arXiv:2303.14611v1 [math.HO] 26 Mar 2023

量子遍历定理的真实故事

Alexander Shnirelman

设 M 是一个光滑紧致黎曼流形， Δ 是作用于 M 上的拉普拉斯–贝尔特拉米算子。设 u_n 和 λ_n 分别为 Δ 的特征函数和特征值，即 $\Delta u_n + \lambda_n u_n = 0$。设 $\Omega = \{(x,\ \xi) \in T^*M,\ |\xi| = 1\}$ 为单位余向量丛，$g_t\colon T^*M \to T^*M$ 为 T^*M 上的测地流。于是 Ω 在 $\{g_t\}$ 下不变，而 $\omega = \dfrac{dx \wedge d\xi}{d|\xi|}$ 是 Ω 上在 $\{g_t\}$ 下不变的 $(2n-1)$-形式，因此定义了 g_t不变的（刘维尔）测度 μ。

定理 1 ([Shn74, Shn93, Zel87, CdV85])。 假设测地流 $\{g_t\}$关于测度 μ是遍历的。那么存在一个特征函数子序列 u_{n_k}，其密度为*1*，使得对于任意光滑函数 $\varphi \in C^\infty(M)$,

$$\lim_{k\to\infty} \int_M \varphi(x)|u_{n_k}(x)|^2\,dx = \int_M \varphi(x)\,dx.$$

在这里，我将讲述这个定理的发现历程。这个故事由若干步骤组成，其中有些并不那么显而易见。

1. 我的导师 Mark Iosifovich Vishik 是微局部分析和伪微分算子的奠基人之一。他发展了自己独创的理论版本，在某些方面（有界区域中的伪微分算子、因子分解）远远超越了标准理论。他的 Mehmat 研讨班是这一领域新概念的熔炉。难怪 Egorov 首次阐释其著名定理的地方，正是 M.I. 的研讨班；我也因此得以亲耳聆听（尽管很久以后我才意识到它的重要性）。

2. 我在数学力学系三年级时，M.I. 给我布置了第一个研究课题，即研究在一点处退化的奇异积分方程（也就是一维零阶伪微分方程）的可解性（或弗雷德霍姆性）。令我惊讶的是，我成功地找到了这个问题的一个令人满意的解答（弗雷德霍姆性条件以及恰当的函数空间）。在这个过程中，我

自行发现了函数小波分解的一种（相当初级的）形式，也就是它在相空间中的微局部化。

3. 在四年级的学生研究中，我研究了有界区域中的差分方程。运用因子分解的离散版本，我找到了凸域中边值问题的正确表述。

在五年级的研究生论文（后来成为我发表的第一篇作品）中，我发现了半空间中具有常符号的 Fredholm 卷积方程的新类别。

我的博士论文致力于研究复分析中的非线性问题所涉及的拓扑方法，与特征函数毫无关系。在接下来的 50 年里，它都没有引起共鸣，尽管其中一些思想即使在今天看来也可能颇有趣味。

4. 在研究生院期间，我偶然读到了 Babich 和 Lazutkin 的著作 [БЛ67] 以及 Lazutkin 的著作 [Лаз68]（译本见 [BL68、Laz68]）。在这些著作中，他们构造了亥姆霍兹方程的渐近解：在闭曲面上，解集中于一条闭合稳定测地线附近（图1（a））；在有界区域中，解集中于一条闭合台球轨道附近（例如图1（b）中往返运动的轨道）。值得一提的是，当时我们几乎接触不到国外期刊。一方面是因为订阅数量十分有限，另一方面是因为除俄语之外，我们的英语和其他语言水平都不高。实际上，我们只能阅读俄语期刊，以及老师给我们的少数几篇外国文章。不过，我们能够读到 Mehmat 图书馆陈列的所有俄语期刊，包括那些鲜为人知的期刊。Babich 和 Lazutkin 的著作就发表在这样一些不起眼的地方，但它们确实是瑰宝！我读完那些文章后产生的第一个结果，与 Arnold 的著名著作《模态与准模态》有关 [Arn72]。

有一次，Arnold在研讨会上讲述了他关于具有对称性的线性振荡系统的谱的新结果。他指出，例如，如果系统具有三阶对称性，那么部分特征值的重数稳定为2，其余特征值则是单重的。一般来说，不会有重数稳定为3的特征值：它们会分裂为单重和双重特征值（分别对应三阶群的不可约表示的维数）。这时，我站起身来，大胆地宣布这个说法是错的，而且我有一个反例。Arnold让我拿出反例。于是，我在黑板上画了一个等边三角形，

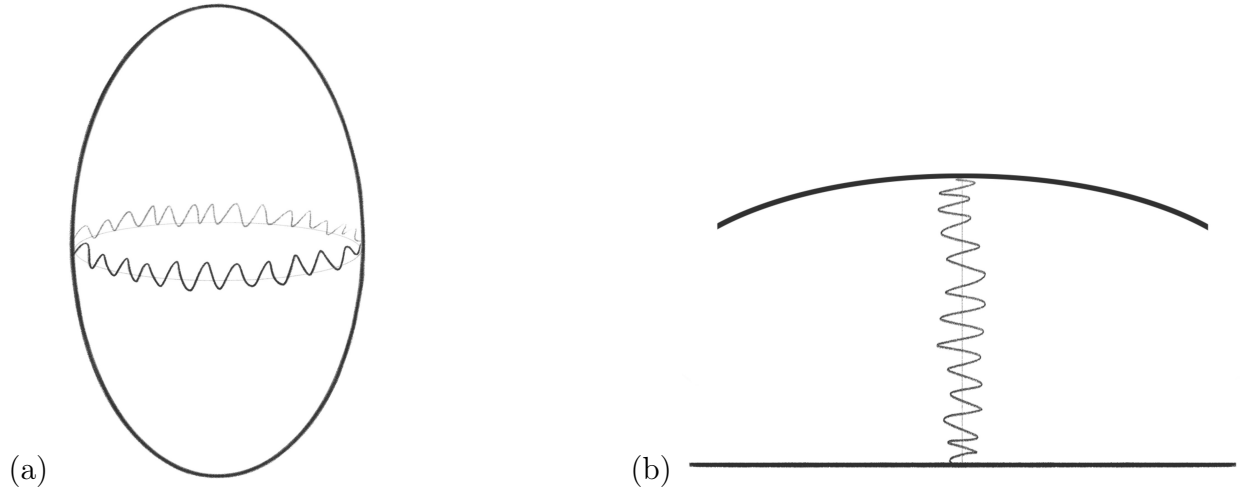


图1：（a）闭曲面上的一个特征函数，其能量集中在一条闭合（动力学稳定的）测地线附近。（b）有界区域中的一个特征函数，其能量集中在一条反弹轨道附近。

圆角，并说，根据Lazutkin的结果，这样一张（边界固定的）膜具有集中在三角形三条高线附近的“激光”特征函数（图2）。它们彼此感受不到对方，并且通过旋转120度可以相互转换。因此，这个特征值的重数稳定为3。Arnold挠了挠头，不知道该如何回答。不过，一周后我见到他时，他满面喜色地说：“我知道这里是怎么回事了！这些特征函数只是近似的！事实上，它们会稍微重叠，所以无论如何都会发生小幅（指数级的）分裂，形成单重和双重特征值。”（事实上，我把事情弄得相当混乱。Babich和Lazutkin的研究相当艰深，其中还深藏着一些算术条件，阻碍了在区域变化过程中对特征函数进行连续变形。）后来，Arnold在他那篇著名的文章《模态与准模态》中阐述了他的理论 [Arn72]。在这篇论文中，他详细讲述了这个故事。尽管如此，这个例子还是被称为“Arnold例子”，尽管他的文章中明确注明了出处。

5. 自从我第一次读到 Babich 和 Lazutkin 的著作 [BL68,Laz68],之后，我满脑子想的都是高频特征函数。在[BL68] 和 [Laz68], 中，构造的关键在于假设台球轨道是动力学稳定的。那么不稳定轨道又如何呢？我试着重现他们的构造（在第一近似下，它归结为某种试探函数，进而得到轨道横向上的量子谐振子方程）；当然，我失败了。同样的方案

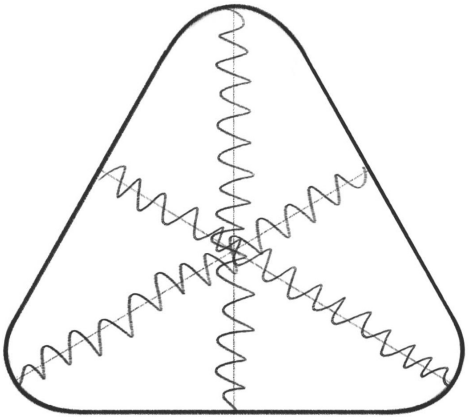


图2：具有三阶对称性的区域中的激光型特征函数；这是对阿诺德猜想的一个近似反例。

得到了描述波在势垒上散射的韦伯方程；它无法产生任何离散特征值，也无法产生相应的、集中在不稳定周期轨道附近的渐近特征函数。

6. 渐渐地，我形成了如下的一般性表述：“一般而言，高频特征函数是什么样子的？”我并不清楚“样子”这个词究竟意味着什么。这种模糊性自有其缘由。在从事微局部分析的深入研究之前，我的老师 Mark Iosifovich Vishik 曾花费数年时间，与拉扎尔·阿罗诺维奇·柳斯捷尔尼克合作研究高阶项中含有小参数的椭圆方程解的渐近行为（即所谓的“奇异摄动”） [VL57]。当然，我知道这项研究。这个问题看起来与高频特征函数问题相当相似；后者同样可以看作一个高阶项（拉普拉斯算子）中含有小参数（即特征值的倒数）的问题。区别在于小参数的符号：在边界层情形中它是负的，而在特征函数问题中它是正的。因此，一种情形下的渐近行为图景清晰而简单（一个光滑的核心和薄薄的边界层[VL57]；后来，在文采尔和弗赖德林的工作之后，内部层也被纳入这一图景 [VF70]），而另一种情形则是一场噩梦。维希克和柳斯捷尔尼克所用的（如今已成为经典的）渐近方法，对研究高频特征函数毫无帮助。

7. 对于经典可积系统，也就是说，对于黎曼流形上的测地流 M 在曲面$\Omega \subset T^*M$ 上完全可积 [Kel58、FM76]。

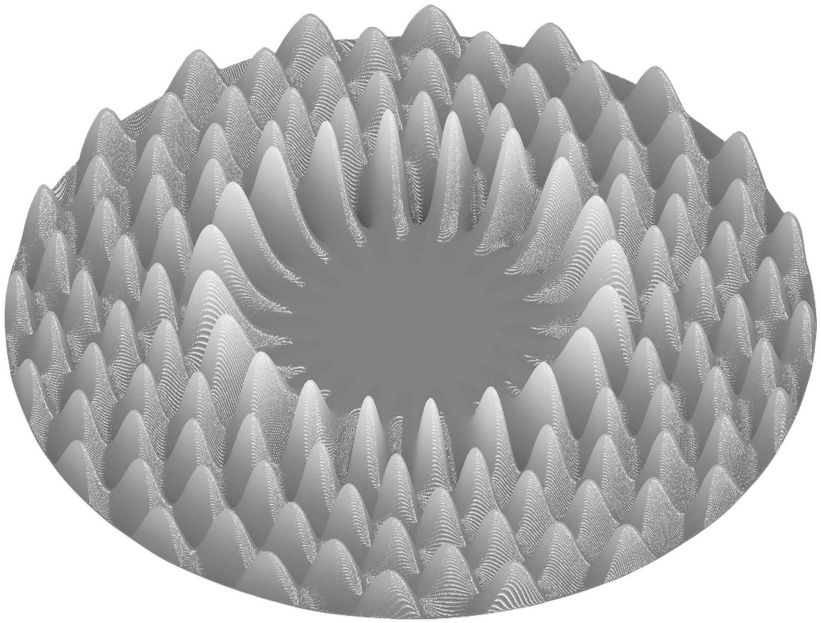


图3：单位圆盘中满足狄利克雷边界条件的高频特征函数（$J_n(j_{n,\,k}r)\sin(n\theta)$，其中 $n = 20$ 和 $k = 6$）。

一个典型例子是圆盘上的高频特征函数，其在边界上满足狄利克雷条件（图3）。后来，Lazutkin 将这一理论推广到测地流是可积测地流的小扰动的黎曼流形。《 [Laz93]》一书全面总结了这方面的研究成果。然而，这一理论并未为理解一般非可积情形下的高频特征函数提供任何线索。

8. 我决定考虑与经典可积情形相距最远的情况，例如 Lazutkin 研究的那种情形。当然，这就是常负曲率紧曲面上的拉普拉斯算子。为什么要取常曲率？因为我想，这或许能为我们研究这个问题提供一些额外的工具。在这一点上，我想对了，但同时也大错特错；毕竟，这一限制是多余的，因而也会造成误导。因此，我考虑了一个曲面，它是双曲平面上一个福克斯群 Γ 的离散变换作用下的商空间 $\mathbb{H}$: $M = \mathbb{H}/\Gamma$ (图4)。如果 u_n 是M上的一个特征函数 $\Delta u_n + \lambda_n u_n = 0$，那么它可以提升为一个 Γ-不变（或自守）特征函数 v_n，定义在 $\mathbb{H}$上: $v_n(x) = v_n(gx)\ (x \in \mathbb{H},\quad g \in \Gamma)$。

9. 我的第一个想法是，找到一种自守特征函数的表示——

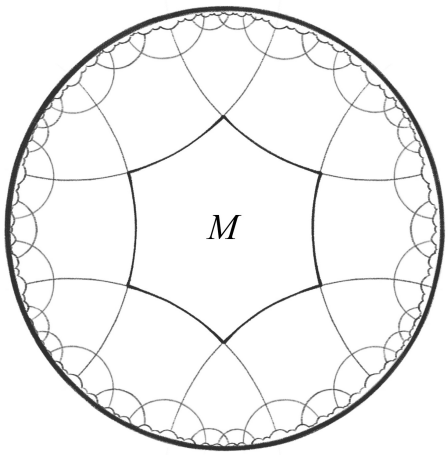


图4：曲面 M 作为离散群 Γ的一个基本域。

表示 v_n ，类似于自守形式和函数的庞加莱级数。不久我便意识到，这类表示的自然构件是“测地球面型”特征函数 $w_n(x,\ y)$，也就是说，它们的等值曲线是与绝对集 A 在一点相切的测地球面 y （图5）。若 ρ 是从某个测地球面到一个固定“零”测地球面的距离，那么 $w_n(x,\ y) = e^{(-\frac{1}{2}+ik_n)\rho}$，且$\lambda_n = k_n^2 + \frac{1}{2}$。

10. 我的第一个成果是证明：对于每个自守特征函数 $v_n(x)$，在绝对 A 上都存在一个阶不超过 1 的广义函数 $\Phi_n(y)$，使得

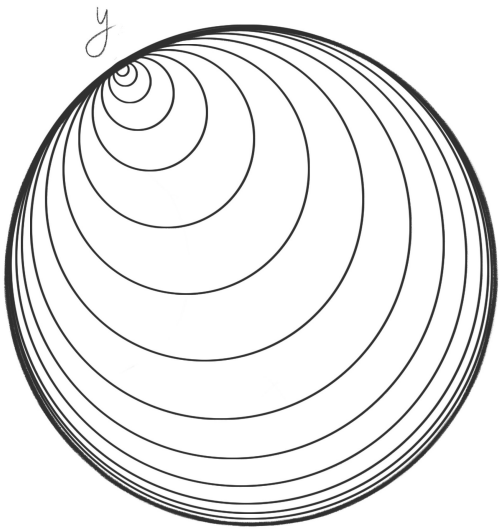
$$v_n(x) = \int_A \Phi_n(y) w_n(x,y)\, dy. \tag{1}$$

后来我了解到，这一陈述被称为“赫尔加松定理” [赫尔18], ，并且是局部对称空间上调和分析的核心事实。

11. 下一步是函数方程（或同调方程），其针对函数 $\Phi_n(x,\ y)$。也就是说，对于任意 $g \in \Gamma$,

$$\Phi_n(g(y)) = |g'(y)|^{-1/2} e^{ik_n g'(y)} \Phi_n(y). \tag{2}$$

因此，我们得到了关于单个函数 $\Phi_n(y)$的超定函数方程系统。幸运的是，我们无需关心它是否可解：我们预先知道，对于离散数列$k_n = \sqrt{\lambda_n - 1/2}$，它存在解。~~因此，~~我们可以专注于研究函数 $\Phi_n(y)$的性质。



Fig图 5：地平线特征函数 $W_n(x,\ y)$ 的等值曲线 ($x \in \mathbb{H}, y \in A$).

12. 群 Γ 在绝对 A 上的作用相当复杂；所有轨道都稠密，而且不存在不变测度。因此，将 Γ 的作用提升到余切空间 T^*A上是值得的。该作用已经保刘维尔测度 $dy \wedge d\eta$不变，但（a）对于几乎所有点（$y,\ \eta$） $\in T^*A$，它们的轨道都是稠密的；（b）相空间 T^*A 的体积是无限的。

13. 我的目标是证明，对于所有 Φ_n，或者至少几乎所有 n，函数看起来都像白噪声的典型实现。用维格纳测度 μ_n 来表达函数 Φ_n的这一性质最为合适。对于每个函数 Φ_n，我们都可以在 T^*A中定义它的维格纳测度 μ_n。这个测度描述了函数 $\Phi_n(y)$ 在相空间中的能量分布。其定义如下。对于任意具有紧支撑的光滑函数（符号） $a(y,\eta)$，令 $\hat{}a$ 为符号为 a [H¨or94a]的相应（Weyl）伪微分算子。现在考虑双线性表达式 $(\hat{}a\Phi_n, \Phi_n)$。该表达式关于符号 a呈线性，即其形式为

$$(\hat{a}\Phi_n, \Phi_n) = \int_{T^*A} U_n(y,\eta)a(y,\eta)\,dy\,d\eta.$$

事实证明，广义函数 $U_n(y,\ \eta)$ 在 $n \to \infty$ 时渐近地成为一个非负测度，我们将其记为 μ_n；这个测度称为 维格纳测度。

14. 有一种物理装置可以生成信号（即单变量函数，例如时间）的维格纳测度。它由若干个滤波器组成

这些滤波器从信号中截取狭窄的频带，每个滤波器都由其中位频率表征。如果我们将滤波器输出的平方值绘制成时间和中位频率的函数，就会得到一个为正且高度振荡的函数（有时称为久保函数）。经过一定的平滑处理后，我们便得到一个光滑的正密度，即维格纳测度的密度。有人推测，我们实际的听觉也有类似的机制：大脑将传入的声音转换为其维格纳测度，再对其进行处理以提取有意义的信息。

维格纳测度的一些实例早已为人所知：我指的是乐谱。考虑一种音乐声，比如由某种乐器演奏或由人声演唱的歌曲。相应的乐谱是一个二维区域 乐谱，具有两个坐标（时间和频率），音符则被视为点。我们在每个这样的点上赋予一个与相应音符强度成正比的质量；于是便得到乐谱 乐谱 上的一个测度，它是时频平面上真实维格纳测度 μ 的粗略近似。

15. 维格纳测度对我们所研究问题的重要性基于以下观察。量 $I = \int_M f(x)|v_n(x)|^2\,dx$ 经过一些变换后，可以转化为 $I = (B_f\Phi_n, \Phi_n)$，其中 B_f 是一个伪微分算子，其符号 $b_f(y,\eta)$ 光滑且紧支撑，并依赖于 f（我不明确写出这个符号，但它最重要的性质是 $\int_{T^*A} b_f(y,\eta)\ dy\,d\eta = \int_M f(x)\ dx$）。因此，

$$\int_M f(x)|v_n(x)|^2\,dx \sim (B_f\Phi_n, \Phi_n) \sim \int_{T^*A} b_f\,d\mu_n.$$

因此，为了证明 v_n 的渐近等分布，我们必须证明测度 μ_n 与 T^*A 上的刘维尔测度 $\Lambda = dy \wedge d\eta$ 渐近等价。

16. 随后我得以证明，测度 μ_n 的“算术平均”等于刘维尔测度 Λ。这一结果的确切含义是 $4\pi\tau \sum_n e^{-\lambda_n\tau}\mu_n \sim \Lambda$ 当 $\tau \to 0$ 时。证明采用了传统方法，即在 M 上使用热方程（Carleman 方法 [BGV04]）。我不得不承认，当时我并未掌握陶伯定理，因此没有进行下一步，只证明了 $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\mu_n \sim \Lambda$ 对于 $N \to \infty$。从我最初发表的结果中可以看出这一疏漏；后来这一缺口得以弥补 [Shn93]。

17. 关系式（2）意味着，对于任意 $g \in \Gamma$，测度 μ_n 在渐近意义下（当 $n \to \infty$时）在变换

$$(y, \eta) \mapsto F_g(y, \eta) = \big(g(y), (g'(y))^{-1}\eta + k_n g''(y)\big). \tag{3}$$

18. 随后，我证明了上文定义的变换 F_g 具有等分布性质（按 Kazhdan [Kaz65] 的意义）。为定义这一性质，将群 Γ 中的词距离 $d(g, h)$ 定义为满足条件 $g \cdot h^{-1} = \gamma_{i_1}^{\pm 1} \cdot \ldots \cdot \gamma_{i_p}^{\pm 1}$ 的词 $i_1, \ldots, i_p$ 的最短长度 p，其中 γ_i 是群 Γ 的生成元。令 $B_R = \{g \in \Gamma \mid d(g, e) \leq R\}$。若对于任意 $z_0 \in T^*A$ 以及任意两个有界区域 U、$V \subset T^*A$，变换族 $\{F_g\}, g \in \Gamma$ 具有等分布性质，

$$\lim_{R \to \infty} \frac{|\{g \in B_R | F_g(z_0) \in U\}|}{|\{g \in B_R | F_g(z_0) \in V\}|} = \frac{|U|}{|V|}. \tag{4}$$

19. 函数 Φ_n 的上述性质意味着，对于一个密度为1的序列n_k，维格纳测度 μ_{n_k} 在 T^*A 中弱收敛到刘维尔测度$\Lambda = dy \wedge d\eta$（我使用了伯克霍夫遍历定理的一个版本）。由此可推出定理 1 的结论，即密度为1的子序列 v_{n_k} 渐近等分布。这就完成了对紧曲面 $M = \mathbb{H}/\Gamma$ 上拉普拉斯算子特征函数的证明，该曲面具有常负曲率。

20. 此时我意识到，可以将函数 v_k 本身的维格纳测度定义为 T^*M 上的测度，并对其进行研究，从而略去证明中的很大一部分。维格纳测度的定义方式与上述一维定义类似。也就是说，对于任意光滑、紧支撑的函数（符号） $a(x, \xi)$ ($(x, \xi) \in T^*M$)，令 $\hat{a} = \mathrm{op}(a)$ 为符号为 a 的伪微分算子。考虑双线性表达式 $(\hat{a}v_n, v_n)$。利用 G̊arding 不等式 [Ḧor94a], ，我们证明存在一列定义在 T^*M 上、总质量为 1 的非负测度 μ_n ，使得 $(\hat{a}v_n, v_n) \sim \int_{T^*M} a \, d\mu_n$。

21. 这里我需要对 G̊arding 不等式 [Ḧor94a] 作一些说明。设 $a(x, \xi)$ 是 Ḧormander 类 $S^0_{1,0}$ 中的一个符号，即 $|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{-|\alpha|}$；设 $\hat{a}$ 是符号为 $a(x, \xi)$ 的伪微分算子。那么

G°arding 不等式（实际上是一对不等式）指出，如果符号$a(x,\xi)\in S^0_{1,0}$ 为实数且非负，那么

$$\mathrm{Re}(\hat{a}u,u) \;\geq\; -C\|u\|^2_{H^{-1/2}}, \tag{5}$$

$$|\mathrm{Im}(\hat{a}u,u)| \;\leq\; C\|u\|^2_{H^{-1/2}}, \tag{6}$$

其中，$H^{-1/2}$ 是索伯列夫空间。

这里，常数 C 对空间$S^0_{1,0}$中属于某个有界集的所有符号都是通用的。$S^0_{1,0}$ 类符号的例子包括：（a）关于 ξ 零次齐次的符号；（b）形式为 $a(x,\xi)=\alpha(x,\varepsilon\xi)$的符号，其中$\alpha\in C^\infty_0$，且当 ξ 接近0时，$a(x,\xi)=0$（这类符号对所有 $0<\varepsilon<1$而言一致地属于$S^0_{1,0}$ 中的一个有界集）。因此，我所说的 G°arding 不等式，指的是（b）类符号。

22. 存在一种自然的方法，可以在任意维数下为振荡函数恢复维格纳测度。这种方法就是我们的眼睛！如果把眼睛放在空间中的某个点上，它就会看到“天空”上的某种亮度分布，并且能看到各个方向上的某种颜色。因此，我们得到一个依赖于位置、方向和频率的测度（能量分布），也就是说，它恰好位于相空间中。对眼睛（或任何类似光学装置）的工作进行更细致的分析后会发现，事实上，眼睛在“天空”上看到的可见图像不过就是维格纳测度。例如，假设特征函数 u_n 是“准经典的”，也就是说，如果在局部

$$u_n(x)=\sum_{k=1}^{K} a_k(x)e^{i\lambda_n^{1/2}\varphi_k(x)}. \tag{7}$$

这里，相位函数 $\varphi_k(x)$ 满足方程 $|\nabla\varphi_k|\equiv 1$，振幅 $a_k(x)$ 满足输运方程 $\nabla\varphi_k\cdot\nabla|a_k|^2+\Delta\varphi_k\cdot|a_k|^2=0$。点 $(x,\ \nabla\varphi_k(x))\in T^*M$ 在局部构成拉格朗日流形 Λ_k；对于不同的k，这些流形称为拉格朗日片。放在点 x 的“眼睛”会在黑暗的“天空”中，沿着方向 $\nabla\varphi_k$，$k=1$、……、K“看见”离散的星星。

23. 某些拉格朗日片可以沿着一个称为$(n-1)$维流形焦散合并。这两个片与自然投影$\pi\colon T^*M\to M$共同构成奇点理论中一种称为折叠 的奇点。如果特征函数（7）的两个拉格朗日片，$a_k(x)e^{i\lambda_n^{1/2}\varphi_k(x)}$ 和 $a_m(x)e^{i\lambda_n^{1/2}\varphi_m(x)}$沿着焦散合并，并且“眼睛”正在移动，其轨迹穿过焦散，那么它会“看到”两颗“星星”彼此靠近，然后合并

在一起，形成一颗明亮得多的“星星”。然而，“眼睛”继续移动时，它会发现这颗“星星”几乎立刻变暗并消失。图3所示圆盘内的拉普拉斯算子的高频特征函数，正是这种情形。中心区域内，特征函数的量级为 $e^{-C\sqrt{\lambda_n}}$（阴影区域）。该区域由同心圆——焦散——围成。在这条圆上，特征函数的振幅达到最大值。在焦散与圆盘边界之间的环形区域内，特征函数呈“准经典”形式，即具有如下形式

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^{2} b_k(x)\cos(\sqrt{\lambda_n}\varphi_k(x)). \tag{8}$$

因此，如果眼睛处于“准经典”区域，它就会在黑暗的“天空”（这里的“天空”是一个圆）上看到两对星星（一对与另一对位置相反）；见图 6(a)。随着眼睛移动并接近焦散，这两对星星会合并，在天空上相对的位置形成两颗星星，它们的亮度也会大幅增强（图 6(b)）。但如果眼睛继续移动到阴影区域，星星就会逐渐暗淡，眼睛也会陷入黑暗（图 6(c)）。

24. 进一步，我们证明

1. 每个测度 μ_n 在 T^*M 附近集中于超曲面 $|\xi| = \sqrt{\lambda_n}$；2. $\sum_n \mu_n \sim dx \wedge d\xi$；3. 测度 μ_n 在测地流下渐近不变（此处我使用了双曲方程 $u_t = i\sqrt{-\Delta}u$ 和埃戈罗夫定理 [H¨or94a, H¨or94b]）；4. 若测度 μ_n 具有性质 (1)–(3)，则存在一个密度为1的子序列 μ_{n_k}，使得测度 μ_{n_k} 在能量曲面 $|\xi| = \lambda_{n_k}^{1/2}$ 上渐近等分布；证明基于伯克霍夫遍历定理。

25. 回到我们的光学解释，我们的结果意味着：如果考虑典型的高频特征函数 u_{n_k}（其中 $\{n_k\}$ 是密度为1的子序列，维格纳测度在该子序列上等分布），并将眼睛置于流形 M 上的任意一点，它看到的天空都会均匀发光；这种光芒的强度不取决于眼睛的位置

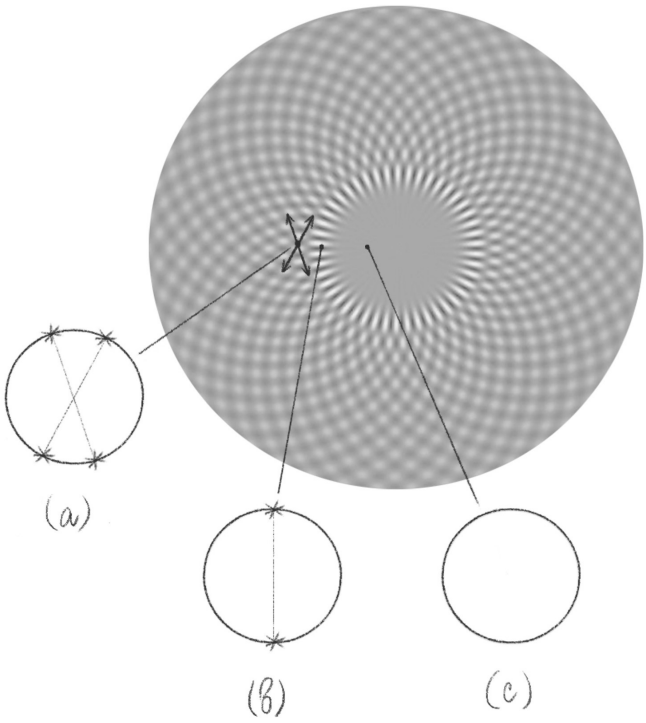


图6：从准经典区域（a）、焦散上的一点（b）以及阴影区域（c）观察天空时所见的景象。天空（a）中四颗星的方向，由波函数在区域给定点处的两个波前的法线确定（图中标出了这些方向）。在焦散上，四个方向退化为两个。

以及其视线的方向。因此，特征函数的性质与准经典情形截然相反：在准经典情形中，特征函数集中在一个 n 维拉格朗日流形上；而在遍历情形中，特征函数则均匀分布在一个有限的 $2n-1$ 维能量子流形上（这个数值可以解释为余切丛中光线空间的维数）。

26. 这一量子遍历性证明与前一个证明大不相同；前一个证明已在上文第 **9**–**19** 段中略作介绍。前一个证明中，我们利用离散群 Γ通过式（3）作用于测度 μ_n；而这里，我们利用相空间上的连续单参数辛变换群（相流）。因此，在第一个证明中，我们用到的是空间 T^*A（罗巴切夫斯基平面的绝对）的余切丛上的离散非交换辛变换群 A；而在第二个证明中，用到的是空间 T^*M（曲面）的余切丛上的连续单参数辛变换群 M。这两个证明中维格纳测度的性质也大不相同：在第一个证明中，对于函数 $\Phi_n(y)$，即使 n 很小，维格纳测度也会遍布整个相空间；而在第二个证明中，每个测度 μ_n 都集中在能量曲面 $|\xi| = \lambda_n^{1/2}$上。这些（以及其他）差异表明，这两个证明或许采用了不同的结构，而这种差异可能会带来有趣的后续成果。Rudnik 和 Sarnak [RS94]的杰出成果证实了这一观点：他们证明，在算术曲面 上，所有 特征函数都渐近等分布（这一性质称为量子唯一遍历性）。这些作者利用了算术情形中存在的一种额外结构，即海克对应的存在；它为维格纳测度提供了额外的对称性。

27. 量子遍历定理的证明一经完成，人们便立即意识到

1. 曲面的曲率 M 可以不是常数（只需要相流具有遍历性） [Zel87]；2. M 维数可以任意 [CdV85]；3. 我们可以考虑任意椭圆算子，而不仅仅是拉普拉斯算子 [CdV85]；4. 流形 M 可以有边界 [ZZ96]；

5. 我们不仅可以考虑标量函数，还可以考虑向量值函数和丛值函数，以及作用于它们的矩阵算子 [G´er91，GL93]；

6. 量子唯一遍历性研究方向上首批令人瞩目的成果初现 [Ana08]。

28. 过去已成往事。未来即将到来。

Alexander Shnirelman 康考迪亚大学，加拿大蒙特利尔
alexander.shnirelman@concordia.ca

参考文献

[БЛ67] В. М. Бабич和В. Ф. Лазуткин，《集中于闭测地线附近的本征函数》，载于М. С. Бирман（编），《数学物理问题：谱理论。衍射问题》，第2卷，第15–25页，列宁格勒国立大学，1967年。[Лаз68] В. Ф. Лазуткин，《构造“弹跳球”型本征函数的渐近级数》，《斯捷克洛夫数学研究所学报》95（1968年），第106–118页。[Ana08] N. Anantharaman，《熵与本征函数的局域化》，《数学年刊》168（2008年），第435–475页。[Arn72] V. I. Arnold，《模态与准模态》，《函数分析及其应用》6（1972年），第94–101页。[BGV04] N. Berline、E. Getzler和M. Vergne，《热核与狄拉克算子》，施普林格，2004年。[BL68] В. М. Бабич和В. Ф. Лазуткин，《集中于闭测地线附近的本征函数》，载于《谱理论与衍射问题》，第9–18页，施普林格，1968年。[CdV85] Y. Colin de Verdi`ère，《拉普拉斯算子的本征函数的遍历性》，《数学物理通讯》102（1985年），第497–502页。[FM76] M. Fedoryuk和V. Maslov，《量子力学方程的准经典近似》，科学出版社，莫斯科，1976年。[G´er91] P. G´erard，《微局部缺陷测度》，《偏微分方程通讯》16（1991年），第1761–1794页。

[GL93] P. G´erard和E. Leichtnam，《狄利克雷问题本征函数的遍历性质》，《杜克数学杂志》71（1993年），第559–607页。[Hel18] S. Helgason，《黎曼对称空间上的球函数》，载于《对称空间上的表示论与调和分析》，《当代数学》第714卷，第143–155页，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2018年。[H¨or94a] L. H¨ormander，《线性偏微分算子分析》第III卷，《数学科学基础丛书》第274卷，施普林格，1994年。[H¨or94b] L. H¨ormander，《线性偏微分算子分析》第IV卷，施普林格，柏林，1994年；1985年原版的勘误重印本。[Kaz65] D. A. Kazhdan，《平面上的均匀分布》，《莫斯科数学会学报》14（1965年），第299–305页。[Kel58] J. B. Keller，《不可分离系统的修正玻尔–索末菲量子条件》，《物理学年鉴》4（1958年），第180–188页。[Laz68] V. F. Lazutkin，《构造“弹跳球”型本征函数的渐近级数》，《斯捷克洛夫数学研究所学报》95（1968年），第125–140页。[Laz93] V. F. Lazutkin，《KAM理论与本征函数的半经典近似》。附A. I. Shnirelman补遗，第24卷，施普林格，1993年。[RS94] Z. Rudnick和P. Sarnak，《算术双曲流形本征态的行为》，《数学物理通讯》161（1994年），第195–213页。[Shn74] A. I. Shnirelman，《本征函数的遍历性质》，《数学科学进展》29（1974年），第181–182页。[Shn93] A. I. Shnirelman，《混沌运动区域内本征函数的渐近性质》，载于《KAM理论与本征函数的半经典近似》（V. F. Lazutkin专著），第24卷，第313–337页，施普林格，1993年。[VF70] A. D. Ventsel’和M. I. Freidlin，《动力系统的小随机扰动》，《数学科学进展》25（1970年），第151页。[VL57] M. I. Vishik和L. A. Lyusternik，《小参数线性微分方程的正则退化与边界层》，《数学科学进展》12（1957年），第3–122页。[Zel87] S. Zelditch，《紧双曲曲面上本征函数的均匀分布》，《杜克数学杂志》55（1987年），第919–941页。[ZZ96] S. Zelditch和M. Zworski，《遍历台球本征函数的遍历性》，《数学物理通讯》175（1996年），第673–682页。