arXiv:2303.14580v1 [math.OA] 25 Mar 2023

非交换泊松随机测度及其应用

YIDONG CHEN 和 MARIUS JUNGE

摘要。我们在冯·诺伊曼代数上引入一种非交换泊松随机测度。这是经典泊松随机测度的一种非交换推广。我们将这一构造称为**泊松化**。泊松化是一个函子，它将带有正规半有限忠实权的冯·诺伊曼代数范畴映到带有正规忠实态的冯·诺伊曼代数范畴。泊松化是将二次量子化 [Par92] 推广到冯·诺伊曼代数背景下的一种自然方式。该构造与正规（保权）同态以及幺正规完全正（保权）映射相容。我们介绍泊松化的两项主要应用。首先，泊松化提供了一种新的框架，用于构造并非广义自由场论的代数- [Haa96] 量子场论。其次，对于 III 型冯·诺伊曼代数，泊松化使量子相对熵（及其他量子信息量）的计算更加直接。

目录

1. 引言 1 2. 经典泊松随机测度回顾 4 3. 泊松代数的构造 6 3.1. 正规忠实正泛函的泊松代数 6 3.2. 非交换伯努利逼近与泊松代数 10 3.3. 泊松化的函子性质 15 3.4. 泊松代数的标准形与对称 Fock 空间 19 3.5. 正规忠实半有限权的泊松代数 22 3.6. 正规半有限忠实权下泊松化的函子性质 31 3.7. 泊松化与正规幺正完全正映射 33 4. 泊松代数的一些性质 34 4.1. 泊松代数的因子性与类型 35 4.2. 主系列表示所产生的 III 型代数 36 4.3. 泊松代数的分裂包含与超有限性 40 4.4. 泊松代数中的相对熵 44 参考文献 46

1. 引言

在经典概率论中，泊松过程和 p稳定过程是重要工具，应用于调和分析和巴拿赫空间理论。根据 Lévy-Khintchine 公式，p稳定随机变量可以由泊松过程 [ST]通过随机积分得到。利用 p稳定随机变量，Dacuhna-Castelle、Bretagnole

和 Kirvine [BCK66] 证明，对于 $0 < q < p \leq 2$， $L_p(\mathbb{R}_+)$ 与 $L_q(0,1)$ 之间存在等距同构。利用经典概率构造的非交换推广 [Par92, Mey95], ，文献 [JP09] 证明，对于任意超有限冯·诺伊曼代数 M，当 $1 \leq 1 < p \leq 2$ 时，存在从 $L_p(M)$ 到 $L_q(M')$ 的完全正等距嵌入。特别地，冯·诺伊曼代数 M' 可以是超有限的。超有限性的保持关键依赖于泊松随机测度的一个非交换版本。其详细构造基于 Marius Junge 一项未发表的工作。本文将原有的非交换泊松随机测度构造推广到带有正规半有限忠实权的一般冯·诺伊曼代数。我们研究这一构造的各种函子性。从量子化的角度看，非交换泊松随机测度是二次量子化在算子代数情形下的一种自然推广。因此，我们将这一构造命名为**泊松化**。

回顾一下，二次量子化可以理解为一个函子：它将带有辛形式和压缩算子的实希尔伯特空间范畴映射到 CCR 代数以及保幺完全正映射范畴中 [BR87, BR81]。CCR 代数配备有由准自由态给出的特定表示。这些态由底层希尔伯特空间上的内积构造而成。从物理学角度看，准自由态计算多粒子关联的“真空”期望值。底层希尔伯特空间中的向量表示单粒子种类的物理态。这种量子化方法固有的缺陷是无法产生连通的 n 点关联函数。显然，仅凭内积，不可能在不将多重线性形式拆解为准自由形式的情况下，构造希尔伯特空间张量积上的多重线性形式。因此，若不借助微扰理论，二次量子化（及其准自由态）只能产生所谓的广义自由场论。

另一方面，如果量子化是从算子代数范畴而非希尔伯特空间出发，那么就可以用线性泛函替代内积。此时，构造连通的 n-点关联函数几乎是轻而易举的事。这些函数只需由线性泛函作用于 n 算子的乘积上即可得到。从这个角度来看，有必要将二次量子化推广到带有线性泛函的算子代数范畴。

此外，任何合理的量子化过程都必须产生明确无歧义的结果。因此，对一个共同的“单粒子”代数进行量子化时，量子化结果的两种不同实现必须在适当意义下同构。从量子概率的角度看，这个问题可以重新表述为汉堡矩问题的非交换类比 [Wid46]。 [Jun06] 证明了，如果线性泛函满足某个增长上界，那么非交换矩问题有唯一解。这个上界可以理解为经典泊松随机变量矩的非交换类比。综合以上讨论，自然可以考虑一种基于经典泊松随机测度的非交换类比的一般量子化过程。

为总结我们构造的主要结果，现引入以下记号。令 $\mathbf{vNa}_w$ 表示一个范畴，其中对象是带有正规忠实半有限权 (N, ω) 的冯·诺伊曼代数，态射是保权正规幺完全正映射。令 $\mathbf{vNa}_s$ 表示一个范畴，其中对象是带有

正规忠实态的冯·诺伊曼代数，态射是保态正规幺正完全正映射。于是，泊松化可概括为以下定理：

定理 1.1. 泊松化**泊松化** 是一个函子：

$$\boldsymbol{Poiss} : \boldsymbol{vNa}_w \Rightarrow \boldsymbol{vNa}_s : (N,\omega) \to (\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega) \tag{1.1}$$

使得以下性质成立：

(1)（非交换泊松矩公式）对于自伴随仿射算子 $x = x^* \eta N$，满足 $e^{ix} - 1 \in m_\omega$（ω 的定义理想），泊松化将酉算子 $e^{ix} \in N$ 提升为酉算子 $\Gamma(e^{ix}) \in \mathbb{P}_\omega N$，使得：

$$\phi_\omega(\Gamma(e^{ix})) = \exp(\omega(e^{ix} - 1)) ; \tag{1.2}$$

(2)（模自同构的相容性）泊松化保持模自同构群：

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\boldsymbol{Poiss}} & \mathbb{P}_\omega N \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_t^\omega} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_t^{\phi_\omega} = \boldsymbol{Poiss}(\sigma_t^\omega)} \\ N & \xrightarrow{\boldsymbol{Poiss}} & \mathbb{P}_\omega N ; \end{array}$$

(3) 泊松代数的 *Haagerup* L_2-空间与原冯·诺伊曼代数的 L_2-空间的对称 *Fock* 空间同构：

$$L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega) \cong \mathcal{F}_s(L_2(N,\omega)) ; \tag{1.3}$$

(4)（经典泊松随机变量的推广）若$(N,\omega) = (\mathbb{C},\lambda)$，其中该泛函是乘以 $\lambda > 0$ 的简单乘法，则 $\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{C} = \ell_\infty(\mathbb{N})$，且该态给出强度为 λ的泊松分布：

$$\phi_{\mathrm{tr}}(\delta_k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \tag{1.4}$$

其中 $\delta_k \in \ell_\infty(\mathbb{N})$ 是支撑于 $k \in \mathbb{N}$ 的特征函数；

(5) 代数 $\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(\ell_2(\mathbb{Z}))$ 是超有限 II_1 因子。更一般地，$\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}} N \overline{\otimes} \mathbb{B}(\ell_2)$是一个因子，它要么是 *III* 型，要么是 II_1 型。其类型由 *Arveson* 谱 $Sp(\Delta_\omega)$生成的群决定。

作为应用，我们利用泊松化，从实半单李群的酉主系列表示构造新的 III 型冯·诺伊曼因子[Kna96，Kna86]。事实证明，这些构造中的一组自然形成冯·诺伊曼代数的预余层，并满足代数量子场论（AQFT）的公理 [Haa96]。在另一篇论文中，我们将深入研究利用泊松化构造代数量子场论的许多其他方法。这些玩具模型并非广义自由场论。因此，一个很有意义的问题是，这些模型能否为高维相互作用场论提供有效实例（≥ 2）。最后，我们证明泊松化在适当意义下保留量子相对熵。由于泊松化自然产生 III 型冯·诺伊曼代数，我们的命题提供了一种严谨而直接的方法，可在密度矩阵定义不明确时计算相对熵。在另一篇论文中，我们将继续这项研究，利用泊松化考察其他各种量子信息量（例如三方信息、非时序关联函数）。由于泊松化源于概率论，它为研究所谓的量子混沌系统提供了一个自然框架 [PCA+19]。

本文是关于泊松化及其与数学物理中各种问题联系的一系列论文的第一部分。本文将为未来的研究奠定数学基础。本文结构如下。第 2 节回顾经典泊松随机测度，并讨论泊松化的一些动机。第 3 节以逐步扩展的概括程度构造泊松化函子。我们先考察带有固定正规忠实泛函的冯·诺伊曼代数，然后推广到正规忠实半有限权。本节介绍了泊松化的几种等价构造，每种构造都强调泊松化的不同方面。构造完成后，我们研究泊松化的函子性。特别地，我们证明泊松化与正规 $*$-同态和正规幺正完全正映射均相容。第 4 节考察泊松化的一些重要性质。在第 4.1 小节中，我们确定由泊松化构造的冯·诺伊曼代数的因子性和类型。在第 4.2 小节中，我们利用泊松化，从酉主系列表示构造 III 型冯·诺伊曼代数，并按照 [Haa96]的意义给出一个简单的代数量子场论玩具模型。在第 4.3 小节中，我们简要考察泊松子因子的结构。事实证明，泊松化自然会产生无限指标子因子 [Jon83，Jon99，Lon89]。尽管目前尚不清楚如何为无限指标子因子定义标准不变量，但我们对泊松化已有足够的掌握，可以对所谓的中心化子代数和中心向量进行明确计算 [JP15]。在第 4.4 小节中，我们利用泊松化计算某些 III 型冯·诺伊曼代数中若干态的相对熵。

2. 经典泊松随机测度回顾

回顾与测度空间 (Ω, Σ, μ) 相关联的经典泊松随机测度的定义。记 $\Sigma_{fin} \subset \Sigma$ 为有限测度的集合。泊松随机测度 ν_Ω 由一族定义在概率空间 $(X, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上的泊松随机变量 $(P_A)_{A \in \Sigma_{fin}}$ 给出。这些泊松随机变量以满足[Sat99] 的可测集 A 为标记：

(1) 对于 $A \in \Sigma_{fin}$, $\mathbb{P}(P_A = k) = \frac{e^{-\mu(A)} \mu(A)^k}{k!}$；(2) 若 $\{A_1, ..., A_n\}$ 互不相交，则 $\{P_{A_1}, ..., P_{A_n}\}$ 相互独立；(3) 对于互不相交的集合 $A_1, ..., A_n \in \Sigma_{fin}$, $P_{\cup_j A_j} = \sum_j P_{A_j}$。

给定有限测度空间 (Ω, Σ, μ) 上的泊松随机测度 ν_Ω 以及可积函数 $f \in L^1(\Omega, \mu)$，其特征函数为：

$$\mathbb{E}(e^{it \int_\Omega f d\nu_\Omega}) = \exp\left(\int_\Omega d\mu(x)(e^{itf(x)} - 1)\right). \tag{2.1}$$

现在，我们可以列出泊松随机测度的非交换类比必须满足的一些基本要求。按照量子化的一般方案，测度空间 (Ω, Σ, μ) 被非交换类比 $L^\infty(\Omega, \mu)$ 取代，即由一个冯·诺依曼代数 N 和一个正规权 ω 构成。Ω 的不相交子集由 N 中的正交投影取代。非交换泊松随机变量族应在非交换概率空间中构造。回顾一下，非交换概率空间 [VND92, Mey95, Jun06] $(\mathcal{A}, \tau)$ 是一个在 $\mathbb{C}$ 上的含幺 $*$-代数 $\mathcal{A}$，并配有一个含幺线性泛函 τ。此外，我们回顾量子概率论中的强独立性概念。这是经典独立性的正确类比。

定义 2.1。 设 $(\mathcal{A},\tau)$ 是一个非交换概率空间，则两个子代数$\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2\subset\mathcal{A}$ 称为强独立的，如果对任意 $x\in\mathcal{B}_1, y\in\mathcal{B}_2$，都有：

$$[x,y]=0\ ,\ \tau(xy)=\tau(x)\tau(y)\ . \tag{2.2}$$

非交换泊松随机测度应当是一个保持 $*$的线性映射 [1]：

$$\lambda:(N,\omega)\to(\mathcal{A},\tau) \tag{2.3}$$

使得：

(1)（非交换独立性）对于两个正交投影 e_1、 $e_2\in N$，则$[\lambda(eNe)\ \lambda(fNf)]=0$，且由 $\lambda(eNe)$和 $\lambda(fNf)$生成的代数强独立；**(2)**（非交换泊松矩） $\tau(e^{i\lambda(x)})=\exp(\omega(e^{ix}-1))$，其中 $x=x^*\in N$满足 $e^{ix}-1$ 是 ω-有限的。

现在我们简要概述超有限矩阵代数$(\mathbb{B}(H),\mathrm{tr})$的泊松化的主要思想。测度空间$(\Omega\ \Sigma,\mu)$由 $\mathbb{B}(H)$中的投影格取代，而不相交子集由正交投影取代。固定一族两两正交的投影 $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$，使得 $f_n:=\sum_{1\le i\le n}e_i$ 弱收敛于$\mathbf{1}$。对于有限维矩阵代数，事实证明，$(M_n(\mathbb{C}),\mathrm{tr})$的泊松化不过是 $M_n(\mathbb{C})$的无限对称张量积。量子化映射 λ 定义如下：

$$\lambda:M_n(\mathbb{C})\to M_s(M_n(\mathbb{C})):x\mapsto(\sum_{1\le j\le n}\pi_j(x))_n \tag{2.4}$$

其中 $||x||<1$ 和 $\pi_j(x):=1\otimes...\otimes x\otimes...\otimes 1\in\bigotimes^n M_n(\mathbb{C})$，且 x 属于第 j 个分量。态 ϕ_{tr} 可以显式计算：

$$\phi_{\mathrm{tr}}(\Gamma(e^{ix}))=\exp(\mathrm{tr}(e^{ix}-1)) \tag{2.5}$$

其中 x 是 $M_n(\mathbb{C})$ 中的自伴压缩算子，且 $\Gamma(e^{ix}):=\exp(i\lambda(x))=((e^{ix})^{\otimes n})_{n\ge0}\in\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}M_n(\mathbb{C})\cong M_s(M_n(\mathbb{C}))$。强独立性可由以下计算轻易推出：[2]

$$\begin{aligned}\phi_{\mathrm{tr}}(\Gamma(e^{ix})\Gamma(e^{iy}))&=\exp(\mathrm{tr}(e^{ix}e^{iy}-1))=\exp(\mathrm{tr}\left((e^{ix}-1)(e^{iy}-1)+(e^{ix}-1)+(e^{iy}-1)\right))\\&=\exp(\mathrm{tr}(e^{ix}-1))\exp(\mathrm{tr}(e^{iy}-1))=\phi_{\mathrm{tr}}(\Gamma(e^{ix}))\phi_{\mathrm{tr}}(\Gamma(e^{iy}))\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中 $x,e^{ix}\in eM_n(\mathbb{C})e$，且 $y,e^{iy}\in fM_n(\mathbb{C})f$，并且 $e\perp f$属于 $M_n(\mathbb{C})$。交换要求源于如下事实： λ 实际上是一个李代数同态：

$$\lambda([x,y])=[\lambda(x),\lambda(y)]\ . \tag{2.7}$$

因此，对于 $x\in eM_n(\mathbb{C})e, y\in fM_n(\mathbb{C})f$，有 $[\Gamma(e^{ix})\ \Gamma(e^{iy})]=0$。

那么，对于无限维 I 型因子 $\mathbb{B}(H)$，其泊松化是通过归纳极限构造的。关键观察是，以下 $*$-同态保持泊松态：

$$\pi_{n,k}:\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}(f_k\mathbb{B}(H)f_k)\to\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}(f_n\mathbb{B}(H)f_n):\Gamma(x)\mapsto\Gamma(x+f_n-f_k) \tag{2.8}$$

[1]线性性质保证独立泊松随机变量之和仍为泊松随机变量[2]这一计算将在子序列构造中反复进行。

其中:

$$\phi_{\mathrm{tr}_n}(\pi_{n,k}\Gamma(x)) = \exp(\mathrm{tr}_n(x + f_n - f_k - f_n)) = \exp(\mathrm{tr}_k(x - f_k)) = \phi_{\mathrm{tr}_k}(\Gamma(x)) \,. \tag{2.9}$$

这里，迹 tr_n 是迹在角 $f_n\mathbb{B}(H)f_n$上的限制。因此，我们可以考虑序列 $\{\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(f_nHf_n)\pi_{n,k}\}_{n,\ k\in\mathbb{N}}$ 的归纳极限，而该归纳极限的弱闭包就是泊松代数 $\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(H)$。很容易验证，在这种情况下，非交换泊松随机测度的基本要求同样得到满足。我们将在后文详细阐述这些构造。

3. 泊松代数的构造

在本节中，我们从冯·诺伊曼代数和正规忠实权构造泊松代数。Haagerup [Tak79] 给出了正规忠实权的完整刻画，该刻画表明，权可以看作正泛函的极限。因此，我们首先从带有正规忠实态的冯·诺伊曼代数这一初始数据构造泊松代数。然后，我们将给出一般正规忠实权下的完整构造。

从带有正规忠实权的冯·诺伊曼代数构造泊松代数，是一个函子，其目标范畴是带有正规忠实态的冯·诺伊曼代数范畴。下文中，我们将这个函子称为泊松化 , 并将提升后的态称为泊松态。所有保持权的正规 $*$-同态都可以提升为两个泊松代数之间的正规 $*$-同态。提升后的
$*$-同态保持泊松态。特别地，泊松化保持模自同构群，从而保持冯·诺伊曼代数的内禀动力学。更确切地说，初始态（或权）的模自同构通过泊松化的函子性提升为泊松态的模自同构。本节稍后将扩展泊松化的函子性，并讨论如何将正规幺正完全正映射（或量子信道）提升为泊松代数之间的量子信道。

最后，泊松化以标准形 [Tak03] 构造泊松代数。它通过典范方式作用于泊松态的 Haagerup L_2-空间。结果表明，泊松代数的 Haagerup L_2-空间与原冯·诺伊曼代数的 L_2-空间的对称 Fock 空间等距同构。然而，在泊松代数中，没有简单的方法来构造产生算子 / 湮灭算子。产生算子 / 湮灭算子的自然候选者并不按预期方式作用于 Fock 基。

3.1. 正规忠实正泛函的泊松代数。在本小节中，我们固定一个冯·诺伊曼代数 N 和一个正规忠实正泛函 $\omega \in N_*^+$。 ω可能没有归一化。我们将归一化后的态记为 $\omega_n(x) := {}^{\omega_{(x)}}\omega_{(1)}$。我们需要以下 $*$-同态:

$$\pi_j : N \to N^{\otimes n} : x \mapsto 1 \otimes ... \otimes x \otimes ... \otimes 1 \tag{3.1}$$

其中 x 位于第 j 个位置。然后我们可以定义关键的“量子化”映射:

$$\lambda : N \to \bigoplus_{n\geq 0} N^{\otimes n} : x \mapsto (\sum_{1\leq j\leq n} \pi_j(x))_{n\geq 0} \tag{3.2}$$

其中，对于第 0 个分量，我们定义 $\lambda(x)_0 := 0$。

定义 3.1. (N,ω) 的泊松代数是冯·诺伊曼代数 $\bigoplus_{n\geq 0} N^{\otimes n}$ 中 $\{\exp(i\lambda(x)) : x \in N_{s.a.}\}$ 的超弱闭包。

在 $\bigoplus_{n\geq 0} N^{\otimes n}$ 上，我们可以定义正线性泛函：

$$\phi_\omega((x_n)_{n\geq 0}) := e^{-\omega(1)} \sum_{n\geq 0} \frac{\omega^{\otimes n}(x_n)}{n!} . \tag{3.3}$$

指数因子使 ϕ_ω 归一化。当限制在泊松代数上时， ϕ_ω 定义了我们所要寻找的泊松态。

定义 3.2. 设(N,ω) 是一个冯·诺伊曼代数，并带有一个固定的正规忠实正泛函。然后，泊松化***Poiss*** 构造出具有固定正规忠实态的泊松代数：$(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$。

本节的目标之一是推导关于泊松态 ϕ_ω 及其对应的 L_2-空间 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 的一些结果。首先，我们解释为什么态 ϕ_ω 值得称为泊松态：

引理 3.3. 设 $\Gamma : N \to \bigoplus_{n\geq 0} N^{\otimes n} : x \mapsto (x^{\otimes n})_n$ 为对称量子化的 $*$-同态。当 x 是 N 中的压缩算子时，公式 $\Gamma(x) = (x^{\otimes n})_n$ 定义良好。于是有：

(1) $\mathbb{P}_\omega N$ 的生成元满足以下公式：

$$\exp(i\lambda(x)) = \Gamma(\exp(ix)) \tag{3.4}$$

其中 $x \in N_{s.a.}$。

(2) 对于单个生成元，泊松态由下式给出：

$$\phi_\omega(\exp(i\lambda(x))) = \exp(\omega(\exp(ix) - 1)) . \tag{3.5}$$

证明。 对于第一个断言，对任意 $n \geq 1$，我们有：

$$\exp(i \sum_{1\leq j\leq n} \pi_j(x)) = \prod_{1\leq j\leq n} \exp(i\pi_j(x)) = \big(\exp(ix)\big)^{\otimes n} . \tag{3.6}$$

因此，我们有：

$$\exp(i\lambda(x)) = \bigoplus_{n\geq 0} \exp(i \sum_{1\leq j\leq n} \pi_j(x)) = \bigoplus_{n\geq 0} \big(\exp(ix)\big)^{\otimes n} = \Gamma(\exp(ix)) . \tag{3.7}$$

对于第二个断言，计算如下：

$$\begin{aligned}\phi_\omega(\exp(i\lambda(x))) &= e^{-\omega(1)} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \omega^{\otimes n}\big((e^{i\lambda(x)})_n\big) = e^{-\omega(1)} \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} \big(\omega(e^{ix})\big)^n \\ &= \exp(\omega(e^{ix} - 1)) .\end{aligned}$$

■

注记 3.4. 与有限测度空间$(\Omega\ \Sigma,\ \mu)$ 相关联的经典泊松随机测度由一族泊松随机变量$(P_A)_{A\in\Sigma}$ 构成，这些变量以可测集 A 为标记，且满足 [Sat99]:

$$\mathbb{P}(P_A = k) = \frac{e^{-\mu(A)}\mu(A)^k}{k!} .$$

此外，如果可测集 A_1、……、 A_n 两两不相交，那么泊松随机变量P_{A_1}、……、 P_{A_n} 相互独立，且 $P_{\cup_j A_j} = \sum_j P_{A_j}$。

给定有限测度空间 (Ω, Σ, μ) 上的泊松随机测度 ν_Ω，以及可积函数 $f \in L^1(\Omega, \mu)$，其特征函数为：

$$\mathbb{E}(e^{it\int_\Omega f d\nu_\Omega}) = \exp(\int_\Omega d\mu(x)(e^{itf(x)} - 1)) .$$

将经典特征函数与公式 *3.5* 进行比较，可以清楚地看出，ϕ_ω 是经典泊松随机测度的直接推广。

注记 3.4 立即推出以下关于泊松态 ϕ_ω 的（非交换）矩公式结果：

引理 3.5。设 $x_1, ..., x_n$ 是 N 中的压缩算子，则有：

$$\phi_\omega(\lambda(x_1)...\lambda(x_n)) = \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(n)} \prod_{A\in\sigma} \phi_\omega(\overrightarrow{\prod}_{i\in A} x_i) \tag{3.8}$$

其中，$\mathcal{P}_n$ 是 $[n] := \{1, ..., n\}$ 的划分集合，$\overrightarrow{\prod}_{i\in A}$ 表示在有序集合 $A \subset [n]$ 上的有序乘积。A 的排序继承自 $[n]$ 上的典范序。

此外，存在一个普适常数 $C > 0$，使得范数：

$$|||x||| := \max\{||x||, \omega(x^*x)^{1/2}, \omega(xx^*)^{1/2}, |\omega(x)|\} \tag{3.9}$$

满足以下估计：

$$|\phi_\omega(\lambda(x_1)...\lambda(x_n))| \le C^n n^n \prod_{1\le i\le n} |||x_i||| . \tag{3.10}$$

证明。对于给定的 $m \in \mathbb{N}$，$\lambda(x_1)...\lambda(x_n)$ 的第 m 个分量为：

$$\begin{aligned}\big(\lambda(x_1)...\lambda(x_n)\big)_m &= \big(\sum_{1\le j\le m} \pi_j(x_1)\big)...\big(\sum_{1\le j\le m} \pi_j(x_n)\big) = \sum_{j_1,...,j_n} \pi_{j_1}(x_1)...\pi_{j_n}(x_n) \\ &= \sum_{f:[n]\to[m]} \bigotimes_{1\le j\le m} (\overrightarrow{\prod}_{i\in f^{-1}(j)} x_i)\end{aligned}$$

其中，求和遍及所有可能的集合映射 $f : [n] \to [m]$，而乘积 $\overrightarrow{\prod}$ 是对集合 $f^{-1}(j)$ 上的有序乘积。$f^{-1}(j) \subset [n]$ 上的序结构继承自 $[n]$ 上的典范序。如果集合 $f^{-1}(j)$ 为空，则该乘积按定义取值为 $1 \in N$。利用此公式，我们有：

$$\omega^{\otimes m}\big((\lambda(x_1)...\lambda(x_n))_m\big) = \sum_{f:[n]\to[m]} \prod_{1\le j\le m} \omega(\overrightarrow{\prod}_{i\in f^{-1}(j)} x_i) .$$

对于每个集合函数 $f : [n] \to [m]$，非空子集的集合 $\{f^{-1}(j) \neq \emptyset : j \in [m]\}$ 构成 $[n]$ 的一个分拆。对于固定的分拆 $\sigma \in \mathcal{P}(n)$，设 $|\sigma|$ 为该分拆中的子集个数。那么我们有：

$$\omega^{\otimes m}\big((\lambda(x_1)...\lambda(x_n))_m\big) = \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{P}(n)\\ |\sigma|\le m}} |\sigma|! \binom{m}{|\sigma|} \omega(1)^{m-|\sigma|} \prod_{A\in\sigma} \omega(\overrightarrow{\prod}_{i\in A} x_i)$$

其中，组合因子表示产生相同分拆 $\sigma \in \mathcal{P}(n)$ 的集合函数 $f: [n] \to [m]$ 的数量。因此我们有：

$$\begin{aligned}\phi_\omega(\lambda(x_1)...\lambda(x_n)) &= e^{-\omega(1)} \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} \omega^{\otimes m}\big((\lambda(x_1)...\lambda(x_n))_m\big) \\ &= e^{-\omega(1)} \sum_{m\geq 0} \frac{|\sigma|!}{m!} \binom{m}{|\sigma|} \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{P}(n)\\ |\sigma|\leq m}} \omega(1)^{m-|\sigma|} \prod_{A\in\sigma} \omega(\overrightarrow{\prod}_{i\in A} x_i) \\ &= e^{-\omega(1)} \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(n)} \sum_{m\geq|\sigma|} \frac{\omega(1)^{m-|\sigma|}}{(m-|\sigma|)!} \prod_{A\in\sigma} \omega(\overrightarrow{\prod}_{i\in A} x_i) = \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(n)} \prod_{A\in\sigma} \omega(\overrightarrow{\prod}_{i\in A} x_i)\,.\end{aligned}$$

为证明矩公式的上界，我们首先注意到，由柯西-施瓦茨不等式可得以下估计：

$$|\omega(x_1...x_n)| \leq \omega(x_1^*x_1)^{\frac{1}{2}}\omega(x_n^*...x_2^*x_2...x_n) \leq \omega(x_1^*x_1)^{\frac{1}{2}}(\prod_{2\leq i\leq n-1} ||x_i||)\omega(x_n^*x_n)^{\frac{1}{2}} \leq \prod_{1\leq i\leq n} |||x_i|||$$

利用这一观察，我们得到：

$$|\phi_\omega(\lambda(x_1)...\lambda(x_n))| \leq \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(n)} \prod_{A\in\sigma} |\omega(\overrightarrow{\prod}_{i\in A} x_i)| \leq \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(n)} \prod_{A\in\sigma}\prod_{i\in A} |||x_i||| = |\mathcal{P}(n)| \prod_{1\leq i\leq n} |||x_i|||\,.$$

划分的数量 为 $[n]$，等于第二类斯特林数之和 d:

$$|\mathcal{P}(n)| = \sum_{1\leq k\leq n} S(n,k) = \mathbb{E}(X^n)$$

其中，$X \sim$ Poiss(1) 是强度为 1 的泊松随机变量。根据泊松随机变量矩的经典估计 [Sat99], ，我们有：

$$|\phi_\omega(\lambda(x_1)...\lambda(x_n))| \leq C^n n^n \prod_{1\leq i\leq n} |||x_i|||\,. \qquad \blacksquare$$

注记 3.6. 泊松态 ϕ_ω 的矩公式是泊松随机测度经典矩公式的直接推广。

在研究 Haagerup 空间： $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 的结构之前，我们先给出 $\mathbb{P}_\omega N$ 的另一种描述。

命题 3.1. 设 $\bigotimes_s^n N$ 是 N 的 n 重对称张量积，且 $M_s(N) := \bigoplus_{n\geq 0} \bigotimes_s^n N$ 是 N 的无限对称张量积。则以下陈述成立：

(1) $\bigotimes_s^n N = \overline{\text{张成空间}\{x^{\otimes n} : \ x \in N\}}^{ultra\text{-}weak}$；*(2)* 设 $\lambda_n(x) = \sum_{1\leq j\leq n} \pi_j(x)$ 为 $\lambda(x)$ 的第 n 个分量。在 $\bigotimes_s^n N$ 中定义以下元素：

$$\lambda_{n,k}(x) := \sum_{f:[k]\to[n]} \bigotimes_{1\leq i\leq n} x^{|f^{-1}(i)|}$$

其中 $f: \ [k] \to [n]$ 是一个集合映射，按定义 $\sum_{1\leq i\leq n} |f^{-1}(i)| = k$。于是$\lambda_{n,\,k}(x)$ $\in$ 张成空间 $\{\lambda_n(x^{p_1})...\lambda_n(x^{p_j})$: $j \leq k$, p_1, ..., $p_j \in \mathbb{N}\}$; *(3)* $\mathbb{P}_\omega N \cong M_s(N)$。

证明。为证明第一个结论，对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 E_n 为从$N^{\otimes n}$到 n 重对称张量积的条件期望：$\bigotimes_s^n N$。由于张成空间$\{x_1 \otimes ... \otimes x_n : x_1, ..., x_n \in N\}$在 $N^{\otimes n}$ 中超弱稠密，我们只需证明 $E_n(x_1 \otimes ... \otimes x_n)$ 属于张成空间$\{x^{\otimes n} : x \in N\}$。为此，我们考虑如下围道积分：

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \oint_{|z_i|=1} \frac{dz_1}{z_1^2} ... \frac{dz_n}{z_n^2} \Big(\sum_{1 \le j \le n} x_j z_j \Big)^{\otimes n} = \sum_{j_1, ... j_n = 1}^{n} x_{j_1} \otimes ... \otimes x_{j_n} \prod_{1 \le i \le n} \Big(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2} z^{|k : j_k = i|} \Big)$$
$$= \sum_{\pi \in S_n} x_{\pi(1)} \otimes ... \otimes x_{\pi(n)} = n! E_n(x_1 \otimes ... \otimes x_n)$$

在最后一个等式中，我们利用了这样一个事实：非零项只可能来自下标$\{(j_1, ..., j_n) : |k : j_k = i| = 1$ 对所有 i$\}$。对于所有这类下标元组，都存在一个置换 $\pi \in S_n$，使得 $j_i = \pi(i)$ 对所有 $1 \le i \le n$成立。因此，我们有 $E_n(x_1 \otimes ... \otimes x_n) \in$张成空间$\{x^{\otimes n} : x \in N\}$。

对于第二个断言，我们对 k 使用归纳法。对于 $k = 1$，有 $\lambda_{n,\ 1}(x) = \lambda_n(x)$。该断言显然成立。对于 $k+1$，不难看出我们有：

$$\lambda_{n,k}(x) \lambda_n(x) = \lambda_{n,k+1}(x) \tag{3.11}$$

因为每个映射 $f : [k+1] \to [n]$ 都由限制 $f|_{[k]}$ 和一个映射 $g : [1] \to [n]$ 给出，后者指定了 $k+1$ 的赋值。然后通过简单的归纳法，我们证明了该断言。

特别地，由于 $\lambda_{n,n}(x) = x^{\otimes n}$，我们已证明 $x^{\otimes n} \in \mathrm{span}\{\lambda_n(x^{p_1}) ... \lambda_n(x^{p_j}) : j \le n, p_1, ..., p_j \in \mathbb{N}\}$。因此，由于 $\bigotimes_s^n N$是 $x^{\otimes n}$的超弱闭包，$\bigotimes_s^n N$是由 $\lambda_n(x)$生成的代数的超弱闭包：

$$\bigotimes_s^n N = \{\lambda_n(x) : x \in N\}'' . \tag{3.12}$$

为证明最后一个结论，我们使用数算子 $\lambda(1)$。更准确地说，令 $f(t) := e^{-t^2/2}$，我们有：

$$f(\lambda(1)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) e^{it\lambda(1)} dt \tag{3.13}$$

其中 $\widehat{\ } f(t)$ 是高斯函数 f 的傅里叶变换。根据定义 $e^{it\lambda(1)} \in \mathbb{P}_\omega N$，我们有 $f(\lambda(1)) \in \mathbb{P}_\omega N$。由于 $f(\lambda(1)) = \sum_{n \ge 0} e^{-n^2/2} e_n$，且 e_n是到$\bigotimes_s^n N$上的投影，因此对所有 $n \in \mathbb{N}$，都有 $e_n \in \mathbb{P}_\omega N$。于是得到如下求导：

$$i\lambda_n(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} e_n e^{it\lambda(x)} e_n$$

其中，微分在范数拓扑中是良定义的。因此 $\lambda_n(x) \in \mathbb{P}_\omega N$。由前两个结果可得：$\mathbb{P}_\omega N \cong M_s(N)$。 ∎

3.2. 非交换伯努利逼近与泊松代数。 到目前为止，泊松化似乎与二次量子化完全类似。然而，我们现在将看到，希尔伯特空间 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 的分次结构不同于 $M_s(N)$ 的分次结构。首先，我们使用泊松过程经典伯努利逼近的非交换类比，对 $\mathbb{P}_\omega N$ 给出另一种描述。

P命题 3.2. 设 w 是 $\mathbb{N}$ 上的自由超滤子。对于 $n \geq \omega(1)$，定义：

$$\widetilde{\lambda}_n(x) := \sum_{1\leq j\leq n} \pi_j(x\otimes \chi_{[0,1/n]}) \in \bigotimes^n N\overline{\otimes}L^\infty([0,\omega(1)^{-1}]) \,. \tag{3.14}$$

~否则，定义 $\lambda_n(x) := \sum_{1\leq j\leq n}\pi_j(x\otimes 1) \in \bigotimes^n N\overline{\otimes}L^\infty([0,\omega(1)^{-1}])$。考虑算子 $\lambda^w(x) := (\lambda_n(x))^\bullet$，它隶属于（*Ocneanu*）超积 [AH14]:

$$\prod^w (N\overline{\otimes}L^\infty([0,\omega(1)^{-1}]))^{\otimes n} \,.$$

由 $\{\exp(i\lambda^w(x)) : \ x\in N_{s.a.}\}$ 生成的冯·诺伊曼代数 $\mathcal{N}_\omega^\infty$ 同构于$\mathbb{P}_\omega(N)$。

证明。 在 $N\overline{\otimes}L^\infty([0,\omega(1)^{-1}]) \cong L^\infty([0,\omega(1)^{-1}],N)$ 上，定义正规忠实态:

$$\omega_\infty(f(t)) := \int_0^{\omega(1)^{-1}} dt\omega(f(t)) \,.$$

于是，在超积上，态族 $(\omega_\infty^{\otimes n})_n$ 诱导出一个正规态 ϕ_ω^w，满足:

$$\phi_\omega^w((x_n)_n) := \lim_{n\to\infty} \omega_\infty^{\otimes n}(x_n) \,.$$

令 $e_\omega \in \prod^w (N\overline{\otimes}L^\infty([0,\omega(1)^{-1}]))^{\otimes n}$ 为 ϕ_ω^w 的支撑。那么在角（Groh-Raynaud 超积）$\mathcal{N}^w$ 上，态 ϕ_ω^w 是忠实的。

此外，采用与引理 3.5 中相同的计算方法，我们可以验证诱导态 ϕ_ω^w 满足与 ϕ_ω 在泊松代数 $\mathbb{P}_\omega N$上的相同矩公式。为此，我们先推导出当 $n\geq\omega(1)$ 时张量态的以下公式:

$$\begin{aligned}\omega_\infty^{\otimes n}(\widetilde{\lambda}_n(x_1)...\widetilde{\lambda}_n(x_m)) &= \sum_{f:[m]\to[n]} \prod_{1\leq j\leq n} \omega_\infty(\overrightarrow{\prod}_{i\in f^{-1}(j)} x_i\otimes\chi_{[0,\omega(1)/n]}) \\ &= \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{P}(m)\\ |\sigma|\leq n}} |\sigma|!\binom{n}{|\sigma|}\Big(\prod_{A\in\sigma}\omega(\overrightarrow{\prod}_{i\in A}x_i)\Big)\Big(\frac{1}{n}\Big)^{|\sigma|} \,.\end{aligned} \tag{3.15}$$

由于 $\lim_{n\to\infty} \frac{|\sigma|!\ \binom{n}{|\sigma|}}{n^{|\sigma|}} = 1$，因此我们有以下矩公式:

$$\phi_\omega^w(\lambda^w(x_1)...\lambda^w(x_n)) = \lim_{m\to\infty}\omega_\infty^{\otimes m}(\widetilde{\lambda}_m(x_1)...\widetilde{\lambda}_m(x_n)) = \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(n)}\prod_{A\in\sigma}\omega(\overrightarrow{\prod}_{i\in A}x_i) \,. \tag{3.16}$$

根据 [Jun06], 中的结果，我们考虑由抽象符号 $\{\lambda'(x) : \ x\in N_{ana}^\omega \subset N\}$生成的含幺 $*$-代数 $\mathcal{A}$，其中

$$N_{ana}^\omega := \{x\in N : |||\sigma_z(x)||| \leq C\exp(cIm(z)) \text{ for some positive constants C, c}\} \,.$$

N_{ana}^ω 是这样一组解析元素：模自同构群在复平面中的一个带状区域内可解析延拓。特别地，由于 ω 是正规正泛函，$1\in N_{ana}^\omega$。设 ϕ' 是 $\mathcal{A}$ 上的正线性泛函，满足:

$$\phi'(\lambda'(x_1)...\lambda'(x_n)) := \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(n)}\prod_{A\in\sigma}\omega(\overrightarrow{\prod}_{i\in A}x_i) \,.$$

这里，若 $\phi'(a^*a) \geq 0$ 且 $\phi'(a^*) = \phi'(a)$ 对于 $a \in \mathcal{A}$成立，则称泛函为正的。于是，$L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$和 $L_2(\mathcal{N}^w, \phi_\omega^w)$都是抽象 $*$-概率空间$(\mathcal{A}, \phi')$的表示。由于算子 $\lambda^w(x)$隶属于角 $\mathcal{N}^w$，冯·诺伊曼代数 $\mathcal{N}_\omega^\infty$是 $\mathcal{N}^w$的子代数。因此，根据 [Jun06], 中的一个结果，存在一个正规 $*$-同构：$\varphi : \mathbb{P}_\omega N \to \mathcal{N}_\omega^\infty$，使得这些态保持不变：

$$\phi_\omega^w \circ \varphi = \phi_\omega \, .$$ ■

推论 3.7. 采用与命题 *3.2* 相同的记号，存在一个正规条件期望：

$$E : \mathcal{N}^w \to \mathbb{P}_\omega N$$

其中 $\mathcal{N}^w$ 是 $\left(N \overline{\otimes} L^\infty([0, \omega(1)^{-1}])^{\otimes n}, \omega_\infty^{\otimes n}\right)$ 的（***Groh-Raynaud***）超积。该正规条件期望保持态：$\phi_\omega^w = \phi_\omega \circ E$。

证明. 回顾一下，N_{ana}^ω 是 N 中解析元素的集合。显然，对于 $x \in N_{ana}^\omega$，有 $\lambda^w(\sigma_t^\omega(x)) = \sigma_t^{\phi_\omega^w}(\lambda^w(x))$。因此，根据 Takasaki 定理，[Tak03], ，正规条件期望存在且保持态。根据命题 3.2，该条件期望的像与 $\mathbb{P}_\omega N$ 同构。 ■

现在我们准备研究 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 的分次结构。令 $\xi_\omega \in L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 为表示 ϕ_ω 的向量，并令 $\xi_\omega^w \in L_2(\mathcal{N}^w, \phi_\omega^w)$ 为表示 ϕ_ω^w 的向量。于是根据推论 3.7，正规条件期望 E 可延拓为一个 L_2-投影，使得：$E\xi_\omega^w = \xi_\omega$。为了陈述关于 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 的结构引理，我们先介绍以下定义：

定义 3.8. 设 $\sigma \in \mathcal{P}(n)$ 是 $[n]$的一个分拆。对于每个 $m \geq |\sigma|$，集合函数$f : [n] \to [m]$ 从属于 σ，当且仅当由 f 诱导的分拆等于 σ：

$$f(i) = f(j) \iff \exists A \in \sigma \ such \ that \ i, j \in A \, .$$

令 $F_{n,m}(\sigma)$ 表示从 $[n]$ 到 $[m]$的 σ-从属函数集合。若 $m < |\sigma|$，则定义 $F_{n,m}(\sigma)$ 为从 $[n]$ 到 $[m]$的所有集合函数构成的全集。于是，我们可以在超积中定义以下元素：

$$\lambda_\sigma^w(x_1, ..., x_n) := \Big(\sum_{f \in F_{n,m}(\sigma)} \pi_{f(1)}(x_1 \otimes \chi_{[0,1/m]}) ... \pi_{f(n)}(x_n \otimes \chi_{[0,1/m]}) \Big)^\bullet \, .$$

λ_σ^w 的第 m 个分量记作 $\lambda_{\sigma,m}^w$。使用这些记号，我们可以陈述以下引理：

引理 3.9. 设 $\sigma_\emptyset \in \mathcal{P}(n)$ 为单元素分拆：$\{\{1\}, ..., \{n\}\}$。考虑 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$中的向量：

$$\lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n)\xi_\omega := E\lambda_{\sigma_\emptyset}^w(x_1, ..., x_n)\xi_\omega^w \, . \tag{3.17}$$

那么，以下陈述成立：

(1) 对于任意分拆 $\sigma = \{A_1, ..., A_{|\sigma|}\} \in \mathcal{P}(n)$，有：

$$E\lambda_\sigma^w(x_1, ..., x_n)\xi_\omega^w = \lambda_\emptyset(\overrightarrow{\prod}_{i_1 \in A_1} x_{i_1}, ..., \overrightarrow{\prod}_{i_{|\sigma|} \in A_{|\sigma|}} x_{i_{|\sigma|}})\xi_\omega \, . \tag{3.18}$$

(2) 对于 $x \in N_{ana}^\omega$，我们有：

$$\lambda(x)\lambda_\emptyset(y_1, ..., y_n)\xi_\omega = \lambda_\emptyset(x, y_1, ..., y_n)\xi_\omega + \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_\emptyset(y_1, ..., xy_i, ..., y_n)\xi_\omega \, . \tag{3.19}$$

(3) 形如 $\lambda(x_1)...\lambda(x_n)\xi_\omega$ 的每个向量都可以写成$\lambda_\emptyset$-向量的线性组合:

$$\lambda(x_1)...\lambda(x_n)\xi_\omega = \lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)\xi_\omega + \sum_{m<n}\alpha_{x'}\lambda_\emptyset(x'_1,..,x'_m)\xi_\omega \tag{3.20}$$

其中 $\alpha_{x'}\in\mathbb{C}$ 是系数。

(4) 空间 $K:=$张成空间$\{\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n):\, x_i\in N^\omega_{ana}\}$ 在 $L_2(\mathbb{P}_\omega N,\phi_\omega)$ 中稠密。*(5)* 两个 $\lambda_\emptyset$-向量之间的内积满足:

$$\begin{aligned}&\langle\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)\xi_\omega,\lambda_\emptyset(y_1,...,y_m)\xi_\omega\rangle\\ &=\sum_{0\le p\le\min\{m,n\}}\ \sum_{\substack{A_n\sqcup B_n=[n]\\ A_m\sqcup B_m=[m]\\ |B_n|=|B_m|=p}}\ \prod_{i\in B_n,j\in B_m}\omega(x_i^*y_j)\prod_{i\in A_n}\omega(x_i^*)\prod_{j\in A_m}\omega(y_j)\end{aligned} \tag{3.21}$$

(6) 这些向量的范数有如下上界:

$$||\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)\xi_\omega||_2^2\le Cn^{2n}\prod_{1\le i\le n}|||x_i|||^2 \tag{3.22}$$

其中 $C>0$ 是一个绝对常数。

证明。 第一个结论可通过直接计算得到:

$$\begin{aligned}\lambda^w_\sigma(x_1,...,x_n)&=(\lambda^w_{\sigma,m}(x_1,...,x_n))^\bullet=(\sum_{f\in F_{n,m}(\sigma)}\pi_{f(1)}(x_1\otimes\chi_{[0,1/m]})...\pi_{f(n)}(x_n\otimes\chi_{[0,1/m]}))^\bullet\\ &=\big(\sum_{i_1\ne i_2\ne...\ne i_{|\sigma|}\in[m]}\pi_{i_1}(\overrightarrow{\prod}_{j_1\in A_1}x_{j_1}\otimes\chi_{[0,1/m]})...\pi_{i_{|\sigma|}}(\overrightarrow{\prod}_{j_{|\sigma|}\in A_{|\sigma|}}x_{j_{|\sigma|}}\otimes\chi_{[0,1/m]})\big)^\bullet\\ &=\lambda^w_\emptyset(\overrightarrow{\prod}_{i_1\in A_1}x_{i_1},...,\overrightarrow{\prod}_{i_{|\sigma|}\in A_{|\sigma|}}x_{i_{|\sigma|}})\,.\end{aligned}$$

第一个断言可直接由此计算得出。

对于第二个断言，由于 $\lambda(x)$ 隶属于 $\mathbb{P}_\omega N$，我们有:

$$\begin{aligned}\lambda(x)\lambda_\emptyset(y_1,...,y_n)\xi_\omega&=E\lambda^w(x)\lambda^w_{\sigma_\emptyset}(y_1,...,y_n)\xi^w_\omega=E\big(\lambda^w_m(x)\lambda^w_{\sigma_\emptyset,m}(y_1,...,y_n)\big)^\bullet\xi^w_\omega\\ &=E\big(\sum_{1\le j\le m}\pi_j(x\otimes\chi_{[0,\frac1m]})\sum_{f\in F_{n,m}(\sigma_\emptyset)}\pi_{f(1)}(y_1\otimes\chi_{[0,\frac1m]})...\pi_{f(n)}(y_n\otimes\chi_{[0,\frac1m]})\big)^\bullet\xi^w_\omega\\ &=E\big(\sum_{g\in F_{n+1,m}(\sigma_\emptyset)}\pi_{g(1)}(x\otimes\chi_{[0,\frac1m]})\pi_{g(2)}(y_1\otimes\chi_{[0,\frac1m]})...\pi_{g(n+1)}(y_n\otimes\chi_{[0,\frac1m]})\big)^\bullet\xi^w_\omega\\ &+E\big(\sum_{\substack{1\le j\le n\\ f\in F_{n,m}(\sigma)}}\pi_{f(1)}(y_1\otimes\chi_{[0,\frac1m]})...\pi_{f(j)}(xy_j\otimes\chi_{[0,\frac1m]})...\pi_{f(n)}(y_n\otimes\chi_{[0,\frac1m]})\big)^\bullet\xi^w_\omega\\ &=\lambda_\emptyset(x,y_1,...,y_n)\xi_\omega+\sum_{1\le j\le n}\lambda_\emptyset(y_1,...,xy_j,...,y_n)\xi_\omega\,.\end{aligned} \tag{3.23}$$

在第一个等式中，我们用到了 $\lambda(x)=\lambda^w(x)$ 隶属于 $\mathbb{P}_\omega N$ 这一事实。

对于第三个断言，我们使用公式 3.23，并对 n 进行归纳。对于 $n=1$，我们有 $\lambda_\emptyset(x)\xi_\omega=\lambda(x)\xi_\omega$。假设该断言对所有不超过 k 的情形都成立。对于 $k+1$，公式 3.23 推出:

$$\lambda(x_1)\lambda_\emptyset(x_2,...,x_{k+1})\xi_\omega=\lambda_\emptyset(x_1,...,x_{k+1})\xi_\omega+\sum_{2\le j\le k+1}\lambda_\emptyset(x_2,...,x_1x_j,...,x_{k+1})\xi_\omega\,. \tag{3.24}$$

根据归纳假设，$\lambda_\emptyset(x_2,...,x_{k+1})\xi_\omega = \lambda(x_2)...\lambda(x_{k+1})\xi_\omega - \sum_{k'<k}\alpha_{x'}\lambda_\emptyset(x'_1,...,x'_{k'})\xi_\omega$，其中常数 $\alpha_{x'}\in\mathbb{C}$。因此，公式 3.24 给出了 $\lambda(x_1)...\lambda(x_{k+1})\xi_\omega$ 的一个表达式，它由 $\lambda_\emptyset$-向量表示，其中 $\lambda_\emptyset(x_1,...x_{k+1})\xi_\omega$ 在线性组合中仅出现一次。因此，由归纳法可证第三个断言。

第四个断言是第三个断言的直接推论。由于根据构造，$\text{span}\{\lambda(x_1)...\lambda(x_n)\xi_\omega: x_i\in N^\omega_{ana}\} = L_2(\mathbb{P}_\omega N,\phi_\omega)$，组合公式表明，对于解析元素 $x_1,...,x_n\in N^\omega_{ana}$ 的所有元组，$\lambda(x_1)...\lambda(x_n)\xi_\omega\in K$。因此 $\overline{K}=L_2(\mathbb{P}_\omega N,\phi_\omega)$。

为证明内积公式，我们使用超积模型：

$$\begin{aligned}
&\langle\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)\xi_\omega,\lambda_\emptyset(y_1,...,y_m)\xi_\omega\rangle = \langle\lambda^w_{\sigma_\emptyset}(x_1,...,x_n)\xi^w_\omega,\lambda^w_{\sigma_\emptyset}(y_1,...,y_m)\xi^w_\omega\rangle\\
&= \lim_{l\to\infty}\omega_\infty^{\otimes l}\Big(\big(\sum_{f\in F_{n,l}(\sigma_\emptyset)}\pi_{f(n)}(x_n^*\otimes\chi_{[0,\frac1l]})...\pi_{f(1)}(x_1^*\otimes\chi_{[0,\frac1l]})\big)^\bullet\big(\sum_{g\in F_{m,l}(\sigma_\emptyset)}\pi_{g(1)}(y_1\otimes\chi_{[0,\frac1l]})...\\
&\times\pi_{g(m)}(y_m\otimes\chi_{[0,\frac1l]})\big)^\bullet\Big)\\
&= \lim_{l\to\infty}\omega_\infty^{\otimes l}\Big(\sum_{\substack{0\le p\le\min\{n,m\}\\ A\subset[l],|A|=p\\ f\in F_{n,l}(\sigma_\emptyset),g\in F_{m,l}(\sigma_\emptyset)}}\prod_{i\in A}\pi_i(x^*_{f^{-1}(i)}y_{g^{-1}(i)}\otimes\chi_{[0,\frac1l]})\prod_{i\in Im(f)-A}\pi_i(x^*_{f^{-1}(i)}\otimes\chi_{[0,\frac1l]})\\
&\times\prod_{i\in Im(g)-A}\pi_i(y_{g^{-1}(i)}\otimes\chi_{[0,\frac1l]})\Big)\\
&= \lim_{l\to\infty}\sum_{0\le p\le\min\{m,n\}}\sum_{\substack{A_n\sqcup B_n=[n]\\ A_m\sqcup B_m=[m]\\ |B_n|=|B_m|=p}}\frac{\omega(1)^{-l+n+m-p}}{l^{n+m-p}}\binom{l}{n+m-p}\binom{n+m-p}{p}p!(n-p)!(m-p)!\\
&\times\prod_{i\in B_n,j\in B_m}\omega(x_i^*y_j)\prod_{i\in A_n}\omega(x_i^*)\prod_{j\in A_m}\omega(y_j)\times\omega(1)^{l-n-m+p}\\
&= \sum_{0\le p\le\min\{m,n\}}\sum_{\substack{A_n\sqcup B_n=[n]\\ A_m\sqcup B_m=[m]\\ |B_n|=|B_m|=p}}\prod_{i\in B_n,j\in B_m}\omega(x_i^*y_j)\prod_{i\in A_n}\omega(x_i^*)\prod_{j\in A_m}\omega(y_j)
\end{aligned}$$

这里用到了这样一个事实：$F_{n,\ l}(\sigma_\emptyset)$ 中的任意集合函数都是单射，因此 f^{-1} 定义良好。

最后，利用公式 3.21，我们得到 $\lambda_\emptyset$-向量范数的如下上界：

$$\begin{aligned}
||\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)\xi_\omega||_2^2 &\le \sum_{0\le p\le n}\sum_{\substack{A_n\sqcup B_n=[n]\\ A_m\sqcup B_m=[n]\\ |B_n|=|B_m|=p}}|\prod_{i\in B_n,j\in B_m}\omega(x_i^*x_j)\prod_{i\in A_n}\omega(x_i^*)\prod_{j\in A_m}\omega(x_j)|\\
&\le\Big(\sum_{0\le p\le n}p!\binom{n}{p}^2\Big)\prod_{1\le i\le n}|||x_i|||^2\le\Big(\sum_{0\le p\le n}\frac{n^{2p}}{p!}\Big)\prod_{1\le i\le n}|||x_i|||^2\\
&\le Cn^{2n}\prod_{1\le i\le n}|||x_i|||^2
\end{aligned}$$

其中， $C > 0$ 是某个绝对常数。 ■

推论 3.10。 设 $x_i, y_j \in N_{ana}^{\omega}$ 为均值为零的解析元素（即 $\omega(x_i) = \omega(y_j) = 0$），则有：

$$\langle \lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n)\xi_\omega, \lambda_\emptyset(y_1, ..., y_m)\xi_\omega \rangle = \delta_{n,m} \sum_{\pi \in S_n} \prod_{1 \le i \le n} \omega(x_i^* y_{\pi(i)}) \tag{3.25}$$

证明。 证明可直接由公式 3.21 得出 ■

推论 3.10 中的内积与 CCR 代数上熟悉的准自由态具有相同的形式。这表明 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 与对称 Fock 空间 $\mathcal{F}(L_2(N, \omega))$ 之间存在联系。事实上，我们稍后会看到这两个希尔伯特空间是同构的。然而，为了陈述这一结果，我们还需要为 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 引入另一种基，因为使用 $\lambda_\emptyset$-基来研究分次结构较为困难。在构造 Fock 基之前，我们先使用 $\lambda_\emptyset$-基来构造条件期望的提升。该构造需要泊松化的若干函子性性质，我们将在下一小节中研究这些性质。

3.3. 泊松化的函子性质。

本小节汇集泊松化的一些函子性质。这些结果将在后文用于构造 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 与对称 Fock 空间 $\mathcal{F}(L_2(N, \omega))$ 之间的等距同构。

引理 3.11。 设 $d_\phi \in L_1(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 是与态 $\phi_\omega \in \mathbb{P}_\omega N_*$ 对应的密度。子空间 $span\{\lambda_\emptyset(x_1,.., x_n) d_\phi\}$ 在 $L_1(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 中稠密。

证明。 由引理 3.9，子空间 $K = \text{span}\{\lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n)\xi_\omega\}$ 在 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 中稠密。由于 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 在 $L_1(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 中稠密，$\text{span}\{\lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n)d_\phi\}$ 在预对偶中稠密。 ■

引理 3.12. 含单位元的 $*$ 子代数： $\mathcal{A} := \{\Gamma(a) = \sum_{n \ge 0} a^{\otimes n} : \ ||a|| \le 1\}$ 在 $\mathbb{P}_\omega N$ 中超弱稠密。

证明。由命题 3.1，只需证明 $\mathcal{A}$ 的超弱闭包包含 $\{x^{\otimes n} : \ n \in \mathbb{N}\}$。对于所有 $a \in N$，元素 $\Gamma(ta) = \sum_{n \ge 0} t^n a^{\otimes n}$ 对所有 $|t| < \frac{1}{||a||}$ 都在 $\mathbb{P}_\omega N \cong M_s(N)$ 中有定义。$\lim_{t \to 0^+} \Gamma(ta)$ 在超弱拓扑下收敛，且等于真空向量。因此，真空向量属于 $\mathcal{A}$ 的超弱闭包。由简单的归纳法和公式：

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^{k+1}} (\Gamma(ta) - \sum_{1 \le j \le k} t^j a^{\otimes j}) = a^{\otimes (k+1)}$$

我们有 $a^{\otimes n} \in \overline{\mathcal{A}}^{\text{ultra-weak}}$。因此，结论由命题 3.1 得出。 ■

命题 3.3。 设(N, ω_N)和(M, ω_M)是两个带有固定正规忠实正泛函的冯·诺伊曼代数。并设 $T : N \to M$ 是一个正规幺收缩，使得$\omega_M \circ T = \omega_N$。假设存在一个正规幺线性映射：

$$\hat{T} : M \to N$$

ˆ ˆ使得(T, T)构成一个对偶对： $\omega_M(T(x)y) = \omega_N(xT(y))$。那么存在一个正规收缩：

$$\Gamma(T) : \mathbb{P}_\omega N \to \mathbb{P}_\omega M : \Gamma(a) \mapsto \Gamma(Ta) \tag{3.26}$$

su使得 $\phi_{\omega_M} \circ \Gamma(T) = \phi_{\omega_N}$，并且以下公式在预对偶中成立：

$$\Gamma(T)^* \lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n) d_{\phi_M} = \lambda_\emptyset(\hat{T}x_1, ..., \hat{T}x_n) d_{\phi_N} \tag{3.27}$$

其中， $\Gamma(T)^*$ 是 $\Gamma(T)$ 的对偶，而 d_{ϕ_M} 是与态 ϕ_{ω_M} 相关联的密度。这里我们将预对偶与 *Haagerup* L_1-空间等同： $L_1(\mathbb{P}_{\omega_N}N, \phi_{\omega_N}) \cong \mathbb{P}_{\omega_N}N_*$。

证明。对所有 $s<1$，我们有： $||\Gamma(sTa)|| = \frac{1}{1-||sTa||} \leq \frac{1}{1-||sa||} = ||\Gamma(sa)||$ 其中，不等式成立是因为 T 是一个压缩算子。因此， $\Gamma(T)$ 定义良好，并且是超弱稠密子代数 $\mathcal{A} = \{\Gamma(a) : ||a|| \leq 1\}$上的一个压缩算子。为说明 $\Gamma(T)$ 是正规的，我们考虑其对偶映射 $\Gamma(T)^*$ 在预对偶 $\mathbb{P}_{\omega_M}M_*$上的限制。利用对偶映射 T，我们有：

$$\begin{aligned}\langle \Gamma(T)^*\lambda_\emptyset(x_1,...,x_m)d_{\phi_M}, \Gamma(y)\rangle &= \langle \lambda_\emptyset(x_1,...,x_m)d_{\phi_M}, \Gamma(Ty)\rangle \\ &= \exp(\omega_M(Ty-1)) \prod_{1\leq i\leq m} \omega_M((Ty)x_i) \\ &= \exp(\omega_N(y-1)) \prod_{1\leq i\leq m} \omega_N(y\hat{T}(x_i)) \\ &= \langle \lambda_\emptyset(\hat{T}x_1,...,\hat{T}x_m)d_{\phi_N}, \Gamma(y)\rangle\end{aligned} \tag{3.28}$$

其中， $x_i \in M$、 $y \in N$都是压缩算子， $\langle\ ,\ \rangle$ 表示预对偶与代数之间的典范配对。由于由压缩算子生成的代数在泊松代数中超弱稠密，等式 3.27 成立。由于对偶映射 $\Gamma(T)^*$ 在预对偶上定义了一个压缩算子， $\Gamma(T)$ 是一个正规收缩。

此外， 在由压缩算子生成的超弱稠密子代数上，我们有：

$$\phi_{\omega_M}(\Gamma(T)\Gamma(x)) = \exp(\omega_M(Tx-1)) = \exp(\omega_N(x-1)) = \phi_{\omega_N}(\Gamma(x))\,.$$

因此 $\phi_{\omega_M} \circ \Gamma(T) = \phi_{\omega_N}$。 ■

推论 3.13. 使用与引理 *3.3* 相同的记号，设 $\pi : N \to M$ 是保持忠实泛函的正规 $*$-同态： $\omega_M \circ \pi = \omega_N$。此外，假设子代数 $\pi(N)$ 在模自同构群 $\{\sigma_t^M\}$下保持不变。则存在正规 $*$-同态：

$$\Gamma(\pi) : \mathbb{P}_\omega N \to \mathbb{P}_\omega M : \Gamma(a) \mapsto \Gamma(\pi(a)) \tag{3.29}$$

使得 $\phi_{\omega_M} \circ \Gamma(\pi) = \phi_{\omega_N}$。

证明。若 $\exists x \neq 0 \in N$ 使得 $\pi(x) = 0$，则 $0 = \omega_M \circ \pi(x) = \omega_N(x)$。由于 ω_N 和 ω_M都是忠实的， π 必然是忠实的。因此，我们可以将 N 与其在 M 中的像等同，并将 N视为 M 中的子代数。由于 $\pi(N)$ 在模自同构下保持不变，且 ω_M 在 $\pi(N)$ 上的限制等于正规泛函 ω_N，根据竹崎定理 [Tak03]，存在一个正规条件期望：

$$E : M \to \pi(N)$$

使得 $\omega_N \circ E = \omega_M$。此外， $\omega_N(x\pi^{-1}E(y)) = \omega_M(\pi(x)E(y)) = \omega_M(E(\pi(x)y)) = \omega_M(\pi(x)y)$。因此，根据命题 3.3， $\Gamma(\pi)$ 是一个定义良好的正规收缩算子，并且保持泊松态。

由于单位元 $*$-代数 $\mathcal{A} = \{\Gamma(x) : ||x|| \leq 1\}$ 在泊松代数中超弱稠密（参见引理 3.12），我们只需证明 $\Gamma(\pi)$ 是定义良好的有界 $*$-同态，定义在 $\mathcal{A}$ 上。由于 $\Gamma(1) = 1$ 属于泊松代数，因此有 $\Gamma(\pi)\Gamma(1) = \Gamma(\pi(1)) = \Gamma(1)$。此外， $\Gamma(\pi)$ 是乘法保持的： $\Gamma(\pi)\big(\Gamma(x)\Gamma(y)\big) = \Gamma(\pi)\Gamma(xy) = \Gamma(\pi(xy)) = \Gamma(\pi(x))\Gamma(\pi(y))$。显然， $\Gamma(\pi)$ 保持 $*$： $\Gamma(\pi)\Gamma(x^*) = \Gamma(\pi(x^*)) = \Gamma(\pi(x))^*$。最后，由于 π 是单射，它保持范数。因此，对所有 $t<1$，有： $||\Gamma(\pi(tx))|| =$

$\frac{1}{1-\|\pi(tx)\|} = \frac{1}{1-\|tx\|} = \|\Gamma(tx)\|$。因此，由稠密性和线性性可知，整个泊松代数上的 $\Gamma(\pi)$ 是一个正规 $*$-同态。 ■

推论 3.14。采用与推论 *3.13* 相同的记号，模自同构群 $\{\sigma_t^\omega\}$ 存在一个强连续提升：$\Gamma(\sigma_t^\omega): \mathbb{P}_\omega N \to \mathbb{P}_\omega N$，且该提升保持泊松态。此外，该提升是泊松态的模自同构：

$$\Gamma(\sigma_t^\omega) = \sigma_t^{\phi_\omega} . \tag{3.30}$$

证明。对每个 $t \in \mathbb{R}$，模自同构 σ_t^ω满足推论 3.13 的假设。因此，$\Gamma(\sigma_t^\omega)$ 是定义良好的正规 $*$-同态，并且保持泊松态。此外，我们可以验证 KMS 条件在超弱稠密子代数 $\mathcal{A}_{ana} = \{\Gamma(a): \|a\| \le 1, a \in N_{ana}^\omega\} = \mathcal{A} \cap \left(\mathbb{P}_\omega(N)\right)_{ana}^{\phi_\omega}$上成立：

$$\begin{aligned} \phi_\omega\Big(\Gamma(\sigma_{t+i}^\omega)\big(\Gamma(x)\big)\Gamma(y)\Big) &= \phi_\omega\Big(\Gamma\big(\sigma_{t+i}^\omega(x)\big)\Gamma(y)\Big) = \exp(\omega(\sigma_{t+i}^\omega(x)y - 1)) \\ &= \exp(\omega(y\sigma_t^\omega(x) - 1)) = \phi_\omega\Big(\Gamma(y)\Gamma(\sigma_t^\omega)\big(\Gamma(x)\big)\Big) . \end{aligned} \tag{3.31}$$

因此，由满足KMS条件的单参数群的唯一性，[Tak03],$\Gamma(\sigma_t^\omega) = \sigma_t^{\phi_\omega}$。特别地，单参数群 $\{\Gamma(\sigma_t^\omega)\}$ 是强连续的。 ■

推论 3.15. 设 $N' \subset N$ 是一个冯·诺伊曼子代数，且限制的正规正泛函 $\omega|_{N'}$ 是半有限的。此外，假设 N' 在模自同构 $\sigma_t^\omega(N') = N'$下不变。那么 $\mathbb{P}_\omega N' \subset \mathbb{P}_\omega N$，并且存在一个正规条件期望：

$$\mathcal{E} : \mathbb{P}_\omega N \to \mathbb{P}_\omega N' \tag{3.32}$$

使得：$\phi_\omega \circ \mathcal{E} = \phi_\omega$。此外，$\mathcal{E} = \Gamma(E)$，其中 $E: N \to N'$是条件期望，$\Gamma(E)$ 是命题 *3.3* 中构造的提升。

证明. 根据推论 3.14，泊松态的模自同构保持泊松代数 $\mathbb{P}_\omega N'$ 不变：

$$\sigma_t^{\phi_\omega}\big(\mathbb{P}_\omega N'\big) = \Gamma(\sigma_t^\omega)\mathbb{P}_\omega N' = \mathbb{P}_\omega \sigma_t^\omega(N') = \mathbb{P}_\omega N' .$$

由于泊松态限制在子代数 $\mathbb{P}_\omega N'$ 上是半有限的，根据竹崎定理 [Tak03]，存在一个正规条件期望：

$$\mathcal{E} : \mathbb{P}_\omega N \to \mathbb{P}_\omega N'$$

它保持泊松态。为说明 $\mathcal{E} = \Gamma(E)$，我们再次考虑超弱稠密子代数 $\mathcal{A} = \{\Gamma(a): \|a\| \le 1\}$，并验证 $\Gamma(E)$ 在希尔伯特空间 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 上给出了正确的投影。对于压缩算子 $x \in N'$ 和 $y \in N$，我们有：

$$\begin{aligned} \langle \Gamma(x)d_{\phi_\omega}^{1/2}, \Gamma(y)d_{\phi_\omega}^{1/2}\rangle &= \phi_\omega(\Gamma(x^*)\mathcal{E}\Gamma(y)) = \phi_\omega(\Gamma(x^*)\Gamma(y)) = \exp(\omega(x^*y - 1)) \\ &= \exp(\omega(x^*E(y) - 1)) = \phi_\omega(\Gamma(x^*)\Gamma(Ey)) = \langle \Gamma(x)d_{\phi_\omega}^{1/2}, \Gamma(E)\Gamma(y)d_{\phi_\omega}^{1/2}\rangle . \end{aligned}$$

由于 $\mathcal{A}$ 是泊松代数中的子代数且超弱稠密，$\{\Gamma(x)d_{\phi_\omega}^{1/2} : \Gamma(x) \in \mathcal{A}\}$ 在希尔伯特空间 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 中稠密。因此，$\Gamma(E)$ 实现了由条件期望 $\mathcal{E}$ 诱导的正交投影。因此，利用稠密性和连续性，我们得到：泊松代数上的 $\mathcal{E} = \Gamma(E)$。

■

推论 3.16. 沿用推论 *3.15* 中的记号，提升后的条件期望在希尔伯特空间 $L_2(\mathbb{P}_\omega N,\phi_\omega)$ 上诱导一个正交投影，其在$\lambda_\emptyset$-基上的作用为：

$$\mathcal{E}\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2}=\lambda_\emptyset(Ex_1,...,Ex_n)d_{\phi_\omega}^{1/2}\,. \tag{3.33}$$

证明。 这直接由命题 3.3 和推论 3.15 得出。条件期望 $E\colon N\to N'$ 与包含 $N'\subset N$ 在如下意义下是对偶的：对于所有的 $x\in N'$ 和 $y\in N$：

$$\omega(x(Ey))=\omega(E(xy))=\omega(xy)\,.$$

因此，证明命题 3.3 中计算的 L_2-版本推出如下结论：

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{E}\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2},\Gamma(y)d_{\phi_\omega}^{1/2}\rangle&=\langle\Gamma(E)\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2},\Gamma(y)d_{\phi_\omega}^{1/2}\rangle\\&=\langle\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2},\Gamma(y)d_{\phi_\omega}^{1/2}\rangle=\exp(\omega(y-1))\prod_{1\le i\le m}\omega(yx_i)\\&=\exp(\omega(y-1))\prod_{1\le i\le m}\omega(y(Ex_i))=\langle\lambda_\emptyset(Ex_1,...,Ex_n)d_{\phi_\omega}^{1/2},\Gamma(y)d_{\phi_\omega}^{1/2}\rangle\end{aligned}$$

其中 $y\in N'$ 是一个压缩算子。于是，由密度性可得所需等式。 ■

此外，我们还需要考虑将到一个角上的正规投影提升到泊松代数中。结果如下述推论所示：

推论 3.17。 设 $e\in N_\omega$ 是 ω 的中心化子中的一个投影（即 $\sigma_t^\omega(e)=e$），并设 $N_e:=eNe+\mathbb{C}(1-e)$ 是 N 中由角 eNe 和投影 $1-e$ 生成的子代数。那么，条件期望 $E_e\colon N\to N_e$ 可以提升为泊松代数上的正规条件期望：$\Gamma(E_e):\mathbb{P}_\omega N\to\mathbb{P}_\omega N_e$。

此外，存在一个等距嵌入：

$$\Gamma(\iota_e):L_2(\mathbb{P}_{\omega_e}(eNe),\phi_{\omega_e})\to L_2(\mathbb{P}_\omega N,\phi_\omega)\,. \tag{3.34}$$

并且，条件期望 $\Gamma(E_e)$ 诱导了一个正交投影，将元素投影到子空间：$\Gamma(\iota_e)\big(L_2(\mathbb{P}_{\omega_e}(eNe)\ \phi_{\omega_e})\big)$。用 $\lambda_\emptyset$-基表示时，我们可以得到该投影的如下显式描述 $\Gamma(E_e)$ ：

$$\Gamma(E_e)\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2}=\sum_{A\subset[n]}\prod_{i\notin A}\omega((1-e)x_i)\lambda_\emptyset(ex_je:j\in A)d_{\phi_{\omega_e}}^{1/2}\,. \tag{3.35}$$

这里，附属算子 $\lambda_\emptyset(ex_je\colon j\in A)$ 由 x_j 生成，其中 $j\in A$。

证明。 由于 e 属于中心化子，子代数 N_e 在模自同构作用下保持不变。因此存在一个正规条件期望：$E_e:N\to N_e$。

包含 $N_e\subset N$ 诱导了一个正规的 $*$-同态：

$$\Gamma(\iota_e):\mathbb{P}_{\omega_e}N_e\to\mathbb{P}_\omega N:\Gamma(a)\mapsto\Gamma(a+(1-e)) \tag{3.36}$$

其中，ω_e 是 ω 在角 N_e上的限制。特别地，$\Gamma(\iota_e)$保持泊松态，因此诱导出 Haagerup L_2-空间的等距嵌入：(3.37)

$$\phi_\omega\big(\Gamma(\iota_e)\Gamma(a)\big)=\exp(\omega(a+(1-e)-1))=\exp(\omega(a-e))=\exp(\omega_e(a-1))=\phi_{\omega_e}(\Gamma(a))\,.$$

M此外，对于任意压缩算子 $y \in eNe$和任意压缩算子 $x \in N$，有:

$$\begin{aligned}(3.38)\quad &\langle \Gamma(x)d_{\phi_\omega}^{1/2}, \Gamma(\iota_e)\Gamma(y)d_{\phi_{\omega_e}}^{1/2}\rangle = \phi_\omega(\Gamma(x^*(y+1-e))) = \exp(\omega(x^*(y+1-e)))\\ &= \exp(\omega(x^*(1-e)))\phi_{\omega_e}(\Gamma(ex^*e)\Gamma(y)) = \exp(\omega(x^*(1-e)))\langle \Gamma(exe)d_{\phi_{\omega_e}}^{1/2}, \Gamma(y)d_{\phi_{\omega_e}}^{1/2}\rangle\end{aligned}$$

综合这些观察，对于任意压缩算子 a in eNe，我们有:

(3.39)

$$\begin{aligned}&\langle \Gamma(E_e)\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2}, \Gamma(a)d_{\phi_{\omega_e}}^{1/2}\rangle = \langle \lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2}, \Gamma(a+1-e)d_{\phi_\omega}^{1/2}\rangle\\ &= \exp(\omega(a-e))\prod_{1\le i\le n}\omega((a+1-e)x_i) = \exp(\omega(a-e))\sum_{A\subset[n]}\prod_{i\in A}\omega(ax_i)\prod_{i\notin A}\omega((1-e)x_i)\\ &= \sum_{A\subset[n]}\prod_{i\notin A}\omega((1-e)x_i)\Big(\exp(\omega_e(a-1))\prod_{i\in A}\omega_e(a(ex_ie))\Big)\\ &= \sum_{A\subset[n]}\prod_{i\in A}\omega((1-e)x_i)\langle \lambda_\emptyset(ex_ie : i\notin A)d_{\phi_{\omega_e}}^{1/2}, \Gamma(a)d_{\phi_{\omega_e}}^{1/2}\rangle\,.\end{aligned}$$

因此，由子代数 $\{\Gamma(a) : ||a|| \le 1\}$ 的稠密性，我们得到所需的公式。 ■

3.4.泊松代数与对称 Fock 空间的标准形。 经过上述准备，我们现在可以构造 Fock 基，并证明 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 与对称 Fock 空间 $\mathcal{F}(L_2(N,\omega))$ 同构。为此，我们考虑如下嵌入:

$$(3.40)\qquad \iota : N \to N\bigoplus N \subset N\overline{\otimes}M_2(\mathbb{C}) : x \mapsto x\otimes e_{11}$$

其中 e_{11} 表示位于 $(1,1)$ 项的矩阵单位。在 $N\bigoplus N$ 上，我们考虑对角态: $\omega_2 := \omega\otimes tr_2 = \omega\oplus\omega$，其中 tr_2 表示 2×2 矩阵代数上的典范迹。于是 ι 保持该态: $\omega_2\circ\iota = \omega$。我们可以将 $\iota(x)$ 分解为一个零均值分量和其余部分: $\iota(x) = x\otimes e_{11} = x\otimes\epsilon + x\otimes e_{22}$其中 $\epsilon := e_{11}-e_{22}\in M_2(\mathbb{C})$。令 $E\colon N\bigoplus N\to N\colon (x,y)\mapsto x$ 为到该角上的正规投影。嵌入ι诱导出一个等距嵌入:

(3.41)

$$\iota : L_2(\mathbb{P}_\omega N,\phi_\omega)\to L_2(\mathbb{P}_{\omega_2}(N\oplus N),\phi_{\omega_2}) : \lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2}\mapsto \lambda_\emptyset(\iota(x_1),...,\iota(x_n))d_{\phi_{\omega_2}}^{1/2}\,.$$

为证明这是一个等距性，我们应用引理 3.9，以及如下事实: $\omega_2(\iota(x_i^*)\iota(x_j)) = \omega(x_i^*x_j)$ $\omega_2(\iota(x)) = \omega(x)$。于是，由多重线性性可得:

$$(3.42)\qquad \lambda_\emptyset(\iota(x_1),...\iota(x_m))d_{\phi_{\omega_2}}^{1/2} = \sum_{A\subset[n]}\lambda_\emptyset\big(\{x_i\otimes\epsilon : i\in A\},\{x_j\otimes e_{22} : j\notin A\}\big)d_{\phi_{\omega_2}}^{1/2}\,.$$

其中，隶属于的算子 $\lambda_\emptyset\big(\{x_i\otimes\epsilon : i\in A\},\{x_j\otimes e_{22} : j\notin A\}\big)$ 由 $x_i\otimes\epsilon$生成（对应 $i\in A$），并由 $x_j\otimes e_{22}$ 生成（对应 $j\notin A$）。

定义 3.18. *Fock* 基是由以下向量构成的集合:

$$(3.43)\qquad \lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2} := \Gamma(E)\lambda_\emptyset(x_1\otimes\epsilon,...,x_n\otimes\epsilon)d_{\phi_{\omega_2}}^{1/2}\,.$$

We 首先给出 Fock 基向量的另一种组合公式 :

引理 3.19。 由推论 *3.17* 可知，下列恒等式成立：

$$\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2}=\sum_{0\le i\le n}(-1)^i\sum_{\substack{A\subset[n]\\|A|=i}}\prod_{j\in A}\omega(x_j)\lambda_\emptyset(\{x_i:i\notin A\})d_{\phi_\omega}^{1/2}\,. \tag{3.44}$$

特别地，$\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,\ldots\ldots,x_n)\,d_{\phi_\omega}^{1/2}\in$ 张成空间$\{\lambda_\emptyset(y_1,\ldots\ldots,y_m)\,d_{\phi_\omega}^{1/2}:\ m\le n\}$。此外，对于 $m<n$，我们有：

$$\langle\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2},\lambda_\emptyset(y_1,...,y_m)d_{\phi_\omega}^{1/2}\rangle=0\,. \tag{3.45}$$

证明。 这可由直接应用推论 3.17 得出。

$$\begin{aligned}\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2}&=\Gamma(E)\lambda_\emptyset(x_1\otimes\epsilon,...,x_n\otimes\epsilon)d_{\phi_{\omega_2}}^{1/2}\\&=\sum_{A\subset[n]}\prod_{i\in A}\omega_2((1-e_{11})x_i\otimes\epsilon)\lambda_\emptyset(\{e_{11}x_j\otimes\epsilon:j\notin A\})d_{\phi_\omega}^{1/2}\\&=\sum_{0\le i\le n}\sum_{\substack{A\subset[n]\\|A|=i}}\prod_{i\in A}\omega(-x_i)\lambda_\emptyset(\{x_i:i\notin A\})d_{\phi_\omega}^{1/2}\,.\end{aligned}$$

显然，Fock 基 $\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2}$ 属于由至多 n 个元素生成的 $\lambda_\emptyset$-基所张成的子空间。最后，我们使用引理 3.9 计算内积：

$$\begin{aligned}&\langle\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{\frac12},\lambda_\emptyset(y_1,...,y_m)d_{\phi_\omega}^{\frac12}\rangle\\&=\langle\lambda_\emptyset(x_1\otimes\epsilon,...,x_n\otimes\epsilon)d_{\phi_{\omega_2}}^{\frac12},\lambda_\emptyset(y_1\otimes e_{11},...,y_m\otimes e_{11})d_{\phi_{\omega_2}}^{\frac12}\rangle\\&=\sum_{0\le p\le m}\sum_{\substack{A_n\sqcup B_n=[n]\\A_m\sqcup B_m=[m]\\|B_n|=|B_m|=p}}\prod_{i\in B_n,j\in B_m}\omega_2(x_i^*y_j\otimes e_{11})\prod_{i\in A_n}\omega_2(x_i^*\otimes\epsilon)\prod_{j\in A_m}\omega_2(y_j\otimes e_{11})\,.\end{aligned} \tag{3.46}$$

由于 $\omega_2(x\otimes\epsilon)=0$，右侧的各项仅在 $|A_n|=0$ 时非零。然而，由于对于所有项都有 $m<n$，$|A_n|>0$。因此，总和为零。 ∎

推论 3.20。 使用与引理 *3.19* 相同的记号，*Fock* 基满足准自由关系：

$$\langle\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2},\lambda_{\emptyset\emptyset}(y_1,...,y_m)d_{\phi_\omega}^{1/2}\rangle=\delta_{n,m}\sum_{\pi\in S_n}\prod_{1\le i\le n}\omega(x_i^*y_{\pi(i)})\,. \tag{3.47}$$

证明。 不失一般性，设 $m\le n$。于是有：

$$\begin{aligned}&\langle\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2},\lambda_{\emptyset\emptyset}(y_1,...,y_m)d_{\phi_\omega}^{1/2}\rangle\\&=\sum_{0\le\alpha\le m}(-1)^\alpha\sum_{\substack{A\subset[m]\\|A|=\alpha}}\prod_{i\in A}\omega(y_i)\langle\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2},\lambda_\emptyset(\{y_i:i\notin A\})d_{\phi_\omega}^{1/2}\rangle\\&=\delta_{m,n}\langle\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2},\lambda_\emptyset(y_1,...,y_n)d_{\phi_\omega}^{1/2}\rangle\\&=\delta_{n,m}\langle\lambda_\emptyset(x_1\otimes\epsilon,...,x_m\otimes\epsilon)d_{\phi_{\omega_2}}^{1/2},\lambda_\emptyset(y_1\otimes e_{11},...,y_n\otimes e_{11})d_{\phi_{\omega_2}}^{1/2}\rangle\\&=\delta_{n,m}\sum_{\pi\in S_n}\prod_{1\le i\le n}\omega(x_i^*y_{\pi(i)})\end{aligned}$$

最后一个等式是由 $x_i \otimes \epsilon$ 的均值为零这一事实得出的，因此唯一非零的贡献来自 x_i 与 y_j 之间的完全配对。 ■

推论 3.21. 沿用引理 *3.19* 中的记号，存在一个等距同构：

$$\iota : L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega) \to \mathcal{F}(L_2(N,\omega)) : \lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2} \mapsto \otimes_{1\le i\le n}^s x_i \tag{3.48}$$

其中， $\otimes_{1\le i\le n}^s x_i$ 是由 x_i构成的对称张量积。

证明. 利用引理 3.19 中的组合公式，我们有：

$$\mathrm{span}\{\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2}\} = \mathrm{span}\{\lambda_{\emptyset}(y_1,...,y_m)d_{\phi_\omega}^{1/2}\}\,. \tag{3.49}$$

由于 $\lambda_\emptyset$-向量张成 Haagerup L_2-空间中的一个稠密子空间，Fock 基也张成一个稠密子空间。因此，公式 $\iota(\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,...,x_n)d_{\phi_\omega}^{1.2}) = \otimes_{1\le i\le n}^s x_i$ 在 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$的一个稠密子空间上定义了一个良定义的线性映射。根据推论 3.20， ι 是等距的。因此，它可延拓为到整个 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$的等距映射。由于对称张量构成对称 Fock 空间的一组基，显然 ι 是一个同构。 ■

借助 Fock空间同构，自然会想到 $\lambda(x)$ 是否通过熟悉的产生/湮灭作用作用于 Fock 基。然而事实并非如此。

引理 3.22. $\lambda(x)$ 以如下方式作用于 *Fock* 基：

$$\begin{aligned}\lambda(x)\lambda_{\emptyset\emptyset}(y_1,...,y_n)d_{\phi_\omega}^{1/2} &= \lambda_{\emptyset\emptyset}(x,y_1,...,y_n)d_{\phi_\omega}^{1/2} + \sum_{1\le i\le n}\lambda_{\emptyset\emptyset}(y_1,...,xy_i,...,y_n)d_{\phi_\omega}^{1/2} \\ &- \omega(x)\lambda_{\emptyset\emptyset}(y_1,...,y_n)d_{\phi_\omega}^{1/2} - \sum_{1\le i\le n}\omega(xy_i)\lambda_{\emptyset\emptyset}(y_1,...,y_{i-1},y_{i+1},...,y_n)d_{\phi_\omega}^{1/2}\end{aligned} \tag{3.50}$$

证明。 使用与引理 3.19 相同的记号，我们有：

$$\begin{aligned}&\lambda(x)\lambda_{\emptyset\emptyset}(y_1,...,y_n)d_{\phi_\omega}^{1/2} \\ &= \Gamma(E)\left(\lambda(x\otimes e_{11})\lambda_\emptyset(y_1\otimes\epsilon,...,y_n\otimes\epsilon)d_{\phi_{\omega_2}}^{1/2}\right) \\ &= \Gamma(E)\left(\lambda_\emptyset(x\otimes e_{11}, y_1\otimes\epsilon,...,y_n\otimes\epsilon)d_{\phi_{\omega_2}}^{1/2} + \sum_{1\le i\le n}\lambda_\emptyset(y_1\otimes\epsilon,...,xy_i\otimes e_{11},...,y_n\otimes\epsilon)d_{\phi_{\omega_2}}^{1/2}\right) \\ &= \lambda_{\emptyset\emptyset}(x,y_1,...,y_n)d_{\phi_\omega}^{1/2} + \sum_{1\le i\le n}\lambda_{\emptyset\emptyset}(y_1,...,xy_i,...,y_n)d_{\phi_\omega}^{1/2} - \omega(x)\lambda_{\emptyset\emptyset}(y_1,...,y_n)d_{\phi_\omega}^{1/2} \\ &- \sum_{1\le i\le n}\omega(xy_i)\lambda_{\emptyset\emptyset}(y_1,...,y_{i-1},y_{i+1},...,y_n)d_{\phi_\omega}^{1/2}\,.\end{aligned}$$ ■

注 3.23. 如果我们考虑 *CCR* 代数及其在对称 *Fock* 空间上的表示，那么 *CCR* 代数的无穷小生成元就是熟悉的产生／湮灭算子。在这种情况下，通常的数算子是良定义的，并生成一个强连续半群。形如： $\lambda(x_1)...\lambda(x_n)\xi_\omega$ 的向量是数算子的特征向量，可以解释为一个由 n 准粒子组成的系综的态。根据 *Fock* 基的构造和引理 *3.22*，通常的数算子无法在 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 上给出正确的分次结构，而隶属于 $\lambda(x)$ 的生成元则不能解释为产生／湮灭算子。因此，从启发式的角度来看，泊松代数中不存在明确定义的“准粒子”概念。

3.5. 正规忠实半有限权的泊松代数。 本节将上一小节中泊松代数的构造推广到允许 ω 为正规忠实半有限权（n.s.f. 权）的情形。这一推广对于潜在应用是必要的。例如，泊松化的一项应用是按照代数量子场论（AQFT）的含义构造局域可观测代数 [Haa96]。其中，模自同构群通常来自非紧李群的某些酉表示，而相应的泛函通常是无界的。

我们给出两种构造泊松代数的方法，起点是一个冯·诺伊曼代数和一个固定的正规半有限忠实权。这两种构造都采用空间方法：我们不直接构造泊松代数，而是先构造恰当的希尔伯特空间，随后泊松代数将成为由适当的酉算子生成的子代数。所得泊松代数将处于标准形中，而泊松态则由希尔伯特空间中的一个“真空”向量表示。这个希尔伯特空间上的内积利用矩公式定义，而引理 3.5 中的一致估计对构造至关重要。第一种构造依赖于这样一个事实：任意正规半有限忠实权都可以写成正规正泛函的弱极限。因此，泊松代数的希尔伯特空间可以实现为由 Haagerup L_2-空间组成的网的超积中的一个闭子空间。第二种构造采用更抽象的代数方法，并高度依赖上一小节推导出的组合公式。这里的关键观察是，这些组合公式在形式层面上是有意义的。因此，可以将这些公式用作内积和基向量的定义。这种方法受到量子概率领域 [Par12] 的启发。完成构造后，我们证明这两种构造得到的泊松代数彼此同构。

3.5.1. 作为态极限的正规半有限忠实权的泊松代数。 有关正规半有限忠实权的更多信息，请参见 [Tak03] 。回顾一下，正规权可以表征为受控有界正泛函的上确界： $\omega(x) = \sup\{\varphi(x) : \varphi \leq \omega\}$。我们的目标是找到一个受控正规正泛函网 $\{\varphi_s\}_s$，使其弱收敛于 ω。回顾一下，每个正规忠实权都定义一个左希尔伯特代数，其稠密子代数由以下左理想给出：

$$n_\omega := \{x \in N : \omega(x^*x) < \infty\}\,. \tag{3.51}$$

此外，回顾一下，权的定义理想是一个双边理想：

$$m_\omega := n_\omega^* n_\omega = \{\sum_{1\leq i\leq n} x_i^* y_i : x_i, y_i \in n_\omega\}\,. \tag{3.52}$$

左理想 n_ω 构成 Haagerup L_2-空间 ω 的稠密子空间 ：

$$\iota : n_\omega \to L_2(N,\omega) : x \mapsto \hat{x} \tag{3.53}$$

其中， $\iota(n_\omega)$上的内积有限： $\langle \hat{x}, \hat{x}\rangle = \omega(x^*x) < \infty$。为了使泊松化与模自同构群相容，必须考虑定义理想 m_ω中的解析元素。这由著名的 Tomita 代数 [Tak03]给出。回顾一下，ω 的 Tomita 代数是 N 的一个超弱稠密 $*$-子代数，定义如下：

$$\mathcal{U}_{ana}^\omega := \{x \in n_\omega : \hat{x} \in \cap_{n\geq 0} D(\Delta_\omega^n),\ \forall n \in \mathbb{N}\} \tag{3.54}$$

其中， Δ_ω 是 ω的模算子。如果 $x \in \mathcal{U}_{ana}^{\omega}$，则 $x \in m_\omega$ ，并且存在常数c、 $C>0$ 使得:

$$||\sigma_z^{\omega}(x)|| \leq C\exp(c|Im(z)|)\,.$$

为便于后续使用，我们在 m_ω 上定义如下 L_1-范数:

$$||x||_1 := \inf\{\sum_{1\leq i\leq n}\omega(x_i^*x_i)^{1/2}\omega(y_i^*y_i)^{1/2} : x=\sum_{1\leq i\leq n}x_i^*y_i\}\,. \tag{3.55}$$

显然，若 $||x||_1<\infty$，则 $x\in m_\omega$ 且 $\omega(x)\leq\sum_{1\leq i\leq n}\omega(x_i^*x_i)^{1/2}\omega(y_i^*y_i)^{1/2}<\infty$。从直观上看， $||\cdot||_1$-范数是所有可能的 L_1 元素的 L_2 分解的下确界。对矩公式进行一致控制对我们的构造至关重要（参见引理 3.5）。这可以通过在 Tomita 代数上引入如下范数来实现:

$$|||x||| := \max\{||x||, \omega(x^*x)^{1/2}, \omega(xx^*)^{1/2}, ||x||_1\}\,. \tag{3.56}$$

有了这些记号和定义，我们现在可以通过用有界正泛函逼近正规半有限忠实权，来构造泊松化。

引理 3.24。 设 ω 是一个正规半有限忠实权，则存在一个正规正泛函网 $\{\varphi_s\}_s$ ，使得该网弱收敛于 ω: $\lim_s\varphi_s(x)=\omega(x)$。此外，若 N 具有可分前对偶，则可将网限制为一个子网，使其中所有的 φ_s 都是忠实的。

证明。 回顾 [Tak03] ，存在一个作用在交换子 $\pi_\omega(N)'$上的对偶权 ω'。并且 ω' 是一个正规半有限忠实权，其定义理想的正单位球包含所有从属于 ω [Tak03]的正泛函的 Radon–Nikodym 导数:

$$\{h_\varphi : \varphi(\cdot)=\omega(h_\varphi\cdot),\ \varphi\leq\omega\} = \{x\in m_{\omega'} : ||x||\leq 1,\ x\geq 0\}\subset m_{\omega'}^{+}\,. \tag{3.57}$$

由于 $m_{\omega'}$ 是一个遗传理想，我们可以为开正单位球固定一个近似单位网： $\{h_s\}_s\subset m_{\omega'}^{+}$。于是有:

$$\lim_s\varphi_s(x) := \lim_s\omega(h_sx) = \sup_s\varphi_s(x) = \omega(x)\,.$$

到目前为止，这种构造并不能保证所有正泛函都是忠实的。然而，若 N 具有可分前对偶，则存在一个可数子集 $\{x_i\}_{i\in I}\subset m_\omega$ ，使得 $\mathrm{span}\{\omega(x_i\cdot)\in N_*\}$ 在预对偶中是 L_1-稠密的。此外，交换子 $\pi_\omega(N)'$ 也具有可分前对偶。因此，我们可以将网 $\{h_s\}_s\subset m_{\omega'}^{+}$ 取为一个序列。此外，对每个 x_i，由于 $\lim_s\varphi_s(x_i)=\omega(x_i)$，存在一个泛函子列 $\{\varphi_{s_i}\}_{s,\ i}$ ，它们在 x_i 上是忠实的，并弱收敛到 ω。于是通过对角线论证，我们可以用一个弱收敛的忠实泛函子列替换$\{\varphi_s\}_s$ ，其极限为 ω。 ■

命题 3.4. 设(N,ω) 是一个具有可分前对偶的冯·诺伊曼代数，并配有一个固定的正规忠实半有限权。设 $\mathcal{U}_{ana}^{\omega}$ 是 ω 的 *Tomita* 代数，其范数为 $|||\cdot|||$（参见公式 *3.56*）。则以下陈述成立:

(1) 存在一个希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\omega\subset\prod_s^w L_2(\mathbb{P}_{\varphi_s}N,\phi_s)$ ，其中 w 是 $\mathbb{N}$ 上的自由超滤子，$\{\varphi_s\}_s$ 是一个弱收敛到 ω 的正规忠实正泛函序列。$\mathbb{P}_{\varphi_s}N$ 是由泛函 φ_s 诱导的泊松代数，而 ϕ_s 是相应的$\widetilde{}$泊松态。希尔伯特空间 H_ω 具有基向量 $\{\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n):$ $x_i\in\mathcal{U}_{ana}^{\omega}\}$，其中这些基向量由 $\lambda_\emptyset$-基向量的超积表示:

$$\widetilde{\lambda}_\emptyset(x_1,...,x_n) := (\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)d_s^{1/2})^{\bullet} \tag{3.58}$$

其中， d_s 是泊松态 ϕ_s的密度。

(2) 对于 $x \in \{x \in \mathcal{U}_{ana}^{\omega} : \quad x^* = x\}$，超积$(\Gamma(e^{ix}))^\bullet$ 是 H_ω上的定义良好的酉算子：

$$(\Gamma(e^{ix}))^\bullet \widetilde{\lambda}_\emptyset(y_1, ..., y_n) := (\Gamma_s(e^{ix})\lambda_\emptyset(y_1, ..., y_n)d_s^{1/2})^\bullet . \tag{3.59}$$

(3) 将泊松代数 $\mathbb{P}_\omega N$ 定义为由以下酉元生成的冯·诺伊曼代数：$\{(\Gamma(e^{ix}))^\bullet : \quad x \in \mathcal{U}_{ana}^{\omega}, \quad x^* = x\}$ 属于 $\mathbb{B}(H_\omega)$。泊松态 ϕ_ω 由向量 $(d_s^{1/2})^\bullet$ 表示，并且 ϕ_ω 是正规忠实态。此外，我们有如下同构：

$$L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega) \cong H_\omega : \lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2} \mapsto \widetilde{\lambda}_\emptyset(x_1, ...x_n) \tag{3.60}$$

其中， d_{ϕ_ω} 是泊松态的密度。

证明。 根据引理 3.5，向量族 $\lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n)d_s^{1/2}$的范数一致有界于：

$$||\lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n)d_s^{1/2}||_2^2 \leq Cn^{2n} \prod_{1\leq i\leq n} |||x_i|||^2 \tag{3.61}$$

~其中 $C > 0$是一个绝对常数。因此， $\lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n)$在超积 $\prod_s^w L_2(\mathbb{P}_{\varphi_s}N, \varphi_s)$中定义良好。于是，希尔伯特空间 H_ω 定义良好，并由以下向量张成：~$\{\lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n) : \quad x_i \in \mathcal{U}_{ana}^{\omega}\}$。

为证明该作用定义良好，我们使用以下一致估计 s:

$$\begin{aligned} ||\Gamma(e^{itx})\lambda(y_1)...\lambda(y_n)d_s^{1/2}||_2 &\leq \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!}||\lambda(x)^k\lambda(y_1)...\lambda(y_n)d_s^{1/2}||_2 \\ &\leq \sum_{k\geq 0} \frac{C^{n+k}t^k(n+k)^{n+k}|||x|||^k}{k!} \prod_{1\leq i\leq n} |||y_i||| \\ &\leq \sum_{k\geq 0} (1+\frac{n}{k})^k C^n (Cet|||x|||)^k \prod_{1\leq i\leq n} |||y_i||| \end{aligned} \tag{3.62}$$

其中第二个不等式由引理 3.5 得出。由于常数 C 是一个普适常数，对于$|t| < \frac{1}{C|||x|||e}$，该算子一致有界。由于 λ-向量是 $\lambda_\emptyset$-向量的有限线性组合，因此对于$|t| < \frac{1}{C|||x|||e}$，$(\Gamma(e^{itx})\lambda(y_1)...\lambda(y_n)d_s^{1/2})^\cdot$ 在 H_ω 中定义了一个向量。此外，对于$t \geq \frac{1}{C|||x|||e}$，我们可以将 $t = k\frac{1}{2C|||x|||e} + \delta t$ 分解为 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $|\delta t| < \frac{1}{C|||x|||e}$。因此，通过分解 $\Gamma(e^{itx}) = \prod_{1\leq i\leq |k|} \Gamma(e^{i\,\mathrm{sgn}^k\frac{1}{2C|||x|||e}x})\Gamma(e^{i\delta tx})$，我们看到对于所有 $t \in \mathbb{R}$，$(\Gamma(e^{itx}))^\bullet$ 是 H_ω 上定义良好的酉算子。此外，根据命题 3.1 的证明中给出的微分公式，$\mathrm{span}\{(\Gamma(e^{ix_1})...\Gamma(e^{ix_n})d_s^{1/2})^\bullet\} = \mathrm{span}\{(\lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n)d_s^{1/2})^\bullet\} = \mathrm{span}\{(\lambda(x_1)...\lambda(x_n)d_s^{1/2})^\bullet\}$，其中最后一个等式源于这样的事实：$\lambda_\emptyset$- 向量是 λ-向量的有限线性组合，反之亦然。

由于对于所有的 s、$||d_s^{1/2}|| = 1$ 和 ξ_ω，泊松态 ϕ_s 都是归一化的：$= (d_s^{1/2})^\bullet$ 是 H_ω 中定义良好的向量。我们需要验证由下式定义的态：$\langle \xi_\omega, \cdot \xi_\omega \rangle$ 是正规忠实态，并满足泊松态的矩公式。显然，这个态是正规且归一化的。此外，根据定义，~~$L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega) =$ 张成空间$\{(\Gamma(e^{ix_1})...\Gamma(e^{ix_n})d_s^{1/2})^\bullet\}$~~。作为一个向量空间，它与 H_ω 同构。要证明这是等距性，我们需要验证

向量态 $\langle\xi_\omega,\cdot\xi_\omega\rangle$ 的矩公式:

$$\begin{aligned}||(\lambda(x_1)...\lambda(x_n)d_s^{1/2})^\bullet||_2^2 &= \lim_s ||\lambda(x_1)...\lambda(x_n)d_s^{1/2}||_2^2\\ &= \lim_s \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(n)}\prod_{A\in\sigma}\varphi_s(\overrightarrow{\prod}_{i\in A}x_i)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(n)}\prod_{A\in\sigma}\omega(\overrightarrow{\prod}_{i\in A}x_i)\end{aligned}\tag{3.63}$$

由于弱收敛以及 x_i 属于 Tomita 代数这一事实，极限存在。因此，我们得到所需的等距性。特别地，泊松态是忠实的。 ■

推论 3.25。 使用与命题 *3.4* 相同的记号，泊松态 ϕ_ω 的模自同构满足:

$$\sigma_t^{\phi_\omega}((\Gamma(e^{ix}))^\bullet) = (\sigma_t^{\varphi_s}\Gamma(e^{ix}))^\bullet = (\Gamma(\sigma_t^\omega(e^{ix})))^\bullet\,.\tag{3.64}$$

特别地，模算子在 $L_2(\mathbb{P}_\omega N,\ \phi_\omega)$ 上的作用为:

$$\Delta_{\phi_\omega}^{it}\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)\xi_\omega = \lambda_\emptyset(\sigma_t^\omega(x_1),...,\sigma_t^\omega(x_n))\xi_\omega\,.\tag{3.65}$$

证明。 我们定义一个单参数酉群:

$$U_t : L_2(\mathbb{P}_\omega N,\phi_\omega)\to L_2(\mathbb{P}_\omega N,\phi_\omega) : \lambda(x_1)...\lambda(x_n)\xi_\omega\mapsto\lambda(\sigma_t^\omega(x_1))...\lambda(\sigma_t^\omega(x_n))\xi_\omega\,.\tag{3.66}$$

利用矩公式以及模自同构保持权这一事实，很容易看出 U_t 是酉元:

$$\begin{aligned}\langle U_t\lambda(x_1)...\lambda(x_n)\xi_\omega, U_t\lambda(x_1)...\lambda(x_n)\xi_\omega\rangle &= \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(2n)}\sum_{\substack{A\in\sigma\\ B_A\sqcup B_A^*=A}}\omega(\overleftarrow{\prod}_{(i+n)\in B_A^*}\sigma_t^\omega(x_i^*)\overrightarrow{\prod}_{i\in B_A}\sigma_t^\omega(x_i))\\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(2n)}\sum_{\substack{A\in\sigma\\ B_A\sqcup B_A^*=A}}\omega(\sigma_t^\omega(\overleftarrow{\prod}_{(i+n)\in B_A^*}x_i^*\overrightarrow{\prod}_{i\in B_A}x_i))\\ &= \langle\lambda(x_1)...\lambda(x_n)\xi_\omega,\lambda(x_1)...\lambda(x_n)\xi_\omega\rangle\end{aligned}\tag{3.67}$$

其中，上方的箭头表示乘法的顺序。酉元 U_t 也可以表示为超积: $U_t = (\Delta_s^{is})^\bullet$ ，其中 Δ_s 是泊松态 ϕ_s的模算子。为此，我们进行如下计算:

$$\begin{aligned}\langle\lambda(x_1)...\lambda(x_n)\xi_\omega,(\Delta_s^{it})^\bullet\lambda(y_1)...\lambda(y_m)\xi_\omega\rangle &= \lim_s\langle\lambda(x_1)...\lambda(x_n)d_s^{1/2},\Delta_s^{it}\lambda(y_1)...\lambda(y_m)d_s^{1/2}\rangle\\ &= \lim_s\sum_{\sigma\in\mathcal{P}(m+n)}\sum_{\substack{A\in\sigma\\ B_A=A\cap[m]\\ B_A^*=A\cap B_A^c}}\varphi_s(\overleftarrow{\prod}_{(i+m)\in B_A^*}x_i^*\overrightarrow{\prod}_{i\in B_A}\sigma_t^{\varphi_s}(y_i))\\ &= \lim_s\sum_{\sigma\in\mathcal{P}(n+m)}\sum_{\substack{A\in\sigma\\ B_A=A\cap[m]\\ B_A^*=A\cap B_A^c}}\varphi_s(\overleftarrow{\prod}_{(i+m)\in B_A^*}x_i^*\overrightarrow{\prod}_{i\in B_A}\sigma_t^{\omega}(y_i))\\ &= \langle\lambda(x_1)...\lambda(x_n)\xi_\omega,\lambda(\sigma_t^\omega(y_1))...\lambda(\sigma_t^\omega(y_m))\xi_\omega\rangle\,.\end{aligned}\tag{3.68}$$

其中我们用到了这样一个事实：对于某个属于交换子 $\pi_\omega(N)'$ 的 h_s， $\varphi_s(\cdot) = \omega(h_s\cdot)$，因此$\sigma_t^{\varphi_s}(\cdot) = h_s^{it/2}\sigma_t^\omega(\cdot)h_s^{-it/2}$。特别地，由于拉东-尼科迪姆导数 h_s 属于交换子， $\varphi_s(x^*\sigma_t^{\varphi_s}(y)) = \omega(h_s x^* h_s^{it/2}\sigma_t^\omega(y)h_s^{-it/2}) = \omega(h_s x^*\sigma_t^\omega(y)) = \varphi_s(x^*\sigma_t^\omega(y))$。

该酉群的伴随作用在 $\mathbb{P}_\omega N$ 上定义了一个强连续的单参数自同构：

$$\alpha_t : \mathbb{P}_\omega N \to \mathbb{P}_\omega N : (\Gamma(e^{ix}))^\bullet \mapsto U_t^*(\Gamma(e^{ix}))^\bullet U_t = (\Delta_s^{it}\Gamma(e^{ix})\Delta_s^{-it})^\bullet = (\sigma_t^{\varphi_s}(\Gamma(e^{ix})))^\bullet . \tag{3.69}$$

为证明 $\{\alpha_t\}_t$ 是泊松态的模自同构群，我们验证 α_t 保持 ϕ_ω，且 α_t 满足 KMS条件。

为证明 α_t 保持泊松态，我们计算：

$$\phi_\omega\left(\alpha_t\big((\Gamma(e^{ix}))^\bullet\big)\right) = \langle\xi_\omega, U_t^*(\Gamma(e^{ix}))^\bullet U_t\xi_\omega\rangle = \langle\xi_\omega, (\Gamma(e^{ix}))^\bullet\xi_\omega\rangle = \phi_\omega((\Gamma(e^{ix}))^\bullet) . \tag{3.70}$$

由于泊松代数由 $\Gamma(e^{ix})$' 生成，且 α_t 是一个自同构，因此泊松态在 α_t 作用下保持不变。

为检验 KMS条件，我们考虑泊松代数的一个稍有不同的生成集。若 $x-1$ 属于 Tomita 代数，则 $\Gamma(e^{2\pi ix}) = \Gamma(e^{2\pi i(x-1)})$，因此 $(\Gamma(e^{2\pi ix}))^\bullet$ 定义良好，并构成泊松代数的一个生成集。我们在这些生成酉元上检验 KMS条件：

$$\begin{aligned}
\phi_\omega\left((\Gamma(e^{iy}))^\bullet\alpha_t(\Gamma(e^{ix}))^\bullet\right) &= \lim_s \phi_s\left(\Gamma(e^{iy})\sigma_t^{\varphi_s}\Gamma(e^{ix})\right) = \lim_s \exp(\varphi_s(y\sigma_t^{\varphi_s}(x)-1)) \\
&= \lim_s \exp(\varphi_s((y-1)(\sigma_t^{\varphi_s}(x)-1)) + \varphi_s(y-1) + \varphi_s(\sigma_t^{\varphi_s}(x)-1)) \\
&= \lim_s \exp(\varphi_s((\sigma_{t+i}^{\varphi_s}(x)-1)(y-1)) + \varphi_s(y-1) + \varphi_s(\sigma_{t+i}^{\varphi_s}(x)-1)) \\
&= \lim_s \exp(\varphi_s(\sigma_{t+i}^{\varphi_s}(x)y-1)) = \phi_\omega\left(\alpha_{t+i}(\Gamma(e^{ix}))^\bullet(\Gamma(e^{iy}))^\bullet\right)
\end{aligned} \tag{3.71}$$

其中我们利用了以下事实： $x\in\mathcal{U}_{ana}^\omega$当且仅当$x\in\mathcal{U}_{ana}^{\varphi_s}$，因为 $\varphi(\cdot) = \omega(h_s\cdot)$，且 h_s属于交换子 $\pi_\omega(N)'$。

综合这些计算，由于模自同构群的唯一性，$\alpha_t = \sigma_t^{\phi_\omega}$ [Tak03]。 ∎

为了定义幺正完全正映射的提升，记录以下公式很有用：

推论 3.26。考虑以下元素集合： $S := \{x\in N : \ ||a||\le 1, \ \ a-1\in m_\omega\}$，对于 $y\in S$，以下等式成立：

$$\begin{aligned}
&\langle\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)\xi_\omega, \Gamma(y)\lambda_\emptyset(z_1,...,z_m)\xi_\omega\rangle \\
&= \exp(\omega(y-1)) \sum_{0\le p\le\min\{m,n\}} \sum_{\substack{A_n\sqcup B_n=[n]\\ A_m\sqcup B_m=[m]\\ |B_n|=|B_m|=p}} \prod_{i\in B_n, j\in B_m} \omega(x_i^* y z_j) \prod_{i\in A_n}\omega(x_i^*) \prod_{j\in A_m}\omega(yz_j) .
\end{aligned} \tag{3.72}$$

证明。根据定义 $\omega(y-1) < \infty$，其余计算与引理 3.9 的证明类似。 ∎

3.5.2. 泊松代数的抽象代数构造。 本小节将基于抽象代数方法，给出泊松化的另一种构造。关键观察是，希尔伯特空间 $L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)$ 可以通过纯代数构造和矩公式来定义。特别地，内积的正定性可由 N 上某些组合公式的正性推出，而无需依赖其他分析信息。此外，我们将使用与前一种构造相同的生成元来生成泊松代数的酉群。这些无界生成元必须是本质自伴的。根据经典结果，对称算子本质自伴，当且仅当 $\pm i$ 不是它的特征值。同样，这一条件也可以纯粹通过矩公式以代数方式验证。

抽象构造中的主要对象是 Tomita 代数 $\mathcal{U}_{ana}^{\omega}$。由于它是一个结合的 $*$-代数，因此具有典范的李代数结构。回顾一下，给定李代数$\mathfrak{g}$ ，我们总可以考虑其泛包络代数： $\mathbb{U}(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{g}^{\otimes n}/I$ ，其中 I是由 $\{x\otimes y - y\otimes x - [x,y]$ 生成的双边理想： $x, y \in \mathfrak{g}\}$。此外，还存在一个李代数同态： $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{U}(\mathfrak{g})$。我们将这一典范构造应用于 Tomita 代数，并考虑泛包络代数 $\mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega})$。李代数同态 λ: $\mathcal{U}_{ana}^{\omega} \to \mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega})$类似于量子化映射（参见公式 3.2）。

由于 Tomita 代数是一个 $*$-代数，我们也可以在泛包络代数 $\mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega})$ 上定义一个反线性映射：

$$* : \mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega}) \to \mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega}) : (\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \lambda(x_1)...\lambda(x_n))^* \mapsto \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} \lambda(x_n^*)...\lambda(x_1^*) \, . \tag{3.73}$$

现在我们使用以下组合公式来定义抽象的 $\lambda_\emptyset$-基和 $\lambda_{\emptyset\emptyset}$-基。

定义 3.27。对于 $n \geq 2$，归纳地在 $\mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega}$中定义以下元素 ）：

$$\begin{aligned} &\lambda_\emptyset(x_1) := \lambda(x_1) \\ &\lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n) := \lambda(x_1)\lambda_\emptyset(x_2, ..., x_n) - \sum_{2\leq i\leq n} \lambda_\emptyset(x_2, ..., x_1x_i, ..., x_n) \, . \end{aligned} \tag{3.74}$$

利用 $\lambda_\emptyset$-向量，我们定义 $\lambda_{\emptyset\emptyset}$-向量：

$$\begin{aligned} &\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1) := \lambda_\emptyset(x_1) - \omega(x_1) \\ &\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1, ..., x_n) := \sum_{0\leq i\leq n} \sum_{\substack{A\subset[n] \\ |A|=i}} \prod_{i\in A} \omega(-x_i)\lambda_\emptyset(\{x_i : i \notin A\}) \end{aligned} \tag{3.75}$$

其中 $\omega(x_1)$ 属于 $\mathbb{C}\subset\mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega})$。

$\mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega})$中的 $\lambda_\emptyset$-基和 $\lambda_{\emptyset\emptyset}$-基均定义良好。利用抽象的 $\lambda_{\emptyset\emptyset}$-向量，我们可以定义内积：

定义 3.28。 $\langle\cdot, \cdot\rangle$： $\mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega}) \times \mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega}) \to \mathbb{C}$是一个半双线性型，满足：

$$\langle\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1, ..., x_n), \lambda_{\emptyset\emptyset}(y_1, ..., y_m)\rangle = \delta_{n,m} \sum_{\pi\in S_n} \prod_{1\leq i\leq n} \omega(x_i^* y_{\pi(i)}) \, . \tag{3.76}$$

引理 3.29. 该半双线性型是正定且非退化的。映射：

$$\iota : \mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega}) \to \mathcal{F}(L_2(N, \omega)) : \lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1, ..., x_n) \mapsto \otimes_{1\leq i\leq n}\widehat{x_i} \tag{3.77}$$

是一个等距嵌入，且其像在 *Fock* 空间中稠密。这里 $\widehat{x} \in L_2(N,\omega)$是通常的嵌入： $\widehat{\cdot}: n_\omega \to L_2(N,\omega): x \mapsto \widehat{x}$ 其中 n_ω 是权 ω的右有界向量所构成的左理想。

证明。 由公式 3.76 可知，该线性映射是等距的。特别地，Fock 空间 $\{\otimes_{1\le i\le n}\widehat{x_i}: n\in\mathbb{N}\}$ 的基属于 ι 的像，因此 $\iota(\mathbb{U}(\mathcal{U}^\omega_{ana}))$ 是 Fock 空间的稠密子空间。 ∎

$\mathbb{U}(\mathcal{U}^\omega_{ana})$ 在半双线性型 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 下的闭包与对称 Fock 空间 $\mathcal{F}(L_2(N,\omega))$ 等距同构。我们将此闭包记为 $\mathcal{H}_\omega$。

推论 3.30。 $\lambda_\emptyset$-向量构成 H_ω 的另一组基，并且有：

$$\langle\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n),\lambda_\emptyset(y_1,...,y_m)\rangle = \sum_{\substack{0\le p\le\min\{m,n\}\\ A_n\sqcup B_n=[n]\\ A_m\sqcup B_m=[m]\\ |B_n|=|B_m|=p}} \prod_{i\in B_n,j\in B_m}\omega(x_i^*y_j)\prod_{i\in A_n}\omega(x_i^*)\prod_{j\in A_m}\omega(y_j)\,. \tag{3.78}$$

此外，我们还有以下上界：

$$|\langle\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n),\lambda_\emptyset(y_1,...,y_m)\rangle| \le Cn^nm^m\prod_{1\le i\le n}|||x_i|||^2\prod_{1\le j\le m}|||y_j|||^2\,. \tag{3.79}$$

证明。 根据 $\lambda_{\emptyset\emptyset}$-向量的定义，显然对所有 $n\in\mathbb{N}$，都有 $\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,...,x_n)$ ∈张成空间$\{\lambda_\emptyset(y_1,...,y_m): y_i\in\mathcal{U}^\omega_{ana}\}$。因此， $\lambda_\emptyset$-向量构成 H_ω 的一组基。

要证明公式 3.78，只需证明相应的公式 $||\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)||^2$，并使用极化恒等式。通过反向推导公式 3.75，可以证明 $||\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)||^2$ 的公式。根据容斥原理，我们有：

$$\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n) = \sum_{0\le i\le n}\sum_{\substack{A\subset[n]\\|A|=i}}\prod_{i\in A}\omega(x_i)\lambda_{\emptyset\emptyset}(\{x_i: i\notin A\}) \tag{3.80}$$

因此，我们有：

$$\begin{aligned}||\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)||^2 &= \sum_{0\le i\le n}\sum_{\substack{A,B\subset[n]\\|A|=|B|=i}}\prod_{i\in A}\omega(x_i^*)\prod_{j\in B}\omega(x_j)\langle\lambda_{\emptyset\emptyset}(\{x_i: i\notin A\}),\lambda_{\emptyset\emptyset}(\{x_j: j\notin B\})\rangle\\ &= \sum_{\substack{0\le i\le n\\ A,B\subset[n]\\|A|=|B|=i}}\prod_{i\notin A,j\notin B}\omega(x_i^*x_j)\prod_{i\in A}\omega(x_i^*)\prod_{j\in B}\omega(x_j)\,.\end{aligned}$$

这就是我们要证明的公式。最后，上界的推导与引理 3.9 中的计算完全相同。 ∎

我们将在 $\mathbb{B}(\mathcal{H}_\omega)$ 中构造泊松代数。该泊松代数由一组酉元生成，这些酉元的生成元是无界附属算子。这些生成元在稠密子空间 $\mathbb{U}(\mathcal{U}^\omega_{ana})$ 上的作用是受控的。

引理 3.31。 对于 $y\in\mathcal{U}^\omega_{ana}$，在希尔伯特空间 $\mathcal{H}_\omega$ 上由 $\lambda(y)$ 给出的左乘是一个稠定算子，其定义域包含泛包络代数。 $\mathbb{U}(\mathcal{U}^\omega_a)\subset D(\lambda(y))$。

证明。 对于任意 x_1, ..., $x_n \in \mathcal{U}_{ana}^{\omega}$, 我们有:

$$||\lambda(y)\lambda_{\emptyset}(x_1,...,x_n)||^2 = ||\lambda_{\emptyset}(y,x_1,...,x_n) + \sum_{1\le i\le n} \lambda_{\emptyset}(x_1,...,yx_i,...,x_n)||^2$$

求和中有 $\binom{n+1}{2}$ 个内积。每一项的形式如公式 3.78。因此，每一项都有公式 3.79 给出的上界。于是我们有:

$$||\lambda(y)\lambda_{\emptyset}(x_1,...,x_n)||^2 \le C\binom{n+1}{2}(n+1)^{2(n+1)}|||y|||^2 \prod_{1\le i\le n} |||x_i|||^2 . \tag{3.81}$$

此上界对所有 $x_i \in \mathcal{U}_{ana}^{\omega}$均成立。因此，span$\{\lambda_{\emptyset}(x_1, ..., x_n) : x_i \in \mathcal{U}_{ana}^{\omega}\} \subset D(\lambda(y))$。 $\lambda(y)$ 是定义在 $\mathcal{H}_{\omega}$ 上的稠密定义算子，且其定义域包含 $\mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega})$。 ■

对于正的 $y \in \mathcal{U}_{ana}^{\omega}$, $\lambda(y)$ 是一个对称算子。事实上，它是本质自伴的:

引理 3.32. 对于 *Tomita* 代数中的非零正元素: $y^* = y \in \mathcal{U}_a^{\omega}$, $\lambda(y)$ 的左乘是作用在 $\mathcal{H}_{\omega}$上的本质自伴算子。

证明。 根据 $\lambda_{\emptyset}$-向量的递归定义（参见公式 3.74），span$\{\lambda_{\emptyset}(x_1, ..., x_n)\}$ =span$\{\lambda(x_1)...\lambda(x_n)\}$。因此，要证明 $\lambda(y)$是本质自伴的，只需考察λ-基。

我们先推 导出一些描述 $\lambda(y)$作用的冗长公式。首先，我们有 :

$$\begin{aligned}\langle\lambda(x_1)...\lambda(x_n), \lambda(y)\lambda(x_1)...\lambda(x_n)\rangle &= \sum_{\substack{\sigma\in P(2n+1)\\ \{y\}\in\sigma}} \sum_{\substack{A\in\sigma\\ B_A\cup B_A^*=A}} \omega(y)\omega(\overleftarrow{\prod_{(i+n)\in B_A^*}} x_i^* \overrightarrow{\prod_{i\in B_A}} x_i) \\ &+ \sum_{\substack{\sigma\in P(2n+1)\\ \{y\}\notin\sigma}} \Big[[\sum_{\substack{y\notin A\in\sigma\\ B_A\cup B_A^*=A}} \omega(\overleftarrow{\prod_{(i+n)\in B_A^*}} x_i^* \overrightarrow{\prod_{i\in B_A}} x_i)] \times [\sum_{\substack{y\in A_0\\ B_{A_0}\cup B_{A_0}^*=A_0}} \omega(\overleftarrow{\prod_{(i+n)\in B_{A_0}^*}} x_i^* \cdot y \cdot \overrightarrow{\prod_{i\in B_{A_0}}} x_i)] \Big]\end{aligned} \tag{3.82}$$

其中，第一个求和遍历包含 $\{y\}$作为单元素的划分，第二个求和遍历其余划分。由于第一项中 $\{y\}$ 是一个单元素，我们可以将这一项改写为:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\sigma\in P(2n+1)\\ \{y\}\in\sigma}} \sum_{\substack{A\in\sigma\\ B_A\cup B_A^*=A}} \omega(y)\omega(\overleftarrow{\prod_{(i+n)\in B_A^*}} x_i^* \overrightarrow{\prod_{i\in B_A}} x_i) &= \omega(y) \sum_{\sigma\in P(2n)} \sum_{\substack{A\in\sigma\\ B_A\cup B_A^*=A}} \omega(\overleftarrow{\prod_{(i+n)\in B_A^*}} x_i^* \overrightarrow{\prod_{i\in B_A}} x_i) \\ &= \omega(y)||\lambda(x_1)...\lambda(x_n)||^2 .\end{aligned}$$

特别地，由于 $\omega(y) \ge 0$，这一项非负，且当且仅当 $y = 0$ 时为零。对于第二项，我们有如下恒等式:

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{\sigma\in P(2n+1)\\ \{y\}\notin\sigma}} \Big[[\sum_{\substack{y\notin A\in\sigma\\ B_A\cup B_A^*=A}} \omega(\overleftarrow{\prod_{(i+n)\in B_A^*}} x_i^* \overrightarrow{\prod_{i\in B_A}} x_i)] \times [\sum_{\substack{y\in A_0\\ B_{A_0}\cup B_{A_0}^*=A_0}} \omega(\overleftarrow{\prod_{(i+n)\in B_{A_0}^*}} x_i^* \cdot y \cdot \overrightarrow{\prod_{i\in B_{A_0}}} x_i)] \Big] \\ &= ||\sum_{1\le j\le n} \lambda(x_1)...\lambda(y^{1/2}x_j)...\lambda(x_n)||^2 \ge 0 .\end{aligned} \tag{3.83}$$

因此我们有： $\langle\lambda(x_1)...\lambda(x_n)\ \lambda(y)\lambda(x_1)...\lambda(x_n)\rangle = ||\lambda(y^{1/2})\lambda(x_1)...\lambda(x_n)||^2$。由极化恒等式可知， $\lambda(y)$ 是一个对称算子。

更一般地，对于任意形如 $\xi := \sum_{1\le j\le m} c_j\lambda(x_1^{(j)})...\lambda(x_{n_j}^{(j)})$ 的有限线性组合，其中 $x_1^{(j)}$, ..., $x_{n_j}^{(j)} \in \mathcal{U}_{ana}^{\omega}$ and $c_j \in \mathbb{C}$，我们有：

$$\langle\xi,\lambda(y)\xi\rangle = \omega(y)||\xi||^2 + ||\sum_{1\le j\le m} c_j \sum_{1\le k\le n_j} \lambda(x_1^{(j)})...\lambda(y^{1/2}x_k^{(j)})...\lambda(x_{n_j}^{(j)})||^2 . \tag{3.84}$$

利用公式 3.82 和极化恒等式，通过对指标 j 作简单归纳法即可推出公式 3.84。

若 $\xi \in ker(\lambda(y) \pm i)$，则 $\langle\xi,\lambda(y)\xi\rangle = \pm i||\xi||_{\phi_\omega}^2 \in i\mathbb{R}$。因此，由公式 3.84 可知，必有 $\omega(y)||\xi||^2 = 0$。故 $\omega(y) = 0$ ，又由 ω 的保真性可知，这意味着 y =0。因此，对于非零正算子 $y \in \mathcal{U}_{ana}^{\omega}$， $\lambda(y)$ 是一个本质自伴算子。 ■

推论 3.33。 使用与引理 *3.32* 相同的记号， $\{\exp(it\lambda(y))\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是 $\mathbb{B}(\mathcal{H}_\omega)$ 中的一个强连续单参数酉子群。

证明。 结论直接由 Stone 定理 [Tak79] 得出。 ■

定义 3.34。 （抽象）泊松代数 $\mathbb{P}_\omega^{ab}(N)\subset\mathbb{B}(\mathcal{H}_\omega)$ 是由酉元 $\{\exp(it\lambda(x)) :\ x \ge 0,\ x \in \mathcal{U}_{ana}^{\omega}\}$ 生成的冯·诺伊曼代数。泊松态由下式给出 $\langle\xi_0,\cdot\xi_0\rangle$ 其中 $\xi_0 \in \mathbb{C}\subset\mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega})$ 是泛包络代数的常数分量中的单位向量（除相位因子外唯一）。

命题 3.5。 存在一个正规 $*$-同构：

$$\pi : \mathbb{P}_\omega N \to \mathbb{P}_\omega^{ab} N : x \mapsto U^*xU \tag{3.85}$$

该同构由以下酉同构实现：

$$U : \mathcal{H}_\omega \to L_2(\mathbb{P}_\omega N,\phi_\omega) : \lambda(x_1)...\lambda(x_n) \mapsto \lambda(x_1)...\lambda(x_1)d_{\phi_\omega}^{1/2} . \tag{3.86}$$

因此，泊松代数的两种构造是一致的。

证明。这直接源于 [Jun06 第 5] 节中的同构结果。元组 $(\mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega})\ \langle\xi_0,\cdot\xi_0\rangle)$ 是一个非交换 $*$-概率空间（参见 [Jun06 第 5] 节）。设 $S := \{x^* = x :\ x \in \mathcal{U}_{ana}^{\omega}\} \subset \mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega})$ 是表示下列对象的生成集

$*$-概率空间。接着考虑线性映射：

$$\alpha : \mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega}) \to L_2(\mathbb{P}_\omega N,\phi_\omega) : \lambda(x_1)...\lambda(x_n) \mapsto \lambda(x_1)...\lambda(x_n)d_{\phi_\omega}^{1/2} .$$

并考虑生成集的 $*$-表示：

$$\pi : S \to \mathcal{L}_{s.a.}(L_2(\mathbb{P}_\omega N,\phi_\omega)) : x \mapsto \lambda(x)$$

其中 $\mathcal{L}_{s.a.}(\mathcal{H})$ 表示 $\mathcal{H}$ 上自伴稠定算子的集合。然后，使用 [Jun06 第 5], 节的语言，可以清楚地看出，$(\pi,\alpha,d_{\phi_\omega}^{1/2}, L_2(\mathbb{P}_\omega N,\phi_\omega))$ 是非交换 $*$-概率空间 $(\mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega})\ \langle\xi_0,\cdot\xi_0\rangle)$ 的一个表示。另一方面，显然恒等映射：

$$\iota_{\mathcal{A}} : \mathbb{U}(\mathcal{U}_{ana}^{\omega}) \to \mathcal{H}_\omega : \lambda(x_1)...\lambda(x_n) \mapsto \lambda(x_1)...\lambda(x_n)\xi_0$$

以及恒等表示：

$$\iota_S : S \to \mathcal{L}_{s.a.}(\mathcal{H}_\omega) : \lambda(x) \mapsto \lambda(x)$$

form q四元组ple $(\iota_S, \iota_{\mathcal{A}}, \xi_{\emptyset}\ \mathcal{H}_\omega)$ 它也是一个表示 p概率空间的 p概率 y sp空间 $\mathbb{U}(\mathcal{U}^\omega_{ana})$.

由于矩公式满足增长条件（参见引理 3.5 和 [Jun06，第 5] 节），因此存在一个正规 $*$-同态： π： $\mathbb{P}_\omega N \to \mathbb{P}^{ab}_\omega N$。由于 $\mathbb{P}_\omega N$ 上的泊松态和 $\mathbb{P}^{ab}_\omega N$ 上的态 $\langle \xi_0, \cdot \xi_0 \rangle$ 均为忠实态，因此映射 π 是一个同构。此外，它可以由一个酉同构实现：

$$U : \mathcal{H}_\omega \to L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega)\ . \tag{3.87}$$

因此，泊松代数的两种构造是一致的。 ■

3.6. 带正则半有限忠实权的泊松化的函子性质。本小节汇总带正则半有限忠实权的泊松化的一些重要函子性质。这些性质已在前面的章节中针对带有界泛函的泊松化得到证明。

引理 3.35。设(N, ω) 是一个冯·诺伊曼代数，并配有一个正则半有限忠实权，且令 $\mathcal{U}^\omega_{ana}$为 ω的 *Tomita* 代数。此外，设 $S^\omega_{ana} := \{x \in \mathcal{U}^\omega_{ana} :\ x - 1 \in m_\omega,\ ||x|| \leq 1\}$。这是 N 的一个乘法子群，在共轭下保持不变。

考虑映射：

$$\Gamma : \{\exp(ix) \in N : x^* = x,\ x \in \mathcal{U}^\omega_{ana}\} \to \{\exp(i\lambda(x)) \in \mathbb{P}_\omega N : \lambda(x) \eta \mathbb{P}_\omega N\} \tag{3.88}$$

其中 $\lambda(x)\eta\mathbb{P}_\omega N$ 表示 $\lambda(x)$ 是隶属于 $\mathbb{P}_\omega N$的算子。然后，此映射可扩张为一个 $*$-群同态：Γ： $S^\omega_{ana} \to \mathbb{P}_\omega N^\times$。此外，以下熟知的公式成立：

$$\phi_\omega(\Gamma(a)\lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n)) = \exp(\omega(a-1)) \prod_{1 \leq i \leq n} \omega(a x_i)\ . \tag{3.89}$$

证明。 根据泊松代数的抽象构造，映射 Γ在由自伴解析元素生成的酉元集合上定义良好。对于任意压缩算子 $x \in S^\omega_{ana}$，定义$\Gamma(x)$为超积 $(\Gamma_s(x))^\bullet$。对于每个 s，我们有（参见命题 3.4）：

$$\phi_s(\Gamma_s(x)\lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n)) = \exp(\varphi_s(x-1)) \prod_{1 \leq i \leq n} \varphi_s(x x_i)\ . \tag{3.90}$$

对于 $x \in S^\omega_{ana}$，我们可以取极限：$\lim_s \exp(\varphi_s(x-1)) \prod_{1 \leq i \leq n} \varphi_s(x x_i) = \exp(\omega(x-1)) \prod_{1 \leq i \leq n} \omega(x x_i)$，因为 $x_i \in \mathcal{U}^\omega_{ana} \subset m_\omega$，因此 $x x_i \in m_\omega$。由此公式 3.89 成立。

对于自伴解析元 x，我们有： $|\omega(e^{ix} - 1)| \leq \sum_{n \geq 1} \frac{|\omega(x^n|)|}{n!} \leq \exp(|||x|||) < \infty$。因此 $e^{ix} - 1 \in m_\omega$。于是 $\{\exp(ix) :\ x^* = x,\ x \in \mathcal{U}^\omega_{ana}\} \subset S^{\omega\ n}_{ana}$。此外，利用超积构造， $\Gamma(e^{ix})$ 是超积 $(\Gamma_s(e^{ix}))^\bullet$，其中每个分量 $\Gamma_s(e^{ix})$ 作用于 $L_2(\mathbb{P}_{\varphi_s} N, \phi_s)$（参见命题 3.4）。因此 $\Gamma : S^\omega_{ana} \to \mathbb{P}_\omega N^\times$： $x \mapsto \Gamma(x) = (\Gamma_s(x))^\bullet$是方程 3.88 的一个扩展。

最后我们注意到， S^ω_{ana} 是一个乘法群（我们已在推论 3.25 的证明中完成了这一计算）：

$$xy - 1 = (x-1)(y-1) + (x-1) + (y-1)$$

其中 $x, y \in S^\omega_{ana}$。由于 $x - 1, y - 1$ 均属于 Tomita 代数，它们的乘积也属于 Tomita 代数。因此 $xy \in S^\omega_{ana}$。此外，对每个 s，利用对称张量积模型，显然有 $\Gamma_s(x)\Gamma_s(y) = \Gamma_s(xy)$，其中 $x, y \in S^\omega_{ana}$。然后取超积可得 $\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(xy)$。因此 Γ 是一个群同态。 ■

引理 3.36。 设(N,ω_N)和(M,ω_M)是带有固定正规半有限忠实权的两个冯·诺伊曼代数。设 $T\colon N\to M$ 是一个正规幺收缩，满足 $\omega_M\circ T=\omega_N$。假设$\hat{}$ $\hat{}$存在一个正规幺线性映射： $T\colon M\to N$，使得(T,T)构成一个对偶对：$\hat{}\omega_M(T(x)y)=\omega_N(xT(y))$。则存在一个正规收缩：

$$\Gamma(T):\mathbb{P}_\omega N\to\mathbb{P}_\omega M:\Gamma(a)\mapsto\Gamma(Ta) \tag{3.91}$$

其中 a 属于群 $S^{\omega_N}_{ana}$。此外， $\phi_{\omega_M}\circ\Gamma(T)=\phi_{\omega_N}$，且以下公式在预对偶中成立：

$$\Gamma(T)^*\lambda_\emptyset(x_1,...,x_n)d_{\phi_M}=\lambda_\emptyset(\hat{T}x_1,...,\hat{T}x_n)d_{\phi_N}\ . \tag{3.92}$$

证明。 这是命题 3.3 的直接推广。命题 3.3 的证明可原样适用，因为推论 3.26 保证所有计算都有定义。 ■

利用此引理，我们现在可以归纳出泊松化在正规忠实半有限权下的一些函子性。

命题 3.6。 使用与引理 *3.36* 相同的记号，以下陈述成立：

(1) 设 $\pi\colon N\to M$ 是一个保持权 $\omega_M\circ\pi=\omega_N$ 的正规 $*$-同态。则存在一个正规 $*$-同态：

$$\Gamma(\pi):\mathbb{P}_\omega N\to\mathbb{P}_\omega M:\Gamma(x)\mapsto\Gamma(\pi(x)) \tag{3.93}$$

其中 $x\in S^{\omega_N}_{ana}$。此外，$\phi_{\omega_M}\circ\Gamma(\pi)=\phi_{\omega_N}$。

(2) 设 $N'\subset N$是一个冯·诺伊曼子代数，且限制权 $\omega|_{N'}$是半有限的。此外，假设 N'在模自同构$\sigma^\omega_t(N')=N'$下保持不变。那么 $\mathbb{P}_\omega N'\subset\mathbb{P}_\omega N$，且存在一个正规条件期望：$\mathcal{E}\colon\mathbb{P}_\omega N\to\mathbb{P}_\omega N'$，使得 $\phi_\omega\circ\mathcal{E}=\phi_\omega$。此外， $\mathcal{E}=\Gamma(E)$，其中 $E\colon N\to N'$是条件期望，而 $\Gamma(E)$ 是引理 *3.36* 中构造的提升。

证明。 对于第一个陈述，利用引理 3.36，证明可直接照搬推论 3.13。

对于第二个陈述，根据推论 3.25 和引理 3.36，证明可直接照搬推论 3.15。 ■

为结束本小节，我们在下面的定理中汇总关于泊松化的所有事实。这是本文的主要结果。

定理 3.37。 设 $\boldsymbol{vNa}_w$ 为如下范畴：其对象为(N,ω)，其中 N 是冯·诺伊曼代数， ω 是正规忠实半有限权；其态射为正规 $*$-同态，且保持正规半有限忠实权。设 $\boldsymbol{vNa}_s$ 为如下范畴：其对象为(N',φ')，其中 N'是冯·诺伊曼代数， φ'是正规忠实态；其态射为正规 $*$-同态，且保持各态。于是泊松化是一个函子：

$$\boldsymbol{Poiss}:\boldsymbol{vNa}_w\Rightarrow\boldsymbol{vNa}_s:(N,\omega)\to(\mathbb{P}_\omega N,\phi_\omega) \tag{3.94}$$

使得下图成立：

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\ \pi\ } & M \\ \big\downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{Poiss}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{Poiss}} \\ \mathbb{P}_{\omega_N}N & \xrightarrow{\Gamma(\pi)} & \mathbb{P}_{\omega_M}M \end{array}$$

其中 $\omega_M \circ \pi = \omega_N$ 和 $\phi_{\omega_M} \circ \Gamma(\pi) = \phi_{\omega_N}$。

此外，泊松化在 *Haagerup* L_2-空间**希尔伯特空间**$_{vNa}$的范畴上诱导出一个函子：

$$\boldsymbol{Poiss}_{Hilb} : \boldsymbol{Hilb}_{vNa} \Rightarrow \boldsymbol{Hilb}_{vNa} : L_2(N, \omega) \to L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega) \tag{3.95}$$

使得**泊松**$_{Hilb} = \boldsymbol{Fock}^{Sym}$ 其中$\boldsymbol{Fock}^{Sym}$ 是希尔伯特空间范畴上的函子，用于实现对称 *Fock* 空间构造。

3.7. 泊松化与正规幺正完全正映射。 本节将函子**泊松** 推广到冯·诺伊曼代数范畴，其中态射为保权幺正完全正映射。我们将此范畴记为**冯·诺伊曼代数**^{OpSys} ，以强调它是算子系统范畴的一个子范畴。

命题 3.7。 设 $T : N \to M$ 是一个保参考泛函的幺正完全正映射： $\omega_M \circ T = \omega_N$。则存在一个正规幺正完全正映射：

$$\Gamma(T) : \mathbb{P}_{\omega_N} N \to \mathbb{P}_{\omega_M} M \tag{3.96}$$

使得对于所有 $x \in S^{\omega_N}_{ana}$ （参见引理 *3.35*），均有： $\Gamma(T)\Gamma(x) = \Gamma(T(x))$。此外，$\Gamma(T)$ 保持泊松态： $\phi_{\omega_M} \circ \Gamma(T) = \phi_{\omega_N}$。

证明。 证明依赖于 Paschke [Pas73, Chr95]提出的 Stinespring 膨胀的扩展。给定一个保幺完全正映射 T: $N \to M$，存在一个 Hilbert W^*-双模H_M ，它定义在冯·诺伊曼代数 M 上，以及一个正规 $*$- 同态： $\pi : N \to \mathcal{L}(H_M)$，其中 $\mathcal{L}(H_M)$ 是 H_M 上可伴随双模映射构成的冯·诺伊曼代数，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{L}(H_M) \\ & \searrow^{T} & \downarrow{\scriptstyle E} \\ & & M \end{array}$$

其中存在一个投影 $e \in \mathcal{L}(H_M)$，使得 $E(S) = eSe$。

利用这个交换图， $\omega_M \circ E$ 在 $\mathcal{L}(H_M)$ 上定义了一个正规权。通过泊松化提升该图的困难在于，这个权 $\omega_M \circ E$ 不一定是忠实的。为解决这个问题，取 $\mathcal{L}(H_M)$ 上的一个正规忠实态 φ ，并考虑扰动权：

$$\omega_\epsilon(S) := \omega_M(eSe) + \epsilon\phi((1-e)S(1-e)) \tag{3.97}$$

其中 $\epsilon > 0$ 是一个扰动参数。注意，$\mathcal{L}(H_M)$ 上的 ω_ϵ 是一个正规忠实半有限权。而且 $\omega_\epsilon \circ \pi = \omega_M \circ E \circ \pi = \omega_M \circ T = \omega_N$。因此，对每个 $\epsilon > 0$，泊松化给出如下提升：

$$\Gamma(\pi) : \mathbb{P}_{\omega_N} N \to \mathbb{P}_{\omega_\epsilon} \mathcal{L}(H_M)$$
$$\Gamma(E) : \mathbb{P}_{\omega_\epsilon} \mathcal{L}(H_M) \to \mathbb{P}_{\omega_M} M$$

其中，提升 $\Gamma(E)$ 由引理 3.36 良好定义。由于对于任意 $\epsilon > 0$ ，投影 e 属于中心化子代数 $\mathcal{L}(H_M)^{\omega_\epsilon}$，因此对于 ω_ϵ 的定义理想中的所有 x ，我们有：

$$\omega_\epsilon(ex) = \omega_\epsilon(xe)\,. \tag{3.98}$$

特别地，对于任意 $\epsilon > 0$，对所有 $x \in m_{\omega_M}$，我们有 $exe \in m_{\omega_\epsilon}$；对所有 $y \in m_{\omega_N}$，我们有 $\pi(y) \in m_{\omega_\epsilon}$。因此 $\omega_\epsilon(ex\pi(y)) = \omega_\epsilon(x\pi(y)e)$。

此外，利用 T 的 L_2-伴随，我们可以定义一个完全正收缩：(3.99)

$$\Gamma(T^\dagger)\colon\ L_2(\mathbb{P}_{\omega_M} M, \phi_M) \to L_2(\mathbb{P}_{\omega_N} N, \phi_N)\colon\ d^{1/4}_{\phi_M} \lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n) d^{1/4}_{\phi_M} \mapsto d^{1/4}_{\phi_N} \lambda_\emptyset(T^\dagger x_1, ..., T^\dagger x_n) d^{1/4}_{\phi_N}.$$

综合这些观察，我们现在考虑 $\Gamma(\pi)_* \circ \Gamma(E)_*$ 在泊松代数预对偶上的伴随作用：

(3.100)

$$\begin{aligned}
&\big(\Gamma(\pi)_* \circ \Gamma(E)_* d^{1/2}_{\phi_M} \lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n) d^{1/2}_{\phi_M}, \Gamma(y)\big) = \big(d^{1/2}_{\phi_{\omega_\epsilon}} \lambda_\emptyset(ex_1e, ..., ex_ne) d^{1/2}_{\phi_{\omega_\epsilon}}, \Gamma(\pi(y))\big) \\
&= \exp(\omega_\epsilon(\pi(y) - 1)) \prod_{1 \le i \le n} \omega_\epsilon(ex_ie\pi(y)) = \exp(\omega_N(y - 1)) \prod_{1 \le i \le n} \omega_\epsilon(ex_i\pi(y)) \\
&= \exp(\omega_N(y - 1)) \prod_{1 \le i \le n} \omega_M(x_iT(y)) = \exp(\omega_N(y - 1)) \prod_{1 \le i \le n} \langle T^\dagger \widehat{x_i}, \widehat{y} \rangle \\
&= \langle \Gamma(T^\dagger) d^{1/4}_{\phi_M} \lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n) d^{1/4}_{\phi_M}, d^{1/4}_{\phi_N} \Gamma(y) d^{1/4}_{\phi_N} \rangle = \big(d^{1/4}_{\phi_N} (\Gamma(T^\dagger) d^{1/4}_{\phi_M} \lambda_\emptyset(x_1, ..., x_n) d^{1/4}_{\phi_M}) d^{1/4}_{\phi_N}, \Gamma(y)\big)
\end{aligned}$$

其中 $x_i \in \mathcal{U}^{\omega_M}_{ana}$，而 $y \in S^{\omega_N}_{ana} \subset N$（参见引理 3.35）；$(\cdot, \cdot)$ 表示泊松代数与其预对偶之间的典范配对，而 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 L_2-内积。因此，$\Gamma(\pi)_* \circ \Gamma(E)_*$ 的伴随可延拓为伴随映射 $\Gamma(T^\dagger)^\dagger = \Gamma(T) : L_2(\mathbb{P}_{\omega_N} N, \phi_N) \to L_2(\mathbb{P}_{\omega_M} M, \phi_M)$。限制在泊松代数上，我们得到所需的保幺完全正映射。 ■

4. 泊松代数的一些性质

本节讨论泊松代数的一些有趣性质。首先，我们利用 N 上模自同构群 $\{\sigma^\omega_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ 的 Arveson 谱，确定泊松代数 $\mathbb{P}_\omega N$ 的类型。借助这一结果，我们从实半单李群的酉主系列表示构造 III 型因子。$\lambda \in [0, 1]$ 的取值取决于极大阿贝尔子群 [Kna96] 上限制表示的根。

其次，我们证明，在一些一般条件下，一对 III 型泊松代数的包含关系是分裂的 [DL84]，当且仅当这些泊松代数是超有限的。分裂性质是量子场论代数表述中的一项重要性质 [Haa96]。通常，代数量子场论具有分裂性质，因为某个“配分函数”对所有“温度”均为有限值 [BDL90a, BDL90b]。对于泊松代数，这些“配分函数”的对应物很少是有限的，但当代数是超有限时，分裂性质通常成立。这是由泊松代数的特殊性质所致。

最后，我们计算了泊松代数上一些态的量子相对熵 [Ara76, Ara77]。当代数为 III 型时，通常无法计算任意一对态的相对熵。这里，当一个态是泊松态，而另一个态是泊松态的有界扰动时，我们的计算成立。该公式将泊松代数的（荒木）相对熵 $\mathbb{P}_\omega N$ 与原冯·诺伊曼代数的 Lindblad 相对熵 [Lin74] 联系起来。由于原冯·诺伊曼代数 N 在实际应用中通常是半有限的，因此可以利用众所周知的公式轻松计算 N 上的 Lindblad 熵。这一结果将在一篇配套论文中得到推广并深入研究。

4.1. 泊松代数的因子性与类型。 在本小节中，我们确定一些泊松代数的类型。关键观察如下命题所示。

命题 4.1. 泊松代数 $\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(\ell_2)$ 是超有限 II_1 因子，其中 ℓ_2 表示可分无限维希尔伯特空间 $\ell_2(\mathbb{Z})$。

证明。 通过直接计算可知，泊松态 ϕ_{tr} 是 $\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(\ell_2)$上的迹态。因此，我们只需证明该代数是一个因子。

为此，我们需要考虑以下子代数序列： $\{\mathbb{P}_{\mathrm{tr}_k}\mathbb{B}(\ell_2^k)\}_{k\geq 1}$，其中 $\ell_2^k \subset \ell_2$ 是 ℓ_2 的 k维子空间，而 tr_k 是子代数 $\mathbb{B}(\ell_2^k)$上的典范迹。设 $\{e_k \in \mathbb{B}(\ell_2)\}_k$ 是递增的正交投影族，满足 $e_k\ell_2 = \ell_2^k$。那么对于每一对 $k < n$，都存在一个正规 $*$-同态：

$$\pi_{n,k} : \mathbb{P}_{\mathrm{tr}_k}\mathbb{B}(\ell_2^k) \to \mathbb{P}_{\mathrm{tr}_n}\mathbb{B}(\ell_2^n) : \Gamma(x) \mapsto \Gamma(x + e_n - e_k)\,. \tag{4.1}$$

此外，$\phi_{\mathrm{tr}_n} \circ \pi_{n,\ k} = \phi_{\mathrm{tr}_k}$:

$$\phi_{\mathrm{tr}_n}(\pi_{n,k}(\Gamma(x))) = \phi_{\mathrm{tr}_n}(\Gamma(x + e_n - e_k)) = e^{\mathrm{tr}_n(x+e_n-e_k-e_n)} = e^{\mathrm{tr}_k(x-e_k)} = \phi_{\mathrm{tr}_k}(\Gamma(x))\,. \tag{4.2}$$

因此，泊松代数 $\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(\ell_2)$ 同构于 $\{(\mathbb{P}_{\mathrm{tr}_k}\mathbb{B}(\ell_2^k)\ \phi_{\mathrm{tr}_k})\}_{k\geq 1}$ 的归纳极限。

在 $\mathbb{B}(\ell_2)$ 上，我们固定一个弱收敛到 0 的酉元序列： $\{u_{2n} := \mathrm{id}_{\mathrm{n}} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{B}(\ell_2^{2\mathrm{n}})\}_{\mathrm{n}\geq 1}$。接着，在弱稠密的 $*$-子代数 $\cup_{k\geq 1}\mathbb{P}_{\mathrm{tr}_k}\mathbb{B}(\ell_2^k)\subset\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(\ell_2)$ 上，我们考虑以下半双线性型:

$$\big(\Gamma(x), \Gamma(y)\big)_u := \lim_{n\to\infty} \phi_{\mathrm{tr}_{2n}}(\Gamma(x^*)\Gamma(u_{2n}^*)\Gamma(y)\Gamma(u_{2n}))\,. \tag{4.3}$$

对于稠密子代数中的任意一对 $\Gamma(x)$ $\Gamma(y)$，由归纳序列的向上封闭性，存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $\Gamma(x)$ $\Gamma(y)$ $\in \mathbb{P}_{\mathrm{tr}_m}\mathbb{B}(\ell_2^m)$。那么，对于所有满足 $n > m$ 的 $n \in \mathbb{N}$，我们有如下分解:

$$\begin{aligned}
&\phi_{\mathrm{tr}_{2n}}(\Gamma(x^*)\Gamma(u_{2n}^*)\Gamma(y)\Gamma(u_{2n})) = \exp \mathrm{tr}_{2n}\left((x^* + e_{2n} - e_m)u_{2n}^*(y + e_{2n} - e_m)u_{2n} - e_{2n}\right)\\
&= \exp \mathrm{tr}_{2n}\Big(\begin{pmatrix} x^* + e_n - e_m & 0 \\ 0 & e_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e_n \\ e_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y + e_n - e_m & 0 \\ 0 & e_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & e_n \\ e_n & 0 \end{pmatrix} - e_{2n}\Big)\\
&= \exp\big(\mathrm{tr}_m(x^* - e_m)\big)\exp\big(\mathrm{tr}_m(y - e_m)\big) = \phi_{\mathrm{tr}_m}(\Gamma(x^*))\phi_{\mathrm{tr}_m}(\Gamma(y)) = \phi_{\mathrm{tr}}(\Gamma(x^*))\phi_{\mathrm{tr}}(\Gamma(y))
\end{aligned} \tag{4.4}$$

其中，最后一个等式由映射 $\{\pi_{n,m}\}_{n\in\mathbb{N}}$ 的保态性得出。因此，在稠密子代数 $\cup_{k\geq 1}\mathbb{P}_{\mathrm{tr}_k}\mathbb{B}(\ell_2^k)$ 上，半双线性型可分解为:

$$\big(\Gamma(x), \Gamma(y)\big)_u = \phi_{\mathrm{tr}}(\Gamma(x^*))\phi_{\mathrm{tr}}(\Gamma(y))\,. \tag{4.5}$$

现在，假设 $\Gamma(y)$ 属于泊松代数 $\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(\ell_2)$ 的中心，我们可以用另一种方式计算半双线性型。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，有:

$$\phi_{\mathrm{tr}_{2n}}(\Gamma(x^*)\Gamma(u_{2n}^*)\Gamma(y)\Gamma(u_{2n})) = \phi_{\mathrm{tr}_{2n}}(\Gamma(x^*)\Gamma(y)\Gamma(u_{2n}^*)\Gamma(u_{2n})) = \phi_{\mathrm{tr}_{2n}}(\Gamma(x^*)\Gamma(y))\,. \tag{4.6}$$

再次根据嵌入 $\{\pi_{n,m}\}_{n、\ m}$ 的保态性，我们有:

$$\big(\Gamma(x), \Gamma(y)\big)_u = \phi_{\mathrm{tr}}(\Gamma(x^*)\Gamma(y))\,. \tag{4.7}$$

由于等式 $\phi_{\mathrm{tr}}(\Gamma(x^*)\Gamma(y)) = \phi_{\mathrm{tr}}(\Gamma(x^*))\phi_{\mathrm{tr}}(\Gamma(y))$ 对稠密子代数中的所有 $\Gamma(x^*)$都成立，因此 $\Gamma(y) = \phi_{\mathrm{tr}}(\Gamma(y))\mathbf{1}$。于是，泊松代数的中心是平凡的。 ■

推论 4.1. 沿用命题 *4.1* 中的记号，并设 ω 是冯·诺伊曼代数 N上的一个正规半有限忠实权。那么，泊松代数 $\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(N\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$是一个因子，其中心化子也是一个因子 $\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(N_\omega\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$。因此，泊松代数$\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(N\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$的类型由 *Arveson* 谱 $Sp(\Delta_{\phi_\omega})$决定。

证明。 采用与命题 4.1 相同的构造，并将 $\{u_{2n}\}$ 替换为 $\{1\otimes u_{2n}\}$，可知 $\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(N\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$ 是一个因子。泊松代数的中心化子是由 $\{\Gamma(e^{ix}):\ e^{ix}\in(N\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))_{\omega\otimes\mathrm{tr}}, e^{ix}\in\mathcal{U}_{ana}^{\omega\otimes\mathrm{tr}}\}$ 生成的冯·诺伊曼代数，其中 e^{ix} 是中心化子 $(N\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))_{\omega\otimes\mathrm{tr}}\cong N_\omega\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2)$ 中的一个酉元。因此，它同构于 $\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(N_\omega\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$，且是一个因子。

众所周知，若中心化子是一个因子 [Tak03]，则 Arveson 谱 $Sp(\Delta_{\phi_{\omega\otimes\mathrm{tr}}})$ 是极小的。因此，泊松代数的 Connes 不变量由泊松态的 Arveson 谱生成的群给出：

$$S(\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(N\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2)))=\Gamma\big(Sp(\Delta_{\phi_{\omega\otimes\mathrm{tr}}})-\{0\}\big)\,.$$

由于泊松态 $\phi_{\omega\otimes\mathrm{tr}}$ 的模自同构群是张量积： $\sigma_t^{\phi_\omega}\otimes id=\Gamma(\sigma_t^\omega)\otimes id$，Arveson 谱等于其在第一个分量上的限制：$Sp(\Delta_{\phi_\omega})$。最后，由于泊松代数的 L_2-空间与原代数的 L_2-空间的对称 Fock 空间同构，由 $Sp(\Delta_{\phi_\omega})$ 生成的乘法子群等于由 $Sp(\Delta_\omega)$ 生成的乘法子群。因此，泊松代数 $\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(N\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$ 的类型由谱 $Sp(\Delta_\omega)$ 决定。

■

4.2. 由主系列表示得到的 III 型代数。利用关于泊松代数类型的结果，本节将通过酉主系列表示构造 III 型$_\lambda$ 泊松因子的实例。此外，我们将介绍一个框架，利用酉主系列表示和泊松化来构造代数量子场论。这种构造得到的实例满足代数量子场论[Haa96]中的某些公理。关于泊松化和代数量子场论及更多构造的专门研究将另行发表。

4.2.1. 酉主系列表示与抛物诱导。 我们首先回顾酉主系列表示作为诱导表示的构造 [Kna86, Ber92, CH15, Rep00]。设 G 为实半单李群， $G\cong KAN$ 为 G的伊wasawa 分解。设 M 为 A 在 K中的中心化子，则 $P=MAN$ 是 G的极小抛物子群。此外，设 $\mathfrak{a}$ 为 A 的李代数，使得$A=\exp(\mathfrak{a})$。设 Σ^+ 为 $\mathfrak{a}$ 在李代数 $\mathfrak{g}$中的正根集。固定一个纯虚根 $\nu\in\mathfrak{a}^*$，并固定一个酉不可约表示 $\sigma:\ M\to U(H_\nu)$（由于 K是紧的， M 是紧的，且 H_ν 是有限维希尔伯特空间），则存在抛物群 P 在 H_ν上的酉表示：

$$\mu_P:=\sigma\otimes e^{\nu}\otimes id: P=MAN\to U(H_\nu): man\mapsto\sigma(m)e^{\nu(\log a)} \tag{4.8}$$

其中，$\log a\in\mathfrak{a}$ 是 $a\in A$的生成元。令 $\rho_G:=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\alpha$ 为 Σ^+中根的半和。于是， G 的诱导酉主系列表示作用于 G/P 上取值于希尔伯特空间 H_ν的半密度的希尔伯特空间：

$$\Gamma^2(G/P,H_\nu)\cong\{F:G\to H_\nu: F(gman)=\sigma(m^{-1})e^{-(\nu+\rho_G)(\log a)}F(g),\int_{G/P}|F|_{H_\nu}^2<\infty\} \tag{4.9}$$

其中， $G/P \cong K/M \cap K$ 是一个紧流形， $|\cdot|_{H_\nu}$ 是 H_ν上的 P不变内积。 G/P上的积分针对密度 $|F|^2_{H_\nu}$进行。群通过左乘作用于半密度截面： $\mathcal{P}^{\sigma,\ \nu}(g)F(h) := F(g^{-1}h)$。如果表示 σ不可约，那么 $\mathcal{P}^{\sigma,\ \nu}$ 也不可约。这种构造不可约酉表示的方法称为抛物诱导。

4.2.2. 抛物诱导得到的 *III* 型泊松因子。给定实半单李群 G的一个不可约酉主系列表示 $\mathcal{P}^{\sigma,\ \nu}$，我们构造一个带有强连续 G-作用的 III 型$_\lambda$泊松因子。设 $\mathcal{P}^{\sigma,\nu}$ 是由有限维酉表示$\mu_P := \sigma \otimes e^{\nu} \otimes id$诱导的 G 的不可约酉主系列表示（即 $\mathcal{P}^{\sigma,\nu} = Ind_P^G(\mu_P)$）。固定一个元素 $a \in A$，令 $\log\ \delta_\nu$为酉元 $\mu_P(a)$的生成元（即 $\delta_\nu^{it} = \mu_P(e^{t\log a})$，因此 $\log\ \delta_\nu = |\nu(\log\ a)|$）。再考虑 $\mathbb{B}(H_\nu)$上的权 $\omega_\nu = \mathrm{tr}(\delta\cdot)$。那么：

引理 4.2. 以下陈述成立：

(1) $\mathbb{P}_{\omega_\nu\otimes tr}\mathbb{B}(H_\nu \otimes \ell_2)$ 是超有限 II_1 因子；*(2)* 固定一个酉不可约表示 $\sigma :\ M \to U(H_\sigma)$。对于两个不同的纯虚根 $\nu, \mu \in \mathfrak{a}^*$, $\mathbb{B}(H_\nu \oplus H_\mu) = \mathbb{B}(H_\sigma)\otimes M_2(\mathbb{C})$，权 $tr\left(\begin{pmatrix} \frac{e^{|\nu(\log a)|}}{e^{|\nu(\log a)|}+e^{|\mu(\log a)|}} & 0 \\ 0 & \frac{e^{|\mu(\log a)|}}{e^{|\nu(\log a)|}+e^{|\mu(\log a)|}} \end{pmatrix}\cdot\right)$ 的归一化由 $tr \otimes tr_2\left(\begin{pmatrix} \frac{e^{|\nu(\log a)|}}{e^{|\nu(\log a)|}+e^{|\mu(\log a)|}} & 0 \\ 0 & \frac{e^{|\mu(\log a)|}}{e^{|\nu(\log a)|}+e^{|\mu(\log a)|}} \end{pmatrix}\cdot\right)$ 给出。将此权记为 $\omega_{\nu,\mu}$。那么，若 $\lambda = min\{e^{|\nu}log\ _{a|-|\mu}log\ ^{a|}, e^{|\mu\log a|-|\nu}\overline{log\ ^{a|}}\} \in (0,\ 1)$，泊松代数 $\mathbb{P}_{\omega_{\nu,\mu}\otimes tr}\mathbb{B}\big((H_\nu \oplus H_\mu)\otimes \ell_2\big)$ 是一个 III_λ 型因子；*(3)* 对于三个不同的纯虚根 $\nu, \mu, \eta \in \mathfrak{a}^*$, $\mathbb{B}(H_\nu \oplus H_\mu \oplus H_\eta) = \mathbb{B}(H_\sigma) \otimes M_3(\mathbb{C})$，权 $tr(\delta_\nu \oplus \delta_\mu \oplus \delta_\eta\cdot)$ 的归一化由 *And* 给出。若三元组$\lambda_{\nu,\mu} := min\{e^{|\nu}log\ _{a|-|\mu}log\ ^{a|}, e^{|\mu\log a|-|\nu}log\ ^{a|}\}$, $\lambda_{\nu,\eta} := min\{e^{|\nu}log\ _{a|-|\eta}log\ ^{a|}, e^{|\eta}log\ _{a|-|\nu}log\ ^{a|}\}$, 和 $\lambda_{\eta,\mu} := min\{e^{|\eta}log\ _{a|-|\mu}log\ ^{a|}, e^{|\mu\log a|-|\eta}log\ ^{a|}\}$ 生成乘法群 $\mathbb{R}_+$，则泊松代数 $\mathbb{P}_{\omega_{\nu,\mu,\eta}\otimes \mathrm{tr}_3}\mathbb{B}\big((H_\nu \oplus H_\mu \oplus H_\eta)\otimes \ell_2\big)$ 属于 III_λ 型

$$tr\left(\begin{pmatrix} \frac{e^{|\nu\log a|}}{e^{|\nu\log a|}+e^{|\mu\log a|}+e^{|\eta\log a|}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e^{|\mu\log a|}}{e^{|\nu\log a|}+e^{|\mu\log a|}+e^{|\eta\log a|}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{e^{|\eta\log a|}}{e^{|\nu\log a|}+e^{|\mu\log a|}+e^{|\eta\log a|}} \end{pmatrix}\cdot\right).$$

注 4.3. 因此，对于一般的不可约酉主系列表示对，诱导的泊松代数属于 *III* 型$_\lambda$。对于一般的不可约酉主系列表示多重态，诱导的泊松代数属于 *III* 型$_1$。

我们在此给出的构造，无非是将荒木-*Woods* 因子推广到泊松化函子。

证明。关键观察是，权 ω_ν 在 P-作用下保持不变。利用 $P = LN$的 Levi 分解， L-作用保持 ω_ν 不变，因为 A 是阿贝尔的，且 M 与 A交换。由于 N 在 H_ν上平凡作用，整个 P-作用保持 ω_ν 不变。因此，由伴随作用 $\mu_P(g) \cdot \mu_P(g)^*$(其中 $g \in P$)给出的 $\mathbb{B}(H_\nu \otimes \ell_2)$ 上的自同构保持权 ω_ν不变。于是根据命题 3.6，泊松代数 $\mathbb{P}_{\omega_\nu\otimes\mathrm{tr}}\mathbb{B}(H_\nu \otimes \ell_2)$上存在一个强连续的 P-作用。该自同构的酉实现给出了 P 在泊松代数的 Haagerup L_2-空间上的一个酉表示：

$$U_{\Gamma(\mu_P)} : P \to U(L_2(\mathbb{P}_{\omega_\nu\otimes\mathrm{tr}}\mathbb{B}(H_\nu \otimes \ell_2), \phi_{\omega_\nu\otimes\mathrm{tr}})) . \tag{4.10}$$

此外，根据推论 4.1，泊松代数是一个因子。随后，所有三个结论都可通过对相应 Arveson 谱作简单计算直接得出。 ■

推论 4.4。 在引理 *4.2* 的证明中构造的酉表示 $U_{\Gamma(\mu_P)}$ 通过抛物诱导导出 G 的一个酉表示。此外，该群作用在泊松代数上诱导出一个强连续自同构：

$$\mathbb{B}(L^2(G/P,\Omega_P^{1/2}))\overline{\otimes}\mathbb{P}_{\omega_{\nu,\mu}\otimes\mathrm{tr}}\mathbb{B}((H_\nu\oplus H_\mu)\otimes\ell_2)\cong\mathbb{P}_{\omega_{\nu,\mu}\otimes\mathrm{tr}}\mathbb{B}((H_\nu\oplus H_\mu)\otimes\ell_2) \tag{4.11}$$

其中，希尔伯特空间 $L^2(G/P,\Omega_P^{1/2}):=\{f\colon G\to\mathbb{C}\colon f(gman)=e^{-\rho_G(\log a)}f(g)\int_{G/P}|f|^2<\infty\}$ 是 G/P上的半密度空间。冯·诺伊曼代数的同构源于 *III* 型因子的吸收性质。

证明。 要证明这是一个诱导表示，我们需要计算酉表示 $U_{\Gamma(\mu_P)}$：

$$\begin{aligned}U_{\Gamma(\mu_P)}(man)\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,...,x_n)\phi_{\omega_\nu\otimes\mathrm{tr}}^{1/2}&=\lambda_{\emptyset\emptyset}(Ad_{\mu_P(man)}x_1,...,Ad_{\mu_P(man)}x_n)\phi_{\omega_\nu\otimes\mathrm{tr}}^{1/2}\\&=\lambda_{\emptyset\emptyset}(Ad_{\sigma(m)e^{\nu(\log a)}}x_1,...,Ad_{\sigma(m)e^{\nu(\log a)}}x_n)\phi_{\omega_\nu\otimes\mathrm{tr}}^{1/2}\\&=U_{\Gamma(\mu_P)}(ma)\lambda_{\emptyset\emptyset}(x_1,...,x_n)\phi_{\omega_\nu\otimes\mathrm{tr}}^{1/2}\,.\end{aligned} \tag{4.12}$$

因此，幂零子群 N 不会作用在泊松代数的 Haagerup L_2-空间上。将此希尔伯特空间记为 $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$，我们考虑 G/P上取值于 $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$的半密度空间：

$$\Gamma^2(G/P,\mathcal{H}_{\mathbb{P}}):=\{F:G\to\mathcal{H}_{\mathbb{P}}:F(gman)=U_{\Gamma(\mu_P)}(ma)^*e^{-\rho_G(\log a)}F(g),\int_{G/P}|F|_{\mathcal{H}_{\mathbb{P}}}^2<\infty\}\,. \tag{4.13}$$

I 型因子 $\mathbb{B}(L^2(G/P,\Omega_P^{1/2}))$ 通过左正则作用作用于 $\Gamma^2(G/P,\mathcal{H}_{\mathbb{P}})$，而泊松因子通过标准表示作用于 $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$。最后， G 在$\Gamma^2(G/P,\mathcal{H}_{\mathbb{P}})$上的酉表示在 $\mathbb{B}(L^2(G/P,\Omega_P^{1/2}))\overline{\otimes}\mathbb{P}_{\omega_\nu\otimes\text{平移}}\mathbb{B}(H_\nu\otimes\ell_2)$ 上诱导出一个强连续自同构。 ■

例 *4.5.* 设 $G=SO_0(n+1,1)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的（连通）共形群。那么 G 的伊*wasawa* 分解为 $K=SO(n)$（旋转）、 $A=SO_0(1,1)\cong\{\begin{pmatrix}\cosh\theta&\sinh\theta\\\sinh\theta&\cosh\theta\end{pmatrix}:\theta\in\mathbb{R}\}$（洛伦兹推进或膨胀），以及 $N=\mathbb{R}^n$（平移）。 A 在 K 中的中心化子为 $M=SO(n-1)$。由于 A 的实李代数是 $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$， $\mathfrak{a}$ 上的纯虚根由虚数 $\nu=it_\nu\in i\mathbb{R}$ 给出。对于任意元素 $a=\begin{pmatrix}\cosh\theta&\sinh\theta\\\sinh\theta&\cosh\theta\end{pmatrix}\in SO_0(1,1)\cong A$，配对可明确计算为： $\nu(\log a)=it_\nu\theta$。在此例中，我们固定洛伦兹推进： $\theta=2\pi$。那么关键参数 $\nu(\log a)=2\pi it_\nu$ ，其中 $t_\nu\in\mathbb{R}$。商空间是球面 $G/P=K/M\cap K=SO(n)/SO(n-1)\cong\mathbb{S}^n$。于是，对于任意酉不可约表示$U_\nu$： $SO(n-1)\to U(H_\nu)$，存在一个泊松代数 $\mathbb{B}(L^2(\mathbb{S}^n,\Omega_P^{1/2}))\overline{\otimes}\mathbb{P}_{\omega_\nu\otimes tr}\mathbb{B}(H_\nu\otimes\ell_2)$，其中 $\mathbb{B}(H_\nu)$ 上的权由 $\omega_\nu=tr(e^{2\pi t_\nu}\cdot)$ 给出。对于一对 t_ν、$t_\mu\in\mathbb{R}$，满足$\lambda_{\nu,\mu}=min\{e^{2\pi(|t_\nu|-|t_\mu|)},e^{2\pi(|t_\mu|-|t_\nu|)}\}\in(0,1)$，则 $\mathbb{P}_{\omega_{\nu,\mu}\otimes tr}\mathbb{B}((H_\nu\oplus H_\mu)\otimes\ell_2)$ 是一个 *III* 型$_\lambda$因子。对于一般的 $\{t_\nu\}$ 多重态，也有类似结果。

4.2.3. 由酉主系列表示构造的泊松代数网。 作为迄今所述构造的一项应用，我们简要讨论代数量子场论（AQFT）[Haa96]。代数量子场论研究量子场论中的局域可观测代数。这是一种公理化框架，强调这些代数必须满足的必要性质。简言之，这些性质包括单调性、在（强连续）群作用下的协变性、群不变态的存在性，以及局域性。公理通常会根据不同的物理情形作出调整。例如，研究底层代数量子场论的所谓真空扇区时，通常要求存在唯一的群不变态。又如，为确保存在定义良好的"哈密顿量"，通常要求群表示满足某些谱条件（即正能量条件）。 [3]

这里我们只考虑共形群 $G = SO(n+1,1)$ 的情形，它是 $\mathbb{R}^n$ 上的共形变换群。利用主系列表示和泊松化，我们构造 III_1 型局部泊松代数网，并验证这些网满足所需的公理。我们的局部代数定义在 $\mathbb{R}^n$ 的一点紧化上，即球面 $\mathbb{S}^n \cong G/P$（参见例 4.5）。从数学上说，这些局部代数构成了 $\mathbb{S}^n$ 上连通开子集范畴的预余层。 [4] 为陈述该命题，我们固定极小抛物子群 μ_P 的一个酉表示： $P \to U(H_\mu)$，其中生成元 $\log a$ 的谱生成乘法群 $\mathbb{R}_+$。 [5] 将泊松代数 $\mathbb{P}_{\omega_\mu \otimes \mathrm{tr}}\mathbb{B}(H_\mu \otimes \ell_2)$ 记为 $\mathbb{P}_\mu$，其泊松态记为 ϕ_μ。再将其 Haagerup L_2-空间记为$\mathcal{H}_\mathbb{P}$。于是我们有：

命题 4.2。 考虑空间 $G/P = \mathbb{S}^n$ 上的扭曲泊松代数丛 $G \times_P \mathbb{P}_\mu$ 。该丛的光滑截面定义如下：

$$C^\infty(G/P, \mathbb{P}_\mu) := \{f \in C^\infty(G, \mathbb{P}) : f(gp) = \alpha_p^{-1} f(g)\} \tag{4.14}$$

其中， $\alpha : P \to Aut(\mathbb{P}_\mu)$ 是泊松代数上的强连续诱导作用。类似地，考虑空间 $G/P = \mathbb{S}^n$ 上的扭曲希尔伯特丛 $G \times_P \mathcal{H}_\mathbb{P}$ 。$\big(G \times_P \mathcal{H}_\mathbb{P}\big) \otimes \Omega_P^{1/2}$ 的张量丛的 L^2 截面定义如下：

$$\Gamma^2(G/P, \mathcal{H}_\mathbb{P}) := \{f \in L^2(G, \mathcal{H}_\mathbb{P}) : f(gman) = U_{\mu_P}(ma)^* e^{-\rho_G(\log a)} f(g), \int_{G/P} |f|^2_{\mathcal{H}_\mathbb{P}} < \infty\} \tag{4.15}$$

其中 $U_{\mu_P} : P \to U(\mathcal{H}_\mathbb{P})$ 是自同构 α 的酉实现。这由酉表示 μ_P 诱导。 $C^\infty(G/P, \mathbb{P}_\mu)$ 是作用于 $\Gamma^2(G/P, \mathcal{H}_\mathbb{P})$ 上的含幺 $*$- 代数。将其弱闭包记为 $\mathcal{A}(\mathbb{S}^n)$。

[3]然而，存在一些自然的例子不满足正能量条件 [BDH15, KLM01]，即使是在共形网的情形下（即 $G = SU(1,1)$）。正能量条件要求局部代数上的群作用来自离散级数表示。在我们的例子中，尽管群作用并非离散级数表示，模哈密顿量仍然是良定义的。[4]如果群 G 是作用于闵可夫斯基空间 $\mathbb{R}^{n,\,1}$ 上的共形群，那么我们必须考虑定义在某些特定开子集（即真开双锥）上的局部代数。仍然可以在 $\mathbb{R}^{n+1}$ 上定义此类双锥。但由于我们的例子是一个"欧几里得"场论模型，因此不存在因果约束阻止我们考虑更一般的开子集。[5] 这一假设在数学上并非必要。我们作出这一假设，只是为了确保所有局部代数都是 III 型$_1$ 因子。人们认为，量子场论的局部代数应当是 III 型$_1$。

那么，对每个连通开集 $\mathcal{O}$，都存在一个冯·诺伊曼代数 $\mathcal{A}(\mathcal{O}):=\{f\in\mathcal{A}(\mathbb{S}^n):\ supp(f)\subset\mathcal{O}\}$，作用于 $\Gamma^2(G/P,\mathcal{H}_{\mathbb{P}})$上。局部代数网 $\{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O}\subset\mathbb{S}^n}$ 满足以下性质：

(1) 对于任意 $\mathcal{O}$, $\mathcal{A}$（$\mathcal{O}$）是 *III* 型$_1$ 且具有非平凡中心 L^∞（$\mathcal{O}$）；*(2)*（单调性） $\mathcal{A}$（$\mathcal{O}_1$）$\subset\mathcal{A}$（$\mathcal{O}_2$）若 $\mathcal{O}_1\subset\mathcal{O}_2$；*(3)*（$G$-协变性）存在一个由左正则作用给出的酉诱导表示：

$$V:G\to U(\Gamma^2(G/P,\mathcal{H}_{\mathbb{P}})):(V_gF)(h)=F(g^{-1}h)\,. \tag{4.16}$$

通过共轭，该酉表示诱导出一个强连续作用 $\widehat{\alpha}$：$G\to Aut$（$\mathcal{A}$（$\mathbb{S}^n$），使得对任意连通开集 $\mathcal{O}$：α_g（$\mathcal{A}$（$\mathcal{O}$）$=\mathcal{A}$（$g\mathcal{O}$）其中$g\mathcal{O}=\{\xi\in\mathbb{S}^n:\ g^{-1}\xi\in\mathcal{O}\}$；*(4)*（真空态的存在）正规态 $\varphi:=\int_{G/P}d\xi\otimes\phi_{\mathbb{P}}$，其中 $d\xi$ 是 $G/P=K/$（$M\cap K$）上的唯一 K-不变测度，$=\mathbb{S}^{n}$[6] 在群作用下保持不变，且由向量 $1\otimes\phi_{\mathbb{P}}^{1/2}\in\Gamma^2$（$G/P$, $\mathcal{H}_{\mathbb{P}}$）表示。此外，该真空态下的期望不能分解为两个二点函数的乘积（即真空态不是准自由态，因此该模型不能被视为“广义自由场”）；*(5)*（局域性） $[\mathcal{A}$（$\mathcal{O}_1$）$\mathcal{A}$（$\mathcal{O}_2$）$]=0$ 若 $\mathcal{O}_1\cap\mathcal{O}_2=\emptyset$。

证明。根据前面的讨论，这些陈述都显而易见。利用强连续自同构 $\alpha:P\to Aut(\mathbb{P}_\mu)$，泊松代数丛构造为如下商空间：$G\times_P\mathbb{P}_\mu:=\{[(g,T)]:(gp,T)\sim(g,\alpha_p(T))$，其中 $g\in G,T\in\mathbb{P}_\mu\}$。

于是，该丛的光滑截面通过左乘作用于 $\Gamma^2(G/P,\mathcal{H}_{\mathbb{P}})$。我们只需验证此作用定义良好：

$$\begin{aligned}(f\xi)(gman)&=f(gman)\xi(gman)=\alpha_{man}^{-1}f(g)\big(U_{\mu_P}(ma)^*e^{-\rho_G(\log a)}\xi(g)\big)\\&=U_{\mu_P}(ma)^*e^{-\rho_G(\log a)}f(g)\xi(g)\end{aligned} \tag{4.17}$$

其中 $f\in C^\infty(G/P,\mathbb{P}_\mu)$ 和 $\xi\in\Gamma^2(G/P,\mathcal{H}_{\mathbb{P}})$。沿用证明通常的主系列表示是酉元的论证，并结合泊松态 ϕ_μ 在 P-作用下保持不变这一事实，可知左乘作用也是酉元的。所有性质都显而易见。态 φ 不是准自由的，因为泊松态ϕ_μ 不是准自由的。

■

4.3. 泊松代数的分裂包含与超有限性。 本小节研究泊松代数包含关系的结构。具体而言，我们关注一对冯·诺伊曼代数 $N\subset M$，其上有一个正规半有限忠实权 ω，定义在 M 上，并且该权在 N 上的限制仍为半有限。随后，泊松化构造出一对泊松代数 $(\mathbb{P}_\omega N\subset\mathbb{P}_\omega M,\phi_\omega)$，其中 $\mathbb{P}_\omega M$ 上的泊松态限制为 $\mathbb{P}_\omega N$ 上的泊松态。为简便起见，我们只考虑两个泊松代数均为因子的情形。需要考虑两种情况。若 ϕ_ω 为迹型，则泊松代数为 II 型$_1$，此时处于经典的 II 型子因子理论框架 [Jon83, PP86, Pop95, Ocn89]。另一方面，若 ϕ_ω 非迹型，则泊松代数为适当无穷（要么包含一个 I 型$_\infty$ 因子，要么属于 III 型）。根据 Dixmier 和 Maréchal 的经典定理 [DM71], ，在 $L_2(\mathbb{P}_\omega M,\phi_\omega)$ 中存在一个稠密向量子集，使得其中每个向量

[6]请注意，G/P上不存在 G不变测度。

同时是两个泊松代数的循环向量和分离向量。这是 III 型子因子理论的经典框架 [DL84, Lon89, Kos, KL92]。遗憾的是，对于泊松代数包含，子因子指标通常是无限的。尽管已有一些可能的答案 [Bur03, Pen13, JP15] 通过考虑 II 型$_\infty$ 代数上的 Jones 构造提出，但目前尚无针对无限指标子因子标准不变量的确定构造。沿着这一思路，我们直接计算 II 型$_1$ 泊松子因子的中心化子代数和中心向量[Bur03, Pen13, JP15]。此外，针对无限指标的情形，也已发展出平面代数演算 [Pen13]。我们将把这一内容以及泊松代数上双模的一般研究留待未来的论文。

泊松子因子的关键观察是以下引理。

引理4.6。 设 M 为冯·诺伊曼代数， ω 为 M上的正规半有限忠实权。此外，设 $e \in M_\omega$ 为中心化子中的一个投影。则角$N := M_e \subset M$ 的包含诱导出泊松代数包含 $\mathbb{P}_\omega N \subset \mathbb{P}_\omega M$ ，使得 ϕ_ω 在 $\mathbb{P}_\omega M$ 上的限制为 $\mathbb{P}_\omega N$上的泊松态。若 $\mathbb{P}_\omega N$ 是因子，则相对交换子为$\mathbb{P}_\omega M \cap (\mathbb{P}_\omega N)' = \mathbb{P}_\omega(M_{1-e})$。此外，我们有分裂同构：

$$\mu_e : \mathbb{P}_\omega N \overline{\otimes} \mathbb{P}_\omega(M_{1-e}) \to \mathbb{P}_\omega N \vee \mathbb{P}_\omega(M_{1-e}) \cong \mathbb{P}_\omega M : \Gamma(e^{ix}) \otimes \Gamma(e^{iy}) \mapsto \Gamma(e^{i(x+y)}) \,. \tag{4.18}$$

特别地，泊松态 ϕ_ω 分裂为：

$$\phi_\omega(\Gamma(e^{ix})\Gamma(e^{iy})) = \phi_\omega(\Gamma(e^{ix}))\phi_\omega(\Gamma(e^{iy})) \tag{4.19}$$

其中 $e^{ix} \in N$ 且 $e^{iy} \in M_{1-e}$。

证明。 我们首先证明， $\mathbb{P}_\omega M$ 的 Haagerup L_2 空间可分解为一个张量积。这是一个众所周知结果的简单推论：对称 Fock 空间构造将直和转化为张量积。设 n_ω 为M中 ω-有限元素构成的左理想。那么， en_ω就是 N中 ω-有限元素构成的左理想：

$$\omega(ex^*xe) < \infty$$

这里用到了定义理想 $m_\omega = n_\omega^* n_\omega$ 是中心化子M_ω [Tak03]上的双模这一事实。此外，我们有正交性：

$$\omega(ex^*y(1-e)) = \omega(x^*y(1-e)e) = 0$$

其中 $x, y \in n_\omega$ [Tak03]。根据 Fock 空间模型，我们有：

$$\begin{aligned} L_2(\mathbb{P}_\omega M, \phi_\omega) &\cong \mathcal{F}_s(L_2(M,\omega)) = \mathcal{F}_s(\overline{n_\omega \eta_\omega}) = \mathcal{F}_s(\overline{en_\omega\eta_\omega \oplus (1-e)n_\omega\eta_\omega}) \\ &\cong \mathcal{F}_s(\overline{en_\omega\eta_\omega}) \otimes \mathcal{F}_s(\overline{(1-e)n_\omega\eta_\omega}) = \mathcal{F}_s(L_2(N,\omega)) \otimes \mathcal{F}_s(L_2(M_{1-e},\omega)) \\ &\cong L_2(\mathbb{P}_\omega N, \phi_\omega) \otimes L_2(\mathbb{P}_\omega M_{1-e}, \phi_\omega) \end{aligned} \tag{4.20}$$

其中 η_ω 是 ω的半循环表示中的表示向量。通过相同的计算，我们可以直接证明泊松态可分解：

$$\begin{aligned} \phi_\omega(\Gamma(e^{ix})\Gamma(e^{iy})) &= \phi_\omega(\Gamma(e^{i(x+y)})) = \exp(\omega(e^{i(x+y)} - 1)) \\ &= \exp(\omega\big((e^{ix}-1)(e^{iy}-1)\big)) \exp(\omega(e^{ix}-1)) \exp(\omega(e^{iy}-1)) \\ &= \exp(\omega(e^{ix}-1)) \exp(\omega(e^{iy}-1)) = \phi_\omega(\Gamma(e^{ix}))\phi_\omega(\Gamma(e^{iy})) \end{aligned} \tag{4.21}$$

其中 $e^{ix} - 1 \in em_\omega e = m_{\omega_e} \subset N$和 $e^{iy} - 1 \in (1-e)m_\omega(1-e) = m_{\omega_{1-e}} \subset M_{1-e}$。由稠密性可得该分解。结合这两个计算可知，乘法映射是一个分裂同构，并且由 Fock 空间同构酉实现

。最后，当 $\mathbb{P}_\omega N$ 是一个因子时，利用 Fock空间同构，我们有：$(\mathbb{P}_\omega N)' \cap \mathbb{P}_\omega M = (\mathbb{P}_\omega N)' \cap (\mathbb{P}_\omega N \vee \mathbb{P}_\omega M_{1-e}) \cong J_N \mathbb{P}_\omega N J_N \otimes \mathbb{B}(L_2(\mathbb{P}_\omega M_{1-e}, \phi_\omega)) \cap \mathbb{P}_\omega N \otimes \mathbb{P}_\omega M_{1-e} \cong \mathbb{P}_\omega M_{1-e}$ 其中 J_N 是泊松代数 $\mathbb{P}_\omega N$ 在其标准形下的模共轭。 ■

推论4.7。 采用引理*4.6*中的相同设定。若 $\mathbb{P}_\omega M$ 和 $\mathbb{P}_\omega N$ 都是因子，则指标 $[\mathbb{P}_\omega M : \mathbb{P}_\omega N] = \infty$。

证明。 如果指标有限，则相对交换子是有限维的 [Lon89]。然而，在我们的情形中，相对交换子是一个泊松代数，它总是无限维的。因此，指标总是无限的。 ■

我们暂停一下，讨论无限指标的 II_1 型子因子。根据命题 4.1 和推论4.7，对于任何与恒等元 Murray-von Neumann 等价的投影 $e \sim id \in \mathbb{B}(\ell_2)$，都有一个无限指标的 II_1 型子因子 $\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(e\ell_2) \subset \mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(\ell_2)$。Jones 的构造可以应用于无限指标的 II_1 型子因子。但尚不清楚该构造是否能像有限指标情形那样产生标准不变量。关于无限指标子因子的标准不变量，有一种候选方案由 [Bur03、JP15、Pen13] 提出，该方案以中心化子代数、中心 L_2-向量及其对应的平面演算为基础。

定义 4.8。给定一个无限指标的 II_1 型子因子$(N \subset M, \mathrm{tr})$，其中$\mathrm{tr}$ 是规范迹。对于 $n \geq 0$，中心化子代数定义如下：

$$\mathcal{Q}_n := N' \cap (N^{op})' \cap \mathbb{B}(\otimes_N^n L_2(M)) \tag{4.22}$$

其中 $\otimes_N^n L_2(M)$ 是 N-双模 $L_2(M)$ 的 *Connes*融合张量积， N'是双模 $\otimes_N^n L_2(M)$ 上左侧 N作用的交换子，而$(N^{op})'$是右侧 N作用的交换子。

中心 L_2-向量定义如下：

$$\mathcal{P}_n := N' \cap \otimes_N^n L_2(M) \tag{4.23}$$

其中 N'是左侧 N作用的交换子。

对于无限指标子因子，中心化子代数与中心向量 [Bur03]并不相同。不过，它们具有相容的平面演算 [Jon99, Pen13]。对于 II_1型泊松子因子，我们可以显式计算这些“不变量”。

推论 4.9. 设 $e \sim id \in \mathbb{B}(\ell_2)$ 是一个与恒等元 *Murray-von Neumann* 等价的投影。那么作为 $\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(e\ell_2)$-双模，*Connes* 融合积为：

$$\otimes^n_{\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(e\ell_2)} L_2(\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(\ell_2), \phi_{\mathrm{tr}}) \cong L_2(\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(e\ell_2), \phi_{\mathrm{tr}}) \otimes \left(\otimes^n_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_s(S_2((1-e)\ell_2)) \right) \tag{4.24}$$

其中 $S_2((1-e)\ell_2)$ 是 $(1-e)\ell_2$ 上的 *Schatten 2* 类。右侧的泊松代数仅作用于双模 $L_2(\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(e\ell_2)\ \phi_{\mathrm{tr}})$ 上，而对称 *Fock* 空间是重数。右侧的张量积是通常的 $\mathbb{C}$ 上的张量积。

此外，中心化子代数是对称 *Fock* 空间上的矩阵代数：

$$\mathcal{Q}_n = \mathbb{B}\left(\otimes^n_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_s(S_2((1-e)\ell_2)) \right). \tag{4.25}$$

中心向量由下式给出：

$$\mathcal{P}_n = \mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\widehat{\mathbb{B}(e\ell_2)}' \otimes \left(\otimes_{\mathbb{C}}^{n} \mathcal{F}_s(S_2((1-e)\ell_2)) \right) \tag{4.26}$$

其中，$\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(e\ell_2)' \subset L_2(\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(e\ell_2)\ \phi_{\mathrm{tr}})$ 是与其标准表示中的左泊松代数作用可交换的有界向量。

证明。一旦证明了同构4.24，这些结论就很容易得到。然而，这只是引理4.6的一个简单推论。作为 $\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(e\ell_2)$-双模，$L_2(\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(\ell_2)\ \phi_{\mathrm{tr}}) \cong L_2(\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(e\ell_2)\ \phi_{\mathrm{tr}}) \otimes \mathcal{F}_s(S_2((1-e)\ell_2))$，其中右侧的张量积是关于 $\mathbb{C}$ 的通常张量积，而泊松代数只作用于 $L_2(\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(e\ell_2)\ \phi_{\mathrm{tr}})$分量。由于$L_2(\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(e\ell_2)\ \phi_{\mathrm{tr}}) \otimes_{\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(e\ell_2)} L_2(\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(e\ell_2)\ \phi_{\mathrm{tr}}) = L_2(\mathbb{P}_{\mathrm{tr}}\mathbb{B}(e\ell_2)\ \phi_{\mathrm{tr}})$，故结论成立。 ■

若 $rk(1-e) := r < \infty$ 具有有限秩，则张量积可写为 $\otimes^n \mathcal{F}_s(S_2^r) = \mathcal{F}_s(\oplus^n S_2^r)$。在 [JP15], 的研究中，作者证明了规范不变 CAR 代数可以忠实嵌入中心化子代数。对于泊松子因子，推论 4.9 给出了在“玻色”（对称）Fock 空间上的“费米”代数的忠实表示。与 Jordan–Wigner变换的关系，以及对 II 型泊松子因子的更详细研究，将在另一篇论文中进行。

在本小节最后一部分，我们将关注 III型泊松子因子。为固定记号，考虑一对 von Neumann 代数 $(N \subset M, \omega)$，其中由 $\mathbb{R}_+$ 中的 Arveson 谱 $Sp(\omega_N)$ 生成的群为 $\mathbb{R}_+$ 或 $\langle \lambda^n \rangle$。于是根据推论 4.1，$\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(N\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$ 和 $\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$ 都是 III 型因子。引理4.6 的一个简单推论是以下观察：

推论 4.10. 给定一个形如 $\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$ 的 *III* 型泊松因子，则对于任意$k \in \mathbb{N}$，有正规同构：

$$\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))^{\otimes k} \cong \mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2)) \,. \tag{4.27}$$

证明. 由归纳法，只需证明该命题对 $k = 2$ 成立。取一个投影 $e \in \mathbb{B}(\ell_2)$，使得 $e \sim 1-e \sim 1$。由于 e 属于中心化子 $(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))_{\omega\otimes\mathrm{tr}}$，由引理4.6可得正规同构：$\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(e\ell_2))\overline{\otimes}\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}((1-e)\ell_2)) \cong \mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$。由于 $\mathbb{B}(e\ell_2) \cong \mathbb{B}((1-e)\ell_2) \cong \mathbb{B}(\ell_2)$，因此得到所需的同构。 ■

回顾分裂包含的定义 [DL84, Lon84]:

定义 4.11。设 $N \subset M$ 是作用于同一希尔伯特空间$\mathcal{H}$上的两个冯·诺伊曼代数。若存在正规同构：$N \vee M' \cong N\overline{\otimes}M'$，则称该包含为分裂包含。

分裂包含是代数量子场论中的一个重要概念。简而言之，分裂性质可理解为物理局域性的一种数学刻画。这里我们证明，形如 $\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(N\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2)) \subset \mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$ 的 III 型泊松子因子。

引理 4.12. 设 $N \subset M$ 是两个超有限冯·诺伊曼代数，且 ω 是定义在 M 上的一个正规半有限忠实权，使得由 *Arveson* 谱 $Sp(\omega_N)$ 生成的群是 $\mathbb{R}_+$或 $\langle \lambda^n \rangle$。那么，包含关系 $\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(N\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2)) \subset \mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$ 是分裂包含。特别地，存在一个中间*I*型子因子：

$$\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(N\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2)) \subset \mathbb{B}\left(L_2\big(\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2)), \phi_{\omega\otimes\mathrm{tr}}\big) \right) \subset \mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2)) \,. \tag{4.28}$$

证明. 推论 4.10 $\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))^{\otimes 2}\cong\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$中的正规同构由以下酉同构实现:

$$U:L_2(\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2)),\phi_{\omega\otimes\mathrm{tr}})^{\otimes 2}\to L_2(\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2)),\phi_{\omega\otimes\mathrm{tr}})\,. \tag{4.29}$$

请注意，张量积是取在 $\mathbb{C}$ 上，而非 Connes 融合积。因此在左侧，泊松子代数 $\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(N\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$ 的忠实左作用包含在以下 I 型因子中:

$$\pi_l\Big(\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(N\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))\Big)\cong\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(N\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))\otimes\mathbb{C}\subset\mathbb{B}\bigg(L_2\big(\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2)),\phi_{\omega\otimes\mathrm{tr}}\big)\bigg)\otimes\mathbb{C}\,. \tag{4.30}$$

类似地，在张量积上，泊松代数 $\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$ 的忠实右作用的交换子包含同一个 I 型因子:

$$\pi_r\Big(\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))\Big)'\cong\mathbb{B}\bigg(L_2\big(\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2)),\phi_{\omega\otimes\mathrm{tr}}\big)\bigg)\otimes\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))\,. \tag{4.31}$$

由于 $U\pi_r\Big(\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))\Big)U^*=J\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))J$，其中 J 是泊松态 $\phi_{\omega\otimes\mathrm{tr}}$ 的模共轭，因此 $U\mathbb{B}\bigg(L_2\big(\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))\ \phi_{\omega\otimes\mathrm{tr}}\big)\bigg)\otimes\mathbb{C}U^*$ 就是我们要找的中间 I 型因子。

为完成证明，相对交换子 $\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(N\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))'\cap\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$ 是适当无穷的。再次利用酉同构 U，交换子 $\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(N\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))'$ 和泊松代数 $\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$ 都吸收泊松代数 $\mathbb{P}_{\omega\otimes\mathrm{tr}}(M\overline{\otimes}\mathbb{B}(\ell_2))$ 本身。因此，相对交换子也吸收 III 型泊松因子。于是，作为一个无穷冯·诺伊曼代数，相对交换子必定是适当无穷的。根据 [DL84], 中的一个结果，当相对交换子是适当无穷的时，一个包含是分裂的，当且仅当存在一个中间 I 型因子。因此，我们得到了所需结果。

■

4.4. 泊松代数中的相对熵。作为泊松化的最后一个应用，我们展示如何计算泊松代数中某些态的量子相对熵。当泊松代数是 III 型时，这一计算给出了 III 型代数中相对熵的严格公式。

为了以完全一般的形式陈述主要数学结果，我们首先回顾荒木对相对熵的定义以及 Lindblad 的推广。

定义 4.13 (荒木 [Ara76, Ara77])。 设 N 为冯·诺伊曼代数， ρ,ψ 为其上的两个态。则相对熵定义为:

$$D(\rho|\psi):=\langle\eta_\psi,-\log\Delta_{\rho,\psi}\eta_\psi\rangle \tag{4.32}$$

其中， $\eta_\psi\in L_2(N,\psi)$ 是态 ψ 的向量表示，$\Delta_{\rho,\psi}$ 是态 ρ 与 ψ之间的相对模算子。

定义 4.14 (Lindblad [Lin74])。 设 N 为有限维冯·诺依曼代数， $\rho,\psi\in L_1(N)$ 为两个正密度（不一定归一化）。则 ***Lindblad*** 相对熵定义为:

$$D_{Lin}(\rho|\psi):=Tr(\rho(\log\rho-\log\psi))+Tr(\psi)-Tr(\rho) \tag{4.33}$$

其中 $Tr(\cdot)$ 是 N上的典范迹。

当 N 是有限维的，且 ρ 和 ψ 均已归一化时，Lindblad 相对熵就化为 Araki定义。当 ρ 和 ψ 是无界权时，如何定义相对熵尚不明确。不过，如果一个权是另一个权的“小”扰动，则可以推广 Lindblad 相对熵：

定义 4.15。设 N 是一个半有限冯·诺伊曼代数，且设 ρ, ψ 是两个 ***n.s.f*** 权，满足 $\rho \leq \psi$，并且 $\psi - \rho \in N_*$ 是一个正规有界线性泛函。则广义***Lindblad***相对熵定义为：

$$D_{Lin}(\rho|\psi) := \langle \eta_\psi, -\log \Delta_{\rho,\psi}\eta_\psi \rangle + (\psi - \rho)(1) \,. \tag{4.34}$$

当 N 是有限维的，且 ρ、ψ 是有界泛函时，广义Lindblad相对熵就化为熟知的 Lindblad 相对熵。正如在非交换几何中将紧算子视为有界算子附近的小扰动一样，扰动 $\psi - \rho$ 可以理解为无界权附近的一个小有界扰动。

利用这一广义相对熵概念，我们将计算两个泊松态 ϕ_ρ 和 ϕ_ψ 之间的相对熵。定义这一相对熵的一个难点在于，在泊松代数 $\mathbb{P}_\psi N$ 上，无法确定 ϕ_ρ 是否为正规态，因为泊松化仅构造出 ϕ_ρ，使其成为另一个泊松代数 $\mathbb{P}_\rho N$ 上的一个态。然而，当 ρ 是 ψ 附近的有界扰动时，我们可以在泊松代数 $\mathbb{P}_\psi N$ 上定义这两个态。 [7]

命题 4.3. 设 N 为一个半有限冯·诺伊曼代数，且 ρ, ψ 为 N上的两个正规半有限忠实权。此外，设 $\mathbb{P}_\psi N$ 为泊松代数，ϕ_ψ 为相应的泊松态。假设 $\rho \leq \psi$ 且 $\psi - \rho$ 是一个有界正泛函。那么在 $\mathbb{P}_\psi N$上，存在一个正规半有限忠实权 ϕ_ρ，使得：

$$(D\widetilde{\phi}_\rho : D\phi_\psi)_t = \Gamma((D\rho : D\psi)_t) \tag{4.35}$$

其中 $(D\rho: D\psi)_t \in N$ 是 ρ 与 ψ 之间的 ***Connes***余循环 [Tak03]，对于 $(D\phi_\rho : D\phi_\psi)_t$也类似。此外，泊松态 ϕ_ρ 是 $\mathbb{P}_\psi N$ 上的良定义态，且 $\sim\phi_\rho$ 与 ϕ_ρ 之间的余循环为：$(D\phi_\rho : D\phi_\rho)_t = \exp(-it(\psi - \rho)(1))$。此时广义***Lindblad***熵保持不变

$$D(\phi_\rho|\phi_\psi) = D_{Lin}(\rho|\psi) \,. \tag{4.36}$$

证明。证明基于一个简单的观察：泊松化会自然地将 N 中的余循环提升为泊松代数 $\mathbb{P}_\psi N$ 中的余循环。但积分权并不是正确的泊松态。因此，有界扰动这一假设是必要的，以确保泊松代数上存在另一个余循环，从而产生正确的泊松态。

设 $u_t := (D\rho : D\psi)_t \in N$ 是 N 中 ρ, ψ 之间的余循环。泊松化产生一个酉元 $\Gamma(u_t) \in \mathbb{P}_\psi N$，使余循环条件成立：

$$\Gamma(u_t)\sigma_t^{\phi_\psi}(\Gamma(u_s)) = \Gamma(u_t)\Gamma(\sigma_t^\psi(u_s)) = \Gamma(u_t\sigma_t^\psi(u_s)) = \Gamma(u_{t+s}) \tag{4.37}$$

[7]一般而言，当两个权 ρ、ψ 不满足命题 4.3 的条件时，无法保证泊松态 ϕ_ρ、ϕ_ψ 能同时定义在同一个泊松代数上。事实上，如果 $\psi = \lambda\rho$ 对于某个常数 $\lambda > 0$ 成立，并假设二者都是泊松代数 $\mathbb{P}_\psi N$上的良定义态，那么利用 Powers-Størmer 不等式和逼近态网，可以证明这两个态必然正交。

其中 $\sigma_t^{\phi_\psi}$是 ϕ_ψ 的模自同构，σ_t^{ψ} 也类似。因此，根据 Connes-~Matsuda 定理，泊松代数 $\mathbb{P}_\psi N$ 上存在一个正规半有限忠实权 ϕ_ρ，使得：~$(D\phi_\rho : D\phi_\psi)_t = \Gamma(u_t)$。

为了计算 ϕ_ρ，我们首先注意到，$\Gamma(u_{-i/2})$ 是 $L_2(\mathbb{P}_\psi N, \phi_\psi)$ 上一个定义良好的压缩算子。由于 $\rho \le \psi$，$||u_{-i/2}|| \le 1$ [Tak03]，并利用同构 $\mathcal{F}_s(L_2(N,\psi)) \cong L_2(\mathbb{P}_\psi N, \phi_\psi)$，压缩算子 $u_{-i/2}$ 可以提升为压缩算子 $\Gamma(u_{-i/2})$，使得：

(4.38)
$$\begin{aligned}\big(\Gamma(u_{-i/2})\cdot\phi_\psi\cdot\Gamma(u_{-i/2}),\Gamma(x)\big) &= \phi_\psi(\Gamma(u_{-i/2})^*\Gamma(x)\Gamma(u_{-i/2})) = \exp(\psi(u_{-i/2}^* x u_{-i/2} - 1)) \\ &= \exp(\rho(x-1))\exp((\rho-\psi)(1))\end{aligned}$$

其中 $x \in S_{ana}^{\psi} = \{y \in \mathcal{U}_{ana}^{\psi} :\ y-1 \in m_\psi, ||y|| \le 1\}$ 和 $(\cdot,\cdot)$ 是泊松代数与其预对偶之间的典范配对~。由于 $\phi_\rho = \Gamma(u_{-i/2})\cdot\phi_\psi\cdot\Gamma(u_{-i/2})$，根据~密度可知，$\phi_\rho$ 的扭曲版本与泊松态 ϕ_ρ 相同：

$$\exp((\rho-\psi)(1))\widetilde{\phi_\rho}(\Gamma(x)) = \exp(\rho(x-1)) = \phi_\rho(\Gamma(x))\ . \tag{4.39}$$

因此，ϕ_ρ 是泊松代数 $\mathbb{P}_\psi N$ 上的良定义态，并且我们有余循环：$(D\phi_\rho :_\sim D\phi_\rho)_t = \exp(it(\rho-\psi)(1))$。特别地，$(D\phi_\rho : D\phi_\psi)_t = \exp(it(\rho-\psi)(1))\Gamma(u_t)$。因此，根据荒木相对熵的定义，我们有：

$$\begin{aligned}D(\phi_\rho|\phi_\psi) &= -\langle\phi_\psi^{1/2}, \log\Delta_{\phi_\rho,\phi_\psi}\phi_\psi^{1/2}\rangle = -\langle\phi_\psi^{1/2}, \lambda(\log\Delta_{\rho,\psi})\phi_\psi^{1/2}\rangle + (\psi-\rho)(1) \\ &= -\langle\psi^{1/2}, \log\Delta_{\rho,\psi}\psi^{1/2}\rangle + (\psi-\rho)(1) = D_{Lin}(\rho|\psi)\ .\end{aligned} \tag{4.40}$$

■

类似的计算也适用于 Rényi 熵。在另一篇论文中，我们将利用这一观察研究泊松代数上的其他几种量子信息量。事实证明，泊松代数是研究所谓混沌量子系统的良好玩具模型。

参考文献

[AAS22] 和A natoly Dymarsky、Alexander Avdoshkin 与 Michael Smolkin。量子场论及其之外的 Krylov 复杂度。*arXiv* 预印本 *arXiv:2212.14429*，2022年。[AD20] Alexander Avdoshkin 与 Anatoly Dymarsky。欧几里得算子增长与量子混沌。《物理评论研究》，2:043234，2020年11月。[AH14] Hiroshi Ando 与 Uffe Haagerup。冯·诺伊曼代数的超积。*Journal of FunctionalAnalysis*，266(12):6842–6913，2014年。[Akh20] N. I. Akhiezer。经典矩问题及分析中的若干相关问题。工业与应用数学学会，费城，宾夕法尼亚州，2020年。[Ara76] H. Araki。冯·诺伊曼代数态的相对熵。*Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto*，1976:809–833，1976年。[Ara77] H. Araki。冯·诺伊曼代数态的相对熵 II。*Publ. Res. Inst. Math. Sci.Kyoto*，1:173–192，1977年。[BCK66] Jean Bretagnolle、Didier Dacunha Castelle 与 Jean-Louis Krivine。稳定分布与 lp 空间。*Annales de l'institut Henri Poincare*，2(3):231–259，1965—1966年。[BDH15] Arthur Bartels、Christopher L. Douglas 与 Andre Henriques。共形网 I：无坐标网。*International Mathematics Research Notices*，2015:4975–5952，2015年。[BDL90a] Detlev Buchholz、Claudio D'Antoni 与 Roberto Longo。核映射与模结构。I. 一般性质。*Journal of Functional Analysis*，88(2):233–250，1990年。

[BDL90b] Detlev Buchholz、Claudio D'Antoni 与 Roberto Longo。核映射与模结构。II. 在量子场论中的应用。《数学物理通讯》，129(1):115–138，1990年。[Ber92] Joseph Bernstein。p进群表示。1992年。讲义草稿。[Bor92] H.-J. Borchers。局域可观测量二维理论中的 CPT 定理。《数学物理通讯》，143(2):315–332，1992年。[Bou15] Gabriel Bouch。量子晶格系统中的复时间奇点与局域性估计。《数学物理杂志》，56(12):123303，2015年。[BR81] Ola Bratteli 与 Derek W. Robinson。《算子代数与量子统计力学 II》。理论与数学物理。施普林格柏林-海德堡，第1版，1981年。[BR87] Ola Bratteli 与 Derek W. Robinson。《算子代数与量子统计力学 I》。理论与数学物理。施普林格柏林-海德堡，第2版，1987年。[Bur03] Michael Burns。子因子、平面代数与旋转。arXiv 预印本 arXiv:1111.1362，2003年。加州大学伯克利分校博士论文。[Cao21] Xiangyu Cao。算子增长的一种统计机制。《物理学A：数学与理论》，54(14)，2021年。[CH15] Tyrone Crisp 与 Nigel Higson。抛物诱导、表示范畴与算子空间。arXiv 预印本 arXiv:1506.09111，2015 年。[Chr95] Lance E. Christopher。《 Hilbert C*- 模：算子代数学家的工具箱》。伦敦数学学会讲义系列。剑桥大学出版社，1995年。[DG20] Anatoly Dymarsky 与 Alexander Gorsky。量子混沌即 Krylov 空间中的离域化。《物理评论B》，102:085137，2020年8月。[DL] S. Doplicher 与 R. Longo。《数学新进展》。[DL84] S. Doplicher 与 R. Longo。《数学新进展》，(75):493–536，1984年。[DM71] J. Dixmier 与 O. Maréchal。冯·诺伊曼代数的全向量。《数学物理通讯》，22(1):44–50，1971年。[DS21] Anatoly Dymarsky 与 Michael Smolkin。共形场论中的 Krylov 复杂度。《物理评论D》，104:L081702，2021年10月。[EHF14] Tarek A. Elsayed、Benjamin Hess 与 Boris V. Fine。高温下多自旋系统生成的时间序列中的混沌特征。《物理评论E》，90:022910，2014年8月。[Flo98] Martin Florig。论 Borchers定理。《数学物理快报》，46:289–293，1998年。[GKZ22] Y. Gu、A. Kitaev 与 P. Zhang。失时序关联的双向方法。《高能物理学杂志》，(133)，2022年。[HA05] Laszlo Zsido Huzihiro Araki。Borchers结构定理的推广及其在半侧模包含中的应用。《数学物理评论》，17(05):491–543，2005年。[Haa96] Rudolf Haag。《局域量子物理》。理论与数学物理。施普林格柏林-海德堡，1996年。[HQRY16] P. Hosur、X. L. Qi、D. A. Roberts 与 Beni Yoshida。量子信道中的混沌。《高能物理学杂志》，(4)，2016年。[Hus94] Dale。Husemöller。《纤维丛》。数学研究生教材，20。施普林格纽约，纽约州纽约市，第3版，1994年。[JJB75] Eyvind H. Wichmann Joseph J. Bisognano。厄米标量场的对偶条件。《数学物理杂志》，16(4):985–1007，1975年。[Jon83] V.F.R. Jones。子因子指标。《数学新进展》，72:1–26，1983年。[Jon99] Vaughan F. R. Jones。平面代数 I。arXiv 预印本 arXiv:math/9909027，1999年。[JP09] Marius Junge 与 Javier Parcet。《混合范数不等式与算子空间Lp嵌入理论》，美国数学会回忆录第203卷，2009年。[JP15] V.F.R. Jones 与 D. Penneys。无限指标子因子与 GICAR范畴。《数学物理通讯》，(339):729–768，2015年。[Jun] Marius Junge。非交换泊松测度。未发表。[Jun06] Marius Junge。算子空间与 Araki-Woods 因子：一种量子概率方法。International Mathematics Research Papers，2006，2006年1月。[KL92] Hideki Kosaki 与 Roberto Longo。关于子因子的最小指标的一则评论。《Journal of Functional Analysis》，107(2):458–470，1992年。

[KLM01] Y. Kawahigashi、R. Longo 和 M. Muger。共形场论中多区间子因子与表示的模性。《数学物理通讯》，(219):631–669，2001年。[Kna86] Anthony W. Knapp。《半单群表示论：基于实例的概述》(PMS-36)。普林斯顿大学出版社，修订版，1986年。[Kna96] Anthony W. Knapp。《超越入门的李群》。数学进展。Birkhauser Boston，马萨诸塞州，第一版，1996年。[Kos] Hideki Kosaki。态的相对熵：一种变分表达式。《算子理论杂志》，(2):335–348。[Lie83] Elliott H. Lieb。Hardy–Littlewood–Sobolev 不等式及相关不等式中的最佳常数。《数学年刊》，118(2):349–374，1983年。[Lin74] G. Lindblad。有限量子系统的期望与熵不等式。《数学物理通讯》，(39):111–119，1974年。[LMVR19] Tyler LeBlond、Krishnanand Mallayya、Lev Vidmar 和 Marcos Rigol。相互作用可积系统中的纠缠与可观测量矩阵元。《物理评论E》，100:062134，2019年12月。[Lon] Roberto Longo。共形网讲义。未发表。[Lon84] R. Longo。因子型斯通-魏尔施特拉斯猜想的解：标准分裂 W* 包含理论的一个应用。《数学新进展》，76:145–156，1984年。[Lon89] Roberto Longo。子因子指标与量子场统计。I。《数学物理通讯》，126(2):217–247，1989年。[LTZ22] Chang Liu、Haifeng Tang 和 Hui Zhai。开放量子系统中的 Krylov 复杂度。arXiv 预印本 arXiv:2207.13603，2022年。[Mey95] Paul-Andre Meyer。《概率学家的量子概率》。数学讲义。施普林格柏林-海德堡，1995年。[MSS16] J. Maldacena、S. H. Shenker 和 D. Stanford。混沌界。《高能物理学杂志》，(106)，2016年。[NN20] T. Nosaka 和 T. Numasawa。质量形变 SYK 模型中的量子混沌、热力学与黑洞微观态。《高能物理学杂志》，(81)，2020年。[Ocn89] A. Ocneanu。量子化群、弦代数与代数的伽罗瓦理论，伦敦数学会讲义系列第2卷，第119–172页。剑桥大学出版社，1989年。[Par92] K. R. Parthasarathy。《量子随机微积分导论》。现代 Birkhauser 经典著作。Birkhauser Basel，第一版，1992年。[Par12] K. R. Parthasarathy。《量子随机微积分导论》。现代 Birhauser 经典著作。Birkhauser Basel，2012年。[Pas73] William L. Paschke。b*-代数上的内积模。《美国数学会汇刊》，182:443–468，1973年。[PCA+19] Daniel E. Parker、Xiangyu Cao、Alexander Avdoshkin、Thomas Scaffidi 和 Ehud Altman。普适算子增长假说。《物理评论X》，9:041017，2019年10月。[Pen13] D. Penneys。无限指标子因子的平面演算。《数学物理通讯》，(319):595–648，2013年。[Pop95] Sorin Popa。CBMS 数学区域会议系列第86卷。1995年。[PP86] Mihai Pimsner 和 Sorin Popa。子因子的熵与指标。《法国高等师范学校科学年刊》，19(1):57–106，1986年。[Rep00] 李群表示论。IAS/帕克城数学系列；第8卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2000年。[RSGSS21] E. Rabinovici、A. Sanchez-Garrido、R. Shir 和 J. Sonner。算子复杂度：通往 Krylov 空间边缘的旅程。《高能物理学杂志》，(62)，2021年。[RSGSS22] E. Rabinovici、A. Sanchez-Garrido、R. Shir 和 J. Sonner。从可积性到混沌的克雷洛夫复杂度。《高能物理学杂志》，(151)，2022年。[RSS18] D. A. Roberts、D. Stanford 和 A. Streicher。SYK 模型中的算子增长。(122)，2018年。[RvD77] Marc A. Rieffel 和 Alfons van Daele。富田-竹崎理论的有界算子方法。《太平洋数学杂志》，69(1):187–221，1977年。

[Sat99] Kenichi Sato。《莱维过程与无限可分分布》。剑桥高等数学研究。剑桥大学出版社，英国剑桥，1999年。[SML18] Akshay Seshadri、Vaibhav Madhok 和 Arul Lakshminarayan。置换对称系统中的三方互信息、纠缠与扰乱及其在量子混沌中的应用。《物理评论E》，98:052205，2018年11月。[SPQ+19] C. Sunderhauf、L. Piroli、X. L. Qi、N. Schuch 和 J. I. Cirac。大有限 n 布朗SYK模型中的量子混沌：OTOC（时序外关联函数）与三方信息。《高能物理学杂志》，(38)，2019年。[ST] Gennady Samoradnitsky 和 M. S. Taqqu。《稳定非高斯随机过程：无限方差随机模型》。Chapman and Hall，第一版。[Tak79] Masamichi Takesaki。算子代数理论 *I*。施普林格出版社，纽约，1979年。[Tak03] Masamichi Takesaki。算子代数理论 *II*。《数学科学百科全书》，第127卷。施普林格出版社，柏林，2003年。[Ter82] Marianne Terp。冯·诺伊曼代数与其预对偶之间的插值空间。《算子理论杂志》，8(2):327–360，1982年。[VND92] Dan Voiculescu、Alexandru Nica 和 Kenneth J. Dykema。自由随机变量，第1卷，收录于*CRM*专著丛书。1992年。[Was98] Antony Wassermann。算子代数与共形场论 III：利用有界算子研究 LSU(n) 正能量表示的融合规则。《数学新进展》，(133):467–538，1998年。[Wid46] David Vernon Widder。《拉普拉斯变换》。普林斯顿大学出版社，1946年。[Zel05] S. Zelditch。量子遍历性与混合。*arXiv* 预印本 *arXiv:math-ph/0503026*，2005年。[Zel09] S. Zelditch。数学量子混沌的最新进展。*arXiv* 预印本 *arXiv:0911.4312*，2009年。