\ and\ L$）都乘以一个常数因子，例如 λ，那么产出（V）也会乘以相同的因子 λ。

假设：
令 λ 为一个正数，并令 (K^*, L^*) 为将原始投入 (K, L) 乘以 λ 后得到的新投入，即 $K^* = \lambda K$ 和 $L^* = \lambda L$。

证明：
首先，我们注意到常数 A 不受投入规模变动的影响，因为它是一个不依赖于 $K\ and\ L$ 的参数。

接下来，我们利用生产函数中的指数 p 为负这一事实，这意味着括号内表达式的分母被提升为正数次幂。这表明，如果我们将投入乘以 λ，分母就会按相同的因子 λ 减小，因此括号内的整个表达式会增加 λ。

更确切地说，我们有：

$$[(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})]^{-\frac{p}{q}} \quad (22)$$

齐次度为 λ^q，因为两个 $K\ and\ L$ 都乘以 λ，因此分子和分母都乘以 λ^q。

因此，

$$[(\delta) * (K^{*-q}) + (1-\delta) * (L^{*-q})]^{-\frac{p}{q}} = \left[(\delta) * [(\lambda K)^{-q}] + (1-\delta) * [(\lambda L)^{-q}]\right]^{-\frac{p}{q}} \quad (23)$$

$$= \left[\lambda^q * [(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})]\right]^{-\frac{p}{q}} \quad (24)$$

$$= \lambda^{-p} * [(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})]^{-\frac{p}{q}} \quad (25)$$

同理，

$\left(\frac{K}{L}\right)^{-p}$ 是$\lambda^0 = 1$次齐次的，因为分子和分母都乘以相同的因子λ。

因此，

$$\left(\frac{K^*}{L^*}\right)^{-p} = \left[\frac{\lambda K}{\lambda L}\right]^{-p} = \left(\frac{K}{L}\right)^{-p} \quad (26)$$

综上所述，我们得到：

$$V^* = A * \left[\sigma * \left[\{(\delta) * (K^{*-q}) + (1-\delta) * (L^{*-q})\}^{-\frac{p}{q}}\right] + (1-\sigma) * \left(\frac{K^*}{L^*}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (27)$$

$$= A * \left[\sigma * \lambda^{-p} * \{(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})\}^{-\frac{p}{q}} + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (28)$$

$$= \lambda^{-p} * A * \left[\sigma * \{(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})\}^{-\frac{p}{q}} + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (29)$$

$$= \lambda^{-p} * V \quad (30)$$

因此，我们可以看到，如果将所有投入都乘以常数因子λ，产出也会乘以相同的因子λ，这意味着该生产函数是一次齐次的。

凹性：该生产函数对资本和劳动投入均呈现边际报酬递减，这意味着当我们增加任一投入并保持另一投入不变时，产出的边际增量最终会减少。这一性质符合边际报酬递减规律，也是许多现实生产过程的关键特征。为分析该模型的凹性：

引理：

生产　　函数对资本和劳动投入均呈现边际报酬递减　　.

命题：
在其他投入保持不变的情况下，增加资本或劳动投入，产出的边际增量最终都会减少。这一性质符合边际报酬递减规律，也是许多现实生产过程的关键特征。

假设：
为分析该模型的凹性，我们通过特征值来考察海森矩阵 .

证明：
我们首先计算生产函数的海森矩阵：

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial K^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial K \partial L} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial K \partial L} & \frac{\partial^2 V}{\partial L^2} \end{bmatrix} \tag{31}$$

使用题干中给出的生产函数，我们可以计算二阶偏导数如下：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial K^2} = -A * \left(\frac{p}{q}\right) \sigma\left((\delta)(q-1)(K^{-q-2})(L^q) + (1-\delta)q(K^{-q})(L^{q-2})\right) \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial K \partial L} = -A * \left(\frac{p}{q}\right) \sigma\left((\delta)q(K^{-q-1})(L^{q-1}) + (1-\delta)q(K^{-q})(L^{-q})\right) \tag{33}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial L^2} = -A * \left(\frac{p}{q}\right) \sigma\left((\delta)q(K^{1-q})(L^{-q-2}) + (1-\delta)(q-1)(K^q)(L^{-q-2})\right) \tag{34}$$

接下来，我们需要在一个特定点处求海森矩阵的值。为简单起见，我们可以在点（K, L）$= (1,1)$处求值。

然后，我们可以计算海森矩阵的特征值，以此判断生产函数的凹性。

特征值为：

$$\lambda 1 = -A * \left(\frac{p}{q}\right) \sigma(\delta + 1 - \delta)q \tag{35}$$

$$\lambda 2 = -A \left(\frac{p}{q}\right) \sigma(\delta + 1 - \delta)q(1-q) \tag{36}$$

由于 $\lambda 1$和 $\lambda 2$均为负数，海森矩阵是负定的。这意味着生产函数是凹函数，表明资本和劳动投入的边际报酬均递减。

因此，我们证明了该生产函数的资本和劳动投入均表现出边际报酬递减；这一性质符合边际报酬递减规律，也是许多现实生产过程的关键特征。我们还证明了该生产函数是凹函数，这进一步印证了边际报酬递减的存在。

灵活性：生产函数包含可调整模型曲率的参数，这意味着模型能够捕捉广泛的生产技术，并且

可以校准以拟合不同行业的经验数据。为分析该模型的灵活性：

引理：
生产函数 $V(\mathrm{h}(K,L),\ K/L)$ 具有规模报酬不变。

命题：
生产函数 $V(\mathrm{h}(K,L),\ K/L)$ 的灵活性性质意味着规模报酬不变。

假设：
生产函数 $V(\mathrm{h}(K,L),\ K/L)$ 可以写成：

$$V = A * \left[\sigma * \left[[\,(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})]^{-\frac{p}{q}}\right] + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (37)$$

其中 $A, \sigma, \delta, q, and\ p$ 为参数。

证明：
为了证明生产函数 $V(\mathrm{h}(K,L),\ K/L)$ 具有规模报酬不变，我们需要说明，按一定比例增加所有投入，会导致产出按相同比例增加。

假设投入增加至原来的 λ 倍，即 $K' = \lambda K$ 和 $L' = \lambda L$。将这些值代入生产函数，得到：

$$V' = A * \left[\sigma * \left[[\,(\delta) * ((\lambda K)^{-q}) + (1-\delta) * ((\lambda L)^{-q})]^{-\frac{p}{q}}\right] + (1-\sigma) * \left(\frac{\lambda K}{\lambda L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (38)$$

化简该表达式，得到：

$$V' = A * \left[\sigma * \left[[\,(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})]^{-\frac{p}{q}}\right] + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} * \lambda^0 \quad (39)$$

因此，所有投入增加至原来的 λ 倍，会使产出按相同比例增加，这证实了生产函数 $V(\mathrm{h}(K,L),\ K/L)$ 具有规模报酬不变。

由于生产函数具有规模报酬不变的特性，企业可以在不增加额外成本的情况下调整产出水平，并在生产中实现规模经济。此外，生产函数的灵活性性质简化了对函数的分析，并使人们能够运用线性规划和对偶理论等强大的数学工具。

因此，生产函数 $V(\mathrm{h}(K,L), K/L)$ 的灵活性性质是经济分析中的一项重要结果，对企业行为、产业结构和生产效率具有重大影响。

正定性：生产函数始终为正，这意味着只要投入为正，就始终会产生产出。这一性质对于确保

该模型具有经济学意义，并可用于预测现实世界的结果。要分析该模型的正定性：

引理：
由以下关系定义的生产函数 V

$$V = A * \left[\sigma * \left[[(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})]^{-\frac{p}{q}}\right] + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (40)$$

只要投入 K、 L、 A、 δ、 σ、 p、 $and\ q$ 均为正值，它就始终为正。

命题：
生产函数 V 是正定的。

假设：
投入 K、 L、 A、 δ、 σ、 p、 $and\ q$ 均为正数。

证明：
要证明生产函数 V 始终为正，我们需要证明，对于 K、 L、 A、 δ、 σ、 p、 $and\ q$的所有正值，$V > 0$ 。

我们考虑以下几种情况：
情况 1：如果 $K = L = 0$，那么 V 未定义。
情况 2：如果 $K > 0$ 且 $L = 0$，那么 $V = 0$，因为方括号中的第二项会变为无穷大，并且占主导地位，超过分子。
情形 3：如果 $K = 0$ 和 $L > 0$，那么 $V = 0$，因为方括号中的第一项趋于无穷大，并且在分子中占主导。
情形 4：如果 $K > 0$ 和 $L > 0$，那么方括号中的各项均为正，因为 delta、$(1-\delta)$、K^{-q} 和 L^{-q} 均为正。此外，方括号中的第二项始终为正，因为 $(\frac{K}{L})^{-p}$ 为正。因此，整个方括号内的表达式为正。由于 sigma 和 $(1-\sigma)$也为正，方括号内的整个表达式为正。最后，由于 p 和 $(-\frac{1}{p})$符号相反，整个表达式为正。因此，我们证明了对于 K、 L、 A、 δ、 σ、 p和 $and\ q$ 的所有正值，V 均为正。

定理：
只要投入 K、 L、 A、 δ、 σ、 p、 $and\ q$ 均为正，生产函数 V 就始终为正。

生产函数 V 的正定性是一项重要性质，确保其在现实应用中具有经济意义和预测能力。具体而言，它保证模型对于任意正值投入组合都能产生非负产出，这是任何生产函数都必须满足的一项基本要求。正定性的证明

基于投入为正的假设，上文给出的证明严格确立了这一性质。因此，我们可以得出结论：生产函数是一个有效且可靠的工具，可用于分析各种经济情境下生产过程的行为。

理论框架：

理论框架给出了生产函数的数学推导，包括模型的假设和局限性。框架还概述了参数 p、q、δ、$and\ \sigma$ 对于理解资本和劳动密集度的重要性。此外，框架还讨论了选择合适的 p、q、δ、$and\ \sigma$值的标准。

引理：
如果 $\delta = 0$，那么生产函数 V 仅取决于资本（K）和劳动（L）投入。

命题：
设 $\delta = 0$。那么，生产函数 V 可以简化如下：

$$V = A * \left[\sigma * (L^q)^{-\frac{p}{q}} + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \tag{41}$$

证明：
将 $\delta = 0$ 代入生产函数 V：

$$V = A * \left[\sigma * \left[(L^{-q})^{-\frac{p}{q}}\right] + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \tag{42}$$

利用指数性质简化括号中的表达式：

$$V = A * \left[\sigma * (L^q)^{-\frac{p}{q}} + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \tag{43}$$

当 $\delta = 0$时，这是 V 的简化表达式。这表明，V 仅取决于资本（K）和劳动（L）投入，正如所需。

假设：
如果 $\delta = 1$，那么生产函数 V 仅取决于复合投入（K/L）。

命题：
设 $\delta = 1$。那么，生产函数 V 可简化如下：

$$V = A * \left[\sigma * (\delta^{1-q} * K^{-q} + (1-\delta)^{1-q} * L^{-q})^{-\frac{p}{q}} + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \tag{44}$$

证明：
将 $\delta = 1$ 代入生产函数 V：

$$V = A * \left[\sigma * [(\delta * K^{-q} + (1-\delta) * L^{-q})]^{-\frac{p}{q}} + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (45)$$

使用指数性质简化括号中的表达式:

$$V = A * \left[\sigma * (\delta^{1-q} * K^{-q} + (1-\delta)^{1-q} * L^{-q})^{-\frac{p}{q}} + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (46)$$

这是当 $\delta = 1$时 V的简化表达式。这表明 V仅取决于复合投入（K/L），正如所需。

引理:
如果$\sigma = 0$，复合投入K/L完全是劳动L的函数。

命题:
给定生产函数:

$$V = A * \left[\sigma * \left[[(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})]^{-\frac{p}{q}}\right] + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (47)$$

如果 $\sigma = 0$，那么复合投入 K/L 完全是劳动 L的函数。

假设:
假设 $\sigma = 0$。

证明:
当 $\sigma = 0$ 时，生产函数变为:

$$V = A * \left[\left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (48)$$

$$V = A * \left[\left(\frac{L}{K}\right)^{p}\right] \quad (49)$$

因此，生产函数仅取决于 L/K 的比率，而 K/L 完全是劳动 L 的函数。

因此，若 $\sigma = 0$，复合投入 K/L 完全是劳动 L 的函数。

引理:
如果 $\sigma = 1$，复合投入 K/L 只是资本 K 的函数。

命题:
给定生产函数:

$$V = A * \left[\sigma * \left[[(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})]^{-\frac{p}{q}}\right] + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (50)$$

如果 $\sigma = 1$，那么复合投入 K/L 纯粹是资本 K 的函数。

假设:
假设 $\sigma = 1$。

证明:
当 $\sigma = 1$ 时，生产函数变为:

$$V = A * \left[[(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})]^{-\frac{p}{q}} \right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (51)$$

$$V = A * [(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})]^{\frac{1}{q}} \quad (52)$$

由于项 $(\delta) * (K^{-q})$ 是资本 K 的函数，而项 $(1-\delta) * (L^{-q})$ 是劳动 L的函数，因此生产函数仅取决于资本 K。所以，如果 $\sigma = 1$，复合投入 K/L 就纯粹是资本 K的函数。

总之，我们已经证明，当 $\sigma = 0$ 时，复合投入 K/L 纯粹是劳动 L的函数；当 $\sigma = 1$ 时，复合投入 K/L 纯粹是资本 K的函数。

引理:
若 $\delta = 1 \; and \; \sigma = 1$，则生产函数 V 是纯资本密集型的。

命题:
对于 $\delta = 1 \; and \; \sigma = 1$，生产函数 V 可化简为:

$$V = A * [(K^{-q}) + (L^{-q})]^{\left(-\frac{p}{q}\right)} \quad (53)$$

为了证明这一命题，我们将 $\delta = 1$ 和 $\sigma = 1$ 代入生产函数 V :

$$V = A * \left[\sigma * \left[[(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})]^{-\frac{p}{q}} \right] + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p} \right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (54)$$

$$V = A * [(K^{-q}) + (1-L^{-q})]^{\left(-\frac{p}{q}\right)} \quad (55)$$

由于 $\delta = 1$，我们有 $(1-\delta) = 0$，且括号中的第二项消失。此外，由于 σ =1，括号中只剩下第一项。因此，生产函数 V 可化简为:

$$V = A * [(K^{-q}) + (L^{-q})]^{\left(-\frac{p}{q}\right)} \quad (56)$$

该生产函数是纯粹的资本密集型，因为产出是资本的负次幂函数，而劳动则以正次幂出现。

假设:
如果 $\delta = 1 \; and \; \sigma = 0$，那么生产函数 V 是纯粹的劳动密集型。

命题:
对于 $\delta = 1 \; and \; \sigma = 0$，生产函数 V 可简化为:

$$V = A * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p} \quad (57)$$

为证明这一命题，我们将 $\delta = 1 \; and \; \sigma = 0$ 代入生产函数 V:

$$V = A * \left[\sigma * \left[[(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})]^{-\frac{p}{q}}\right] + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (58)$$

$$V = A * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p} \quad (59)$$

由于 $\delta = 1$，我们有 $(1-\delta) = 0$，括号中的第一项为零。此外，由于 σ =0，括号中只剩下第二项。因此，生产函数 V 简化为式 59。该生产函数完全是劳动密集型的，因为产出是劳动的负次幂函数，而资本则以正次幂出现。

引理:
若 $p = q$，生产函数 V 可简化为一个普通的 n 输入 CES函数。

命题:
当 $p\ and\ q$ 的值介于 $1\ and\ -1$ 之间但不为零时，生产函数 V 满足构成良好且有意义的生产函数所必需的假设。

假设:

$$V = A * \left[\sigma * \left[[(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})]^{-\frac{p}{q}}\right] + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-p}\right]^{\left(-\frac{1}{p}\right)} \quad (60)$$

证明:
如果 $p = q$，那么生产函数 V 就简化为一个普通的 n 投入 CES函数。将 $p = q$ 代入生产函数并化简表达式即可证明这一点。

$$V = A * \left[\sigma * \left[[(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})]^{-\frac{q}{q}}\right] + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-q}\right]^{\left(-\frac{1}{q}\right)} \quad (61)$$

$$V = A * \left[\sigma * [[(\delta) * (K^{-q}) + (1-\delta) * (L^{-q})]^{-1}] + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-q}\right]^{\left(-\frac{1}{q}\right)} \quad (62)$$

$$V = A * \left[\sigma * \left[[(\delta) * (K^{-1}) + (1-\delta) * (L^{-1})]\right] + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-q}\right]^{\left(-\frac{1}{q}\right)} \quad (63)$$

$$V = A * \left[\sigma * [[(\delta) * (L) + (1-\delta) * (K)]^{-1}] + (1-\sigma) * \left(\frac{K}{L}\right)^{-q}\right]^{\left(-\frac{1}{q}\right)} \quad (64)$$

$$V = A * \left[\sigma * [[(\delta) * (L) + (1-\delta) * (K)]^{-1}] + (1-\sigma) * \left(\frac{L}{K}\right)^{q}\right]^{\left(-\frac{1}{q}\right)} \quad (65)$$

$$V = A * \left[\sigma * [[(\delta) * (L) + (1-\delta) * (K)]^{-1}] + (1-\sigma) * \left(\frac{L}{K}\right)^{q}\right]^{\left(-\frac{1}{q}\right)} \quad (66)$$

这是一个简单的 n 输入 CES 函数，因为它是投入 $K\ and\ L$ 的加权平均值，权重由替代弹性 sigma 决定。

实证 研究：

表：1 151个和251个行业的估计

$R^2 = 1$	标准误	替代弹性（AU）（$\varepsilon = [0,1]$）	δ	σ	RSS	收敛
行业代码：151						
0.99	0.43	1.4 ≈ 1	1.13	0.94	0.30	已实现
行业代码：251						
0.96	0.26	0.5 ≈ 0	1.01	1.05	1.42	已实现

来源：作者根据 2010-11 至 2016-17 年度工业调查（ASI）数据计算得出。

我们看到，$\delta\ and\ \sigma$ 的值接近 1，这意味着印度制造业行业组中的 151—皮革制品制造和 251—重型结构金属制品制造都属于纯粹的资本密集型产业。如表1所示，这两个行业组的估计替代弹性（ε）分别约为 1.4 和 0.5。这些值介于 0 和 1 之间，表明我们的生产函数适用于这两个行业组。151 行业组的产能过剩显而易见，这意味着采用先进机械来应对高技能劳动力和资本短缺仍缺乏动力。251 行业组的替代弹性表明生产要素之间的可替代性较弱，这意味着该行业组无需通过引进新机械来扩大生产单位，以克服劳动和资本短缺。

结论：

总之，本讨论凸显了分析制造业，尤其是发展中国家制造业的资本和劳动密集度，对于促进可持续经济增长与发展的重要性。传统生产函数的局限性催生了一种新的嵌套生产函数，它为分析生产过程及其对经济增长与发展的影响提供了更细致、更灵活的方法。对两个印度制造业行业组应用这一新生产函数进行的实证分析表明，该生产函数适用于这两个行业组；δ 和σ 的值接近于 1，说明这两个行业组都是纯资本密集型。行业组 151 的替代弹性表明存在产能过剩，而行业组 251 的替代弹性则表明生产要素之间的可替代性较弱。这些结果对于采用先进机械和扩大生产单位规模具有参考意义。总体而言，实证分析支持这一新嵌套生产函数的理论基础，并凸显了它在分析行业表现、制定促进经济增长与发展的有效政策方面的应用潜力。

参考文献：

Bartelsman, E. J., Haltiwanger, J., & Scarpetta, S. (2009). 衡量并分析企业动态的跨国差异。载于《生产者动态：来自微观数据的新证据》（第 15–76 页）。芝加哥大学出版社。Caves, D. W., & Christensen, L. R. (1982). 指数理论以及投入、产出和生产率的测量。《计量经济学》，50(6), 1393- 1414.https://doi.org/10.2307/1913388. 中央统计组织（2019）《2016—2017年年度工业调查》。统计与计划实施部，印度政府，新德里。Chowdhury, A. and Mavrotas, G. (2006), 外国直接投资与增长：因果关系何在？《世界经济》，29(1), 9-19. https://doi.org/10.1111/j.1467-9701.2006.00755.x Dollar, D., & Hallward-Driemeier, M. (2000). 泰国工业企业的危机、调整与改革。《世界银行研究观察》，15(1), 1–22, https://doi.org/10.1093/wbro/15.1.1 Mankiw, N. G. (2014). 微观经济学原理。圣智学习。Rodríguez-Clare, A. (2010). 李嘉图世界中的离岸外包。《美国经济学杂志：宏观经济学》，2(2), 227–258. http://www.jstor.org/stable/25760302