arXiv:2303.14579v2 [math.CO] 7 Apr 2023

# Gerver-Ramsey 共线问题的改进界

Thomas F. Lidbetter

2023年4月11日

**摘要**

设 $S$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的一个有限子集。向量序列（$\mathbf{z}_i$）是一个 $S$-游走，当且仅当对所有 $i$，$\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_i$ 都是 $S$ 的一个元素。Gerver 和 Ramsey 于 1979 年证明，对于 $S \subset \mathbb{Z}^3$，存在一个无限的 $S$-游走，其中没有 $5^{11} + 1 = 48{,}828{,}126$ 个点共线。本文采用相同的总体方法，并借助计算机搜索，将该界改进为 189。

## 1 引言

四十四年前，Gerver [3] 和 Gerver 和 Ramsey [4] 研究了一个问题：寻找较长的向量序列，使其避免出现过多共线点，并且相邻向量之差取自一个有限集。准确地说，$S$-游走是 $\mathbb{R}^n$ 中任意一个（有限或无限）向量序列，例如 ($\mathbf{z}_i$)，满足对所有 $i$，均有 $\mathbf{z}_{i+1} - \mathbf{z}_i \in S$。$S$-游走中的点是该游走中各向量的端点。若一条直线与某个点子集中的所有点相交，则称该子集中的点在 $S$-游走中共线。Gerver 和 Ramsey[4] 证明，在 $S \subset \mathbb{Z}^2$ 的情况下，对每个 $S$ 和正整数 $K$，都存在一个有限整数 $N(S, K)$，它是满足以下条件的最大值：$S$-游走的前 $N(S, K)$ 项中没有 $K+1$ 个共线点。例如，对于 $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\} \subset \mathbb{Z}^2$，其中 i 和 j 是标准正交单位向量，步序列 i, j, i 对应的点为 (0, 0)、(1, 0)、(1, 1)、(2, 1)。该序列避免了 3 个共线点，但再添加一个来自 $S$ 的步就必然会出现 3 个共线点。同样，步序列 i, j, i, i, j, i, i, j 避免了 4 个共线点，但再添加一个步就必然会出现 4 个共线点。图1展示了这条游走。Gerver[3] 给出了一种构造：对于任何至少包含两个线性无关向量的 $S$，$N(S, K)$ 的增长速度都快于关于 $K$ 的任意多项式函数。序列 $a(n)$ 是使得每个长度为 $t$ 的 {i, j}-游走必定有至少 $n$ 个共线点的最小整数 $t$；在线整数数列百科全书 [7] 将其收录为序列 A231255。目前只知道前六项。

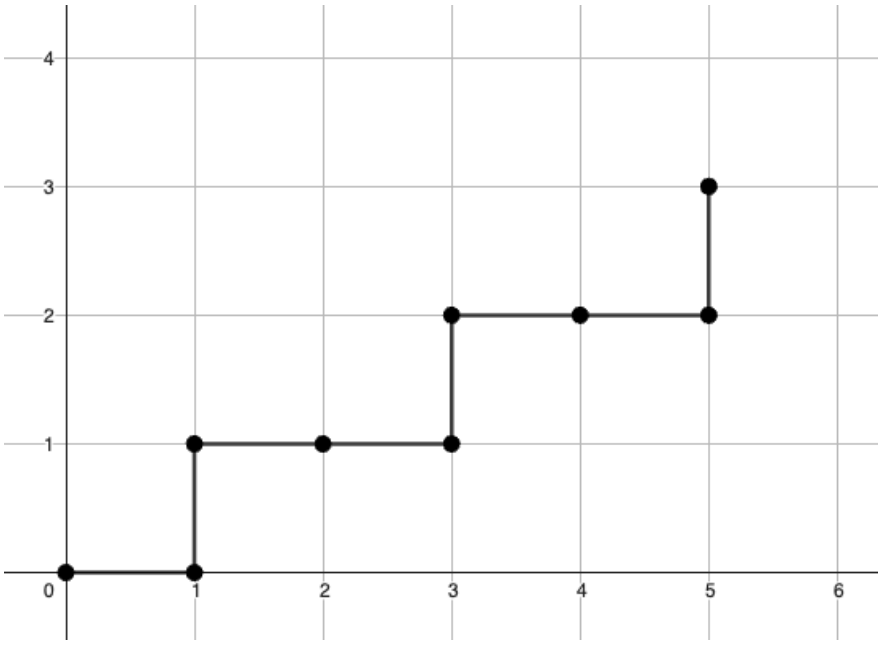



图1：在 $S = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ 中，一条避免出现4个共线点的最长 $S$-游走上的点。

将 $S$ 的条件放宽为 $S \subset \mathbb{Z}^3$ 后，Gerver 和 Ramsey 证明 [4]存在一条无限的 $S$-游走 $W$，其中没有 $5^{11} + 1 = 48,828,126$ 个共线点。所采用的方法是构造性的。尽管发现 $S \subset \mathbb{Z}^3$ 时 $S$-游走中共线点数量的有限上界是一项引人注目的成果，但与 Gerver 和 Ramsey [4]认为 $W$ 中共线点数量的真正最大值为 3 相比，这个上界仍然很大。此外，这个四十四年前得出的上界至今未能改进。我们首先陈述本文的主要结果：改进这一上界。

**定理1** 无限 $S$-游走 $W$ 中不存在$189$ 个共线点。

为改进这一界限，我们采用相同的构造，但还会说明如何将 $W$ 生成为某个态射的不动点，以便辅助部分证明。第2节将介绍这一构造。第 3 节中，我们沿用 Gerver 和 Ramsey [4]的类似论证，断言共线点数量的改进界限。部分情形通过计算机程序进行检查。第4节将介绍所用的算法。这些算法的实现见 `github.com/FinnLidbetter/avoiding-collinearity`[5]。最后，我们将在第5节讨论如何进一步推进这一结果以降低界限。在继续之前，我们先定义一些有用的术语与记号。

## 1.1 术语与记号

字母表是由符号组成的集合。词 $w = w_1 \cdots w_n$ 是字母表 $\Sigma$中的符号序列，符号为 $w_1$， $w_2$、.....、$w_n$。定义 $w[i]$ 为 $w$的第 $i^{\text{th}}$ 个符号。也就是说， $w[1]$ =$w_1$、.....、 $w[n] = w_n$，并定义 $w[i\colon j]$ 为 $w$ 中从索引 $i$ 到索引 $j$ （含两端）的子词。词 $w$ 的反转定义为 $w^R = w_n w_{n-1} \cdots w_2 w_1$。

态射 $\mu$ ： $\Sigma \to \Sigma^*$ 是从字母表 $\Sigma$ 中的符号到 $\Sigma^*$中的字符串的映射。通过定义 $\mu(\varepsilon) = \varepsilon$ 以及 $\mu(uv) = \mu(u)\mu(v)$，将该映射扩展到 $\mu$ ： $\Sigma^* \to \Sigma^*$ ，适用于字符串 $u$, $v \in \Sigma^*$。对于词 $u \in \Sigma^*$ ，定义 $\mu^1(u) = \mu(u)$以及 $\mu^2(u) = \mu(\mu(u))$。随后，我们可以递归定义 $\mu^n(u) = \mu(\mu^{n-1}(u))$。若不动点存在，我们将 $\mu^\omega(u)$定义为反复迭代 $\mu$所得的不动点。

采用 Gerver 和 Ramsey [4], 对向量$\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ （其中$\mathbf{z} = z_1\mathbf{i} + z_2\mathbf{j} + z_3\mathbf{k}$ ）所用的相同记号，我们记为

$$\|\mathbf{z}\|^{\parallel} = z_1 + z_2 + z_3$$

and

$$\|\mathbf{z}\|^{\perp} = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1z_2 - z_2z_3 - z_3z_1}.$$

因此， $\|\mathbf{z}\|^{\parallel}$ 和 $\|\mathbf{z}\|^{\perp}$ 分别与$\mathbf{z}$ 沿向量$\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$平行和垂直的分量成比例。为便于后文使用，我们定义常数 $\gamma$ 为$\mathbf{i}$、$\mathbf{j}$或 $\mathbf{k}$ 垂直于$\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$的分量的长度。于是 $\gamma = \sqrt{2/3}$，一般而言，$\mathbf{z}$ 的垂直分量长度为 $\gamma\|\mathbf{z}\|^{\perp}$。

# 2 构造

我们首先回顾 Gerver 和 Ramsey 使用的方法 [4], ，然后介绍一种利用态射生成相同 $S$-行走的替代方法。态射表示能让后续的一些证明更加简便。

## 2.1 Gerver 和 Ramsey 的构造

若 $A = (a_1, \ldots\ldots, a_n)$ 和 $B = (b_1, \ldots\ldots, b_m)$ 是向量的有序集，且 $\beta$ 是向量算子，令 $RA = (a_n, \ldots\ldots, a_1)$，以及 $(A, B) = (a_1, \ldots\ldots, a_n, b_1, \ldots\ldots, b_m)$，和 $\beta A = (\beta a_1, \ldots\ldots, \beta a_n)$。

定义向量算子 $\alpha$ 和 $\beta$，它们作用于三个标准正交单位向量 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$、$\mathbf{k}$ 上，如下所示

$$\begin{aligned}\alpha\mathbf{i} &= \mathbf{j}\\ \alpha\mathbf{j} &= \mathbf{i}\\ \alpha\mathbf{k} &= \mathbf{k}\\ \beta\mathbf{i} &= \mathbf{i}\\ \beta\mathbf{j} &= \mathbf{k}\\ \beta\mathbf{k} &= \mathbf{j}\end{aligned}$$

令 $A_0 = (\mathbf{i})$，然后定义 $A_{n+1} = (A_n, \alpha A_n, R\beta A_n, A_n, R\beta\alpha A_n, R\beta A_n, A_n)$。对于每个正整数 $n$，定义向量序列 $(\mathbf{v}_p)_{1\le p\le 7^n}$，使得 $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{7^n}) = A_n$。接着，对于所有正整数 $p$，定义 $\mathbf{z}_p = \Sigma_{q=1}^{p}\mathbf{v}_q$，并令 $\mathbf{z}_0$ 为零向量。那么，$W = (\mathbf{z}_p)_{p\ge 0}$ 是一个 $S$-步行。这个步行以如下 35 步开始，即向量 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{35}$:

$$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{j}, \mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{i}, \mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{k}, \mathbf{i}, \mathbf{k}.$$

Gerver 和 Ramsey 证明了，$W$ 是一个无限 $S$-步行，其中没有 $5^{11}+1$ 个点共线 [4]。

## 2.2 使用 amorphism 的构造

我们首先陈述用于该构造的态射，然后说明它为何会生成相同的序列，最后正式证明该序列与第 2.1 节中的序列相同。该态射的定义由 Luke Schaeffer 提出，并通过一则未发表的私人通信分享 [9]。

对于字母表 $\Sigma = \{i, j, k, i', j', k', i_b, j_b, k_b, i'_b, j'_b, k'_b\}$，定义态射 $\mu\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$如下:

$$\begin{aligned}\mu(i) &= i\ j'\ i'_b\ i\ k_b\ i'_b\ i\\ \mu(j) &= j\ k'\ j'_b\ j\ i_b\ j'_b\ j\\ \mu(k) &= k\ i'\ k'_b\ k\ j_b\ k'_b\ k\\ \mu(i') &= i'\ k\ i_b\ i'\ j'_b\ i_b\ i'\\ \mu(j') &= j'\ i\ j_b\ j'\ k'_b\ j_b\ j'\\ \mu(k') &= k'\ j\ k_b\ k'\ i'_b\ k_b\ k'\\ \mu(i_b) &= i_b\ i'\ k\ i_b\ i'\ j'_b\ i_b\\ \mu(j_b) &= j_b\ j'\ i\ j_b\ j'\ k'_b\ j_b\\ \mu(k_b) &= k_b\ k'\ j\ k_b\ k'\ i'_b\ k_b\\ \mu(i'_b) &= i'_b\ i\ j'\ i'_b\ i\ k_b\ i'_b\\ \mu(j'_b) &= j'_b\ j\ k'\ j'_b\ j\ i_b\ j'_b\\ \mu(k'_b) &= k'_b\ k\ i'\ k'_b\ k\ j_b\ k'_b\end{aligned}$$

此外，我们将输出映射 $\phi\colon \Sigma \to \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ 定义为

$$\begin{aligned}\phi(i) = \phi(i_b) = \phi(i') = \phi(i'_b) = \mathbf{i}\\ \phi(j) = \phi(j_b) = \phi(j') = \phi(j'_b) = \mathbf{j}\\ \phi(k) = \phi(k_b) = \phi(k') = \phi(k'_b) = \mathbf{k}.\end{aligned}$$

我们将其扩展为 $\phi\colon \Sigma^* \to \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}^*$，令 $\phi(\varepsilon) = \varepsilon$，并令 $\phi(uv) = \phi(u)\phi(v)$，其中 $u, v \in \Sigma^*$。

注意，对于每个 $a \in \Sigma$，都有 $\mu(a) = au$，其中某个 $u \in \Sigma^*$ 满足该条件。因此，不动点 $\mu^\omega(i)$ 存在，并且对于所有正整数 $n$，$\mu^n(i)$ 都是 $\mu^{n+1}(i)$ 的前缀。为方便起见，我们定义 $\lambda = \mu^\omega(i)$。定义向量序列 $(\mathbf{u}_p)_{p\geq 1}$，其中 $\mathbf{u}_p = \phi(\lambda[p])$；然后如上所述，定义 $(\mathbf{x}_p)_{p\geq 0}$，其中对于所有正整数 $p$，$\mathbf{x}_p = \Sigma_{q=1}^{p}\mathbf{u}_q$，并令 $\mathbf{x}_0$ 为零向量。于是 $W_\mu = (\mathbf{x}_p)_{p\geq 0}$ 是一条 $S$-游走。

## 2.3 构造的等价性

态射表示是通过向量算子构造推导出来的，其方法是注意到反转以及 $\alpha$ 和 $\beta$ 算子可解释为作用在单位向量集合上的群作用。$\Sigma$ 中的 12 个符号分别对应 12 个可能的群元素。对于每个符号，$\mu$ 的像是对定义 $A_{n+1}$ 中各算子所对应的群作用依次作用的结果。该群与 12 阶二面体群同构。只考虑 $\alpha$ 和 $\beta$ 算子时，我们可以将 $\mathbf{i}$，$\mathbf{j}$，$\mathbf{k}$ 映射到这些向量的每个排列，例如，使用以下串接算子：$\alpha\alpha$、$\alpha$、$\beta$、$\beta\alpha$、$\alpha\beta$ 和 $\beta\alpha\beta$。由此得到对称群 $S_3$。由于反转算子与其他算子可交换，且它是自身的逆，加入反转算子后得到 $S_3$ 与 2 阶循环群的直积。这些群的直积就是 12 阶二面体群。

为了证明构造的等价性，我们定义几个有用的函数，以便在两种表示之间进行转换。为便于说明，我们滥用记号，将 $\alpha$ 和 $\beta$ 的定义也用于表示函数 $\alpha\colon \Sigma \to \Sigma$ 和 $\beta\colon \Sigma \to \Sigma$，其中

$$\begin{array}{lll}\alpha(i) = j', & \alpha(j) = i', & \alpha(k) = k',\\ \alpha(i') = j, & \alpha(j') = i, & \alpha(k') = k,\\ \alpha(i_b) = j'_b, & \alpha(j_b) = i'_b, & \alpha(k_b) = k'_b,\\ \alpha(i'_b) = j_b, & \alpha(j'_b) = i_b, & \alpha(k'_b) = k_b,\end{array}$$

and

$$\begin{array}{lll}\beta(i) = i', & \beta(j) = k', & \beta(k) = j',\\ \beta(i') = i, & \beta(j') = k, & \beta(k') = j,\\ \beta(i_b) = i'_b, & \beta(j_b) = k'_b, & \beta(k_b) = j'_b,\\ \beta(i'_b) = i_b, & \beta(j'_b) = k_b, & \beta(k'_b) = j_b.\end{array}$$

我们还定义了反转奇偶切换函数 $R: \Sigma \to \Sigma$，其定义如下:

$$\begin{array}{lll} R(i) = i_b, & R(j) = j_b, & R(k) = k_b, \\ R(i') = i'_b, & R(j') = j'_b, & R(k') = k'_b, \\ R(i_b) = i, & R(j_b) = j, & R(k_b) = k, \\ R(i'_b) = i', & R(j'_b) = j', & R(k'_b) = k'. \end{array}$$

我们将这些函数扩展到 $\alpha: \Sigma^* \to \Sigma^*$, $\beta: \Sigma^* \to \Sigma^*$ 和 $R: \Sigma^* \to \Sigma^*$，使其能够对词进行运算，形式为 $\alpha(\varepsilon) = \beta(\varepsilon) = R(\varepsilon) = \varepsilon$ 和 $\alpha(uv) = \alpha(u)\alpha(v)$, $\beta(uv) = \beta(u)\beta(v)$，以及$R(uv) = R(u)R(v)$，其中 $u, v \in \Sigma^*$。

最后，我们定义函数 $g$: $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \to \Sigma$，将 $\mathbf{a}_p, b_p, c_p$ 三元组映射到 $\Sigma$ 的元素:

$$\begin{array}{lll} g(\mathbf{i},0,0) = i, & g(\mathbf{j},0,0) = j, & g(\mathbf{k},0,0) = k, \\ g(\mathbf{i},0,1) = i', & g(\mathbf{j},0,1) = j', & g(\mathbf{k},0,1) = k', \\ g(\mathbf{i},1,0) = i_b, & g(\mathbf{j},1,0) = j_b, & g(\mathbf{k},1,0) = k_b, \\ g(\mathbf{i},1,1) = i'_b, & g(\mathbf{j},1,1) = j'_b, & g(\mathbf{k},1,1) = k'_b. \end{array}$$

利用这些函数和向量算子，可以验证以下恒等式。请注意，左侧的 $\alpha$ 和 $\beta$ 是从 $\Sigma$ 到 $\Sigma$ 的函数，而右侧的 $\alpha$ 和$\beta$ 是向量算子:

$$\alpha(g(\mathbf{a}, b, c)) = g(\alpha\mathbf{a}, b, 1-c), \tag{1}$$
$$\beta(g(\mathbf{a}, b, c)) = g(\beta\mathbf{a}, b, 1-c), \tag{2}$$
$$R(g(\mathbf{a}, b, c)) = g(\mathbf{a}, 1-b, c). \tag{3}$$

根据 $\mu(i)$ 的定义，我们有

$$\mu^{n+1}(i) = \mu^n(i)\mu^n(j')\mu^n(i'_b)\mu^n(i)\mu^n(k_b)\mu^n(i'_b)\mu^n(i).$$

不难证明:

$$\mu^n(j') = \alpha(\mu^n(i)), \tag{4}$$
$$\mu^n(i'_b) = R(\beta(\mu^n(i))^R), \tag{5}$$
$$\mu^n(k_b) = R(\beta(\alpha(\mu^n(i)))^R). \tag{6}$$

将这些分别代入上述 $\mu^{n+1}(i)$ 的表述中，便得到一个形式上与 $A_{n+1}$ 的定义非常相似的表示。也就是说,

$$\mu^{n+1}(i) = \mu^n(i)\alpha(\mu^n(i))R(\beta(\mu^n(i))^R)\mu^n(i)R(\beta(\alpha(\mu^n(i)))^R)R(\beta(\mu^n(i))^R)\mu^n(i),$$

而,

$$A_{n+1} = (A_n, \alpha A_n, R\beta A_n, A_n, R\beta\alpha A_n, R\beta A_n, A_n).$$

现在我们可以证明这些构造是等价的。

**引理 2** 由态射构造生成的 $S$-游走 $W_\mu$，与由 *Gerver* 和 *Ramsey* 构造生成的 $S$-游走 $W$ 完全相同。

**证明**：对于整数 $n \geq 0$，令 $A_n = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{7^n})$ 如第 2.1 节中所述，其中对每个整数 $1 \leq p \leq 7^n$，$\mathbf{a}_p \in \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$，且 $\mathbf{a}_1 = \mathbf{i}$。根据 $A_{n+1}$ 的定义，对于 $7^n + 1 \leq p \leq 7^{n+1}$ 和 $q = ((p-1) \bmod 7^n) + 1$ 以及 $s = \lfloor \frac{p-1}{7^n} \rfloor$，我们可以写成：

$$\mathbf{a}_p = \begin{cases} \mathbf{a}_q & \text{if } s \in \{0,3,6\}, \\ \alpha \mathbf{a}_q & \text{if } s \in \{1\}, \\ \beta \mathbf{a}_{7^n - q + 1} & \text{if } s \in \{2,5\}, \\ \beta\alpha \mathbf{a}_{7^n - q + 1} & \text{if } s \in \{4\}, \end{cases} \tag{7}$$

其中 $\alpha$ 和 $\beta$ 是第 2.1 节中定义的向量算子。我们定义另外两个序列 $(b_p)_{p \geq 0}$ 和 $(c_p)_{p \geq 0}$，分别用于追踪反转次数的奇偶性，以及为得到 $A_n$ 的第 $p^{\text{th}}$ 项而应用的向量算子次数的奇偶性。同样，根据 $A_{n+1}$ 的定义，我们得到 $b_1 = 0$，并且，

$$b_p = \begin{cases} b_q & \text{if } s \in \{0,1,3,6\}, \\ 1 - b_{7^n - q + 1} & \text{if } s \in \{2,4,5\}. \end{cases} \tag{8}$$

类似地，我们有 $c_1 = 0$ 且，

$$c_p = \begin{cases} c_q & \text{if } s \in \{0,3,6\}, \\ 1 - c_q & \text{if } s \in \{1\}, \\ 1 - c_{7^n - q + 1} & \text{if } s \in \{2,5\}, \\ c_{7^n - q + 1} & \text{if } s \in \{4\}. \end{cases} \tag{9}$$

我们对 $n$ 使用归纳法，以证明对于所有满足 $7^n + 1 \leq p \leq 7^{n+1}$ 的正整数 $p$，都有 $g(\mathbf{a}_p, b_p, c_p) = \mu^{n+1}(i)[p]$，并且 $\phi(\mu^{n+1}(i)[p]) = \mathbf{a}_p$。

我们取 $n = 0$ 作为基例。直接应用 $\mathbf{a}_p$、$b_p$、$c_p$、$\mu(i)[p]$、$g$ 和 $\phi$ 的定义，可得 $g(\mathbf{a}_p, b_p, c_p) = \mu^{n+1}(i)[p]$，并且 $\phi(\mu^{n+1}(i)[p]) = \mathbf{a}_p$，其中 $7^0 + 1 \leq p \leq 7^1$。

现在假设对于 $n = m$，对所有满足 $7^m + 1 \leq p \leq 7^{m+1}$ 的正整数 $p$，都有$g(\mathbf{a}_p, b_p, c_p) = \mu^{m+1}(i)[p]$，并且 $\phi(\mu^{m+1}(i)[p]) = \mathbf{a}_p$。假设我们有满足 $7^{m+1} + 1 \leq p \leq 7^{m+2}$ 的 $p$。我们针对 $s = \lfloor \frac{p-1}{7^{m+1}} \rfloor$ 分四种情况讨论。在所有情况下，对于给定的 $p$ 值，我们取$q = ((p-1) \bmod 7^{m+1}) + 1$。

**情形 1：** $s \in \{0,3,6\}$。

由方程 7、8 和 9 可得

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_p &= \mathbf{a}_q,\\ b_p &= b_q,\\ c_p &= c_q.\end{aligned}$$

这意味着 $g(\mathbf{a}_p, b_p, c_p) = g(\mathbf{a}_q, b_q, c_q)$。由于 $7^m + 1 \le q \le 7^{m+1}$，根据归纳假设，我们有 $g(\mathbf{a}_q, b_q, c_q) = \mu^{m+1}(i)[q]$。根据 $\mu$ 的定义以及$s \in \{0, 3, 6\}$ 这一假设，我们得到 $\mu^{m+2}(i)[p] = \mu^{m+1}(i)[q]$。因此 $g(\mathbf{a}_p, b_p, c_p) = \mu^{m+2}(i)[p]$，且 $\phi(\mu^{m+2}(i)[p]) = \mathbf{a}_p$。

**情形 2：** $s \in \{1\}$。

由方程 7、8 和 9，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_p &= \alpha\mathbf{a}_q,\\ b_p &= b_q,\\ c_p &= 1 - c_q.\end{aligned}$$

这意味着 $g(\mathbf{a}_p, b_p, c_p) = g(\alpha\mathbf{a}_q, b_q, 1 - c_q)$。由于 $7^m + 1 \le q \le 7^{m+1}$，且 $s \in \{1\}$，我们得到 $\mu^{m+2}(i)[p] = \mu^{m+1}(j')[q]$。由方程 4，我们得到 $\mu^{m+1}(j')[q] = \alpha(\mu^{m+1}(i))[q] = \alpha(\mu^{m+1}(i)[q])$；根据归纳假设，这等于 $\alpha(g(\mathbf{a}_q, b_q, c_q)) = g(\alpha\mathbf{a}_q, b_q, 1 - c_q) = g(\mathbf{a}_p, b_p, c_p)$。因此 $g(\mathbf{a}_p, b_p, c_p) = \mu^{m+2}(i)[p]$，且 $\phi(\mu^{m+2}(i)[p]) = \mathbf{a}_p$。

**情形 3：** $s \in \{2, 5\}$。

设 $t = 7^{m+1} - q + 1$。由方程 7、8 和 9 可得

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_p &= \beta\mathbf{a}_{7^{m+1}-q+1} = \beta\mathbf{a}_t,\\ b_p &= 1 - b_{7^{m+1}-q+1} = 1 - b_t,\\ c_p &= 1 - c_{7^{m+1}-q+1} = 1 - c_t.\end{aligned}$$

这给出 $g(\mathbf{a}_p,\ b_p,\ c_p) = g(\beta\mathbf{a}_t,\ 1 - b_t,\ 1 - c_t)$。由于 $7^m + 1 \le q \le 7^{m+1}$ 且 $s \in \{2, 5\}$，可得 $\mu^{m+2}(i)[p] = \mu^{m+1}(i'_b)[q]$。由方程 5 可得

$$\mu^{m+1}(i'_b)[q] = R(\beta(\mu^{m+1}(i))^R)[q] = R(\beta(\mu^{m+1}(i)))[t] = R(\beta((\mu^{m+1}(i)[t])))$$

。根据归纳假设，这等于

$$R(\beta(g(\mathbf{a}_t, b_t, c_t))) = g(\beta\mathbf{a}_t, 1 - b_t, 1 - c_t) = g(\mathbf{a}_p, b_p, c_p).$$

因此 $g(\mathbf{a}_p,\ b_p,\ c_p) = \mu^{m+2}(i)[p]$ 且 $\phi(\mu^{m+2}(i)[p]) = \mathbf{a}_p$。

**情形 4：** $s \in \{4\}$。

令 $t = 7^{m+1} - q + 1$。由方程 7、8 和 9 可得

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_p &= \beta\alpha\mathbf{a}_{7^{m+1}-q+1} = \beta\alpha\mathbf{a}_t,\\ b_p &= 1 - b_{7^{m+1}-q+1} = 1 - b_t,\\ c_p &= c_{7^{m+1}-q+1} = c_t.\end{aligned}$$

这给出 $g(\mathbf{a}_p,\ b_p,\ c_p) = g(\beta\alpha\mathbf{a}_t,\ 1-b_t,\ c_t)$。由于 $7^m+1 \le q \le 7^{m+1}$ 和 $s \in \{4\}$，我们得到 $\mu^{m+2}(i)[p] = \mu^{m+1}(k_b)[q]$。由方程 6 可得

$$\mu^{m+1}(k_b)[q] = R(\beta(\alpha(\mu^{m+1}(i)))^R)[q] = R(\beta\alpha((\mu^{m+1}(i)[t]))).$$

根据归纳假设，这等于

$$R(\beta\alpha((g(\mathbf{a}_t, b_t, c_t)))) = g(\beta\alpha\mathbf{a}_t, 1-b_t, c_t) = g(\mathbf{a}_p, b_p, c_p).$$

因此 $g(\mathbf{a}_p, b_p, c_p) = \mu^{m+2}(i)[p]$ 且 $\phi(\mu^{m+2}(i)[p]) = \mathbf{a}_p$。

这涵盖了所有情 形，足以证明 $g(\mathbf{a}_p, b_p, c_p) = \mu^{m+1}(i)[p]$ 对于 $p \ge 1$ 以及 $\phi(\mu^{m+1}(i)[p]) = \mathbf{a}_p$。 ∎

# 3 共线点数量的上界

本节致力于证明定理1。我们采用了与 Gerver 和 Ramsey 证明其定理 2 [4] 时相似的论证。不过，我们通过使用计算机检验来验证结果，从而扩展了这些方法；若靠手工完成，这些检验并不切实际。首次使用计算机检验，是为了确定向量 $(\mathbf{v}_p)_{p\ge 0}$ 中指定长度的不同连续子序列的最小指标上界。

**引理3** 令 $I(n)$ 表示 $\lambda.$ 中长度为 $n$ 的最后一个新子词的索引。也就是说，满足不存在 $k<j$ 使得 $\lambda[k\colon k+n-1] = \lambda[j\colon j+n-1]$ 的最大索引 $j$。于是 $I(1) = 215$，且 $I(2) = 558$，并且 $I(n) \le 7\cdot I(\lceil n/7\rceil + 1)$ 对 $n \ge 3$ 成立。

**证明**：要证明 $I(1) = 215$，只需计算前 215 项，并注意到索引 215 是符号 $i_b$ 首次出现的位置，而字母表中的所有其他符号都在此之前出现。要证明 $I(2) = 558$，首先注意，对于所有 $a \in \Sigma$，都有$\mu(a) = aua$，其中某个 $u \in \Sigma^*$。这意味着，$\lambda$ 中出现的每个长度为 2 的子串，都是某个 $b \in \Sigma$ 对应的 $\mu(b)$ 中的子串。枚举某个 $b \in \Sigma$ 对应的$\mu(b)$ 中出现的所有长度为 2 的子串，并构造 $\lambda$ 的前 559 个符号后，我们发现索引 558 是 $j_b'i_b$ 首次出现的位置，而所有其他可能的长度为 2 的子串都在更早的索引处出现。

现在假设 $n \ge 3$。假设 $j$ 是长度为 $n$ 的词$w$ 在 $\lambda$ 中首次出现的位置。考虑 $\lambda$ 中从位置 $\lfloor j/7\rfloor$ 开始、长度为 $\lceil n/7\rceil + 1$ 的词 $u$，即 $u = \lambda[\lfloor j/7\rfloor\colon\ \lfloor j/7\rfloor + \lceil n/7\rceil]$。我们有 $w$ 是 $\mu(u)$ 的一个子串。这是因为$\lambda[7\lfloor j/7\rfloor\colon$ 根据 $\lambda$ 的定义，$7(\lfloor j/7\rfloor + \lceil n/7\rceil) + 6] = \mu(\lambda[\lfloor j/7\rfloor\colon\ \lfloor j/7\rfloor + \lceil n/7\rceil])$，并且我们有 $7\lfloor j/7\rfloor \le j$ 和 $j+n-1 \le 7(\lfloor j/7\rfloor + \lceil n/7\rceil) + 6$。由于 $u$ 首次出现的位置至多为 $I(\lceil n/7\rceil + 1)$，因此 $w$ 首次出现的位置至多为 $7\cdot I(\lceil n/7\rceil + 1)$。 ∎

注意，由于对于 $n \geq 3$ 有 $\lceil n/7 \rceil + 1 < n$，我们可以通过递归过程计算 $\lambda$ 中长度为 $n$ 的最后一个新子串的位置：该过程利用长度为 $\lceil n/7 \rceil + 1$ 的最后一个新子串的位置，并检查直到位置 $7 \cdot I(\lceil n/7 \rceil + 1)$ 的所有长度为 $n$ 的子串，从而求出最后一个新子串位置的上界。该过程实现为 `IndexOfLastNewSubword` [5]。

利用这个上界，我们可以证明，在 $(\mathbf{z}_p)_{p \geq 0}$中任意连续的 16807 个点里，至多有 6 个点共线。执行 `IndexOfLastNewSubword` 例程后，我们发现，最后一个长度为 16807 的新子词出现在索引 9,375,904 处。穷举 $(\mathbf{z}_p)_{p \geq 0}$ 中任意两点确定的所有直线，并统计每条直线上的点数后，我们发现至多有 6 个共线点。要验证这一断言，可以使用 Rust 编译并运行项目的 `count-collinear` 部分，例如在 Avoiding Collinearity 软件项目的 `count-collinear`sub- 子目录中运行 `cargo run --release 9375904` [5]。不过，单次运行会花费不少时间。作者历时两周验证了这一结果：在许多并行运行的云计算服务器上，处理序列的各个独立分块，总计耗费约 2 年 9 个月的 CPU 时间。出于性能考虑，并且为了使用内置的轻量级 128 位整数类型，这部分项目使用 Rust 实现；这些整数类型可用于为任意两点确定的直线生成精确的规范表示，同时避免整数溢出。计算结果的数据转储可在 Avoiding Collinearity 软件项目根目录下的 `collinearity data.csv` 文件中找到 [5]。

**引理 4** 在 $16807 = 7^5$ 个连续指标中，$(\mathbf{z}_p)_{p \geq 0}$ 至多有 6 个共线点。

现在我们按照 Gerver 和 Ramsey [4]的方法继续。定义 $C_n^0 = \{\mathbf{z}_0, \ldots, \mathbf{z}_{7^n}\}$，更一般地，令 $C_n^m = \{\mathbf{z}_{m7^n}, \ldots, \mathbf{z}_{(m+1)7^n}\}$。我们知道，将 $C_n^0$投影到垂直于 $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 的平面上后，投影落在一个梯形内，该梯形的底边为 $4^n\gamma$，底角为 $\pi/3$，邻边长度为 $4^n\gamma/3$，且 $\mathbf{z}_0$ 和 $\mathbf{z}_{7^n}$ 位于底边的两端。这样的梯形称为阶为 $n$ 的梯形；我们用记号 $T_n^m$ 表示所有包含 $C_n^m$投影的阶为 $n$ 的梯形内的点集。根据 $A_{n+1}$ 的定义可知，七个阶为 $n$ 的梯形可以拼合在一个阶为 $n+1$的梯形内，如图 2 所示。

为了更直观地了解这些梯形如何组合在一起，图3展示了一个阶数为 $n$的梯形，内部有 7 个阶数为 $n-1$的梯形，每个内部又有 7 个阶数为 $n-2$的梯形，每个内部再有 7 个阶数为 $n-3$ 的梯形。这种特定的排列也对应于梯形 $T_3^0$、$T_2^0$、……、$T_2^6$、$T_1^0$、……、$T_1^{48}$、$T_0^0$、……、$T_0^{342}$。该图由以下命令生成：

`DrawTrapezoids double 343 /home/finn/traps.png --recursive`。

我们将这 6 个梯形的不同方向记为 $a$，$b$，$c$，$d$，$e$，$f$。利用

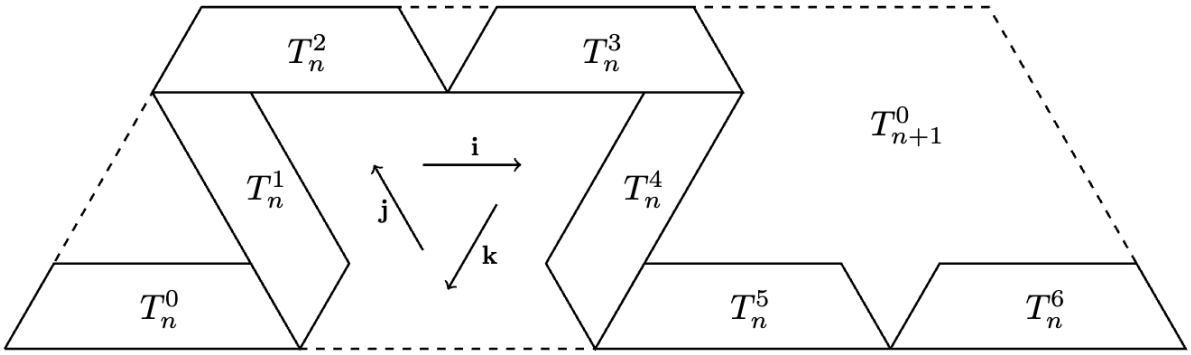



图 2：阶为 $n$ 的梯形，位于阶为 $n+1$ 的梯形内。转载自 Gerver 和 Ramsey [4] 的图1。

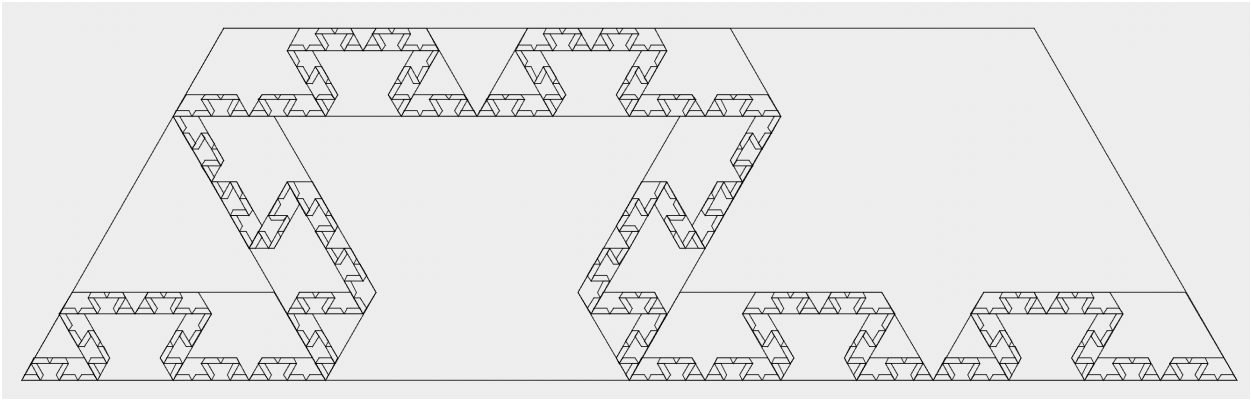


图3：阶数从 $n$ 到 $n-3$ 的梯形示例。

输出映射 $\psi$： $\Sigma \to \{a, b, c, d, e, f\}$,

$$\begin{aligned}
\psi(i) = \psi(i'_b) &= a \\
\psi(i') = \psi(i_b) &= b \\
\psi(j) = \psi(j'_b) &= c \\
\psi(j') = \psi(j_b) &= d \\
\psi(k) = \psi(k'_b) &= e \\
\psi(k') = \psi(k_b) &= f,
\end{aligned}$$

图4 展示了这些方向。我们可以证明，梯形 $T_n^m$ 的方向为 $\psi$（$\lambda[m]$）。

**引理 5** 梯形 $T_n^m$ 的方向由 $\psi(\lambda[m])$ 给出。

**证明**：我们通过对 $n$ 使用归纳法来证明这一点。对于 $n = 0$，观察到，将 **i** 投影到垂直于 **i** + **j** + **k** 的平面上后，其起点和终点都落在两个梯形 $a$

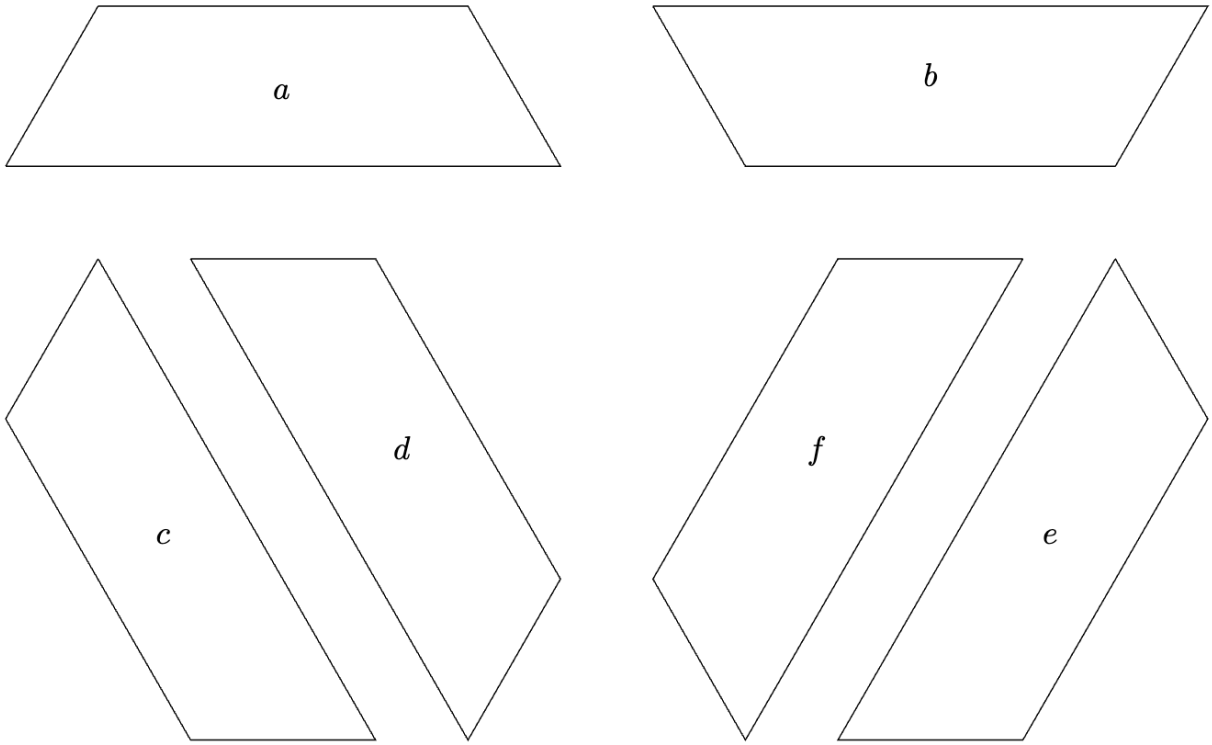



图4：符号 $a$、$b$、$c$、$d$、$e$、$f$对应的梯形方向。

和 $b$ 内。对 $\mathbf{j}$,$\mathbf{k}$ 以及梯形 $c, d$ 和 $e, f$，分别也有类似的结论。选择方向 $\psi(\lambda[m])$ 与此相容，因此基例对所有 $m$ 都成立。在归纳步骤中，我们可以考察每个 $\sigma \in \{i, j, k, i', j', k', i_b, j_b, k_b, i'_b, j'_b, k'_b\}$，并观察到，通过绘出各个情形，由 $\psi(\mu(\sigma))$ 给出的梯形序列位于一个方向为 $\psi(\sigma)$ 的更大梯形内。因此，梯形 $T_{n+1}^m$ 与梯形 $T_n^m$ 的方向相同。 ∎

对于平面上的两个点 $p_1$、$p_2$，令 $d(p_1、\ p_2)$ 表示 $p_1$与 $p_2$之间的欧几里得距离。对于两个同阶梯形 $T_n^a$和 $T_n^b$，我们将它们之间的最小距离定义为 $d(T_n^a、\ T_n^b) = \min\{d(p_a、\ p_b) : p_a \in T_n^a \text{and } p_b \in T_n^b\}$ and，并将它们之间的最大距离定义为 $D(T_n^a、\ T_n^b) = \max\{d(p_a、\ p_b) : p_a \in T_n^a \text{and } p_b \in T_n^b\}$。

设 $p$、$q$、$r$、$s$、$n$、$m$ 为满足 $1 \le n \le m$ and $7^n \le |p - q| < 7^{n+1}$and $7^m \le |r - s| < 7^{m+1}$ 的正整数。我们证明，对所有这样的 $m$、$n$、$p$、$q$、$r$、$s$，若由 $\mathbf{z}^p$、$\mathbf{z}^q$、$\mathbf{z}^r$、和 $\mathbf{z}^s$ 给出的点共线，则有 $m - n \le 3$。$n = 0$ 的情形另行处理。

考虑每个 $c \in \{7, 8, \ldots, 48\}$，并假设 $c7^n_7 \le |p - q| < (c+1)_7{}^{7^n}$。不失一般性，假设 $p < q$。那么，如果$\mathbf{z}^p$ 的投影位于 $T_{n-1}^k$，则$\mathbf{z}^q$的投影要么位于 $T_{n-1}^{k+c}$，要么位于 $T_{n-1}^{k+c+1}$。

然后，我们可以相对于 $c$ 和 $n$，为 $\|\mathbf{z}^p - \mathbf{z}_q\|^\perp$ 定义上界和下界。

$$\ell(n,c) = \min_{k\in\mathbb{N}}\{d(T_{n-1}^k, T_{n-1}^{k+c}), d(T_{n-1}^k, T_{n-1}^{k+c+1})\}, \tag{10}$$

$$h(n,c) = \max_{k\in\mathbb{N}}\{D(T_{n-1}^k, T_{n-1}^{k+c}), D(T_{n-1}^k, T_{n-1}^{k+c+1})\}. \tag{11}$$

那么我们有，若 $c\cdot 7^n \le |p-q| < (c+1)7^n$，则 $\ell(n,\ c) \le \|\mathbf{z}^p - \mathbf{z}_q\|^\perp \le h(n,\ c)$。

为计算 $\ell(n,\ c)$ 和 $h(n,\ c)$，首先注意到，阶为 $n$ 的梯形与阶为 $n-1$ 的梯形全等，且阶为 $n$ 的梯形的底边长度是阶为 $n-1$ 的梯形的底边长度的四倍。因此，我们得到 $\ell(n,\ c) = 4^{n-1}\cdot\ell(1,\ c)$ 和 $h(n,\ c) = 4^{n-1}\cdot h(1,\ c)$。

**引理 6** 对于正整数 $j$、$k$ 和整数 $m \ge 0$，若 $\lambda[j:\ j+m] = \lambda[k:\ k+m]$，则 $d(T_0^j, T_0^{j+m}) = d(T_0^k, T_0^{k+m})$ 且 $D(T_0^j, T_0^{j+m}) = D(T_0^k, T_0^{k+m})$。

**证明**：根据引理 5，阶为 0 的梯形的方向由 $\lambda$ 中的符号唯一确定。由于指标 $j$ 和 $j+m$ 之间的序列 $(\mathbf{v}^p)_{p>=1}$ 与指标 $k$ 和 $k+m$ 之间的序列相同，因此梯形 $T_0^k,\dots,T_0^{k+m}$ 分别是梯形 $T_0^j,\dots,T_0^{j+m}$ 沿同一向量平移后的结果。平移保持距离不变，因此 $d(T_0^j, T_0^{j+m}) = d(T_0^k, T_0^{k+m})$，且 $D(T_0^j, T_0^{j+m}) = D(T_0^k, T_0^{k+m})$。 ∎

因此，为了计算 $\ell(n,c)$ 和 $h(n,c)$，我们只需计算对应于 $\lambda$ 中长度为 $c+2$ 的不同子词端点的 0 阶梯形对之间的距离。因此，我们可以写成

$$\ell(1,c) = 4^{n-1}\cdot \min_{0<=k<=I(c+2)}\{d(T_0^k, T_0^{k+c}), d(T_0^k, T_0^{k+c+1})\}, \tag{12}$$

$$h(1,c) = 4^{n-1}\cdot \max_{0<=k<=I(c+2)}\{D(T_0^k, T_0^{k+c}), D(T_0^k, T_0^{k+c+1})\}. \tag{13}$$

现在假设 $d\cdot 7^m \le |r-s| < (d+1)7^m$，其中 $d\in\{7,\dots,48\}$。那么我们有 $\ell(m,d) \le \|\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_s\|^\perp \le h(m,d)$。假设 $\mathbf{z}^p$、$\mathbf{z}^q$、$\mathbf{z}^r$、$\mathbf{z}^s$ 共线。那么必有

$$\frac{\|\mathbf{z}_p - \mathbf{z}_q\|^\perp}{\|\mathbf{z}_p - \mathbf{z}_q\|^\parallel} = \frac{\|\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_s\|^\perp}{\|\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_s\|^\parallel},$$

因此，

$$\frac{\|\mathbf{z}_p - \mathbf{z}_q\|^\perp}{|p-q|} = \frac{\|\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_s\|^\perp}{|r-s|}.$$

我们有

$$\frac{7\ell(n,c)}{(c+1)7^n} \leq \frac{\|\mathbf{z}_p - \mathbf{z}_q\|^{\perp}}{|p-q|} < \frac{7h(n,c)}{c \cdot 7^n}, \tag{14}$$

$$\frac{7\ell(m,d)}{(d+1)7^m} \leq \frac{\|\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_s\|^{\perp}}{|r-s|} < \frac{7h(m,d)}{d \cdot 7^m}. \tag{15}$$

取 14 中最左侧的表达式和 15 中最右侧的表达式，我们得到

$$\frac{7\ell(n,c)}{(c+1)7^n} < \frac{7h(m,d)}{d \cdot 7^m} \tag{16}$$

$$\frac{7^m}{7^n} < \frac{(c+1)h(m,d)}{d \cdot \ell(n,c)} \tag{17}$$

$$7^{m-n} < \frac{(c+1)4^{m-n}h(n,d)}{d \cdot \ell(n,c)} \tag{18}$$

$$\left(\frac{7}{4}\right)^{m-n} < \frac{(c+1)h(n,d)}{d \cdot \ell(n,c)} \tag{19}$$

$$= \frac{(c+1)h(1,d)}{d \cdot \ell(1,c)}. \tag{20}$$

By 考虑所有数对 $c$， $d \in \{7,\ldots,48\}$，我们发现最大的值为

$$\frac{(c+1)h(1,d)}{d \cdot \ell(1,c)}$$

is

$$\frac{(9+1)\sqrt{964}}{7\sqrt{28}} \approx 8.38226643996,$$

因此，当然小于 9。这是通过使用命令断言的

```
AssertBoundedDistanceRatio 7 48 wholeAndRt3 9 0,
```

来自 Java 实现 [5]。因此我们有 $(7/4)^{m-n} < 9 < (7/4)^4 \approx 9.379$。所以 $m-n<4$，但由于 $m$ 和 $n$ 是整数，我们知道 $m-n \leq 3$。

这意味着 $W$ 中至多有 $7^4$ 个共线点。我们可以假设 $W$ 中有超过 $7^4$ 个共线点，并由此导出矛盾来证明这一点。令 $p$， $q$ 为 $W$ 中使 $|p-q|$ 最小的点的指标。那么存在 $W$ 中点的指标 $r$， $s$，使得 $7^4|p-q| \leq |r-s|$。令 $n$ 为一个满足 $7^n \leq |p-q| < 7^{n+1}$ 的整数，并令 $m$ 为一个满足 $7^m \leq |r-s| < 7^{m+1}$ 的整数。那么我们有 $7^{n+4} < 7^{m+1}$，从而得到 $m-n>3$。如果 $n>0$，那么这就构成矛盾。

但我们可以进一步改进这个论证。假设 $X$ 是 $W$中至少包含 2 个共线点的集合。令 $t$ 为满足以下条件的最小整数：对于所有$\mathbf{z}_r$， $\mathbf{z}_s \in X$，都有 $|r-s| < 7^t$。

那么存在$\mathbf{z}_p$，$\mathbf{z}_q \in X$ 使得 $7^{t-1} \leq |p-q| < 7^t$。若 $t \leq 5$，则根据引理 4，至多有 $7^5 \cdot \frac{6}{7^5} = 6$ 个共线点属于 $X$。若 $t > 5$，则我们知道， $X$ 中的任意两点的投影都不会落在同一个 $n-4$阶梯形内。若情况如此，则存在点$\mathbf{z}_r$，$\mathbf{z}_s$ 使得 $7^{t-5} \leq |r-s| < 7^{t-4}$。但比较指数后，我们得到（$t-1$） −（$t-5$） $=4$，这与上面推导出的 $m-n \leq 3$ 不等式矛盾。

因此，如果我们考察阶为 $n-4$ 的梯形被放置在同一个阶为 $n$ 的梯形内，或相邻的阶为 $n$ 的梯形内的所有方式，并找出一条直线最多能与多少个阶为 $n-4$ 的梯形相交，就能得到 $X$ 中共线点数量上限的一个界。请注意，在考虑相邻的阶为 $n$ 的梯形时，我们知道，直线相交的第一个阶为 $n-4$ 的梯形与最后一个阶为$n-4$ 的梯形的索引之差至多为 $7^4$,；否则，这就意味着存在共线点 $\mathbf{z}_p$，$\mathbf{z}_q$，其中$|p-q| \geq 7^{n+1}$。

根据引理 5，梯形方向的序列与它们的阶无关， $n$。因此，我们可以检查 $7^4$ 个连续的 0 阶梯形的所有可能构型，并统计一条直线最多能与多少个梯形相交。

穷举所有可能的配置，得出一条直线最多与 188 个 $n-4$ 阶梯形相交。这一结论由 Java 实现 [5] 通过以下命令验证：

```
CountCollinearTrapezoids 2401 wholeAndRt3。
```

因此， $|X|$ $\leq 188$ 并且在 $W$中不存在 189 个共线点，适用于 $n > 0$的情形 .

现在，我们回到 $n = 0$的情形。也就是说， $7^0 = 1 \leq |p-q| < 7 = 7^1$。为了处理这种情形，我们分别为 $\ell(0,\ c)$ 和 $h(0,\ c)$给出定义，其中 $c \in \{1, \ldots, 6\}$ 的距离上界更紧。我们不再研究梯形，而是直接研究点。因此，我们将 $\ell(0,\ c)$（分别将 $h(0,\ c)$）取为满足 $|p-q| = c$的 $\|\mathbf{z}_p - \mathbf{z}_q\|^\perp$ 可能的最小值（分别为最大值）。这些数值见表 1。

| $\lvert p-q\rvert$ | $\ell(0, \lvert p-q\rvert)$ | $h(0, \lvert p-q\rvert)$ |
|---|---|---|
| 1 | $\gamma$ | $\gamma$ |
| 2 | $\gamma$ | $2\gamma$ |
| 3 | $\sqrt{3}\gamma = \sqrt{2}$ | $\sqrt{3}\gamma = \sqrt{2}$ |
| 4 | $\gamma$ | $\sqrt{7}\gamma$ |
| 5 | $\gamma$ | $\sqrt{13}\gamma$ |
| 6 | $\sqrt{3}\gamma = \sqrt{2}$ | $2\sqrt{3}\gamma = 2\sqrt{2}$ |

表 1： $\ell(0, |p-q|)$ 和 $h(0, |p-q|)$ 的数值，其中 $1 \leq |p-q| < 7$。

假设 $7^m \leq |r-s| < 7^{m+1}$ 与 $\mathbf{z}_p$、$\mathbf{z}_q$、$\mathbf{z}_r$、$\mathbf{z}_s$ 共线。因此存在某个

$d \in \{7, \ldots, 48\}$ 使得 $d \cdot 7^m \leq |r-s| < (d+1) \cdot 7^m$。根据 $\mathbf{z}_p$、$\mathbf{z}_q$、$\mathbf{z}_r$、$\mathbf{z}_s$ 的共线性，我们有

$$\frac{\|\mathbf{z}_p - \mathbf{z}_q\|^{\perp}}{|p-q|} = \frac{\|\mathbf{z}_p - \mathbf{z}_q\|^{\perp}}{\|\mathbf{z}_p - \mathbf{z}_q\|^{\parallel}} = \frac{\|\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_s\|^{\perp}}{\|\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_s\|^{\parallel}} = \frac{\|\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_s\|^{\perp}}{|r-s|}.$$

我们可以如下界定最左侧和最右侧的表达式：

$$\frac{\ell(0, |p-q|)}{|p-q|} \leq \frac{\|\mathbf{z}_p - \mathbf{z}_q\|^{\perp}}{|p-q|} \leq \frac{h(0, |p-q|)}{|p-q|},$$
$$\frac{7 \cdot \ell(m,d)}{(d+1) \cdot 7^m} \leq \frac{\|\mathbf{z}_r - \mathbf{z}_s\|^{\perp}}{|r-s|} < \frac{7 \cdot h(m,d)}{d \cdot 7^m}.$$

于是得到

$$\frac{\ell(0, |p-q|)}{|p-q|} < \frac{7 \cdot h(m,d)}{d \cdot 7^m},$$
$$7^{m-1} < \frac{|p-q| \cdot h(m,d)}{\ell(0, |p-q|) \cdot d} \leq \frac{5 \cdot h(m,d)}{\gamma \cdot d} = \frac{5 \cdot 4^{m-1} \cdot h(1,d)}{\gamma \cdot d},$$
$$\left(\frac{7}{4}\right)^{m-1} < \frac{5 \cdot h(1,d)}{\gamma \cdot d}.$$

计算 $h_{(1,d)}\, d$ 的所有数值，其中 $d \in \{7, \ldots, 48\}$，我们发现，对于所有 $d$，都有 $\frac{5 \cdot h(1,d)}{\gamma \cdot d} \leq 10\frac{\sqrt{964}}{21} < 14.89 < \left(\frac{7}{4}\right)^5 = 16.4130859375$。Java 命令 [5] 可验证这一点

```
AssertBoundedMaxDistance 7 48 wholeAndRt3 1 2。
```

该命令处理的是放大后的梯形，其底边长度为 6，而非 $4\gamma$。此外，该命令未考虑 $\frac{5}{\gamma}$ 乘法因子。不过，我们可以选择 $1 + 2\sqrt{3}$ 的界定值，并考虑必要的缩放调整，从而观察到

$$(1 + 2\sqrt{3}) \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot \gamma}{6 \cdot \gamma} < 14.89.$$

实现中采用底边长度为 6 的原因见第4节。

因此 $m-1 < 5$，得到 $m-1 \leq 4$，从而 $m \leq 5$。所以在这种情况下，我们有 $m-n \leq 5$，这意味着 $W$ 中至多有 $7^6$ 个共线点。然而，根据引理 4，在任意 $16807 = 7^5$ 个连续指标中，至多有 6 个共线点。如果共线点多于 $7^6 \cdot \frac{6}{7^5}$ 个，那么必定存在一对点的指标 $r, s$，它们位于 $W$ 中，且满足 $7^6 \leq |r-s| < 7^7$。但这会违反 $m - n \leq 5$ 不等式，因为我们假设存在指标为 $p, q$ 的点满足 $1 \leq |p-q| < 7$。因此，在这种情况下，$W$ 中至多有 $7^6 \cdot \frac{6}{7^5} = 42$ 个共线点。

综上考虑所有情况，$W$ 中最多有188个共线点，因此在 $(\mathbf{z}_p)_{p \geq 0}$ 中不存在189个共线点。定理1的证明至此完成。

# 4 算法与实现

在介绍计算距离比和统计共线梯形的一些具体细节之前，我们先对各种命令的实现方法作一些总体说明。

Java 命令的代码 [5] 编写时优先考虑提高正确性的可信度，而非效率和性能。具体而言，几何计算支持以多种方式表示数字。由于所考虑的点具有无理数坐标，因此提供了一种数字表示方式，可在整个计算过程中保留根式，并在必要时于最后使用有理数分数进行适当的上近似或下近似，从而求得根式的值。为了增强对实现正确性的信心，项目中包含了许多单元测试，并实现了多种数制以供比较。也就是说，除了精确表示外，还实现了浮点表示的支持，并通过将所用数制抽象化，使同一算法实现也能使用浮点表示。此外，在精确表示中，所有算术运算都会检查是否发生整数溢出。使用精确表示时，如果运算导致整数溢出，程序便会停止执行。

为了精确表示，选择将梯形的尺寸放大 $6/(4\gamma)$ 倍，使最小的梯形底边长度为 6，而不是 $4\gamma$。这样一来，所有需要的坐标都可以表示为整数与 $\sqrt{3}$ 的整数倍之和。这就是在实现中使用 `WholeAndRt3`表示法的原因。为保持一致， `DoubleRep` 数系也使用尺寸相同的梯形。 `WholeNumber` 数系无法精确表示尺寸相同的梯形，但可以通过将所有 $y$ 坐标压缩 $\sqrt{3}$ 倍，以保留直线交点和共线性的方式表示梯形序列。因此，它可用于统计共线梯形，但不能用于处理距离比。另一方面， `DoubleRep` 表示法的精度不足，无法用于统计共线梯形的方法，但可用于确定距离比的界限。要证明这些运算不会引入过大的误差，需要进行一些数值分析。对于 `WholeAndRt3`命令，则无需进行数值分析；因此，第 3 节中的结果采用 `WholeAndRt3` 命令而非 `DoubleRep`来陈述。

另一方面，用于统计 $W$ 的连续子序列中共线点数量的 Rust `count collinear` 命令是为性能而编写的。该算法实现在路径为 `cargo/count-collinear/src/compute.rs`[5] 的 Rust 文件中。 `cargo` 项目中的其余代码用于协调并行化计算。

## 4.1 计算距离比

实现了三个用于断言距离比上界的命令。这些命令共同断言，对于 $c$、 $d$ 或 $c$ 和 $d$ 的某个给定整数值范围，$\ell_{1\,c}^{c+1}(\,,\,)$、 $h(1,d)_{\,d}$ 以及 $(c+1)h(1,d)_{\,d\cdot\ell(1,c)}$ 各自的上界。要找出 $(c+1)h(1,d)_{\,d\cdot\ell(1,c)}$ 对于 $i \le c, d \le j$ 的最大值，我们可以分别求出 $(c+1)\,\ell(1,c)$ 和 $h(1,d)_{\,d}$ 的最大值，再将这两个最大值相乘。

我们分别使用上文第 3 节中方程 12 和 13 给出的定义，计算 $\ell(1,c)$ 和 $h(1,d)$。为此，我们首先按照第 3 节开头所述的步骤，计算需要检查梯形之间距离时所需的最大指标。然后，只需遍历截至该最大指标的所有梯形索引，并计算相隔所需指标数的梯形中各点之间的最小距离或最大距离，该指标数由 $c$ or $d$ 给出。两个不同梯形中一对点之间的最小距离，可通过考察每个梯形顶点，求出其到另一个梯形中每条梯形边的最短距离，再取这些距离中的最小值来确定。两个不同梯形中一对点之间的最大距离，则只需考察梯形顶点之间的点对，并取这些顶点间距离中的最大值。

为避免引入精度误差，不计算欧几里得距离运算中产生的平方根。所有必要的比较都改为使用距离的平方。

## 4.2 共线梯形的计数

为计算被同一条直线相交、且指标间隔至多为 2401 的梯形的最大数量，我们将 $\lambda$ 中长度为 2401 的不同子词所对应的每个梯形的每个顶点都视为枢轴顶点，并采用径向线扫描方法。对于给定的枢轴顶点，我们首先找出所有与该枢轴顶点所属梯形的指标间隔不超过 2401 的梯形。接着，设想一条以该枢轴顶点为起点的半无限直线，从初始位置开始，绕枢轴顶点连续旋转一周，并找出每个梯形对应的进入和离开事件顶点，分别对应扫描线首次与梯形相交以及不再与梯形相交的时刻。为此，我们根据每个梯形的 4 个顶点相对于枢轴顶点位置和扫描线初始位置的角度进行排序。排序中最小的顶点是进入顶点，最大的顶点是离开顶点。当然，如果梯形与初始扫描线相交，情况则不同。如果梯形包含枢轴顶点，则在针对该枢轴顶点的所有计数中都将其计入。而如果初始扫描线与梯形相交，我们可以先将扫描线旋转 180 度，再根据各点相对于扫描线的位置进行排序，从而确定相应的进入和离开顶点，并将该梯形计入初始相交梯形数量。确定所有进入和

离开顶点后，我们可以根据它们相对于扫描线初始位置的顺序统一排序；若出现并列，则将进入顶点排在离开顶点之前，然后依次遍历。每遇到一个进入顶点，就将计数器加一；每遇到一个离开顶点，就将计数器减一。然而，由于我们要找出指标间隔至多为 2401 的梯形的最大数量，而且单个枢轴顶点最多对应 4803 个梯形，因此不能只使用一个计数器。我们改用线段树数据结构，维护每个大小为 2401 的指标区间内“活跃”梯形的数量。数据结构的详细说明可参见 Perparata 和 Shamos [8], 。线段树的每个叶节点对应一个大小为 2401 的区间，并且每个节点中都存储一个计数器。当我们遇到索引为 $i$ 的梯形的进入顶点时，就将包含该索引的每个大小为 2401 的区间对应的计数器加一。同样，当我们遇到索引为 $i$ 的某个梯形的离开顶点时，就将包含该索引的每个大小为 2401 的区间对应的计数器减一。每次执行加一操作后，我们都会查询树中存储的最大值，并将其与迄今为止出现的最大计数值比较；如有必要，就更新最大值。线段树数据结构能够高效地完成这些操作。

虽然 $\lambda$ 中最后一个长度为 2401 的不同子词的指标是 1，339，415，但我们只需统计指标对应于不同子词的共线梯形数量。不过，我们还可以更进一步。首先请注意，我们关注的只是不同的梯形序列，而不是 $\lambda$ 中的子词。其次，由于共线性在旋转和反射下保持不变，我们可以在对旋转和反射进行归一化处理后，将搜索范围限制为长度为 2401 的不同梯形序列。为此，我们将 6 种可能的单个梯形方向分别对应于置换群$S_3$ 的元素，并通过对梯形序列应用与其首个元素的逆元相对应的群作用，将序列归一化，使其始终以恒等元开头。对于梯形方向 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f$，我们得到表 2 所示的凯莱表。

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
| $b$ | $b$ | $a$ | $d$ | $c$ | $f$ | $e$ |
| $c$ | $c$ | $d$ | $f$ | $e$ | $b$ | $a$ |
| $d$ | $d$ | $c$ | $e$ | $f$ | $a$ | $b$ |
| $e$ | $e$ | $f$ | $b$ | $a$ | $c$ | $d$ |
| $f$ | $f$ | $e$ | $a$ | $b$ | $d$ | $c$ |

表 2：置换群 $S_3$ 的凯莱表，其元素对应于梯形方向。

例如，子词 $j'i'_bik_bi'_bi$ 对应于梯形序列 $\psi(j'i'_bik_bi'_bi) = daafaa$。 $d$ 的逆是 $e$，因此，将与 $e$ 对应的群运算应用于梯形序列中的每个元素，我们得到规范化表示 $aeedee$。通过这种方式缩小搜索范围，在搭载 macOS 11.6 版的 2020 款 M1 MacBook Air 上，计算最多相隔 2401 个指标且被同一条直线相交的梯形的最大数量，只需约 30 分钟即可完成。

为进行验证，我们将该算法的输出与一个简单得多的实现进行了比较。后者考察由梯形顶点对确定的所有直线，并统计被每条直线相交的梯形数量。在数千个规模较小的案例中比较两者的输出后，未发现结果存在任何差异。

### 4.3 统计共线点

用于计算 $S$ 步行的前 $n$ 项中共线点最大数量的算法，会遍历所有点对，并为穿过这些点的无限直线获取一种规范表示。对于遇到的每条规范直线，都会维护一个计数器，记录位于该规范直线上的点对数量。实现中发现，使用哈希映射数据结构比使用有序映射性能更高。遍历所有点对时，只需持续跟踪位于同一直线上的点的当前最大数量。遍历完所有点对后，即可报告这一数值。

## 5 进一步改进上界

在讨论如何改进上界之前，值得指出的是，对于迄今为止所讨论的 $S$ 步行，共线点的数量至少为 6。以下是首个包含 6 个共线点的例子：

(46,40, 23) 位于索引
109,(48,41, 24) 位于索引
113,(64,49, 32) 位于索引
145,(66,50, 33) 位于索引
149,(82,58, 41) 位于索引
181,(84,59, 42) 位于索引
185.

请注意，这大于 Gerver 和 Ramsey 在其定理 3 [4] 的陈述之前最后一段中所说的值 3；他们认为，这可能是此 $S$-步行中共线点数量的真实值。

为了计算引理 4 的结果，我们确定在前 1000 万个指标中不存在 7 个共线点。这似乎有力地表明，这个 $S$-步行中的共线点最多为 6 个。实际上，即使拥有更多计算资源，使用这些方法似乎也很难证明上界为 6。对于 $n = 0$ 情形，我们得到的上界是至多 42 个共线点。然而，要改进 $n > 0$ 情形，就必须将指数差的上界至少改进到 $m - n \leq 2$。这会使共线梯形计算更容易，并且使用 `CountCollinearTrapezoids 343 wholeAndRt3` 可得至多 62 个共线点的结果。然而，

没有理由将相交梯形的数量限制在二维范围内。可以在三维空间中考察该序列的点，并证明它们位于阶为 $n$ 的梯形棱柱中。

关于确定一组凸多面体是否存在刺线 的问题已得到深入研究；例如，参见 [1, 2, 6]。一组凸多面体的刺线是指一条无限直线，它与该组中每个多面体的至少一个面相交。为识别刺线而设计的一些算法，可以调整后用于寻找与集合中数量最多的多面体相交的直线。例如，对于一组顶点总数为 $n$ 的凸多面体，Avis 和 Wenger [2] 所描述的算法会枚举 $O(n^3)$ 条刺线候选直线。与最多数量多面体相交的直线必定是这些刺线候选直线之一。这些候选直线可在 $O(n^3 \log n)$ 时间内找到。只需逐一尝试每条候选直线，并统计其与集合中多少个多面体相交，即可得到一个 $O(n^4 \log n)$ 算法，找出与单一直线相交的集合中多面体的最大数量。对于这里涉及的梯形棱柱这一特殊情况，或许还能进一步改进算法。然而，对于指标相差至多 2401 的梯形棱柱，即使是 $O(n^3)$ 算法也需要过多的计算资源。另一方面，针对所有可能的 343 个梯形棱柱序列，计算指标相差至多 343 的梯形棱柱数量，或许是可行的。为了获得将搜索范围限制在连续 343 个梯形内所需的 $m - n \leq 2$ 界，我们需要对 $7^n$ 至 $7^{n+1}$ 以及 $7^m$ 至 $7^{m+1}$ 进行足够精细的划分，从而断言上述距离比小于 $(7/4)^3 = 5.359375$。采用与上文相同的策略，考虑所有成对的 $c,\ d \in \{49, \ldots, 342\}$，可得界 $\frac{239\sqrt{14400}}{54\sqrt{7168}} \approx 6.27316$。进一步扩展到所有成对的 $c,\ d \in \{343, \ldots, 2400\}$，可得界 $\frac{1661\sqrt{236196}}{394\sqrt{115492}} \approx 6.02884$。受限于现有方法和实现，无法进一步扩展至 $c,\ d \in \{2401, \ldots, 16806\}$，因为所需考察的长度为 16807 的不同梯形序列数量过于庞大。

这仍留下了一些自然的开放问题。首先，对于这个特定序列，上界能否改进到至多 6 个共线点？其次，本文给出的结果只适用于一个特定序列。通过为 $S \subset \mathbb{Z}^3$ 选择另一种 $S$-游走，能否证明存在一个至多含有 $k < 6$ 个共线点的无限 $S$-游走？最后，如果无法在三维情形下证明这一点，那么是否存在一个具有 $S \subset \mathbb{Z}^n$ 的 $S$-游走，其中没有 3 个共线点？如果存在，实现这一点所需的最小 $n$ 是多少？

## 致谢

我谨向 Alexander Bailey、Clayton Goes、Bradley Kleiboer 以及 RideCo 的其他几位（匿名）员工致谢，感谢他们出资帮助支付用于证明引理 4 的服务器费用。我还要感谢 Robin Lidbetter 借出实体计算资源，供证明引理 4 之用。最后，我要感谢 Luke Schaeffer 和 Jeffrey Shallit 提供宝贵的评论和建议。

# 参考文献

[1] Pankaj K. Agarwal。“三维凸多面体的刺穿直线”。载于：计算几何 4.4（1994），第 177–189 页。[2] David Avis 和 Rephael Wenger。“空间中的多面体直线截线”。载于：离散与计算几何 3（1988），第 257–265 页。[3] Joseph Gerver。“平面上共线点较少的长步行”。载于：《太平洋数学杂志》 83.2（1979），第 349–355 页。[4] Joseph Gerver 和 Lawrence Ramsey。“关于某些格点序列”。载于：《太平洋数学杂志》 83.2（1979），第 357–363 页。[5] Thomas F. Lidbetter。避免共线。版本 1.0.0。2023 年 1 月。 URL： https://github.com/FinnLidbetter/avoiding-collinearity。[6] Frank Nielsen。“高维空间中快速刺穿盒子”。载于：理论计算机科学 246.1-2（2000），第 53–72 页。[7] OEIS Foundation Inc. 在线整数数列百科全书。2023 年以电子形式发表于 http://oeis.org。[8] Franco P. Preparata 和 Michael I. Shamos。计算几何：导论。柏林、海德堡：施普林格出版社，1985 年。[9] Luke Schaeffer。“私人通信”。未发表成果。2018 年。