张量积的内部视角 ⋆

Rafael D. Sorkin

周界理论物理研究所，加拿大滑铁卢市卡罗琳北街 31 号，邮编 N2L 2Y5；以及拉曼研究所，印度班加罗尔 Sadashivanagar 区 C.V. Raman 大道，邮编 560 080；以及

*Sch*都柏林高级研究学院理论物理学院，爱尔兰都柏林 4 区伯灵顿路 10 号；以及物理学系，雪城大学，美国纽约州锡拉丘兹市，邮编 13244-1130。

电子邮箱地址：rsorkin@perimeterinstitute.ca

arXiv:2303.14596v1 [math-ph] 26 Mar 2023

摘要

给定一个向量空间 V，它是向量空间 A 和B的张量积，我们从V内的简单张量族 $a\otimes b$ 重构出 A 和 B 。在量子力学中的一项应用里，我们将从复合系统的未纠缠纯态重构其组成子系统。我们的构造可视为范畴论概念——函子和自然同构——的实例；我们借此阐明这些概念背后的直觉，同时也对它们加以评析。此外，文中还提出了一些后续研究建议，包括期望将其应用于量子场论中的纠缠熵。

关键词与短语：张量积、张量结构、简单向量、子系统、未纠缠、内在定义、平方构造、函子

目录

1. 引言 2. 提出问题 3. V中简单向量的空间 $\mathfrak{S}$ 4. 如何在不考虑比例因子的情况下恢复 V_1 和 V_2

⋆ 即将发表于《粒子、场与拓扑：致敬 A.P. Balachandran》，由 T.R. Govindrajan、Guiseppe Marmo、V. Parameswaran Nair、Denjoe O'Connor、Sarada Rajeev 和 Sachindeo Vaidya 编，世界科技出版公司（新加坡）

5. 张量积的分析与综合 使用“带基点向量空间” 6. 范畴论事项（阐述与批评）一个小例子：拓扑记住了自旋 对我们构造的函子性诠释 7. 问题；进一步发展；与量子场论的联系

本文谨献给我的朋友 A.P. Balachandran，以庆祝他 85 岁生日。他善于洞察抽象数学关系的具体含义，也许会为本文提出的张量积概念想到一种出人意料的物理学用途！

1. 引言

张量在物理学中的种种应用，几乎不可能一一综述。没有某些个别张量或张量场，例如洛伦兹度量、黎曼曲率或应力-能量张量，广义相对论和量子场论便无从存在；不过，张量积概念本身及其对应的积空间，或许在抽象量子理论中最为突出。当然，原因在于，只要涉及量子“系统”的状态空间，张量积就提供了一种构造，能够将两个或更多子系统的状态空间组合成较大的复合系统或“整体”的状态空间。

考虑到张量积所扮演的这一角色，令人不安的是，除了维数之外，所得的状态空间（记作 V）似乎并不保留任何关于构成它的各个空间的信息。例如，$12 = 4 \times 3 = 2 \times 6$，一个由自旋 $3/2$ 和自旋 1 组合而成的 12 维状态空间，同样也可以描述自旋 $1/2$ 和自旋 $5/2$组成的复合系统。由此便引出了以下数学问题。

假设某个向量空间 V 是空间 V_1 和 V_2 的张量积。要从 V 中还原出 V_1 和 V_2，还需要哪些额外信息？换句话说：V 具有张量积空间的结构，究竟意味着什么？

为了更清楚地探讨这个问题，设想 V 不是张量积，而是直和；例如，若 V_1 描述一个电离氢原子，而 V_2 描述同一个原子处于未电离状态，就会是这种情况。那么，相应的状态空间便是 $V = V_1 \oplus V_2$；而同一个方程也能描述其他互斥的

可能性，例如 α粒子位于原子核内部或外部，或分子属于正氢或仲氢。对于关于张量积的问题，在这类情形下相应的问题是： V 具有直和结构意味着什么？不过，在这里答案很简单。只需将 V_1 和 V_2 标示为 V的子空间即可。 V 这两个“部分”完整地包含在整体之中，而且每个$v \in V$都能唯一地表示为一个和： $v = v_1 + v_2$。换言之， V的“直和结构”不过是 V的一对互补子空间。

为什么张量积空间 V 的情形就不那么直截了当呢？要理解其中的不同之处，设 $V = V_1 \otimes V_2$ 是一个张量积空间。首先可以注意到， V_1 和 V_2 不再以任何显而易见的方式包含在 V 中。此外，直和中 $v = v_1 + v_2$ 的对应物应当是 $v = v_1 \otimes v_2$，但既然向量空间按定义具有求和的概念，却没有乘积的概念，又该如何在 V 中表达它呢！而且，在 V 中缺少运算 $\otimes$，即使能够确定 V 的两个这样的子空间，又该如何从 V_1 和 V_2 中恢复 V 呢？接下来的论述将回答这些问题，并说明 V 中由简单向量组成的空间 $\mathfrak{S}$ ——即 V 中形如 $v = v_1 \otimes v_2$ 的元素——能够发挥互补子空间在直和情形中的结构性作用。

尽管我们的问题源于物理，但它们纯粹是数学问题，而我们将得到的答案想必早已为某些领域的人所熟知，只是尚未出现在我所熟悉的文献中。我也不知道我们将要探讨的构造是否具有更深层的物理意义。不过，它们确实提供了一种更内在的方式来理解张量积（或许可以称之为一种“由内而外的视角”）；而更内在的理解往往能启发并深化人们的直觉。任何教过相对论、微分几何或“数学方法”课程的人都可以作证，张量这一概念似乎总让人难以凭直觉把握。或许量子纠缠让许多人也觉得违背直觉，并非巧合；毕竟，其数学基础正是张量积空间。

在这种情况下，作为我们后续论述基础的“平方构造”，为理解张量积提供了一种互补的思路：它不是从各个因子空间 V_1 和 V_2 入手，而是从乘积空间 V 本身出发。由于这种更具分析性的处理方式将重点转向 V 中的简单向量，而且

在量子语境中，这些简单向量恰恰就是未纠缠态向量，因此可以说，相较于人们通常遇到的那些更形式化的定义，我们的论述与物理直觉联系得更为紧密。至少，它提供了一种不同于较为熟悉的探讨方式。毕竟，理解一个主题的思路越多，其中至少有一种能为人们寻求的更深层理解提供关键线索的可能性就越大。

我们的构造所依赖的主要要素将在下文第2至5节中介绍。第2节和第3节是预备内容，而构造本身则见于第4节和第5节。

在第6节中，我们探讨第4节和第5节的结果能否被视为充分揭示了 V 作为张量积的结构；并较为详细地说明，如何借助函子和自然变换这些范畴论概念，将此类问题表述得精确一些，同时简要介绍这两个概念。在此背景下，我们还指出函子概念本身存在的某个缺陷。

在第7节中，我们提出将这些构造扩展到三个或更多空间的张量积，或扩展到单个空间与其自身的乘积；在后一种情况下，对称性条件（玻色、费米或非阿贝尔）便会发挥作用。我们还推测，将简单向量的概念适当地推广到无限维，或许有助于消除某些数学障碍（这些障碍涉及III型冯诺依曼代数，在此类代数中，通常定义的张量积并不可用），从而使我们能够借助约化密度矩阵来理解纠缠熵（而这需要截断）。

下文中，除非另有说明，我们都假设所有向量空间都是实数上的有限维向量空间。将域 $\mathbb{R}$ 换成域 $\mathbb{C}$ 并不会有什么不同，但为了便于阐述，选定其中一个并始终使用它会更方便。我们也默认空间 V_1 和 V_2 彼此不同，无须特别说明。

2. 提出问题

我们的问题是要寻找张量积更内在的定义，或者如上文所述：什么可以充当 V 的张量积结构？我们将探讨这个问题的三种可能答案；在此过程中，我们始终假设构成 V 这一乘积的两个空间彼此不同。通常这并不重要，但有时会造成差异，尤其是在下一段之后一段中的定义 (1)，以及再往下关于我们主要问题的“第二种回答”中。

不过，在提出主要问题的答案之前，似乎有必要先简要谈谈更常见的张量积定义。不同作者偏好的定义各不相同；根据所采用的定义，我们问题的答案往往也会呈现不同形式。那么，空间 $V_1 \otimes V_2$ 及其中张量有哪些常见定义 [1] 呢?

(1) $V_1 \otimes V_2$ 的一个元素是一个数值矩阵，其矩阵项取决于对 V_1 和 V_2 所选的基，并且当这些基改变时，会以某种特定方式变换。（这或许是最古老的定义。）

(2) $V_1 \otimes V_2$ 的一个元素是两个向量空间之间的线性映射，例如从 V_2^*到 V_1的线性映射，其中 V_2^*是 V_2的对偶空间。

(3) $V_1 \otimes V_2$ 的一个元素是由符号 $\alpha \otimes \beta$构成的形式和的一个等价类，其中$\alpha \in V_1$ 和 $\beta \in V_2$

(4) “那个”空间 $V_1 \otimes V_2$ 是涉及从 $V_1 \times V_2$ 到任意向量空间 Y的双线性函数的某个“泛映射问题”的任意解。（由此，从 $V_1 \times V_2$ 到 Y的双线性函数会诱导出一个从 $V_1 \otimes V_2$ 到 Y的唯一线性映射。）

Remark 请注意，定义（1）涉及分别选取的基，分别属于 V_1 和 V_2。如果假设 V_1 和 V_2 实际上是同一个空间，那么只会涉及一组基。这类张量在广义相对论和微分几何中很常见，其中$V_1 = V_2$ 是时空中某一点的切空间。另一方面，在量子力学中，不同的因子空间很常见，不过全同粒子的情况除外。

在有限维情形下，可以证明这些定义彼此等价。在无限维情形下，则必须区分所谓的代数张量积与各种拓扑张量积；一般来说，它们并不全都相同。就我们的目的而言，深入探讨这些细微之处会过于分散注意力。 [2] 因此，我们将始终在有限维情形下进行讨论。用范畴论的术语来说，这些定义各自给出了一个从向量空间对到向量空间的“函子”；而这些定义在（有限维情形下）彼此等价这一说法，意味着任意两个函子之间都存在一个可逆的“自然变换”。现在回到我们的主要问题，以及一些可能的答案。

第一个可能的答案。最直接、显而易见，但同时信息量最少的答案是， V 的张量积结构是 V 与一个形如 $V_1 \otimes V_2$的空间之间的同构。这是一个不错的起点，但它的缺点是辅助

空间 V_1 和 V_2 并非由 V导出，因此严格来说，对它们作出不同的选择，就会为 V定义不同的张量积结构。我们可以通过对 V_1 和 V_2的同构取等价类来解决这一难题，但我们还是继续看第二和第三个提议。

第二种回答。对于我们的主要问题，第二种可能的回答已经更加具体，也更具“内在性”，它回溯到上述列表中的定义（1）。要将 $V = V_1 \otimes V_2$ 中的一个元素表示为数值矩阵，需要为 V 选取一个基，其成员本身也排列成一个矩阵。具体而言，如果向量列表 $e_j \in V_1$ 构成 V_1 的一个基，而另一组向量列表 $f_k \in V_2$ 构成 V_2 的一个基，那么乘积 $e_j \otimes f_k$ 就构成 $V_1 \otimes V_2$ 的一个基，其成员排列成一个矩形矩阵，行由 j 标记，列由 k 标记。在这样的基下，简单向量 $v_1 \otimes v_2$ 的表示矩阵将是如下形式的矩阵乘积：列向量 $\times$ 行向量。（这样的“特殊基”恰好是 V 与 $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^n$ 之间的一个同构，其中 m 和 n 分别是 V_1 和 V_2 的维数。）

因此，我们可以回答说，V的张量积结构就是将 V的一组基排列成一个矩形矩阵。遗憾的是，这样说并不完全准确，因为许多其他基也会定义相同的乘积结构。首先，可以互换行和列，这相当于写成 $V_2 \otimes V_1$ 而不是 $V_1 \otimes V_2$。这并无影响。不过，也可以将这两组基分别替换为同一空间的其他基；这不会改变空间 V_1 或 V_2 本身，只会改变它们的表示。因此，我们可以将 V 的张量积结构视为一个基的等价类，其参数由 $G = GL(n_1) \times GL(n_2)$ 给出，其中 $n_i = \dim(V_i)$。但即便如此，仍不完全准确，因为总可以将 V_1 的一组基乘以某个比例因子，同时以相反的方式缩放 V_2的一组基。由于这不会影响由此得到的 $V_1 \otimes V_2$的基，我们得出结论：G 实际上是商群 $GL(n_1) \times GL(n_2) \,/\, GL(1)$。当然，$GL(n)$ 是可逆 $n \times n$ 矩阵构成的群。

真正的群是 $GL(n_1) \times GL(n_2) \,/\, GL(1)$，而不只是 $GL(n_1) \times GL(n_2)$，这一事实看似只是个细节，但它实际上告诉了我们一些东西，这些东西会在下面的讨论中再次出现。对于 V 的张量积结构，我们无法完全重构因子空间 V_1 和 V_2；只能在共同的缩放歧义下得到它们。Remark 在经典（非量子）语境中，复合系统会用笛卡尔积 $A \times B$ 来描述。在这种情况下，矩形基的对应物只不过是（对于离散空间 A 和 B）由 $A \times B$ 中的元素组成的一个矩形列表，而讨论

大致也就到此为止了。⋆ 然而，张量积比笛卡尔积更微妙，对于我们的问题，还有第三种可能的答案；它比基的等价类更加具体，也更具内在性。

第三种答案。对于我们的问题，第三种可能的答案，也是本文接下来要探讨的答案是：$V = V_1 \otimes V_2$ 的张量积结构可以取为简单向量 $\mathfrak{S}$ 构成的子空间：

$$\mathfrak{S} = \{\alpha \otimes \beta \,|\, \alpha \in V_1, \beta \in V_2\} \tag{1}$$

正如我们将看到的，存在明确的构造，可以将你从 $\mathfrak{S} \subseteq V$ 映射到V_1 和 V_2（的副本），再由此映射回 V。

Remark 用量子语言来说， $\mathfrak{S}$ 就是未纠缠态矢量的集合。显然，它们有某种特殊之处；但从数学上看，它们只是一个逐渐包含更一般张量的层级中的第一类，这些张量的秩分别为 2、3 等。其中， v 的“秩”是指将其表示为若干简单向量之和所需的最少向量个数（在量子力学中，即 v的施密特分解中的项数）。†

3. V中简单向量构成的空间 $\mathfrak{S}$

由于它与 V_1 和 V_2呈二次关系，简单向量的集合 $\mathfrak{S}$ 通常显然不会是 V 的线性子空间，但它会由两族线性子空间构成叶状结构，我们将其记为 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$。

在证明这一点之前，我们先来处理两个不太适合纳入一般模式的平凡情形。在最平凡的情形中， V_1 和 V_2 都是一维的：$\dim(V_1) = \dim(V_2) = 1$。此时二者都是 $\mathbb{R}$的副本，$V = V_1 \otimes V_2$也同样如此。在这种情况下，每个 $v \in V$ 显然都是一个简单向量，因此 $\mathfrak{S}$ 就是整个 V。反过来，已知 $\dim(V) = 1$，并且由于我们一般地知道 $\dim V_1 \otimes V_2 = \dim\ V_1 \times \dim\ V_2$，我们立刻便知道 V_1 和 V_2 都与 V 本身同构。在重构 V_1和 V_2时，我们能做的也不过是把它们都取为 V的副本，而这就足够了。唯一的小小微妙之处出现在：从 V 转到 V_1 和 V_2之后，我们试图

⋆ G 的对应物将是 A 与 B的置换群之积

† 代数几何所称的“塞格雷簇”，并非恰好是 $\mathfrak{S}$ 本身，而是 $\mathfrak{S}$中的射线集合

将 V重构为 $V_1 \otimes V_2 = V \otimes V$，却不得不面对这样一个事实：尽管 V与 $V \otimes V$同构，但这种同构并非典范的。♭

在第二种平凡情形中，$\dim V_1 > 1$，而 $\dim\ V_2 = 1$（反之亦然）。这里，同样有 $\mathfrak{S}$ 显然就是整个 V。（根据定义，任意 $v \in V$都是形如 $a \otimes b$的项之和，其中 $a \in V_1$ 且 $b \in V_2$；但由于所有非零的 b 都彼此成比例，所有的b都可以取为相等，因此 $v = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b + \cdots = (a_1 + a_2 \cdots) \otimes b \in \mathfrak{S}$。）由此可得 $V = V_1 \otimes V_2 \simeq V_1 \otimes \mathbb{R} = V_1$（其中"$\simeq$"表示同构）。反过来，只要 $\mathfrak{S} = V$，就可以构造空间 V_1 和 V_2：取 V_1 为 V，并令 V_2 为任意一个一维向量空间，例如 V 中由 $\mathbb{R}\, b_0$给出的子空间，其中 b_0是 V中的任意一个固定向量⋆。此时，熟悉的缩放歧义对应于 b_0未确定的归一化。

注意，在这两个例子中，V_1 被视为 $\mathfrak{S}$的一个极大线性子空间。尽管在这两个例子中这一观察完全显而易见，但它将成为我们在一般情形下重构 V_1 和 V_2 的基础。为了理解 $\mathfrak{S}$ 的线性子空间，我们需要了解一些关于张量积的"显而易见"的事实，下面将按照上一节提到的定义（3）的思路回顾这些事实。

回顾一下，任意张量 $T \in V_1 \otimes V_2$ 都是简单张量之和，也就是 V_1 中的向量与 V_2中的向量的乘积之和：

$$T = \sum_j a_j \otimes b_j \tag{2}$$

然而，要完整刻画空间 $V_1 \otimes V_2$，还需要说明哪些这样的和彼此相等，或者等价地，哪些表达式 T 等于零张量。直观地说，答案是：当且仅当 $T = 0$ 可由符号 $a \otimes b$ 的组合规则以及 V_1 和 V_2中向量之间的线性相关关系推出为零时，它才等于零。这个判据隐含在前面提到的定义（4）中，但用算法来表述会更实用。

Rule 前提是（2）中的向量 a_j 线性无关，当且仅当所有 b_j 都为零。

♭ 从某种意义上说，这不过是"量纲分析"。如果 V 中的元素是"长度"，那么 $V \otimes V$ 中的元素就是长度平方。⋆ 很快就会明白为什么要这样选择。另请注意，我们当然也可以交换 V_1 和 V_2的角色。

（显然，交换 a_j 和 b_j的角色，同一规则也成立。）如上所述，该规则要求 a_j 线性无关。如果它们并非线性无关，那么其中一些可以表示为其他向量的线性组合；在应用该规则之前，应先进行这样的处理。因此，判断 $T = 0$ 的一种算法是：首先将任何冗余的 a_j 用其他向量表示；其次展开所得表达式，使T 成为形式（2）；最后按照上述规则进行判断。

作为这条规则的一个显然推论，我们知道，如果 a 和 b 都非零，那么 $a\otimes b$ 也非零。在陈述以下进一步推论时，我们将把 $a \propto b$ 理解为 $a = \lambda b$ 或 $b = \lambda a$， $\lambda \in \mathbb{R}$。

如果 α 和 β 都非零，那么 $\alpha\otimes\beta = \alpha'\otimes\beta' \Rightarrow \alpha' \propto \alpha$ 和 $\beta' \propto \beta$。

如果 α' 与 α 不成比例，它们就线性无关。于是，我们的“规则”将推出 $\alpha\otimes\beta - \alpha'\otimes\beta'$ 不可能为零。因此 $\alpha' \propto \alpha$，并且根据对称性，$\beta' \propto \beta$。

设 $\alpha \otimes \beta \in \mathfrak{S}$ 和 $\alpha' \otimes \beta' \in \mathfrak{S}$ 是非零简单向量。如果它们的和也是简单向量，那么 $\alpha' \propto \alpha$ 或 $\beta' \propto \beta$。

（用反证法）。假设 $\alpha' \not\propto \alpha$ 和 $\beta' \not\propto \beta$。于是，这四项 $\alpha\otimes\beta$、$\alpha'\otimes\beta'$、 $\alpha\otimes\beta'$、$\alpha'\otimes\beta$ （由规则的一个简单应用可知）线性无关。根据假设，对于某个 γ 和 δ，$\alpha \otimes \beta + \alpha' \otimes \beta' = \gamma\otimes\delta$。再次运用规则，并记住 α' 与 α 无关，我们得出 γ 必须是 α 和 α' 的线性组合；同理， δ 必须是 β 和 β' 的线性组合。但这样一来，$\gamma\otimes\delta$ 展开后就不可能含有所需的项 $\alpha\otimes\beta$ 和 $\alpha'\otimes\beta'$，而又不同时含有 $\alpha\otimes\beta'$ 和 $\alpha'\otimes\beta$ 中的项。

现在回到对 $\mathfrak{S}$ 的分析。回想一下，我们已经排除了 $\dim V_1 = 1$ 或 $\dim V_2 = 1$ 的可能性，因此暂且可以假设 $\dim V_1 \geq 2$ 和 $\dim V_2 \geq 2$。此时， $\mathfrak{S}$ 的典型结构便显现出来，也就是前面提到但尚未定义的两个叶状结构 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$。暂且，我们将 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 定义如下。很快，我们就会从内在角度定义它们（即仅由 V 和 $\mathfrak{S}$ 直接定义），届时 (3) 和 (4) 将不再是定义，而会成为定理。 $\mathcal{M}_1$ 的成员是 $\mathfrak{S}$ 中形如 $V_1\otimes\beta$ 的子集，其中$\beta \in V_2$； $\mathcal{M}_2$ 也同理：

$$\mathcal{M}_1 = \{V_1\otimes\beta \,|\, \beta \in V_2\} \tag{3}$$

$$\mathcal{M}_2 = \{\alpha\otimes V_2 \,|\, \alpha \in V_1\} \tag{4}$$

（当然，这里的记号表示，例如 $V_1 \otimes \beta = \{\alpha \otimes \beta \,|\, \alpha \in V_1\}$。）

我们首先要证明： M 中的每个 $\mathcal{M}_1$ 或 $\mathcal{M}_2$ 都是 $\mathfrak{S}$的极大线性子空间；其次， $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 穷尽了 $\mathfrak{S}$的极大线性子空间；第三，M、 $N \in \mathcal{M}_1$ 和 $M \neq N \Rightarrow M \cap N = \{0\}$ （ $\mathcal{M}_2$也同理）；第四，$M \in \mathcal{M}_1$、 $N \in \mathcal{M}_2 \Rightarrow$ 维数$(M \cap N) = 1$。

为什么 $\mathcal{M}_1$ 中的元素（例如）是 $\mathfrak{S}$的极大线性子空间? $M = V_1 \otimes \beta$ 是线性子空间显而易见，但它为什么是极大的呢? 任何不在 M 中的简单向量都必定具有 $\alpha' \otimes \beta'$ 的形式，其中 β' 与 β线性无关。再选取一个与 α' 线性无关的 $\alpha \in V_1$（这总是可能的，因为维数 $V_1 > 1$），并注意到$\alpha \otimes \beta \in M$。如果我们能将 $\alpha' \otimes \beta'$添入 M，那么 $\alpha' \otimes \beta' + \alpha \otimes \beta$也必须属于 M，因而是简单向量，这与上面的引理2矛盾。†

那么，为什么 $\mathfrak{S}$ 的每个极大线性子空间都必须属于 $\mathcal{M}_1$ 或 $\mathcal{M}_2$? 这是因为，设 M 是这样一个子空间，并设 $\alpha \otimes \beta \in M$。显然，单独的 $\alpha \otimes \beta$ 不是极大的（例如，它属于 $V_1 \otimes \beta$），所以设 $\alpha' \otimes \beta'$ 是 M 中一个与其他向量线性无关的元素。根据同一个引理， α 和 α' 成比例，或者 β 和 β' 成比例；不妨设是后一种情况。那么，正如我们刚才所见， M 的所有其他元素也必定具有 $\gamma \otimes \beta$ 的形式，其中 $\gamma \in V_1$；换言之， $M \subseteq V_1 \otimes \beta \in \mathcal{M}_1$，因此 $M = V_1 \otimes \beta$，因为 M 是极大的。

第三，如果 M、 $N \in \mathcal{M}_1$ 不相等，那么 $M = V_1 \otimes \beta$ 和 $N = V_1 \otimes \beta'$，且 β 与 β' 线性无关。因此，任意 $v \in M \cap N$ 都必须满足：对于某些 α 和 α'，有 $v = \alpha \otimes \beta = \alpha' \otimes \beta'$。但根据引理 1，除非 $v = 0$，否则这是不可能的。

第四，若 $M \in \mathcal{M}_1$， $N \in \mathcal{M}_2$，则对某些 $\alpha \in V_1$， $\beta \in V_2$，有 $M = V_1 \otimes \beta$, $N = \alpha \otimes V_2$。若 $v \in M \cap N$，则根据定义，对某些 $\alpha' \in V_1$， $\beta' \in V_2$，有 $v = \alpha' \otimes \beta = \alpha \otimes \beta'$。刚才引用的引理告诉我们， $\alpha' \propto \alpha$ 且 $\beta' \propto \beta$，因此 $v = \alpha' \otimes \beta \propto \alpha \otimes \beta$。换言之， $M \cap N$是 1 维子空间， $\mathbb{R}\,\alpha \otimes \beta$

我们发现的关键特征是：来自不同叶状结构的任意两个成员都在一条射线（ V 的一维子空间）上相交，而来自同一叶状结构的任意两个不同成员都互不相交。这样一来，只需了解 $\mathfrak{S} \subseteq V$，就能确定叶状结构 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$，而无需进一步追究 V 是如何作为张量积产生的：如果 M 和 N 是 $\mathfrak{S}$ 的所有极大线性子空间构成的集合 $\mathcal{M}$ 中的元素，那么当且仅当它们互不相交时，它们才属于同一叶状结构，而这一判据保证恰好

† 我们实际上所证明的内容，可以归结为如下引理： $\mathfrak{S}$ 的每个线性子空间都具有 $W \otimes \beta$ 或 $\alpha \otimes W$ 的形式，其中 W 是 V_1 或 V_2 的某个向量子空间

产生 $\mathcal{M}$ 的两个互不相交子集，我们可将它们分别标记为 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$。今后，我们将采用这一关于 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 的内在定义，并可用下面两个映射来表示：它们将 V 中的每个简单向量与其所属的 $\mathfrak{S}$ 的两个极大线性子空间相关联。

DEFINITION 令 $v \in \mathfrak{S}$。那么， $\pi_1(v)$ [分别是 $\pi_2(v)$] 中包含 v的类型为 $\mathcal{M}_1$ [（分别为 $\mathcal{M}_2$] ）的唯一极大线性子空间。

方程 (3)-(4) 因此不再是定义，而是定理；只要我们能够给出满足 $V = V_1 \otimes V_2$的向量空间 V_1 和 V_2 ，这些定理便适用。

通过这些观察，我们迈出了从 $\mathfrak{S}$恢复 V 的张量积结构的第一步。事实上，由 (3) 和 (4) 可知， $\mathcal{M}_1$ 中的每个 M_1 都是 V_1 的一个副本，而 $\mathcal{M}_2$ 中的每个 M_2 都是 V_2的一个副本。在下一节中，我们将基于对 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 的认识，完整恢复与 V_1 和 V_2相关联的射线空间，继而将 V_1 和 V_2 本身恢复到相差一个比例因子的程度。

4. 如何将 V_1 和 V_2 恢复到相差一个比例因子的程度

我们的最终目标是找到一种构造，只依赖于 V 中简单向量的集合 $\mathfrak{S}$，就能将后者分解为它的两个因子（并尽可能唯一地确定它们），然后再找出如何将 V 重建为这些因子的张量积。这将在第5节中完成，而本节的内容并非全部都会用到。因此，如果你正在读这些文字，或许可以跳过本节，直接领略最终构造的简洁之处。另一方面，本节不仅为第5节提供了许多背景知识，还将说明，当我们意识到两个空间 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 时，实际上已经从 $\mathfrak{S}$ 中恢复出了 V_1 和 V_2 的射线；在量子语境下，这意味着我们已经恢复了相应的子系统本身，或者至少恢复了它们的“纯态”。

为了理解这一事实，请回想，当 $V = V_1 \otimes V_2$ 时， M 的任意元素都可以表示为形式（4）。但子空间 $M = \alpha \otimes V_2$ 由射线 $\mathbb{R}\alpha \subseteq V_1$决定，同时也被该射线决定。因此， $\mathcal{M}_2$ 的点与 V_1的射线之间存在双射对应；同样， $\mathcal{M}_1$ 与 V_2之间也存在双射对应。引入记号 $\mathbf{P}V$，表示由任意向量空间 V的射线构成的射影空间，我们因此可以断言：

$$\mathbf{P}V_1 = \mathcal{M}_2 \qquad \text{and} \qquad \mathbf{P}V_2 = \mathcal{M}_1 \tag{5}$$

当然，事情并不止于此，因为到目前为止，我们只是将 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$作为集合引入，并未赋予它们更多结构。为了充分证实 $\mathrm{P}V_1 = \mathcal{M}_2$这一论断，我们需要将 $\mathcal{M}_2$ 表示为某个内在定义的向量空间的射线集合；这是为其赋予射影结构的一种方式。在此过程中，我们还将看到如何得到 V_1 本身，精确到比例因子。

我们先来看这个过程本身，然后再回过头来更全面地探究它为何有效。首先，任意选取一个 $M \in \mathcal{M}_1$，并令 P 为 π_2 在 M上的限制。不难看出，$P\colon\ M \to \mathcal{M}_2$ 在 M 中的射线与 $\mathcal{M}_2$中的点之间建立了一一对应。根据定义，若 $v \in M$，那么 $P(v) = \pi_2(v)$ 是 $\mathcal{M}_2$ 中包含 v 的唯一极大线性子空间；由于它是线性的，因此也包含整条射线 $\mathbb{R}\,v$。此外，P显然是满射，因为对于任意 $N \in \mathcal{M}_2$，$M \cap N$（如前所述）是 M 中的一条射线 ℓ，且经 P 映射后得到的正是其自身 N。这也证明了 P是单射（在 M的射线上），因为 M 中任何其他经 P映射到 N 的射线，根据定义都必须包含在 $M \cap N$ 中，因此与 ℓ 重合。

这个映射，$P\colon\ M \to \mathcal{M}_2$，正是我们要找的，但还需要证明，任何其他 $M' \in \mathcal{M}_1$ 都会在 $\mathcal{M}_2$上诱导出相同的射影结构。为此，只需找到一个 M 与 M' 之间与相应投影相交换的线性同构。换言之，令 P' 为 π_2在 M'上的限制，我们应当寻找一个同构 $f\colon\ M \to M'$，使得 $P = P' \circ f$。这样的 f^ 会诱导出一个同构 $f : \mathrm{P}M \to \mathrm{P}M'$；而且，与其直接构造 f，不如从内在角度刻画这一同构 ^。因而，我们先定义 f，然后再考虑如何将其提升为线性映射 f。结果表明，试探形式

$$\hat{f}(M \cap N) = M' \cap N \tag{6}$$

（其中 N 是 $\mathcal{M}_2$的任意元素）满足了所需条件。特别地，若 M'' 是 $\mathcal{M}_1$的第三个元素，那么由式 (6) 定义的同构 $M \to M' \to M''$ 显然能够一致地复合。

^ 我们剩下的任务是将刚构造出的映射 $f : \mathrm{P}M \to \mathrm{P}M'$ 提升为一个 ^ 线性函数 $f\colon\ M \to M'$。鉴于对于 $v \in M$，映射 f 已经确定了 v 应映到 M' 中的哪条射线，因此定义 $f(v)$ 唯一还需要的信息就是它的归一化。虽然这看起来只需要一点点额外信息，但我们将用来求得它的构造却出奇地复杂。事实上，就目前而言，这并非真正必要；我们只需要知道线性提升 f 存在，而这可以通过证明得出

更简单地证明。尽管如此，如果我们仍费力显式地构造 f，那是因为这样做会让我们认识一种特定类型的“简单方形”，它将在下一节中发挥重要作用。

ˆ 固定上述空间 M、$M' \in \mathcal{M}_1$，并令 ℓ_0 为 M 中任意一条射线，其中 $\ell'_0 = f(\ell_0)$ 是由式 (6) 给出的对应于 M' 中的射线。我们知道，f 会将 ℓ_0 中的任意点映射到 ℓ'_0 中的某个点。现在给定任意选取的参考向量 $v_0 \in \ell_0$，我们需要确定 ℓ'_0 中哪个向量将作为 $f(v_0)$，而事实证明，这一选择完全决定了 f。令 v'_0 为选作 $f(v_0)$ 的向量。接下来要解决的问题是，当 v 属于另一条射线 $\ell \subseteq M$ 时，如何确定 $f(v)$。也就是说，我们需要找出 $f(v)$ 在射线 $\ell' = f(\ell)$ 上的位置。

这个问题有一般情形和几种特殊情形。在一般情形下，v_0、v'_0 和 v 都线性无关。那么，考虑任意一个 $v' \in \ell'$ 以及方阵

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 & v'_0 \\ v & v' \end{pmatrix} \tag{7}$$

其元素属于射线

$$\begin{pmatrix} \ell_0 & \ell'_0 \\ \ell & \ell' \end{pmatrix} . \tag{8}$$

根据构造（参见 (6)），

$$\pi_1 a = \pi_1 c, \quad \pi_1 b = \pi_1 d, \quad \pi_2 a = \pi_2 b, \quad \pi_2 c = \pi_2 d . \tag{9}$$

因此，两个行和与两个列和都属于 $\mathfrak{S}$（也就是说，所有四个和都是 V 中的简单向量），但总和 $a+b+c+d$ 又如何呢？这个问题的答案正是我们构造 f 的关键。事实上（我们很快就会证明），这个和与射线 ℓ' 上恰好一个点 v' 相交；令 $f(v) = v'$，便可在射线 ℓ 上唯一确定 f。对 M 中其他射线进行同样的处理，我们将得到一个函数 $f : M \to M'$，它是线性的，且除一个乘法因子外唯一；按照定义，它在射线上的作用就是 f。

一般情形就介绍到这里。在转向特殊情形之前，请注意，仅凭 (9)，我们就可以将 (8) 中的射线写成

$$\begin{pmatrix} M \cap N & M' \cap N \\ M \cap N' & M' \cap N' \end{pmatrix} , \tag{10}$$

其中 $M = \pi_1 a = \pi_1 c$, $N = \pi_2 a = \pi_2 b$, $M' = \pi_1 b = \pi_1 d$, $N' = \pi_2 c = \pi_2 d$。刚才讨论的一般情形对应于数组 (10)，其中子空间 M, M', N, N' 彼此不同，因此 (7) 中的向量 a, b, c, d 线性无关。我们还需要讨论的特殊情形是 $M = M'$ 或 $N = N'$ 的情形。

首先考虑特殊情形： $N = N'$，或者等价地， $\ell = \ell_0$。此时答案显而易见，因为 $v = \lambda v_0$ ，其中某个标量为 λ，于是 $v' = f(v) = f(\lambda v_0) = \lambda f(v_0) = \lambda v'_0$。因此，式（7）中的方阵呈现如下形式，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \lambda a & \lambda b \end{pmatrix} \tag{11}$$

另一个特殊情形是 $M = M'$，或者等价地（因为我们知道， $\mathcal{M}_1$ 中的任意两个元素要么相等，要么不相交）， $\ell'_0 = \ell_0$。此时， f 只是将 M 映射到其自身；一个显而易见的解法是令 f 为恒等映射。不过，我们也可以将它取为恒等映射乘以某个标量 μ，此时方阵将呈现如下形式，

$$\begin{pmatrix} a & \mu a \\ c & \mu c \end{pmatrix} , \tag{12}$$

根据对称性，式（11）立即推出这种形式。为完整起见，我们也记录下 $M = M'$和 $N = N'$同时成立这一双重特殊情形，此时得到如下形式的方阵，

$$\begin{pmatrix} a & \mu a \\ \lambda a & \lambda \mu a \end{pmatrix} , \tag{13}$$

正如将（11）与（12）结合起来所见。所有这些特殊情形（11）–（13）都可以通过取极限从一般情形得到。将这些特殊情形与一般情形合并，我们得到以下定义。

Definition 方阵（或简单方阵）是由满足（9）的简单向量组成的矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$；在一般情形下，它们还满足 $a + b + c + d \in \mathfrak{S}$，而在特殊情形下则呈现（11）–（13）中的某一种形式。

在定义中将一般情形与特殊情形分开，是因为在一般情形下， $a+b+c+d \in \mathfrak{S}$ 就足够了，但在特殊情形下则不然。当然，在后者中它同样成立，只不过在那里是显而易见的。还值得注意的是，给定任意一个简单方阵，我们

可以将任意一行或一列乘以一个标量，而不会使其失去方阵的性质。为完整起见，我们还要回顾上文提到的内容：两个行和与两个列和也属于 $\mathfrak{S}$。

至此，我们就完整描述了定义 f 的过程。为了理解它为何奏效，让我们“揭开帷幕”，看看用 $V_1 \otimes V_2$ 中的向量表示时，我们的方阵究竟是什么。（这也应该有助于阐明本节中相当抽象的推导。）回想一下，式 (8) 中的四条射线也可以写成式 (10) 所示的相交子空间。现在，根据方程 (3) 和 (4)，$M = V_1 \otimes \beta_0$ 对某个 $\beta_0 \in V_2$ 成立，而 $N = \alpha_0 \otimes V_2$ 对某个 $\alpha_0 \in V_1$ 成立；同理，$M' = V_1 \otimes \beta$、$N' = \alpha \otimes V_2$ 分别对某个 α 和 β 成立。因此，不失一般性，我们可以将式 (7) 写成以下形式：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \otimes \beta_0 & \alpha_0 \otimes \beta \\ \\ \alpha \otimes \beta_0 & \lambda\, \alpha \otimes \beta \end{pmatrix} \tag{14}$$

其中 λ 是某个未知的比例系数。这种形式清楚地表明，行和与列和确实都是简单向量，例如 $a + b = \alpha_0 \otimes (\beta_0 + \beta)$。至于总和 $a+b+c+d$，只要 $\lambda = 1$，它就会是简单向量 $(\alpha_0 + \alpha) \otimes (\beta_0 + \beta)$。另一方面，若 $\lambda \neq 1$，同一个总和就等于 $(\alpha_0 + \alpha) \otimes (\beta_0 + \beta) + (\lambda - 1)\, \alpha \otimes \beta$；根据引理2，它只有在 α 与 α_0 成比例，或 β 与 β_0 成比例时才可能是简单向量，这意味着我们又回到了先前已经排除的某个特殊情形。

总之，考虑一个由简单向量组成的方阵，这些向量属于 (10) 中所示形式的射线，其中 M、$M' \in \mathcal{M}_1$ 和 N、$N' \in \mathcal{M}_2$，并假设我们处于一般情形，即 $M \neq M'$、$N \neq N'$。只要四个简单向量之和本身也是简单向量，任意三个向量就能唯一确定第四个。在这种情况下，这些向量必然会“暗中”呈现 (14) 的形式，其中 $\lambda = 1$：

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \otimes \beta_0 & \alpha_0 \otimes \beta \\ \\ \alpha \otimes \beta_0 & \alpha \otimes \beta \end{pmatrix} \tag{15}$$

我们的特殊情形对应于 $\alpha_0 \propto \alpha$ 和/或 $\beta_0 \propto \beta$，它们也符合模式 (15)。因此，从“幕后”观察时，(15) 表示了方阵所具有的通用形式。

^ 回到将 $f\colon \mathrm{P}M \to \mathrm{P}M'$ 提升为线性同构 $f\colon\ M \to M'$ 这一任务，我们现在可以看出，根据方程（9）构造 $f(v)$ 的确完成了这项

工作，因为它通过将 $\alpha\otimes\beta_0 \in M$ 映射到 $\alpha\otimes\beta \in M'$，从而把 $M = V_1\otimes\beta_0$ 映射到 $M' = V_1\otimes\beta$；当 α 变化时，这一对应显然是线性的。当然，f 是 f 的一个提升这一事实并不能唯一确定它，因为提升的任意倍数仍然是另一个提升。因此，我们的构造涉及对参考向量 v_0 和 v_0'的自由选择，并非偶然。然而，不同的选择至多会使 f 改变一个整体比例因子；这是因为有一个一般事实：任何两个在线性射线上诱导相同映射的线性同构，都必然相差一个比例因子。[♭] 出于同样的原因，我们不需要检查同构 f 的相容性。鉴于我们已经知道它们在 $\mathrm{P}M \to \mathrm{P}M' \to \mathrm{P}M''$ 上相容，它们在 $M \to M' \to M''$ 上也必然至多相差一个比例因子，而这正是我们所能做到的最佳结果。

仅以 V 中的简单向量集合 $\mathfrak{S}$ 作为输入，我们现已通过同构将 $\mathcal{M}_1$ 的各个成员彼此对应起来，这些同构在比例因子意义下唯一。一方面，我们利用这一点从 V-连同-$\mathfrak{S}$ 推导出一个规范给定的射影空间，它自然同构于 $\mathrm{P}V_1$（在量子解释中，即“系统 1 的纯态”空间）。另一方面，这些相同的对应关系构造出一个向量空间，它自然同构于 V_1 本身，尽管这种同构仅在缩放歧义意义下成立。显然，若将同一过程应用于 $\mathcal{M}_2$ 而非 $\mathcal{M}_1$，便会以相同的意义恢复 $\mathrm{P}V_2$ 和 V_2。现在，我们的任务是补全整个论述，将 V 重新构造为刚才构造的两个向量空间的张量积。

5. 张量积的分析与综合

我们先前的工作已经使我们开始密切关注 $\mathfrak{S} \subseteq V = V_1 \otimes V_2$ 的极大线性子空间。现在，让我们选取其中两个空间 $W_1 \in \mathcal{M}_1$ 和 $W_2 \in \mathcal{M}_2$，再选取一个向量 $w_0 \in W_1 \cap W_2$，作为它们共同的“基点”。[⋆] 于是我们得到

$$W_1 = \pi_1 w_0 \ , \qquad W_2 = \pi_2 w_0 \ .$$

[♭] 证明。称这些映射为 f 和 g，并设 x 和 y 是其定义域中的任意两个线性无关向量，且 $z = x + y$。根据假设，$g(x) = \lambda f(x)$，且 $g(y) = \mu f(y)$；我们要证明 $\mu = \lambda$。必要时，通过对 f 或 g 重新缩放，可以假设 $\lambda = 1$。然而，除非 $\mu = 1$ 也成立，否则 $f(z) = f(x) + f(y)$ 将落在与 $g(z) = f(x) + \mu f(y)$ 不同的射线上。

[⋆] 在第3节和第4节中，我们通常用字母 M 和 N 表示 $\mathfrak{S}$的极大线性子空间。这里采用记号 W_1、W_2，是为了强调它们与V_1、V_2的平行性。

我们要证明，V 可以看作这两个空间的张量积。

为此，基于第4节中引入的“方阵”概念，我们将如下引入一种新的双线性乘积，$\overline{\otimes}$：$W_1 \times W_2 \to V$。对于 $w_i \in W_i$ (i =1, 2)，我们定义 $w_1 \overline{\otimes} w_2$ 为下列方阵的解：

$$\begin{pmatrix} w_0 & w_2 \\ w_1 & w_1 \overline{\otimes} w_2 \end{pmatrix} \tag{16}$$

换言之，$w = w_1 \overline{\otimes} w_2$ 必须满足以下条件：

$$w \in \pi_2 w_1 \cap \pi_1 w_2$$

$$w_0 + w_1 + w_2 + w \in \mathfrak{S} .$$

正如我们所见，在一般情形下，这些条件唯一确定了 $w_1 \overline{\otimes} w_2$，其中$w_1 \notin W_2$ 和 $w_2 \notin W_1$。在不满足这一点的特殊情形下，仍存在缩放歧义。为补充这些情形下的 (16)，我们可以规定 $w_0 \overline{\otimes} w_0 = w_0$，更一般地，规定 $w_0 \overline{\otimes} w_2 = w_2$ 和 $w_1 \overline{\otimes} w_0 = w_1$。这些规则[†]使 $w_1 \overline{\otimes} w_2$ 唯一。例如，若 $w_1 \in W_2$，则 $w_1 \in W_1 \cap W_2$，由此得出 $w_1 = \lambda w_0$，因为 $\dim(W_1 \cap W_2)$ =1 一如既往。因此，$w_1 \overline{\otimes} w_2 = (\lambda w_0) \overline{\otimes} w_2 = \lambda w_2$，与 (11) 完全相同。

我们在上一节 [根据公式（15）]了解到，若按这种方式定义，$\overline{\otimes}$ 将是双线性的。[♭] 因此（比较第2节中张量积的定义（2）），它诱导出一个线性映射 Φ：$W_1 \otimes W_2 \to V$。事实上，Φ 是一个同构。为此，我们回到将 V 表示为 $V_1 \otimes V_2$ 的形式，并写作 $w_0 = \alpha_0 \otimes \beta_0$, $w_1 = \alpha \otimes \beta_0$, $w_2 = \alpha_0 \otimes \beta$。由比较（15）与（16）可知，$w_1 \overline{\otimes} w_2 = \alpha \otimes \beta$。首先，这意味着简单向量 $\alpha \otimes \beta \in \mathfrak{S}$ 与形如 $w_1 \overline{\otimes} w_2$ 的向量一致

[†] 我们已在上一节介绍了特殊情形的规则；此处所述的规则，只是这些规则在当前情形下的具体应用。我们在这里重述这些规则，仅仅是为了让 $\overline{\otimes}$ 的定义更加自成一体。

[♭] 如果先证明下面这个有用的引理，也可以直接从定义 (16) 推导出 $\overline{\otimes}$ 的双线性：对于固定的第二行 (c, d)，所有能与之构成方阵的首行 (a, b) 的集合，在加法和数乘下封闭；将行换成列，结论同样成立。我们已经注意到，该集合在数乘下封闭；而在加法下封闭，则可由一般的方阵形式 (15) 推导出来。行与列这两个断言合在一起，足以证明 $\overline{\otimes}$ 对两个自变量都具有线性性。

其中某个 $w_i \in W_i$ （$i = 1, 2$）。因此，我们可以通过为 W_1 选取一组基 $\{e_j \,|\, j = 1 \cdots$，其维数为 $W_1\}$，并为 W_2 选取一组类似的基 $\{f_k \,|\, k = 1 \cdots$，其维数为 $W_2\}$，再将 $e_{jk} = e_j \overline{\otimes}\, f_k$ 作为基元素，从而构造出 V 的一组基。e_{jk} 构成 V 的一组基，这一点可由以下事实得出：e_j （相应地，f_k）具有 $\alpha_j \otimes \beta_0$ （相应地，$\alpha_0 \otimes \beta_k$）的形式；由此可知，α_j （相应地，β_k）构成 V_1 （相应地，V_2）的一组基，当且仅当 e_j （相应地，f_k）构成 W_1（相应地，W_2）的一组基；此外，$e_{jk} = e_j \overline{\otimes}\, f_k = \alpha_j \otimes \beta_k$。

归根结底，V 的“特殊基”（即由向量 $\alpha_j \otimes \beta_k$组成的基），等同于 W_1 和 W_2的一对基，但要考虑到熟悉的 $GL(1)$ 歧义：我们可以将 W_1-基乘以比例因子 λ，同时将 W_2-基乘以 $1/\lambda$。现在回想一下第2节，我们对“什么构成 V 的张量积结构”给出的“第二种可能答案”是：“ V的特殊基的一个等价类 $\mathfrak{T}$ ”。因此，我们已经证明，可以从 $\mathfrak{S} \subseteq V$ 唯一地导出这种意义上的张量积结构。反过来，给定这样一种结构 $\mathfrak{T}$，我们便可直接从中得到 $\mathfrak{S}$ ：它是构成 $\mathfrak{T}$的所有特殊基成员的并集。既然$\mathfrak{S}$ 比特殊基的等价类更简单、更自然（而且对于 V而言也更内在），那么我们有理由认为，在 $\mathfrak{S}$ 中，我们已经回答了“ V 是张量积意味着什么？”这个问题。

使用“带基点向量空间”

上述构造始于任意选取的一个“基向量” $w_0 \in V$，使得$W_1 = \pi_1 w_0$ 且 $W_2 = \pi_2 w_0$。这种选择固有的歧义并不影响我们对等价关系 $\mathfrak{T} \leftrightarrow \mathfrak{S}$的证明，但这意味着，在构造过程中，$(V_1, V_2) \to V$-和-$\mathfrak{S} \to (W_1, W_2)$，若改选 w_0，就会得到不同的一对空间 W_1, W_2。如有需要，可以通过使用“带基点向量空间”来确保 W_1 和 W_2 唯一；也就是说，为 V_1 和 V_2 分别指定一个“基点”$\alpha_0 \in V_1$ 和 $\beta_0 \in V_2$，然后将 $v_0 = \alpha_0 \otimes \beta_0 \in V_1 \otimes V_2$ 取作 V的基点。这样一来，上述构造（其中 w_0 取为 v_0）便能从三元组$(V, \mathfrak{S}, v_0)$中基本唯一地恢复这两对空间(V_1, α_0)和(V_2, β_0)。

Remark 有趣的是，在量子测度理论中发挥作用的“历史希尔伯特空间” $\mathfrak{H}$ [3] 会自动带有特殊向量 $|\Omega\rangle \in \mathfrak{H}$，其中 Ω 表示完整的历史空间（相应事件代数的单位元）。然而，对于耦合子系统而言，通常并非如此：复合系统的 $\mathfrak{H}$是各子系统的 $\mathfrak{H}$的希尔伯特空间张量积。（即使向量空间维数相同，范数通常也不会相同。）

6. 范畴论事项（以及函子概念的一个缺陷）

给定一个向量空间 V，可以由此构造新的空间，例如对偶空间 V^* 或二重对偶 V^{**}。对于两个向量空间，还有其他可能的构造方式，包括它们的直和、张量积等等。尽管以这些方式构造的向量空间会与无穷多个其他向量空间同构，但其“内在构成”通常各具特色，因此在某种程度上会“记得自己的来处”。因此，可以说它具有对偶空间、直和或张量积的结构，具体取决于所采用的构造方式。对于每一种情形，我们都可以尝试具体确定这些额外信息所在之处；而对于由张量积构造而来的向量空间 V，我们的讨论指出，其中简单向量的集合 $\mathfrak{S}\ V$ 就是相关的结构。采用一种能够追踪 $\mathfrak{S}$的记号，我们可以说，向量空间的有序对（V_1，V_2）通过张量积产生有序对（V，$\mathfrak{S}$）。

那么，变换（V_1, V_2）$\rightarrow$（$V, \mathfrak{S}$）在多大程度上可逆呢？ V 能多么完整地记住它来自何处？换个说法，给定 V 和 $\mathfrak{S}$，我们能多好地重构 V_1 和 V_2？在讨论带基点空间时，我们发现（V_1, V_2）在“本质上”可以完全恢复。但在无基点情形中，似乎尽管（$V, \mathfrak{S}$）由（V_1, V_2）确定，后者却只能从前者恢复到某种 $GL(1)$歧义的程度。这表明，在带基点情形中，带有张量积结构的向量空间在某种意义上等价于它所源自的因子空间；而在无基点情形中，则只有部分等价。

然而，究竟是什么等价概念在无形中支撑着这些预期？简单同构并不适用：一方面，它的范围太窄（因为根据定义，不同类型的结构，如 (V_1, V_2) 和 $(V, \mathfrak{S})$，不可能同构）；另一方面，它的范围又太宽（因为例如，任何两个维数相同的向量空间都同构）。或许可以这样表述其中的想法：“如果 B 可以由 A 构造出来，反过来也可以，那么 A 和 B 就是等价的。”我不确定数学中是否存在真正恰如其分体现这一想法的框架，不过范畴论中的函子和自然同构概念或许最接近这一目标，因此不妨考虑一下它们如何应用于眼前的问题。我们稍后就来讨论这个问题，但首先来看一个非常简单的例子，说明 $\mathfrak{S}$ 如何记住“ V 是从何而来”。

一个小例子：拓扑记住了自旋

作为一个小例子，说明简单张量的集合 $\mathfrak{S}$ 如何编码 V 作为张量积的结构，让我们回到 $spin\text{-}3/2 \otimes spin\text{-}1$ 与 $spin\text{-}1/2 \otimes spin\text{-}5/2$ 这个例子。要区分 V 的这两种可能来源，只需关注 $\mathfrak{S}$ 的拓扑，例如它的维数。考虑到 $\mathfrak{S}$ 中的元素按定义具有 $\alpha \otimes \beta$ 的形式，且 α 和 β 在显然的 $GL(1)$ 歧义下是唯一的，我们可以观察到，$\mathfrak{S}$ 的（复）维数比因子空间维数之和少一。在我们的例子中，这意味着 $\dim(\mathfrak{S})$ 分别取值：对于 $\mathbf{3/2} \otimes \mathbf{1}$，为 $4+3-1=6$；对于 $\mathbf{1/2} \otimes \mathbf{5/2}$，为 $2+6-1=7$。事实上，很容易验证这一简单检验在一般情况下都成立。如果我们知道 V 是由两个自旋组合而成，那么 $\mathfrak{S}$ 的拓扑维数就能完全确定这两个自旋是什么。当然（正如我们现在已经详细看到的那样），也可以多花些工夫，从 $\mathfrak{S}$ 的极大线性子空间的维数，或从作为 $\mathfrak{S}$ 的“叶状结构”的 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 的维数，推导出相同的信息。

对我们这些构造的函子性诠释

现在回到范畴、函子和自然同构。范畴基本上由某种给定类型的空间（即它的“对象”）以及这些空间之间保结构的映射（即它的“态射”）组成。就我们的目的而言，最好将后者限定为同构，也就是说，要求它们可逆。两个范畴 I 和 II 之间的函子，就像一个黑箱，它将范畴 I 的对象和态射转换为范畴 II 的对象和态射，同时保留态射的复合。从概念上说，它告诉你可以用 I 类型的空间和映射构造出 II 类型的空间和映射（但遗憾的是，它没有告诉你具体该怎么做。）

我们在此关注的两个范畴可分别记为 VEC $\times$VEC 和 TVEC：前者是由 (V_1, V_2) 组成的有序对构成的范畴，后者[⋆] 则是由 $(V, \mathfrak{S}_V)$ 组成的有序对构成的范畴。因此，VEC $\times$ VEC 中的态射将是一对线性同构，而 TVEC 中的态射则是保持各自子集 $\mathfrak{S}$ 的向量空间之间的线性同构。当我们的空间带有基点时，所有这些同构当然还需要保持各自的基点。现在让我们用函子来描述一些

[⋆] TVEC 中的“T”意在让人联想到“张量”一词

构造，具体来说是 VEC $\times$ VEC 与 TVEC 之间的函子；目前我们将只关注带基点情形。

第一个值得关注的函子，我们记作 $\otimes$: VEC $\times$VEC $\to$ TVEC，是由张量积本身诱导的。它将一对向量空间 (A, B) 映射为它们的张量积 $V = A\otimes B$ ，并配备其简单向量 $\alpha\otimes\beta$ 的空间 $\mathfrak{S}_V$ ；它还将向量空间之间的一对（可逆）线性函数 (f, g) 映射为它们的张量积 $f\otimes g$。反过来，给定一个对象 $(V, \mathfrak{S}_V, v_0) \in$ TVEC（此处我已明确标出基点 v_0 ），我们看到如何在 V 中找出子空间 $W_1 = \pi_1(v_0)$ 和 $W_2 = \pi_2(v_0)$，它们是 $\mathfrak{S}_V$的某些极大线性子集。由此，我们实际上定义了第二个函子 D : TVEC $\to$ VEC $\times$ VEC，它的方向与 $\otimes$ 相反，并且满足 $D(V, \mathfrak{S}_V, v_0) = ((W_1, v_0), (W_2, v_0))$。当然，只有说明函子如何作用于态射，才算完整定义了一个函子；不过，对 D而言，这一点显而易见。TVEC 中从 $(V, \mathfrak{S}_V, v_0)$ 到 $(V', \mathfrak{S}'_V, v'_0)$ 的态射，无非是一个可逆线性函数 $f\colon V \to V'$，满足 $f[\mathfrak{S}_V] = \mathfrak{S}'_V$ 且 $f(v_0) = v'_0$。这样的 f会立即诱导出一对（保持基点的）函数 $f_1\colon W_1\to W'_1$和 $f_2\colon W_2\to W'_2$，因此 $D(f) = (f_1, f_2)$。

那么，关于 $\otimes$ 和 D 本质上互为逆的预期，又该如何看待呢？如果这一点确实成立，我们就可以写成 $\otimes \circ D = 1$ 和 $D \circ\otimes = 1$来表示，但遗憾的是，严格来说，这两个方程都不成立。先来考察复合函子 $D \circ \otimes$。将它作用于这对带基点向量空间 $((A, \alpha_0), (B, \beta_0))$ 时，会发生什么？根据定义逐步推演，我们得到 $\otimes((A, \alpha_0), (B, \beta_0)) = (A\otimes B, \mathfrak{S}_{A\otimes B}, \alpha_0\otimes\beta_0)$，接着 $D(A\otimes B, \mathfrak{S}_{A\otimes B}, \alpha_0\otimes\beta_0) = ((W_1, w_1), (W_2, w_2))$，其中$W_1 = \pi_1(\alpha_0\otimes\beta_0) = A\otimes\beta_0$, $W_2 = \pi_2(\alpha_0\otimes\beta_0) = \alpha_0\otimes B$，并且 $w_1 = w_2 = \alpha_0\otimes\beta_0$。换句话说，

$$(D \circ \otimes)((A, \alpha_0), (B, \beta_0)) = ((A\otimes\beta_0, \alpha_0\otimes\beta_0), (\alpha_0\otimes B, \alpha_0\otimes\beta_0)) \tag{17}$$

虽然 $(D\circ\otimes)((A, \alpha_0), (B, \beta_0))$ 并不与 $((A, \alpha_0), (B, \beta_0))$ 完全相同，但两者之间存在一个显然的对应，$((A, \alpha_0), (B, \beta_0)) \longleftrightarrow (D \circ \otimes)((A, \alpha_0), (B, \beta_0))$，由以下线性同构给出，

$$\alpha \longleftrightarrow \alpha \otimes \beta_0 \qquad \text{and} \qquad \beta \longleftrightarrow \alpha_0 \otimes \beta \tag{18}$$

双射 (18) 是所谓函子之间自然同构的一个实例，因此范畴论为我们提供了一种精确的表达方式，来说明 D 实际上是一个右逆

于 $\otimes$，即称 $\otimes \circ D$ 与恒等函子“自然同构”，这种关系记作

$$\otimes \circ D \cong 1 \ . \tag{19}$$

从定义显然可知，对应 (18) 建立了 VEC $\times$ VEC 中两个对象之间的同构。若从左向右读取，它是一个映射Ψ： $((A,\alpha_0),(B,\beta_0)) \ \to (D \circ \otimes)((A,\alpha_0),(B,\beta_0))$，但是什么使它获得“自然” Ψ 这一称号，从而使我们有理由在 (19) 中使用符号 $\cong$ 呢？这是因为它 Ψ 还通过将 (f_1, f_2) 转换为 $(D \circ \otimes)(f_1, f_2)$，在态射之间诱导出正确的对应。展开定义后，这一点显而易见（参见下文 (20)）；但即便不展开定义，只要想到它 Ψ 是以内在方式定义的，只利用了 (17) 中展示的结构，而无需更多，就足以让我们确信它是自然的。事实上，我认为可以公平地说，无需任何任意选择的介入，仅凭内在信息就能构造出来的这种可能性，最能表达“自然性”的直观含义。

普通同构 $\simeq$与自然同构 $\cong$ 之间的区别，在对偶向量空间的例子中或许最为人熟知：其中 V^{**} 和 V^* 都与 V同构，但只有 V^{**} 与 V之间的同构是自然的。给定一个元素 $v \in V$，可以通过方程 $v^{**}(f) = f(v)$ 定义 $v^{**} \in V^{**}$，其中 $f \in V^*$。另一方面，若没有 V的基、度量或某种类似的辅助结构，就无法从 v 确定性地得到一个元素 $f \in V^*$。

Remark 自然同构以与相似变换建立群表示之间等价的方式，大致相同地建立函子之间的等价。若 R_1 和 R_2 是群 G 的表示，并由相似变换 S关联，则 $SR_1(g)S^{-1} = R_2(g)$，或者等价地， $SR_1(g) = R_2(g)S$。现在，若我们将 R_1 和 R_2替换为函子 F_1 和 F_2，并将任意群元素 g 替换为任意态射 f，就得到可逆态射族 S 定义 F_1 与 F_2之间自然同构的条件，即 $SF_1(f) = F_2(f)S$。通常，最后这个等式会用交换图表示，

$$\begin{array}{ccc} F_1X & \overset{F_1f}{\to} & F_1Y \\ S_X \downarrow & & \downarrow S_Y \\ F_2X & \underset{F_2f}{\to} & F_2Y \end{array}$$

其中 X 和 Y 是范畴中的任意对象， $f\colon X \to Y$ 是它们之间的任意态射。当像我们的情形这样， F_1 是恒等函子时， $S\colon 1 \to F$ 的图表可简化为

$$\begin{array}{ccc} X & \overset{f}{\to} & Y \\ S\downarrow & & \downarrow S \\ FX & \underset{Ff}{\to} & FY \end{array} \tag{20}$$

由此可见，在这种情况下，函子 F 必须是态射 f 与态射 Ff 之间的双射；反过来， F 是这样的双射这一事实，在很大程度上涵盖了等式 $F \cong 1$ 的全部含义。

既然已证明 $D \circ \otimes \cong 1$，现在让我们尝试证明与之互补的等价关系 $\otimes \circ D \cong 1$。按照之前相同的步骤，将函子 $\otimes \circ D$ 应用于对象 $(V, \mathfrak{S}_V, v_0) \in \mathbf{TVEC}$，首先得到 $D(V, \mathfrak{S}_V, v_0) = ((W_1, v_0), (W_2, v_0))$，然后得到 $\otimes((W_1, v_0), (W_2, v_0)) = (W_1 \otimes W_2, \mathfrak{S}_{W_1 \otimes W_2}, v_0 \otimes v_0)$。综合起来，它们表明：

$$(\otimes \circ D)(V, \mathfrak{S}_V, v_0) = (W_1 \otimes W_2, \mathfrak{S}_{W_1 \otimes W_2}, v_0 \otimes v_0) \tag{21}$$

我们能否构造一个自然同构，将 $(W_1 \otimes W_2, \mathfrak{S}_{W_1 \otimes W_2}, v_0 \otimes v_0)$ 与 $(V, \mathfrak{S}_V, v_0)$ 等同起来，从而使 $\otimes \circ D$ to 恒等函子？对于这个问题，我们已经有了答案，即同构 $\Phi\colon W_1 \otimes W_2 \to V$。我们此前借助内在定义的积 $\overline{\otimes}$ 构造了这个同构，并且 $\Phi(w_1 \otimes w_2) = (w_1 \overline{\otimes} w_2)$。与之前的 Ψ 一样，不难验证 Φ 是自然的；考虑到它的内在性质，这也正是意料之中的。因此 $\otimes \circ D \cong 1$。

我们现在已经证明，无论以哪种顺序将 $\otimes$ 与 D 复合，其结果都与恒等函子自然同构。因此，范畴论通过引入自然同构的概念 $\cong$ 来取代严格相等，使我们能够精确表述（并进而验证）非正式的说法：在带基点情形中，函子 $\otimes$ 可逆，而 D 是它的逆。

现在转向无基点情形。我们预期，当涉及的空间没有配备基点时，将无法从 $(A \otimes B, \mathfrak{S})$ 恢复出这一对 (A, B)。我们能否也在范畴框架内证实这一预期？形式化地说，问题在于是否存在一个函子 $D\colon \mathbf{TVEC} \to \mathbf{VEC} \times \mathbf{VEC}$，它是 $\otimes$ 的“左逆”，即满足 $D \circ \otimes \cong 1$。事实上，很容易看出这样的函子不存在。假如 D 是这样的函子，那么正如我们在讨论 (20) 时所注意到的，对于范畴 $\mathbf{VEC} \times \mathbf{VEC}$ 中的态射 $f\colon (A, B) \to (A', B')$，映射 $f \mapsto (D \circ \otimes) f$ 必须是可逆的，其中 f 按定义是由两个单个态射组成的一对 (g, h)

在 VEC 中。然而，这显然不可能，因为函子 $\otimes$ （因此，若 D 存在，它与 D 的复合也如此）不是单射：它将 $f = (g, h)\tilde{}$ 和 $f = (\lambda g, h/\lambda)$ 映射到同一个态射 $g \otimes h = (\lambda g) \otimes (h/\lambda)$。换言之， $\otimes$ 对态射的作用不是单射，而是多对一；其中多个原像由一个非零标量 λ 参数化，这个标量体现了我们先前遇到的相同的 $GL(1)$ 歧义。这证实方程 $D \circ \otimes \cong 1$ 无解，并且更进一步地说明函子 $\otimes$ 不可逆。

同类但稍简单的例子，出现在尝试以几何方式表示旋量时。例如，从一个二分量韦尔旋量 ζ 出发，可以通过代数推导得到所谓的零旗 F，它由一个类光向量以及与该向量相配的半平面组成。 [4] 然而，由于向量与旋量之间存在二次关系， ζ 和 $-\zeta$ 都会导出同一个旗 F，因此只能从旗恢复旋量，但无法确定其符号。（这种信息损失不可避免，因为旋量旋转 2π 后会改变符号，而向量不会。）若要用范畴语言表述这些关系，可以引入一个旋量空间范畴、一个零旗空间范畴，以及一个从前者到后者的函子 ϕ 。与上文的 $\otimes$ 一样， ϕ 不可逆，因为它在态射上会是 $2 \to 1$ 。至多，我们或许能够构造一个充当 ϕ 右逆的“函子 manqu´e”或“差一个符号的函子”，从旗空间映到旋量空间。它的存在将表明，旋量虽不是完全意义上的几何对象，却仍然是“差一个符号的几何对象”。

Remark 尽管函子很有用，但它的概念未必能像人们预期的那样充分揭示其输入与输出之间的联系，因为它不像态射那样，能够观察其作用空间中的各个元素；按照定义，它不会“深入内部”。因此，若 ϕ 是一个函子， X 是一个空间（或映射），而 Y 是 ϕ 作用于 X 后得到的空间（或映射），那么等式 $Y = \phi(X)$ 告诉我们， Y 在某种意义上由 X 构成，但并未具体说明 Y 是如何由 X 构成的。[†] 例如， X 可以是一个旋量空间，而 ϕ 是上述函子。那么 $Y = \phi(X)$ 就是由构成 X 的旋量所导出的所有零旗组成的空间。但如果 $\zeta \in X$ 是 X 中的一个单独旋量，而 F 是由 ζ 导出的单个旗，那么函子的规则就不允许我们写出

[†] 布尔巴基的概念i’s concept [5]of “结构的演绎”能否更接近于实现这一点 ?

“$F = \phi(\zeta)$”，尽管这样写似乎很自然，而且我们完全清楚这样写所表达的意思！

7. 问题；进一步发展；与量子场论的联系

最后，我想提及一些问题，以及上述考量所引出的可能的进一步发展。

第4节和第5节所引入的构造中，最重要的几个围绕着“叶状结构” $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$、相应的映射 π_1 和 π_2、平方概念，以及根据定义（16）由此得到的乘积 $\overline{\otimes}$ 。

一个显而易见的问题是，这些独特的要素如何推广到三个或更多向量空间的张量积。人们当然可以把三重乘积（如 $A \otimes B \otimes C$ ）视为迭代的两两乘积，例如（$A \otimes B$） $\otimes C$，但应该可以构造出一种更具对称性的方式，而且或许能由此发现一些新结构，而这些结构在考察像$A \otimes B$这样的简单两两乘积时并不可见。

人们也可能会想知道，研究当两个或更多因子空间彼此相等时可能出现的各种对称类型，是否能有所收获。例如，当 $V \subseteq A \otimes A$ 是对称张量的子空间时， $\mathfrak{S}$ 的两个自然类似物（如上文所用）分别是形如 $\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha$的张量集合，或者更简单地说，形如 $\alpha \otimes \alpha$ 的张量集合。又如，对于 A与自身的反对称张量积，形如 $\alpha \wedge \beta = \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$的张量集合将是 $\mathfrak{S}$的一个自然类似物。若用这些子集之一替代 $\mathfrak{S}$，上述讨论在多大程度上、以何种形式能够重复？更一般地说，对于属于非阿贝尔对称类型（即对应于更一般杨表的那些类型）的 $A \otimes A \cdots \otimes A$等高阶乘积子空间，可能存在怎样的 $\mathfrak{S}$ 类似物？这些类型既非“玻色”也非“费米”。

另一个显然值得关注的子情形是，向量空间配备了度量，尤其是它们为希尔伯特空间的情形。这时人们或许会认为正交归一性会发挥作用，但是否还会出现其他意料之外、值得关注的特性呢?

到目前为止，我们的讨论一直是在有限维中进行的。如果我们想将其推广到无限维向量空间，就会出现一大批进一步的问题，其中有些涉及张量积本身的定义。显然， $\mathfrak{S}$ 内的简单张量 $\alpha \otimes \beta$ 子集 $V = A \otimes B$ 可以毫无困难地定义，但我们的构造

基于它是否也能像以前一样进行？它们是否仍能让我们恢复 A 和 B，并且是否仍会像第 4 节和第 6 节中那样（例如在带基点情形下）引导我们得到一个函子 D，其逆为$\otimes$？在这一切中，$\otimes$定义上的歧义可能会带来什么后果？当 A 和 B 是希尔伯特空间时，作为希尔伯特空间的 $A \otimes B$ 是明确无歧义的；但当它们仅仅是巴拿赫空间（赋范向量空间）时，已经定义出了许多不同的空间 $A \otimes B$ [2]。因此，人们可能会疑惑，$\mathfrak{S}$ 是否仍能“记住”究竟选择了哪个特定的 $\otimes$ 来构造 V。

在无限维向量空间中，希尔伯特空间对量子理论具有特殊意义。虽然当 A 和 B 是希尔伯特空间时，定义 $A \otimes B$ 的歧义并不成问题，但在量子场论中，张量积这一概念本身似乎可能会被超越。若将一个柯西曲面划分为两个互补区域，那么直观上会认为场论的整体希尔伯特空间 $\mathfrak{H}$ 应当是与这两个区域相关联的希尔伯特空间的张量积，就像普通量子力学中的复合系统一样。遗憾的是，这与这样一个事实相冲突：已知与这两个区域相关联的算子代数（严格来说，是与它们在时空中的因果依赖域相关联的算子代数）属于“III 型”，而这与两个区域之间的无限纠缠熵密切相关。每个区域仍有算子子代数（所谓的耦合因子），但这些子代数不能被解释为作用于张量积的各个独立因子上。因此，我们面对的是某种算子代数的张量积，但它并非源于底层希尔伯特空间 $\mathfrak{H}$ 的张量积分解。（采用“量子系统”的说法，我们或许可以说，我们处理的是“拥有可观测量却缺少态矢量的子系统”。）[♭]

在缺少 $\mathfrak{H}$ 的张量积结构时，简单向量这一概念无从定义，因此我们的子集 $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{H}$ 也无从定义。尽管如此，人们或许仍希望

[♭] 这与说 III 型因子缺少纯态并不完全相同。按照算子代数理论中最常见的定义，定义在 $\mathfrak{A}$ 上的纯态，是 $\mathfrak{A}$上归一化正线性泛函所构成的凸集中的极点。众所周知，这类纯态大量存在，因此可以将它们视为广义态矢量，因为在有限维情形下，态矢量 = 纯态。然而，当 $\mathfrak{A}$ 是 III 型因子时，其纯态似乎具有数学上的病态性（甚至可能“不可言说”），因此可以合理地将它们视为非物理的。参见 [6]。

简单向量的某种推广，以及 $\mathfrak{H}$ 中与之对应的某个子集，能够发挥类似作用。简单向量是秩为 1 的张量，但秩为 2、3、4 等的张量也会响应 V 的张量积结构。是否存在合适的类比空间来描述这类张量（或者更好地说，描述某种适当意义下具有有限“余秩”的张量），从而能够刻画 III 型或 II 型耦合因子的结构，并借此阐明纠缠熵的面积定律等特征？在这方面尤其值得注意的是，为了使熵有限而需要的“时空截断” [7]。从物理上说，这种截断需要与参考系无关（局部洛伦兹不变）；一个令人深思之处在于，若能定义 $\mathfrak{S}$ 的某种类比，它似乎并不必然需要参照任意选定的参考系。

作为探讨其中一些问题的初步方法，我们可以在有限维情形下追问，如何将算子代数框架与本文的框架联系起来。的确，人们或许会想到，不应将 V 的张量积结构视为 V 中由简单向量 $\mathfrak{S}$ 构成的族，而应将其视为一对彼此对易的算子子代数；这对算子子代数生成了 V 上所有线性算子构成的代数 $L(V)$，且它们的交集仅包含恒等算子的倍数（类似于 Murray-von Neumann 耦合因子，但不局限于复数或自伴性）。这种替代方法的优点是，代数 $L(A)$ 和 $L(B)$ 会完整地出现在 $L(A\otimes B)$ 中；而空间 A 和 B 本身则需要从 $A\otimes B$ 中更费力地挖掘出来，正如我们上文已详尽展示的那样。（从量子理论的角度来说，子系统的“可观测量”会延续到复合系统中，而“态”则不会。不过请参见下文的备注。）其缺点是，V 中的算子代数远比简单的子集 $\mathfrak{S}\subseteq V$ 复杂。无论如何，两种观点显然是相关的。例如，只作用于 A 的算子（即 $L(A)\otimes\mathbf{1}$ 中的算子），或只作用于 B 的算子，都会自动成为保持 $\mathfrak{S}$ 不变的算子，这提示了如何从 $\mathfrak{S}$ 推导出 $L(A)$ 和 $L(B)$。

Remark 在量子测度理论 [3], 中，与某个子系统相关联的历史希尔伯特空间确实会再次出现，成为整个系统历史希尔伯特空间的一个真正子空间。原因在于，子系统中的一个事件必然也是整个系统中的一个事件。此外，正如第5节所述，这个子空间带有一个特殊的“基点”。而且，当整体量子测度是乘积测度时（例如“处于乘积态的非相互作用子系统”），整个系统的历史希尔伯特空间就是

这些子空间的张量积，通过算子代数途径所具有的上述优势便不复存在。

最后，让我们回到有限维情形，以及其中由简单向量构成的锥 $\mathfrak{S}$；我们的工作大多建立在这个锥之上。我们已经看到，$\mathfrak{S}$ 如何赋予 V 乘积空间的结构，但我们并未给出（甚至没有要求）一个简单的判据，以便判断给定的子集 $\mathfrak{S}$ 是否确实能够发挥赋予它的作用。也就是说，我们没有给出存在同构、将 V 映射到空间 $A \otimes B$，并将 $\mathfrak{S}$ 映射到形如 $\alpha \otimes \beta$的张量集合的充要条件。一个显然可行的判据是：第5节中进行的重构应当成功，特别是构造方阵时不应遇到任何障碍。不过，人们或许希望得到更独立、更简明的判据。既然 $\mathfrak{S}$ 中的射线构成一个“塞格雷簇”，人们或许会期待代数几何文献中能找到这类结果。

或者，不为 $\mathfrak{S}$寻找公理，也可以转而为平方本身寻找公理，即为 V中的向量四元组寻找公理。于是，V 的张量积结构就是满足这些公理的一组四元组。

这项研究部分得到了加拿大自然科学与工程研究委员会通过资助项目 RGPIN-418709-2012 提供的支持。这项研究部分得到了周长理论物理研究所的支持。周界理论物理研究所的研究工作由加拿大政府通过加拿大工业部以及安大略省通过经济发展与创新部提供支持。

参考文献

[1]关于这些定义的更多细节，请参阅：

Shlomo Sternberg，《微分几何讲义》（新泽西州恩格尔伍德克利夫斯：Prentice-Hall，1964）

Tracy Y. Thomas，《张量分析与微分几何概念》（Academic Press，1961），第7页及后续页

Saunders Mac Lane，《同调》（Academic Press，1963），第 138 页及后续页

Sternberg 的第 1 章列举了大多数定义的示例，其中也隐含地给出了 $V \otimes W$作为从 $V^* \times W^*$到 $\mathbb{R}$的双线性映射空间的定义。Thomas 介绍了以分量变换律来定义张量这一历史悠久的方法。

[2] A. Grothendieck, 《拓扑张量积与核空间》，美国数学会回忆录 16：（1955）

[3]Rafael D. Sorkin, 《量子力学即量子测度理论》，现代物理快报 A 9（第 33 期）：3119-3127（1994），gr-qc/9401003,
http://www.pitp.ca/personal/rsorkin/some.papers/80.qmqmt.pdf

Fay Dowker 和 Rafael D. Sorkin, 《基于历史的量子理论中的内禀因果性原理：一项提议》（即将发表）

Fay Dowker、Steven Johnston、Sumati Surya, 《论量子测度的扩展》，J. Phys. A 43：505305（2010）arXiv:1007.2725 [gr-qc]

[4] Roger Penrose, 《时空结构》，载于《巴特尔会议：1967 年数学与物理学讲座》（Cecile M. DeWitt 和 John A. Wheeler 编）（纽约：Benjamin，1968）

[5] N. Bourbaki, 《集合论》（巴黎：Hermann，1968），第四章

[6] Bruce Blackadar（2017），《算子代数：C*-代数与冯·诺依曼代数理论》，
https://packpages.unr.edu/media/1224/cycr.pdf 参见 III.2.2.3 及 III.2.2.15 中的备注

[7] Rafael D. Sorkin, 《论视界外部的真空熵》，载于 B. Bertotti、F. de Felice 和 A. Pascolini（编），《第十届广义相对论与引力国际会议》（1983年7月4日至9日在帕多瓦举行），会议论文，第 II 卷，第 734–736 页（罗马：意大利国家研究委员会，1983），
http://www.pitp.ca/personal/rsorkin/some.papers/31.padova.entropy.pdf
http://arxiv.org/abs/1402.3589

Rafael D. Sorkin, 《黑洞热力学的统计力学》，载于 R.M. Wald（编）《黑洞与相对论恒星》（芝加哥大学出版社，1998 年），第 177–194 页，gr-qc/9705006
http://www.pitp.ca/personal/rsorkin/some.papers/92.chandra.pdf