arXiv:2303.14577v1 [math.FA] 25 Mar 2023

度量情形下的大拉姆齐度

T. BICE[1], N. DE RANCOURT[1], J. HUBI˘CKA[1], M. KONE˘CN ´Y[1]

[1] *INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE CZECH ACADEMY OF SCIENCES*

[2] *UNIVERSITY OF LILLE*

[3] *CHARLES UNIVERSITY, PRAGUE*

Abstract. *Oscillation stability* 是巴拿赫空间理论中的一个重要概念，并且恰好与离散拉姆齐理论密切相关。例如，Gowers 利用他如今著名的 FIN_k 拉姆齐定理作为关键工具，证明了巴拿赫空间 c_0 的振荡稳定性。我们发展了这一联系背后的理论，并引入紧大拉姆齐度的概念，从而拓展了（离散）大拉姆齐度理论。随后，我们证明巴拿赫空间 ℓ_∞ 和乌雷松球面存在紧大拉姆齐度，并对 ℓ_∞的情形给出了明确刻画。

1. 引言

离散结构是指一种定义在关系语言中的结构，其中不含一元谓词（例如序、图、超图等）。给定同一语言中的两个离散结构 X 和 Y，我们用$\binom{X}{Y}$ 表示所有嵌入 $Y \to X$的集合。给定一个离散结构 X 及其有限子结构 A，若存在 $t \geqslant 1$，使得对$\binom{X}{A}$ 的每一种有限着色，经过某个恰当选取的$f \in \binom{X}{X}$后，$\binom{f[X]}{A}$ 上至多出现 t 种颜色，则称 A 在 X 中具有有限大拉姆齐度。在这种情况下， A 在 X 中的大拉姆齐度是满足条件的最小 t。若 X 的每个有限子结构在 X中都具有有限大拉姆齐度，则称 X 具有有限大拉姆齐度。

无限拉姆齐定理指出，$(\mathbb{N},6)$ 中所有的大拉姆齐度都等于 1。然而，通常情况并非如此。根据 Hjorth [10], ，没有任何无限齐次结构的所有大拉姆齐度都等于 1。不过，它们仍然可以是有限的。识别这类结构的工作始于 Laver 的一项未发表结果，他证明了 $(\mathbb{Q},<)$ 的大拉姆齐度有限；随后 Devlin [5] 很快精确计算出了这些大拉姆齐度。此后，这方面取得了许多进展 [13, 16, 6, 21, 8, 15, 11, 4, 3, 1, 2]。概述请参见 Dobrinen 的综述 [7]。

回顾一下， c_0 是由所有序列 x构成的巴拿赫空间，其中 $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 在无穷远处趋于零，范数为 $||x||_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|$；巴拿赫空间 X 的单位球面为 $S_X := \{x \in X \mid \|x\| = 1\}$。另请回顾，乌雷松球面 $\mathbb{S}$ 是唯一一个完备可分、直径为 1、包含所有直径不超过 1 的有限度量空间的副本且为超齐次的度量空间；也就是说， $\mathbb{S}$ 的任意有限子集之间的等距变换都能延拓为 $\mathbb{S}$上的满射等距变换。本文所说的紧度量空间，是指紧致度量空间。

若顶点在 X 中的大拉姆齐度等于 1，则称离散结构具有不可分性。主要受巴拿赫空间理论中的畸变问题启发，下面列出的度量结构中最早的两项类似不可分性的结果（巴拿赫空间理论研究者常称之为振荡稳定性结果），由 Gowers [9], 、Nguyen Van Th´e 和 Sauer [17]证明。在此，利普希茨映射可视为连续着色，而紧致性是有限性的恰当度量类比。

定理 1.1（Gowers [9]）。设 K 为一个紧度量空间，$\chi\colon S_{c_0}\to K$ 为一个利普希茨映射。对于每个 $\varepsilon>0$，存在 c_0 在 c_0 中的一个线性等距副本 X，使得 $\operatorname{diam}(\chi(S_X))\leqslant\varepsilon$。

定理 1.2（Nguyen Van Th´e–Sauer [17]）。设 K 为紧度量空间，且 $\chi\colon\mathbb{S}\to K$ 为一个利普希茨映射。对每个 $\varepsilon>0$，都存在 X 在 $\mathbb{S}$ 中的一个 $\mathbb{S}$ 等距副本，使得 $\operatorname{diam}(\chi(X))\leqslant\varepsilon$。

定理 1.1 的证明以离散逼近为基础，这也是 Gowers 证明其如今广为人知的 FIN_k 定理的原因；该定理是证明中的主要组成部分。定理 1.2 的证明同样使用离散逼近（遵循 Nguyen Van Th´e 和 Lopez-Abad [14]此前提出的一种组合策略），并结合了针对具有有限多个距离的度量空间的不可分性结果。

这些结果与不可分性结果之间的相似之处，使人自然地想要探究，能否为度量结构定义一种恰当版本的大拉姆齐度概念。这个问题已在著名的 Kechris–Pestov–Todorcevic 论文 [12, § 11(F)], 中得到讨论，文中提出了一种定义。然而，这一定义限制颇多，无法涵盖离散结构之外的大多数有趣结构。本文旨在提出一种更一般的概念，并通过巴拿赫空间ℓ_∞ 和乌雷松球面等实例展示其适用性。我们对乌雷松球面的研究建立在有关具有禁戒圈的齐次结构的大拉姆齐度的结果之上；这些结果已在 Eurocomb 上公布 2021 [3]。

我们的动机有两方面。首先，Zucker [20] 将 KPT 对应 [12] 扩展到了大拉姆齐度，从而建立了大拉姆齐度与自同构群的一些动力学不变量之间的对应关系。我们将其扩展到度量情形，或许能让我们研究度量结构的自同构群所具有的相同动力学不变量；目前还没有可用于研究这些不变量的工具。其次，我们的方法或许能推动对巴拿赫空间理论中畸变现象的系统研究；这一现象与振荡稳定性密切相关，目前尚未得到充分理解。例如，Odell 和 Schlumprecht 对畸变问题 [18]的解表明，定理 1.1 的类似结论对于可分希尔伯特空间并不成立。度量大拉姆齐度或许有助于表述他们结果的一个定量且最优的版本。

2. Compact big Ramsey degrees

我们首先在更一般的情形下回顾离散大拉姆齐次数的一些结果，以此引出度量情形中的定义。我们考虑一个幺半群 M 通过单射作用于集合 X的情形。若存在 $t\geqslant 1$，使得对任意取有限多个颜色的 X 着色，在形如$p\cdot X$、 $p\in M$的集合上至多取 t 个值，则该作用 $M\curvearrowright X$ 具有有限大拉姆齐次数。在这种情况下，该作用的大拉姆齐度是满足条件的最小 t。注意，若Y 是一个离散结构，且 $A\subseteq Y$是一个有限子结构，那么取 $M:=\binom{Y}{Y}$ 和 $X:=\binom{Y}{A}$，并考虑左复合作用，便可得到经典的大拉姆齐度概念，即 A 在 Y中的大拉姆齐度。对于 $k\geqslant 1$，记 $[k]$ 为集合 $\{1,\dots,k\}$。

定义 2.1. 固定如上所述的 $M\curvearrowright X$，以及 $k\geqslant 1$。称着色 $\chi\colon X\to[k]$ 为：

- 持久的，若对于每个 $p\in M$，$\chi[p\cdot X]=[k]$；
- 普适的，若对于每个 $l\geqslant 1$、每个着色 $\psi\colon X\to[l]$ 以及每个 $p\in M$，都存在$q\in M$ 和 $f\colon[k]\to[l]$，使得 $\psi\restriction_{pq\cdot X}=f\circ\chi\restriction_{pq\cdot X}$；
- 大拉姆齐着色（或称典范分割，沿用 [13] 的说法），若其既持久又普适。

下面这个事实的证明是初等的。

命题 2.2. 假设作用 $M\curvearrowright X$ 具有有限大拉姆齐度。那么它存在一个大拉姆齐着色。此外，此类着色的颜色数总是等于该作用的大拉姆齐度。

我们的度量情形如下：幺半群 M 通过（不一定是满射的）等距变换作用于完备度量空间 X。受定理 1.1 和 1.2 启发，我们将把 X 的着色定义为一个 1-利普希茨映射 $X \to K$，其中 K 是紧度量空间（这里将利普希茨常数设为 1 是为了确保某种刚性）。我们的结果也将允许一定的 ε-近似。$\mathbb{N}$ 上的序将由如下定义的紧度量空间之间的拟序“取代”：若存在一个 1-Lispchitz 满射 $L \to K$，则 $K \leqslant L$。经典结果表明，$K \leqslant L$ 与 $L \leqslant K$ 当且仅当 K 与 L 等距。若 χ 和 ψ 是定义在同一集合上、取值于同一度量空间的两个映射，我们将用 $d_\infty(f, g)$ 表示 f 与 g之间的上确界距离。

定义 2.3。称一个紧度量空间 K 是 :

- 关于作用 $M \curvearrowright X$ 是普适的，若对于每个紧度量空间 L、每个着色$\psi\colon X \to L$以及每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $q \in M$、一个着色 $\chi\colon X \to K$和一个 1-利普希茨映射 $f\colon K \to L$，使得 $d_\infty(\psi \restriction_{q\cdot X}, f \circ \chi \restriction_{q\cdot X}) \leqslant \varepsilon$；

- 若它是一个 6-最小的万有紧空间，则称其为作用 $M \curvearrowright X$ 的大拉姆齐度。

若作用 $M \curvearrowright X$ 在上述意义下具有大拉姆齐度，则称该作用具有紧大拉姆齐度。

若作用的大拉姆齐度存在，则显然在等距变换意义下唯一。

定义 2.4. 称着色 $\chi\colon X \to K$ 为：

- 持久的，如果对于每个 $p \in M$，$\chi(p \cdot X)$ 在 K 中稠密；
- 普适的，如果对于每个紧度量空间 L、每个着色 $\psi\colon X \to L$、每个 $p \in M$ 和每个$\varepsilon > 0$，都存在 $q \in M$ 及一个 1-利普希茨映射 $f\colon K \to L$，使得 $d_\infty(\psi \restriction_{pq\cdot X} f \circ \chi \restriction_{pq\cdot X}) \leqslant \varepsilon$；

- 大拉姆齐着色，如果它既持久又普适。

命题 2.5. 假设 $\chi\colon X \to K$ 是作用 $M \curvearrowright X$ 的大拉姆齐着色。那么 K 是该作用的大拉姆齐度。

命题 2.6. 考虑以下陈述：
(1) 作用 $M \curvearrowright X$ 拥有一个万有紧空间；(2) 作用 $M \curvearrowright X$ 具有一个紧大拉姆齐度；(3) 作用 $M \curvearrowright X$ 拥有一种普适的着色；(4) 作用 $M \curvearrowright X$ 拥有一种大拉姆齐着色。

于是，以下蕴含关系成立：(4) $\implies$ (3) $\implies$ (2) $\implies$ (1)。

虽然上述蕴含关系的离散情形类比与离散情形下的情形等价，但我们不知道在度量情形下这些反向蕴含是否成立。最相关的概念似乎是大拉姆齐着色的存在性；在离散情形下，它与 Zucker 提出的、用于获得有趣动力学后果的条件最为接近 [20]。此外，对于所有我们已能证明存在万有紧空间的度量例子，我们也都能证明大拉姆齐着色的存在性。

最后提一下，给离散结构赋予这样的度量：任意两个不同点之间的距离均为 1。如此一来，我们便能将经典的、关于大拉姆齐度的离散情形“嵌入”度量情形，使离散情形成为度量情形的一个特例。

3. Banach spaces

本节研究空间 ℓ_p 和 c_0的大拉姆齐度。我们不再对有限维子空间线性等距嵌入到整个空间的映射进行着色，而是等价地对其单位球面上的有限元组进行着色，这样表述起来更简单。给定一个

巴拿赫空间 X 和 $d \geqslant 1$，集合 $(S_X)^d$ 将赋予上确界距离。我们用 Emb(X)表示所有从 X 到自身的线性等距嵌入构成的幺半群。

对于 $1 \leqslant p < \infty$和一个序列 $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$，我们令 $\|x\|_p :- \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$，并令 $\|x\|_\infty :- \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|$；对于 $1 \leqslant p \leqslant \infty$，我们用 ℓ_p 表示由所有满足 $\|x\|_p < \infty$的序列 $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$构成的巴拿赫空间，并赋予其范数 $\|\cdot\|_p$。空间 c_0 是 ℓ_∞的一个特定子空间。

Gowers 定理 1.1 等价于说，作用 Emb(c_0) $\curvearrowright S_{c_0}$ 具有一个单元素的大拉姆齐度。然而，在高元数情形下，情况有所不同。为此，将一对 $(x, y) \in S^2_{c_0}$ 支撑不相交的向量按其支撑交错的次数着色。于是，c_0 的每个块子空间都会遇到无穷多种颜色。虽然这种“着色”既不是 Lipschitz 的，也不是取紧空间值的，但可以发展这一思路来证明以下结果。

定理 3.1。设 $d \geqslant 2$。那么，作用 Emb(c_0) $\curvearrowright (S_{c_0})^d$ 不具有万有紧空间。

如引言中所述，Odell 和 Schlumprecht [18] 证明，可分希尔伯特空间 ℓ_2 不满足定理 1.1 的类似结论。事实上，他们的论文直接推出了一个更强的结论。

定理 3.2。设 $d \geqslant 1$ 和 $1 \leqslant p < \infty$。那么，作用 Emb(ℓ_p) $\curvearrowright (S_{\ell_p})^d$ 不具有万有紧空间。

因此，假如 Odell–Schlumprecht 定理存在，我们目前形式的大拉姆齐度理论并不适合表达该定理的定量且最优的版本。为此，需要建立非紧大拉姆齐度理论；我们相信这样的理论可以发展出来，并将其留待未来的项目中研究。

现在我们转向 ℓ_∞。在本节余下部分，我们固定 $d \geqslant 1$ 并考虑作用 Emb(ℓ_∞) $\curvearrowright (S_{\ell_\infty})^d$。巴拿赫空间理论中的经典论证表明，即使在 $d = 1$的情况下，这个作用也不具有万有紧空间。然而，证明涉及一个基于选择公理的对角线论证。在这种情况下，对着色施加可定义性限制往往能带来正面结果（例如参见 [19]）。恰当的拓扑是弱-* 拓扑（此处指将 ℓ_∞ 视为 ℓ_1的对偶空间时所得到的拓扑）。于是，我们可以通过在定义 2.3 和 2.4 中仅考虑满足以下条件的着色，为上述作用定义可定义大拉姆齐度和可定义的大拉姆齐着色：当$(S_{\ell_\infty})^d$赋予弱-* 拓扑的 d次幂拓扑时，这些着色是博雷尔可测的，甚至是 Suslin 可测的。第 2 节中证明的所有结果对这些可定义概念仍然成立，而且事实证明，我们可以证明作用 Emb(ℓ_∞) $\curvearrowright (S_{\ell_\infty})^d$存在可定义的大拉姆齐着色。为陈述我们的结果，需要先作一些预备定义。

令 $\mathrm{B}_d :- [-1, 1]^d$，并在此集合上赋予上确界度量。元组$x \in (S_{\ell_\infty})^d$的 d 个分量记为 $x_1, \ldots, x_d$。我们对 ℓ_∞ 的元素使用函数记法，因此对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $i \in [d]$，向量 x_i 的第 n 个分量记为 $x_i(n)$。最后，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $x(n)$ 为 d 元组 $(x_1(n) \ldots, x_d(n))$；它是 B_d 中的一个元素。这样一来，$(S_{\ell_\infty})^d$ 的元素可视为从 $\mathbb{N} \to$ 到 B_d 的映射。若 X 是一个度量空间，则用 $\mathcal{K}(X)$ 表示 X 的所有非空紧子集构成的集合，并赋予其由 $d_H(K, L) :- \max(\sup_{x\in K} d(x, L), \sup_{y\in L} d(y, K))$ 定义的豪斯多夫度量d_H。用 $\mathcal{SCK}(\mathrm{B}_d)$ 表示 B_d 的所有非空对称凸紧子集构成的集合，并将其视为 $\mathcal{K}(\mathrm{B}_d)$ 的一个度量子空间。若 $A \subseteq \mathrm{B}_d$，则用 $\mathrm{sc}(A)$ 表示集合 A 的对称凸包。

定义 3.3. d-南瓜是一个紧子集 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{SCK}(\mathrm{B}_d)$，满足 $\{0\} \in \mathcal{P}$，存在$C \in \mathcal{P}$ 使得对所有 $i \in [d]$，$\mathrm{proj}_i(C) = [-1, 1]$，且该包含关系在 $\mathcal{P}$ 上诱导出一个稠密线性序。我们用 Pum_d 表示所有 d-南瓜构成的集合，并将其视为 $\mathcal{K}(\mathcal{SCK}(\mathrm{B}_d))$ 的子集。

d-南瓜可以看作 B_d 的一个不断生长的对称紧凸子集，从 $\{0\}$开始，并且在演化的最后一步触及立方体 B_d 的所有面。可以证明，度量空间 Pum_d 是紧的。

定义 3.4. 对于 $x \in (S_{\ell_\infty})^d$，令：

$$\mathrm{PP}_d(x) := \left\{ \mathrm{sc}\{x(0), \dots, x(n-1), tx(n)\} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, t \in [0,1] \right\} \cup \left\{ \overline{\mathrm{sc}\{x(n) \mid n \in \mathbb{N}\}} \right\}.$$

这定义了一个可定义染色 $\mathrm{PP}_d :\!- (S_{\ell_\infty})^d \to \mathrm{Pum}_d$。

这个定义可以改述如下：集合 $\mathrm{sc}\{x(0), \dots, x(n-1)\}$, $n \in \mathbb{N}$ 必须是南瓜 $\mathrm{PP}_d(x)$ 演化过程中的若干步骤，而集合 $\mathrm{sc}\{x(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 必须是其最后一步。在这些步骤之间，我们以仿射方式“填补空隙”。

定理 3.5. 着色 PP_d 是作用 $\mathrm{Emb}(\ell_\infty) \curvearrowright (S_{\ell_\infty})^d$ 的可定义的大 Ramsey 着色。特别地，Pum_d 是该作用的可定义大拉姆齐度。

It 容易看出 Pum_1 是单元素集。因此，作为定理 3.5 的推论，我们得到
随 后的振荡稳定性结果适用于 ℓ_∞，与定理 1.1 类似。

推论 3.6. 设 K 是一个紧度量空间，且 $\chi\colon S_{\ell_\infty} \to K$ 是一个 Lipschitz 映射，同时关于弱-* 拓扑也是博雷尔可测的（或苏斯林可测的）。那么对每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个 ℓ_∞ 在自身中的线性等距副本 X，使得 $\mathrm{diam}(\chi(S_X)) \leqslant \varepsilon$。

定理 3.5 的证明基于卡尔森–辛普森定理的应用。将 S_{ℓ_∞} 自然地表示为字母表 $[-1,1]$ 上的无限词集合，使得该定理的应用格外简单。证明的另一个要素是，利用巴拿赫空间理论中的初等工具，分析 ℓ_∞ 在自身中的线性等距副本的形式。

4. The Urysohn sphere

回顾一下，$\mathbb{S}$ 是乌雷松球面。与巴拿赫空间的情形一样，我们将考虑来自 $\mathbb{S}$ 的元组着色，而不是有限子结构的嵌入。对每个 $d \geqslant 1$，赋予 d 次幂 $\mathbb{S}^d$ 上确界度量。用 $\mathrm{Emb}(\mathbb{S})$ 表示所有从 $\mathbb{S}$ 到其自身的（不一定是满射的）等距变换所构成的幺半群。主要结果如下。

定理 4.1。对于每个 $d \geqslant 1$，作用 $\mathrm{Emb}(\mathbb{S}) \curvearrowright \mathbb{S}^d$ 都存在一种大拉姆齐着色 .

我们的证明方法基于 [3] 中提出的思想，用于证明乌雷松球面的离散版本的大拉姆齐度有限。我们不直接研究 $\mathbb{S}$ 本身，而是研究一个与它双向可嵌入的度量空间 $\mathbb{T}$。这个度量空间是一个性质足够良好的序列空间，使我们能够使用 Carlson–Simpson 定理。我们的证明使我们得以重新证明：作用 $\mathrm{Emb}(\mathbb{S}) \curvearrowright \mathbb{S}$ 的大拉姆齐度是一个单元素集，从而以与原始证明截然不同的工具，为定理 1.2 给出一个新的简短证明。然而，只要 $d > 1$，我们的证明就有一部分依赖于非构造性论证，目前我们还无法完整刻画大拉姆齐度。我们只能根据拟序 6 给出大拉姆齐度的一个上界，即将其表示为 $\mathbb{T}^d$ 在刚性满射幺半群 $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 的作用下所得的商。

References

[1] Martin Balko、David Chodounsk´y、Natasha Dobrinen、Jan Hubiˇcka、Matˇej Koneˇcn´y、Lluis Vena 和 Andy Zucker。通过编码树得到的精确大拉姆齐度。arXiv:2110.08409，2021。

[2] Martin Balko、David Chodounsk´y、Natasha Dobrinen、Jan Hubiˇcka、Matˇej Koneˇcn´y、Lluis Vena 和 Andy Zucker。泛型偏序的大拉姆齐度刻画。arXiv:2303.10088，2023。[3] Martin Balko、David Chodounsk´y、Jan Hubiˇcka、Matˇej Koneˇcn´y、Jaroslav Neˇsetˇril 和 Llu´ıs Vena。大拉姆齐度与禁戒圈。载于 Jaroslav Neˇsetˇril、Guillem Perarnau、Juanjo Ru´e 和 Oriol Serra（编）， *Extended Abstracts EuroComb 2021*，第 436–441 页，查姆，2021。施普林格国际出版公司。[4] Martin Balko、David Chodounsk´y、Jan Hubiˇcka、Matˇej Koneˇcn´y 和 Lluis Vena。3-均匀超图的大拉姆齐度有限。 *Combinatorica*，42(2):659–672，2022。[5] Denis Campau Devlin。 *Some partition theorems and ultrafilters on ω*。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，1980。博士论文——达特茅斯学院。[6] Natasha Dobrinen。泛齐次无三角形图的拉姆齐理论。 *J. Math. Log.*，20 2( ):2050012, 75，2020。[7] Natasha Dobrinen。齐次结构的拉姆齐理论：当前趋势与未解问题，2021。即将发表于《2022年国际数学家大会论文集》。[8] Natasha Dobrinen。亨森图的拉姆齐理论。 *Journal of Mathematical Logic*，0(0):2250018，2023。[9] W. T. Gowers。经典空间上的利普希茨函数。 *European J. Combin.*，13(3):141–151，1992。[10] Greg Hjorth。等距变换群的振荡定理。 *Geom. Funct. Anal.*，18(2):489–521，2008。[11] Jan Hubiˇc ka。利用参数空间得到大拉姆齐度，2023。[12] A. S. Kechris、V. G. Pestov 和 S. Todorcevic。Fra¨ıss´e 极限、拉姆齐理论与自同构群的拓扑动力系统。 *Geom. Funct. Anal.*，15(1):106–189，2005。[13] C. Laflamme、N. W. Sauer 和 V. Vuksanovic。泛结构的典范划分。 *Combinatorica*，26 2 183( ): –205，2006。[14] Jordi Lopez-Abad 和 Lionel Nguyen Van Th´e。乌雷松球面的振荡稳定性问题：一种组合方法。 *Topology and its Applications*，155(14):1516–1530，2008。[15] Dragan Maˇsulovi´c。泛结构中的有限大拉姆齐度。
Journal of Combinatorial Theory,
Series A 170 105137, 2020 , : .
[16] Lionel Nguyen Van Th
´ *Canadian* e。
Mathematical Bulletin 51 3 413 423, 2008
超度量空间类中的大拉姆齐度与整除性。 , ( ): – . [17] Lionel Nguyen Van Th´e 和 Norbert W. Sauer。乌雷松球面具有振荡稳定性。 *Geom. Funct. Anal.*，19 2 536( ): –557，2009。[18] Edward Odell 和 Thomas Schlumprecht。畸变问题。 *Acta Math.*，173(2):259–281，1994。[19] Stevo Todorcevic。 *Introduction to Ramsey spaces*，第 174 卷， *Annals of Mathematics Studies*。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2010。[20] Andy Zucker。大拉姆齐度与拓扑动力系统。 *Groups Geom. Dyn.*，13(1):235–276，2019。[21] Andy Zucker。二元自由糊合类的大拉姆齐度。 *Advances in Mathematics*，408:108585，2022。