《皇家天文学会月报》**000**，1–11 (2022)　　预印本 2023年3月28日　　使用 MNRAS LATEX 样式文件 v3.0 编译

相对论性等离子体中共振不稳定性的波能量密度和增长率

Seong-Yeop Jeong,[1★] 和 Clare Watt,[1] 英
[1] 国纽卡斯尔诺森比亚大学，*NE1 8ST*

arXiv:2303.14616v1 [physics.space-ph] 26 Mar 2023

接受日期 XXX。收到日期 YYY；原始版本日期 ZZZ

摘要
在天体物理等离子体中，波不稳定性会在缺乏频繁碰撞的情况下重新分配能量和动量。波的类型繁多，因此，量化波能量密度和增长率，对于理解不同等离子体状态下可能出现哪些波不稳定性至关重要。宇宙中许多情况下，等离子体都含有相当比例的相对论性粒子。波能量密度和增长率的理论估算仅适用于沿磁场传播角，或基于非相对论性考量。基于线性理论，我们推导出相对论性等离子体中任意传播角下任意共振波的能量密度和增长率的解析表达式。为此，我们计算了相对论性等离子体介电张量的厄米部分和反厄米部分。我们证明，在增长率解析表达式为正的波数范围内（即波不稳定性被驱动的范围内），波能量密度的解析表达式明确显示共振波的能量增加。为此，我们以损失锥驱动不稳定性为具体例子进行数值分析；在这一过程中，辐射带中的哨声模波会将相对论性电子散射进入损失锥。我们的解析结果进一步拓展了线性理论的基础，有助于更好地理解波不稳定性，并有望与准线性理论相结合，从而研究不稳定性过程中粒子动量分布函数以及共振波性质随时间的演化。

关键词： 天体粒子物理学 – 等离子体 – 不稳定性 – 波

1 引言

波不稳定性是一种物理机制，其中不稳定波与特定速度的带电粒子发生共振，并通过吸收粒子的动能而随时间增长。它在许多空间与天体物理等离子体中带电粒子的稳定化过程中发挥着关键作用。例如，波不稳定性有助于地球辐射带中相对论性电子损失锥动量分布函数（MDF）的各向同性化（Ukhorskiy & Sitnov 2014）、星系团内介质中的热流调节（Roberg-Clarket al.2016），以及中子星磁层相对论性电子-正电子等离子体中表面辐射的散射（Lyutikov & Gavriil 2006;Dosch & Zank 2016）。相对论性无碰撞激波会形成存在多种波不稳定性的等离子体环境（Nakaret al. 2011; Marcowith et al.2016）。此外，波不稳定性很可能是太阳风等离子体各向同性化的原因（Moya& Navarro2021）。因此，研究相对论性等离子体中的波不稳定性对于加深我们对整个宇宙中波粒相互作用的理解至关重要。

例如，容易到达的近地空间区域就存在相对论性等离子体环境。我们可以利用这一特定环境检验关于动理学波粒相互作用的理论观点，因为——

空间探测仪器使我们能够进行原位等离子体和波的测量。地球磁层和磁鞘中存在许多类型的动理学波不稳定性，它们由电子或离子MDF中的自由能驱动。由于电子中存在温度各向异性（Li等，2010）或大气损失锥（Kennel & Petschek，1966），哨声模波在地球磁层中常常处于不稳定状态。它们与宽能量范围内的电子相互作用，对俯仰角散射和能量化十分重要。值得注意的是，尽管我们通过对地球磁层的研究已经对哨声模波有了深入了解，但在太阳风中也发现了这类波（Tong等，2019），它们对电子束流的俯仰角散射十分重要（Vocks和Mann，2003；Vasko等，2019；Verscharen等，2019；Jeong等人 2020、2022）。

尽管根据线性理论，相对于磁层中的背景磁场平行传播的哨声模波最容易获得增长，但哨声模波在增长过程中会沿磁力线传播相当长的距离。因此，在内磁层的非均匀磁场中，哨声模波的谱包含平行和斜向传播成分（Watt等，2013；Chen等，2013）。在地球内磁层中普遍观测到斜向传播的哨声模波（Agapitov等，2013；Li等，2013；Artemyev等，2015）。哨声模波穿过磁层时发生折射，传播角随之改变——

★ 电子邮箱：kotr7724@gmail.com

© 2022 作者

（Li 等，2008），从而导致局部增长率发生变化，进而改变其局部能量密度。

这些相对论性等离子体环境遍布整个宇宙（Dorman，2020年）。因此，提升我们研究相对论性等离子体中波动不稳定性的能力至关重要；研究对象不仅应包括平行于背景磁场传播的波，也应包括相对于背景磁场斜向传播的波。

研究波不稳定性时，波能量密度和增长率随波数或频率变化的关系是重要的研究里程碑。基于弱增长率近似，等离子体色散关系可确定非相对论性等离子体中任意传播角下任意波的增长率解析表达式（Kennel 与 Wong，1967）。尽管这一增长率解析表达式必须通过纳入相对论效应加以推广，但目前尚未得到完整的解析结果（Barnes 与 Scargle，1973；Achterberg，1981；Orefice，1986）。另一种方法是假设冷等离子体占主导，相较之下，相对论性等离子体和不稳定等离子体的影响较弱，并据此计算相对论性等离子体中的波增长率（Xiao 等，1998；Summers 等，2009；Liu 与 Chen，2019）。另一方面，共振波能量密度的一般解析表达式仍不明确（Stix，1992）。目前只有通过准线性理论，才能估算不稳定性作用下平行传播的共振波能量密度随时间的演化（Lerche，1968；Yoon，2017；Shaaban 等，2021）。为更好地理解相对论性等离子体中波不稳定性的物理机制，亟需以明确形式给出共振波能量密度的解析表达式。

本文旨在基于相对论性等离子体介电张量，推导共振波能量密度和增长率的明确表达式。这些表达式适用于相对论性等离子体中任意回旋对称MDF里的所有波模及所有传播角。事实上，在增长率解析表达式为正值的特定波数范围内（即波不稳定性被驱动且共振波增长的区域），波能量密度的解析表达式必须呈现能量密度增加。我们以损失锥驱动不稳定性这一具体且易于观测的实例为例，通过数值分析证明这两个表达式的行为存在这样的关联。因此，本文提供了解析结果，进一步发展了线性理论的基础。本文还使线性理论与准线性理论得以结合，用于研究粒子MDF及其伴随的非麦克斯韦特征随时间的演化，以及通过波不稳定性产生的共振波性质。本文将对加深我们对波与等离子体观测的理解，以及对波不稳定性动理学模拟结果的认识发挥重要作用。

在第2节中，我们推导相对论等离子体中共振波的能量密度和增长率的解析表达式。在第3节中，为了证明这两个表达式之间的相关性，我们对损失锥驱动的不稳定性进行数值研究。在第4节中，我们讨论并总结研究结果。

2 推导

在本节中，我们将明确推导任意共振波在相对论性等离子体中由不稳定性产生的能量密度和增长率的解析表达式。根据坡印廷定理，与带电粒子共振的波的能量密度和增长率可表示为（Stix，1992）

$$W = \frac{1}{16\pi}\left[\mathbf{B}_k^* \cdot \mathbf{B}_k + \mathbf{E}_k^* \cdot \frac{\partial}{\partial \omega_k}\left(\omega_k \overleftrightarrow{\mathbf{K}}^h\right) \cdot \mathbf{E}_k\right], \tag{1}$$

and

$$\gamma_k = i\frac{\omega_k}{16\pi}\frac{\mathbf{E}_k^* \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{K}}^a \cdot \mathbf{E}_k}{W}, \tag{2}$$

其中

$$\overleftrightarrow{\mathbf{K}}^h = \frac{1}{2}\left(\overleftrightarrow{\mathbf{K}} + \overleftrightarrow{\mathbf{K}}^\dagger\right), \tag{3}$$

and

$$\overleftrightarrow{\mathbf{K}}^a = \frac{1}{2}\left(\overleftrightarrow{\mathbf{K}} - \overleftrightarrow{\mathbf{K}}^\dagger\right). \tag{4}$$

我们将频率记为 ω，它是波矢 k 的一个复函数，并将 ω_k 定义为其实部，将 γ_k 定义为其虚部（$\omega = \omega_k + i\gamma_k$）。在分析中，我们取局域背景磁场为 $\mathbf{B}_0 = \hat{\mathbf{e}}_z B_0$。波矢记为 $\mathbf{k} = (k_\perp, \phi_k, k_\parallel)$，其中 $k_x = k_\perp \cos\phi_k$、$k_y = k_\perp \sin\phi_k$，且 $k_z = k_\parallel$。等离子体中的一阶扰动电磁场记为 $\mathbf{E}_k(\omega, \mathbf{k}) = \hat{\mathbf{e}}_x E_k^x + \hat{\mathbf{e}}_y E_k^y + \hat{\mathbf{e}}_z E_k^z$ 和 $\mathbf{B}_k(\omega, \mathbf{k}) = \hat{\mathbf{e}}_x B_k^x + \hat{\mathbf{e}}_y B_k^y + \hat{\mathbf{e}}_z B_k^z$，它们经过了时空傅里叶变换。我们将介电张量记为

$$\overleftrightarrow{\mathbf{K}} \equiv \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

以及 $\overleftrightarrow{\mathbf{K}}h$ 和 $\overleftrightarrow{\mathbf{K}}^a$ 分别是$\overleftrightarrow{\mathbf{K}}$的厄米部分和反厄米部分。上标 $*$ 和 † 分别表示共轭和共轭转置。根据厄米部分和反厄米部分的定义，式（3）和（4）证明了 $\overleftrightarrow{\mathbf{K}}h = (\overleftrightarrow{\mathbf{K}}h)^\dagger$ 以及 $\overleftrightarrow{\mathbf{K}}^a = -(\overleftrightarrow{\mathbf{K}}^a)^\dagger$。请注意，介电张量 $\overleftrightarrow{\mathbf{K}}$ 基于等离子体在空间中均匀这一假设。

2.1 相对论性等离子体中的介电张量

我们从分析 $\overleftrightarrow{\mathbf{K}}$ 相对论性等离子体中的介电张量入手。许多等离子体物理学教科书都阐述了 $\overleftrightarrow{\mathbf{K}}$ 的推导，例如 Stix (1992) 和 Gurnett& Bhattacharjee(2017年)；随后，相对论性等离子体中的介电张量为

$$\overleftrightarrow{\mathbf{K}} = \overleftrightarrow{\mathbf{1}} - \frac{\pi}{2}\sum_{j,n}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty dp_\parallel dp_\perp \frac{\omega_{pj}^2 p_\perp^2 \overleftrightarrow{\mathbf{S}} f_j}{\left[p_\parallel - \frac{m_j(\omega - n\Omega_j)}{k_\parallel}\right]\omega^2}, \tag{6}$$

其中

$$\overleftrightarrow{\mathbf{S}} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}\hat{G} & \epsilon_{xy}\hat{G} & \epsilon_{xz}\hat{H} \\ \epsilon_{yx}\hat{G} & \epsilon_{yy}\hat{G} & \epsilon_{yz}\hat{H} \\ \epsilon_{zx}\hat{G} & \epsilon_{zy}\hat{G} & \epsilon_{zz}\hat{H} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$\epsilon_{xx} = \left(J_{n+1}e^{-i\phi_k} + J_{n-1}e^{i\phi_k}\right)\left(J_{n+1}e^{i\phi_k} + J_{n-1}e^{-i\phi_k}\right), \tag{8}$$

$$\epsilon_{xy} = -i\left(J_{n+1}e^{-i\phi_k} + J_{n-1}e^{i\phi_k}\right)\left(J_{n+1}e^{i\phi_k} - J_{n-1}e^{-i\phi_k}\right), \tag{9}$$

$$\epsilon_{xz} = 2\frac{p_\parallel}{p_\perp}J_n\left(J_{n+1}e^{-i\phi_k} + J_{n-1}e^{i\phi_k}\right), \tag{10}$$

$$\epsilon_{yx} = i\left(J_{n+1}e^{-i\phi_k} - J_{n-1}e^{i\phi_k}\right)\left(J_{n+1}e^{i\phi_k} + J_{n-1}e^{-i\phi_k}\right), \tag{11}$$

$$\epsilon_{yy} = \left(J_{n+1}e^{-i\phi_k} - J_{n-1}e^{i\phi_k}\right)\left(J_{n+1}e^{i\phi_k} - J_{n-1}e^{-i\phi_k}\right), \tag{12}$$

$$\epsilon_{yz} = 2i\frac{p_\parallel}{p_\perp}J_n\left(J_{n+1}e^{-i\phi_k} - J_{n-1}e^{i\phi_k}\right), \tag{13}$$

$$\epsilon_{zx} = 2\frac{p_\parallel}{p_\perp}J_n\left(J_{n+1}e^{i\phi_k} + J_{n-1}e^{-i\phi_k}\right), \tag{14}$$

$$\epsilon_{zy} = -2i\frac{p_\parallel}{p_\perp}J_n\left(J_{n+1}e^{i\phi_k} - J_{n-1}e^{-i\phi_k}\right), \tag{15}$$

$$\epsilon_{zz} = 4\frac{p_\parallel^2}{p_\perp^2}J_n^2, \tag{16}$$

$$\hat{G} \equiv \left(\frac{m_j\omega}{k_\parallel} - p_\parallel\right)\frac{\partial}{\partial p_\perp} + p_\perp\frac{\partial}{\partial p_\parallel}, \tag{17}$$

$$\hat{H} \equiv \frac{m_j n\Omega_j}{k_\parallel}\frac{\partial}{\partial p_\perp} + \left(\frac{m_j\omega}{k_\parallel} - \frac{m_j n\Omega_j}{k_\parallel}\right)\frac{p_\perp}{p_\parallel}\frac{\partial}{\partial p_\parallel}, \tag{18}$$

且 $\overleftrightarrow{\mathbf{1}}$是单位张量。下标 j 表示粒子种类。我们将相对于 B0 的垂直和平行相对论动量坐标分别记为 $p_\perp = m_j v_\perp$和 $p_\parallel = m_j v_\parallel$，其中$m_j = \gamma m_{0j}$，$m_{0j}$是粒子种类 j 的静止质量，$v_\perp$和 $v_\parallel$ 是垂直和平行速度坐标，且$\gamma = \sqrt{1+(p_\parallel^2 + p_\perp^2)/m_{0j}^2c^2}$。种类 j 的归一化回旋对称粒子MDF记为 $f_j \equiv f_j(p_\perp, p_\parallel)$，因此 $\int d^3\mathrm{p}\, f_j = 1$。注意，由于 f_j 是回旋对称的，我们可以自由选择方程 (8) 至 (15) 中 ϕ_k 的值。

整数 n 决定共振的阶数，其中 $n = 0$对应朗道共振，而 $n \neq 0$ 对应回旋共振。种类 j 的等离子体频率定义为 $\omega_{pj}^2 = \omega_{0pj}^2/\gamma = 4\pi n_j q_j^2/m_j$，其中 q_j和 n_j分别是粒子种类 j的电荷和密度。我们将 n^th 阶贝塞尔函数表示为 $J_n = J_n(\rho_j)$，其中 $\rho_j \equiv k_\perp v_\perp/\Omega_j$。种类 j的回旋频率定义为 $\Omega_j = \Omega_{0j}/\gamma = q_j B_0/m_j c$，其中 c为光速。本文中，我们表示为 $\sum_j \sum_n \equiv \sum_{j,\ n}$。

齐次波动方程可表示为

$$\begin{bmatrix} K_{xx} - \frac{c^2(k_y^2+k_z^2)}{\omega^2} & K_{xy} + \frac{c^2k_xk_y}{\omega^2} & K_{xz} + \frac{c^2k_xk_z}{\omega^2} \\ K_{yx} + \frac{c^2k_yk_x}{\omega^2} & K_{yy} - \frac{c^2(k_x^2+k_z^2)}{\omega^2} & K_{yz} + \frac{c^2k_yk_z}{\omega^2} \\ K_{zx} + \frac{c^2k_zk_x}{\omega^2} & K_{zy} + \frac{c^2k_zk_y}{\omega^2} & K_{zz} - \frac{c^2(k_x^2+k_y^2)}{\omega^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_k^x \\ E_k^y \\ E_k^z \end{bmatrix} = 0. \tag{19}$$

方程（19）存在非平凡解的条件是，方程（ 3 × 3 19）中的矩阵行列式必须为零。该行列式对应于等离子体色散关系。注意，如果采用冷粒子MDF，并在等离子体静止系中将其表示为19，则方程（

$$f_j^C = \frac{1}{2\pi p_\perp}\delta(p_\perp)\delta(p_\parallel). \tag{20}$$

我们将狄拉克的 δ 函数记为 δ。上标 C 表示冷粒子群。

2.2 介电张量的厄米部分与反厄米部分

为计算厄米部分 $\overleftrightarrow{\mathbf{K}}\,^h$和反厄米部分 $\overleftrightarrow{\mathbf{K}}\,^a$，我们求出方程（1）和（2）中出现的实部和虚部

介电张量方程（6）的实部和虚部，基于弱增长率近似（即 $|\gamma_k| \ll |\omega_k|$）。[1] 为此，我们对方程（$p_\parallel$6）中存在奇点问题的积分应用索霍茨基-普莱梅利关系。然而，方程（$p_\parallel$6）中的奇点代表共振平行动量，但由于依赖于 γ 和$p_\parallel$，尚未以显式形式表示。因此，我们将方程（6）的被积函数重排为

$$\begin{aligned} &\frac{\omega_{pj}^2 p_\perp^2 \overleftrightarrow{\mathbf{S}} f_j}{\left[p_\parallel - \frac{m_j(\omega - n\Omega_j)}{k_\parallel}\right]\omega^2} \\ &= \frac{\omega_{pj}^2 p_\perp^2 \overleftrightarrow{\mathbf{S}} f_j \left[p_\parallel + \frac{m_j(\omega+n\Omega_j)}{k_\parallel}\right]}{\left[p_\parallel - \frac{m_j(\omega-n\Omega_j)}{k_\parallel}\right]\left[p_\parallel + \frac{m_j(\omega+n\Omega_j)}{k_\parallel}\right]\omega^2}. \end{aligned} \tag{21}$$

我们定义沿$\mathbf{B}0$ 平行方向的折射率为

$$\eta_\parallel = \frac{ck_\parallel}{\omega}, \tag{22}$$

并且，本文仅考虑满足以下条件的波模:

$$\eta_\parallel^2 > 1. \tag{23}$$

那么，$p_\parallel$方程（21）右侧的奇点为

$$p_{\parallel res}^\pm = -\frac{m_{0j}n\Omega_{0j}}{k_\parallel} + \gamma_{res}^\pm\frac{m_{0j}\omega}{k_\parallel}, \tag{24}$$

其中

$$\gamma_{res}^\pm = -\frac{n\Omega_{0j}}{\left(\eta_\parallel^2 - 1\right)\omega} \pm \eta_\parallel\sqrt{\frac{1}{\eta_\parallel^2 - 1}\left(1 + \frac{p_\perp^2}{c^2m_{0j}^2}\right) + \frac{n^2\Omega_{0j}^2}{\left(\eta_\parallel^2 - 1\right)^2\omega^2}}. \tag{25}$$

对式（24）结合式（25进行仔细分析，可验证

$$\gamma(p_{\parallel res}^\pm) = \pm\gamma_{res}^\pm, \tag{26}$$

and

$$p_{\parallel res}^\pm + \frac{m_{0j}n\Omega_{0j}}{k_\parallel} \mp \gamma(p_{\parallel res}^\pm)\frac{m_{0j}\omega}{k_\parallel} = 0. \tag{27}$$

基于 $|\gamma_k| \ll |\omega_k|$的假设，$p_\parallel$积分中的索霍茨基-普莱梅利关系因此将式（6）近似为

$$\begin{aligned} \overleftrightarrow{\mathbf{K}} \approx\ &\overleftrightarrow{\mathbf{1}} - \frac{\pi}{2}\sum_{j,n}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty dp_\parallel dp_\perp \frac{\omega_{pj}^2 p_\perp^2 \overleftrightarrow{\mathbf{S}} f_j}{\left(p_\parallel - p_{\parallel res}^+\right)\omega_k^2\Lambda_\alpha} \\ &- i\frac{k_\parallel}{|k_\parallel|}\frac{\pi^2}{2}\sum_{j,n}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty dp_\parallel dp_\perp \frac{\omega_{pj}^2 p_\perp^2 \overleftrightarrow{\mathbf{S}} f_j}{\omega_k^2\Lambda_\beta}\delta\left(p_\parallel - p_{\parallel res}^+\right), \end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$\Lambda_\alpha = \left(1 - \frac{1}{\eta_\parallel^2}\right)\frac{k_\parallel\left(p_\parallel - p_{\parallel res}^-\right)}{k_\parallel p_\parallel + m_j\left(\omega_k + n\Omega_j\right)}, \tag{29}$$

and

$$\Lambda_\beta = 1 - \frac{p_\parallel}{\gamma m_{0j}c\eta_\parallel}. \tag{30}$$

[1] Vocks, C. 和 Mann, G. (2006年) 讨论了介电张量实部和虚部的详细内容。

在方程（28）右端的第二项中，带横线的积分表示柯西主值积分，定义如下：

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel} \equiv \lim_{\tau\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{p^{+}_{\parallel res}-\tau} dp_{\parallel} + \int\limits_{p^{+}_{\parallel res}+\tau}^{\infty} dp_{\parallel} \right). \tag{31}$$

注意，应用索霍茨基-普莱梅利关系后，在以下所有方程中，ω 变为ω_k。将方程（28）应用于方程（3）和（4），我们得到厄米部分 $\overleftrightarrow{\mathbf{K}}h$ 和反厄米部分$\overleftrightarrow{\mathbf{K}}^{a}$，其表达式为

$$\overleftrightarrow{\mathbf{K}}^{h} = \overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \frac{\pi}{2}\sum_{j,n}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel}dp_{\perp}\frac{\omega_{pj}^{2}p_{\perp}^{2}\overleftrightarrow{\mathbf{T}}f_{j}}{\left(p_{\parallel}-p^{+}_{\parallel res}\right)\omega_{k}^{2}\Lambda_{\alpha}}, \tag{32}$$

and

$$\overleftrightarrow{\mathbf{K}}^{a} = -i\frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|}\frac{\pi^{2}}{2}\sum_{j,n}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel}dp_{\perp} \times \frac{\omega_{pj}^{2}p_{\perp}^{2}\overleftrightarrow{\mathbf{S}}f_{j}}{\omega_{k}^{2}\Lambda_{\beta}}\delta\left(p_{\parallel}-p^{+}_{\parallel res}\right), \tag{33}$$

其中

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_{xx}\hat{G} & \epsilon_{xy}\hat{G} & \epsilon_{xz}\frac{\hat{H}+\hat{G}}{2} \\ \epsilon_{yx}\hat{G} & \epsilon_{yy}\hat{G} & \epsilon_{yz}\frac{\hat{H}+\hat{G}}{2} \\ \epsilon_{zx}\frac{\hat{H}+\hat{G}}{2} & \epsilon_{zy}\frac{\hat{H}+\hat{G}}{2} & \epsilon_{zz}\hat{H} \end{bmatrix}. \tag{34}$$

注意，在 $p_{\parallel} = p^{+}_{\parallel res}$处，$\hat{}G \equiv \hat{}H$。

2.3 共振波的能量密度和增长率

我们利用方程（1）和方程（32）计算共振波的能量密度。在计算方程（1）的第二项时，我们得到

$$\frac{\partial}{\partial\omega_{k}}\left(\omega_{k}\overleftrightarrow{\mathbf{K}}^{h}\right) = \overleftrightarrow{\mathbf{I}} - \frac{\pi}{2}\sum_{j,n}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel}dp_{\perp}\frac{\omega_{0pj}^{2}p_{\perp}^{2}}{p_{\parallel}-p^{+}_{\parallel res}} \times\left[\left(\frac{\overleftrightarrow{\mathbf{U}}-\overleftrightarrow{\mathbf{U}}_{res}}{p_{\parallel}-p^{+}_{\parallel res}}\right)\frac{\partial p^{+}_{\parallel res}}{\partial\omega_{k}}+\frac{\partial\overleftrightarrow{\mathbf{U}}}{\partial\omega_{k}}\right], \tag{35}$$

其中 $\overleftrightarrow{\mathbf{U}} = \overleftrightarrow{\mathbf{T}}f_{j}/(\omega_{k}\gamma\Lambda_{\alpha})$且 $\overleftrightarrow{\mathbf{U}}_{res} \equiv \overleftrightarrow{\mathbf{U}}\big|_{p_{\parallel}=p^{+}_{\parallel res}}$。式（35）是根据式（31）给出的柯西主值积分定义、莱布尼茨积分法则以及以下关系推导得到的

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel}\frac{1}{\left(p_{\parallel}-p^{+}_{\parallel res}\right)^{2}} = \lim_{\tau\to 0}\frac{2}{\tau}. \tag{36}$$

然后，利用式（35），式（1）可表示为

$$W = W_{\text{Field}} + W_{\text{Particle}}. \tag{37}$$

式（37）的第一项是波场的纯能量密度，表示为

$$W_{\text{Field}} = \frac{1}{16\pi}\left(|\mathbf{B}_{k}|^{2}+|\mathbf{E}_{k}|^{2}\right). \tag{38}$$

方程（37）的第二项是波场的能量密度，它通过朗道共振和回旋共振与粒子的动能相关，表示为

$$W_{\text{Particle}} = \sum_{j,n}W_{j}^{n}, \tag{39}$$

其中

$$W_{j}^{n} = -\frac{1}{16}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel}dp_{\perp}\frac{\omega_{0pj}^{2}p_{\perp}^{2}}{p_{\parallel}-p^{+}_{\parallel res}} \times\left\{\frac{\hat{\Pi}f_{j}-(\hat{\Pi}f_{j})_{res}}{\left(p_{\parallel}-p^{+}_{\parallel res}\right)\omega_{k}}\frac{\partial p^{+}_{\parallel res}}{\partial\omega_{k}}+\frac{\partial}{\partial\omega_{k}}\left(\frac{\hat{\Pi}f_{j}}{\omega_{k}}\right)-\frac{\hat{\Pi}_{\partial}f_{j}}{\omega_{k}^{2}}\right\}, \tag{40}$$

$$\hat{\Pi} \equiv \frac{|\Psi|^{2}}{\gamma\Lambda_{\alpha}}\hat{G}+\frac{2Re\left[\Psi(\Psi^{z})^{*}\right]}{\gamma\Lambda_{\alpha}}\left(\hat{H}-\hat{G}\right), \tag{41}$$

$$\Psi \equiv E_{k}^{R}e^{i\phi_{k}}J_{n+1}+E_{k}^{L}e^{-i\phi_{k}}J_{n-1}+2\Psi^{z}, \tag{42}$$

$$\Psi^{z} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}}E_{k}^{z}J_{n}, \tag{43}$$

$$\hat{\Pi}_{\partial} \equiv \frac{2Re\left[\Psi(\Psi_{\partial})^{*}\right]}{\gamma\Lambda_{\alpha}}\hat{G}+\frac{2Re\left[\Psi(\Psi_{\partial}^{z})^{*}+\Psi_{\partial}(\Psi^{z})^{*}\right]}{\gamma\Lambda_{\alpha}}\left(\hat{H}-\hat{G}\right), \tag{44}$$

$$\Psi_{\partial} \equiv \omega_{k}\frac{\partial E_{k}^{R}}{\partial\omega_{k}}e^{i\phi_{k}}J_{n+1}+\omega_{k}\frac{\partial E_{k}^{L}}{\partial\omega_{k}}e^{-i\phi_{k}}J_{n-1}+2\Psi_{\partial}^{z}, \tag{45}$$

$$\Psi_{\partial}^{z} \equiv \frac{\omega_{k}}{\sqrt{2}}\frac{p_{\parallel}}{p_{\perp}}\frac{\partial E_{k}^{z}}{\partial\omega_{k}}J_{n}, \tag{46}$$

以及 $(\hat{}\Pi f_{j})_{res} \equiv \hat{}\Pi f_{j}\big|_{p_{\parallel}=p^{+}_{\parallel res}}$。Re 表示复函数的实部。我们将电场的右旋和左旋圆偏振分量分别记为 $\mathrm{E}_{k}^{R} \equiv (\mathrm{E}_{k}^{x}-i\mathrm{E}_{k}^{y})/\sqrt{2}$ 和 $\mathrm{E}_{k}^{L} \equiv (\mathrm{E}_{k}^{x}+i\mathrm{E}_{k}^{y})/\sqrt{2}$。电场的纵向分量为 E_{k}^{z}。注意，若等离子体是冷的（即，若 $f_{j} = n_{j}^{C}f_{j}^{C}$其中$n_{j}^{C}$是种类 j 的冷粒子群相对于总粒子数的密度），式（39）可化简为

$$W_{\text{Particle}}^{C} = \frac{1}{16\pi}\sum_{j}\bar{n}_{j}^{C}\omega_{0pj}^{2} \times\left\{\frac{|E_{k}^{L}|^{2}}{\left(\omega_{k}-\Omega_{0j}\right)^{2}}+\frac{|E_{k}^{R}|^{2}}{\left(\omega_{k}+\Omega_{0j}\right)^{2}}+\frac{|E_{k}^{z}|^{2}}{\omega_{k}^{2}}\right\}. \tag{47}$$

最后，将式（33）代入式（2），即可将相对论等离子体中共振波的增长率表示为

$$\gamma_{k} = \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|}\sum_{j,n}\gamma_{k,j}^{n}, \tag{48}$$

其中

$$\gamma_{k,j}^{n} = \frac{\pi}{16W}\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dp_{\parallel}dp_{\perp}\frac{\omega_{pj}^{2}p_{\perp}^{2}|\Psi|^{2}\hat{G}f_{j}}{\omega_{k}\Lambda_{\beta}}\delta\left(p_{\parallel}-p^{+}_{\parallel res}\right). \tag{49}$$

对于波模 $\eta_{\parallel}^{2} > 1$的共振，令 $c\to\infty$，则式（39）和（48）可达到非相对论极限。如此一来，式（48）便化为 Kennel 和 Wong (1967) 给出的增长率。请注意，式（39）和（48）的推导仅基于一个近似，即 $|\gamma_{k}| \ll |\omega_{k}|$。

3 波能量密度与增长率之间的相关性

我们证明，描述粒子通过共振传递其动能所对应的波能量密度的方程（39）与波增长率方程（48）在波数范围内相关。在不稳定性的作用下，不稳定波会散射粒子并吸收其动能。这意味着，在特定共振使方程（48）变为正值的特定波数范围内，方程（39）必须显示出经由相同共振产生的明确能量密度增加。为证明这一点，我们对一种存在于近地球辐射带高能环境中的不稳定性进行了数值分析。我们选择损失锥驱动不稳定性，因为有大量原位数据可用，而且这种不稳定性是通过相对于$\mathbf{B}_0$在相对论性等离子体中平行和斜向传播的波产生的（Kennel和Petschek，1966年）。

在本文中，我们将 n 共振定义为方程（39）和（48）求和中仅包含整数 n的贡献。我们仅考虑 $n = +1$、-1和0 共振，并忽略更高阶n 共振，因为它们的贡献可以忽略不计。更全面的研究需要借助相对论性等离子体中的准线性理论，进一步分析损失锥驱动不稳定性导致的动量空间中相对论电子的时间演化（Jeong 等，2020）。然而，这超出了本文的研究范围。本文仅着重展示方程（39）和（48）之间的相关性，因为二者具有相同的结构。

3.1 损失锥驱动不稳定性的背景等离子体

地球内磁层中存在一种相对冷且密集的（~ 1 eV）电子群体，其来源为地球电离层；此外还有较为稀少但同样重要的高能电子群体（> 1keV），它们来自磁尾等离子体片，并在外辐射带中经受波-粒子相互作用的进一步作用（Borovsky & Valdivia 2018）。研究人员对地球同步轨道上的这些高能电子群体进行了统计研究（Denton 等，2010），结果表明通常存在两种高能电子群体：一种较热，数密度为 $\sim 5\times10^{-4}\ \mathrm{cm}^{-3}$，温度为 ~ 150 keV；另一种温度稍低，数密度为 $\sim 10^{-2}\ \mathrm{cm}^{-3}$，温度为 ~ 30 keV。如果这些高能电子群体呈现损失锥MDF，那么它们在内磁层中会对哨声模波不稳定（Ratcliffe & Watt 2017；Li 等，2019）。

3.2 数值计算总体方案

对于方程（39）和（48）的数值计算，我们首先假设辐射带中存在占主导地位的冷电子和质子群体，以及少量相对论电子群。在等离子体静止系中，对于冷粒子群，我们使用方程（20）；对于相对论电子群，则使用通常在等离子体静止系中表示的损失锥MDF（Xiao 等，1998）

$$f_e^R = \frac{2\Gamma\left(\frac{q+3}{2}\right)\Gamma(s+1)}{\pi^2 p_0^3\Gamma\left(\frac{q+2}{2}\right)\Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{p_\perp^q}{\left(1+\frac{p_\perp^2+p_\parallel^2}{p_0^2}\right)^{s+1}\sqrt{p_\perp^2+p_\parallel^2}^{\,q}}\right], \quad (50)$$

其中

$$p_0 = \left\{\frac{(q+3)\,(2s-3)}{3}\right\}^{\frac{1}{2}} m_{0e}v_{th,e}, \quad (51)$$

$v_{th,e} \equiv \sqrt{2k_BT_e^R/m_{0e}}$和 $\Gamma(x)$ 是 Γ 函数。上标 R 表示相对论粒子群体。自由参数 q和 s 决定损失锥MDF的各向异性和陡峭程度，T_e^R是相对论电子群的温度，而 k_B 是玻尔兹曼常数。在我们的计算中，准中性等离子体的质子和电子MDF可表示为

$$f_p = f_p^C, \quad (52)$$

and

$$f_e = \bar{n}_e^C f_e^C + \bar{n}_e^R f_e^R, \quad (53)$$

其中，$\bar{n}_e^C$和 $\bar{n}_e^R$表示冷电子群和相对论电子群分别占电子总数的相对密度，且 $n_e^C + n_e^R = 1$。下标 p 和 e 分别表示质子和电子。

在计算中，尽管自然变化范围很广，我们仍采用能够代表地球辐射带的等离子体参数（Borovsky 和 Denton，2011；Watt 等，2019）。我们根据原位数据（Denton 等，2010；Gao 等，2014）为相对论电子群设定了两种不同情形，定义如下

情形 1，软分布：$T_e^R = 25$ keV 和 $n_e^R = 0.05$，**情形 2，**硬分布：$T_e^R = 140$ keV 和 $n_e^R = 0.0025$。

图1 展示了归一化后的 f_e^R，它们是相对论性电子群最初不稳定的损失锥MDF，并根据式（50）绘制，所用等离子体参数分别对应（a）软分布和（b）硬分布。在式（50）中，由于缺乏原位数据，我们在计算中任意设定了 $q = 4$ 和 $s = 2$；未来研究需要通过拟合原位数据来确定这些参数。我们设定$\omega_{0pe} = 3|\Omega_{0e}|$（Horne 等，2013）。

为计算式（39）和（48），我们首先通过数值求解式（$k_\parallel$）中的色散关系，求得哨声模波的频率和偏振特性随19的变化。我们确认，由于相对论性电子群的密度较小（即占软分布的5%或占硬分布的 0.25%，均相对于冷等离子体中的总电子而言），其对完整相对论等离子体色散关系解的影响非常微弱。因此，为减少求解所需的计算量和时间，我们仅将式（$n_e^C f_e^C$）应用于式（53），这意味着计算中我们对冷等离子体色散关系进行数值求解。19）。[2]

不失一般性，在此计算中我们设定 $\omega_k > 0$。由于方程（52）和（53）具有回旋对称性，我们设定 $\phi_k = 0^\circ$，并将波传播方向与 B0 的夹角记为 θ（即 $k_x = k_\perp = k_\parallel \tan\theta$和 $k_y = 0$）。我们选择坐标系，使得任意角度为 θ的哨声模波满足 $k_\parallel > 0$。随后，在冷等离子体区间内，给定 θ，我们求得 $\omega_k \equiv \omega_k(k_\parallel)$，使得方程（19）中的 3×3 矩阵的行列式为零。为此，我们在 Python 代码中使用 fsolve 函数来求解非线性方程的根。求得 $\omega_k \equiv \omega_k(k_\parallel)$后，我们利用它根据方程（19）求出哨声模波的偏振特性，即比值 $|E_k^y/E_k^x|$和 $|E_k^z/E_k^x|$，并将其表示为 $k_\parallel$的函数。这样，由于我们可以自由设定 E_k^x，因此将 E_k^x设为常数。

通过使用 ω_k、$|E_k^y/E_k^x|$和 $|E_k^z/E_k^x|$的分布，我们计算

[2] 如果相对论电子群的影响不可忽略，就必须求解完整的相对论等离子体色散关系。为此，ALPS（任意线性等离子体求解器）是一个合适的工具，它是一种先进的并行化代码，可在相对论情形下数值求解完整的色散关系（Verscharen等人（2018））。

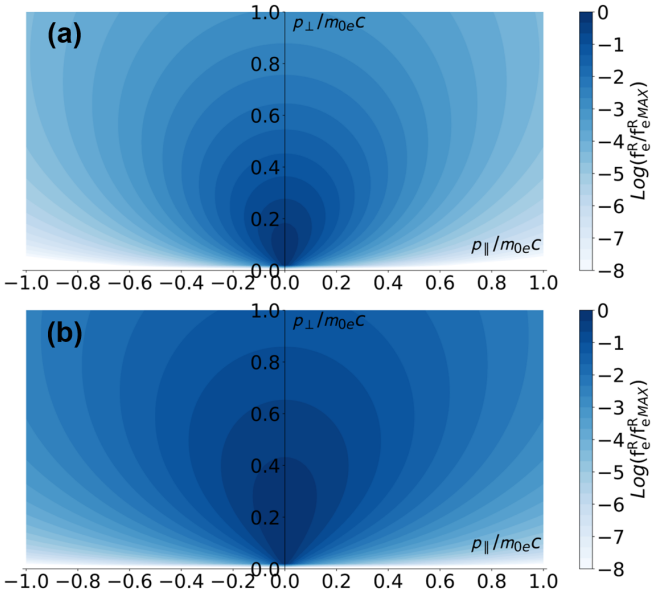


图1. 相对论性电子群的不稳定损失锥MDF，使用我们的等离子体参数，通过方程（50）绘制，分别对应（a）软分布和（b）硬分布。MDF 的数值分别归一化至其最大值。我们使用这些MDF计算方程（39）和（48）。

方程（39）和（48）关于 $k_\parallel$ 的函数，分别基于软、硬分布的等离子体参数。我们通过以下关系数值计算方程（39）中的柯西主值积分，该积分定义为方程（31），

$$\int_a^b dX \frac{h(X)}{X - X_s} = \int_a^b dX \frac{h(X) - h(X_s)}{X - X_s} + h(X_s) \ln \frac{b - X_s}{X_s - a}, \tag{54}$$

其中，h(X)是变量 X的任意函数， X_s表示一个奇点。我们假设方程（54）右侧第一项的积分收敛。我们将 $p_\perp$和$p_\parallel$按 $m_{0e}c$ 归一化，并将频率按 $|\Omega_{0e}|$归一化。出于数值计算方面的考虑，我们将方程（39）和（48）中积分的 $p_\perp/m_{0e}c$和$p_\parallel/m_{0e}c$有限范围分别设为$0.01 < p_\perp/m_{0e}c \leq 3.8$和 $-3.8 \leq p_\parallel/m_{0e}c \leq 3.8$，确认这些范围足以保证积分收敛。我们采用辛普森 3/8 法则数值计算$p_\parallel$和$p_\perp$积分。计算中，我们将$ck_\parallel/|\Omega_{0e}|$的范围设为$0.3 < ck_\parallel/|\Omega_{0e}| \leq 10$，并将 $ck_\parallel/|\Omega_{0e}|$的步长设为0.065。

3.3 相关性的数值演示

图 2 展示了 ω_k、 $|E^y_k|/|E^x_k|$和 $|E^z_k|/|E^x_k|$随 $k_\parallel$变化的曲线，传播角各不相同，范围从 $\theta = 0.01^\circ$到 $\theta = 89^\circ$。在每幅图中，实线表示根据冷等离子体色散关系得到的数值结果。假设忽略质子贡献，且 $\omega_k^2 \ll \omega_{0pe}^2$和$\Omega_{0e}^2 \ll \omega_{0pe}^2$，冷等离子体色散关系还给出了哨声模波的 ω_k、 $|E^y_k|/|E^x_k|$和 $|E^z_k|/|E^x_k|$的解析表达式（Stix，1992）

$$\omega_k \approx \frac{c^2 k_\parallel^2 |\Omega_{0e}| \cos\theta}{c^2 k_\parallel^2 + \omega_{0pe}^2 \cos^2\theta}, \tag{55}$$

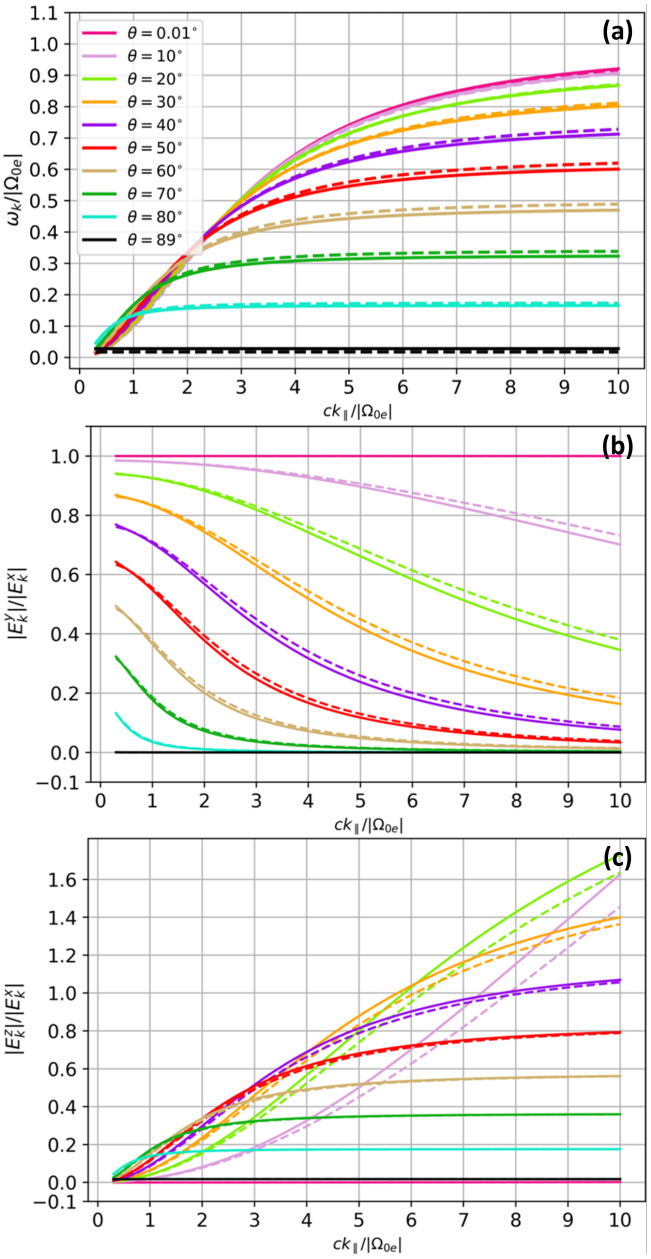


图2。 (a) ω_k、(b) $|E^y_k|/|E^x_k|$，以及 (c) $|E^z_k|/|E^x_k|$随 $k_\parallel$变化的曲线，传播角 θ各不相同，范围从 $\theta = 0.01^\circ$到 $\theta = 89^\circ$。实线表示根据冷等离子体色散关系得到的数值结果；对于 θ，相同配色的虚线表示由方程（55）至（57）得到的解析结果。这两种结果在每幅图中彼此吻合。我们使用数值结果计算方程（39）和（48）。

$$\frac{|E^y_k|}{|E^x_k|} \approx \frac{\omega_{0pe}^2 |\Omega_{0e}| \cos^2\theta \omega_k}{c^2 k_\parallel^2 |\Omega_{0e}|^2 - \left(\omega_{0pe}^2 \cos^2\theta + c^2 k_\parallel^2\right)\omega_k^2}, \tag{56}$$

and

$$\frac{|E^z_k|}{|E^x_k|} \approx \frac{c^2 k_\parallel^2 \tan\theta}{\omega_{0pe}^2 + c^2 k_\parallel^2 \tan^2\theta}. \tag{57}$$

图中的虚线2 采用与 θ颜色方案相同的θ色系实线表示解析结果

根据方程（55）至（57）。 ω_k， $|E_k^y|/|E_k^x|$和 $|E_k^z|/|E_k^x|$的数值结果与解析结果高度吻合。这验证了我们的冷等离子体色散关系数值解是正确的。

利用我们得到的 ω_k, $|E_k^y|/|E_k^x|$和 $|E_k^z|/|E_k^x|$数值结果，我们根据方程（53）计算方程（48）随 $k_\parallel$ 变化、且具有不同 θ 时的结果。请注意，冷粒子MDF对方程（48）没有贡献，这意味着方程（48）仅在 $f_e = n_e^R f_e^R$ 处进行估算，如图1所示。图3显示了相对论性电子软群体在 $f_e = n_e^R f_e^R$ 处估算的 γ_k、$\gamma_{ke}^{n=+1}$、$\gamma_{ke}^{n=-1}$ 和 $\gamma_{ke}^{n=0}$ 的分布，其范围从 $\theta = 0.01^\circ$ 到 $\theta = 89^\circ$。在每幅图中，黑色实线以及红色、蓝色和绿色虚线分别对应 γ_k、$\gamma_{ke}^{n=+1}$、$\gamma_{ke}^{n=-1}$ 和 $\gamma_{ke}^{n=0}$。在图3中，只有 $\gamma_{ke}^{n=-1}$ 对波不稳定性有贡献（即对 γ_k 有正贡献）。另一方面，$\gamma_{ke}^{n=+1}$ 和 $\gamma_{ke}^{n=0}$ 会导致波阻尼（即对 γ_k 有负贡献），并抵消波不稳定性的驱动作用。因此， $n = -1$ 共振必须强于 $n = +1$ 和 $n = 0$ 共振，损失锥驱动不稳定性才会发生。当 $\theta = 0^\circ$ 时，损失锥驱动不稳定性最为显著。但随着 θ 增大， $n = 0$ 共振导致的波阻尼增强，使其效率降低；从约 $\theta = 30^\circ$ 开始，损失锥驱动不稳定性便消失。

我们还计算了共振哨声模波方程（37）的能量密度随 $k_\parallel$ 变化的关系，并在计算γ_k时取不同的 θ，结果为

$$W = W_{\text{Field}} + W^C_{\text{Particle}} + W^R_{\text{Particle}}, \tag{58}$$

其中

$$W^R_{\text{Particle}} = \sum_n W_e^{R,n} = \sum_n W_e^n\Big|_{f_e=n_e^R f_e^R}. \tag{59}$$

方程（59）描述了哨声模波的能量密度，该能量密度与相对论电子的动能通过朗道共振和回旋共振相关联。图4展示了相对论性电子软群体在$f_e = n_e^R f_e^R$处估算得到的 W^RParticle、$W^R_{e}{}^{n=+1}$、$W^R_{e}{}^{n=-1}$和 $W^R_{e}{}^{n=0}$的分布，范围从 $\theta = 0.01^\circ$ 到 $\theta = 89^\circ$。我们定义 W^xField $= |E_k^x|^2/16\pi$。在每幅图中，黑色实线以及红色、蓝色和绿色虚线分别对应 W^RParticle、$W^R_{e}{}^{n=+1}$、$W^R_{e}{}^{n=-1}$和 $W^R_{e}{}^{n=0}$。从$\theta = 0.01^\circ$到 $\theta = 30^\circ$，由于 $n = -1$ 共振， W^RParticle的波能量密度明显增加；这一变化大致出现在不稳定的 $k_\parallel$范围内，此时图3中的 γ_k 为正。随着 θ 增大，波能量密度的这一明显增幅逐渐减弱，并在 $\theta = 30^\circ$ 处几乎消失，此时损失锥驱动不稳定性消失。

图 4 中 W^R粒子的这些行为，从波增长的角度来看，与图3 中 γ_k 的行为一致。从 $\theta = 30^\circ$可以看出， W^R粒子平均而言始终接近于零，因为 W^R, $n=-1$粒子抵消了 W^R, $n=+1$粒子和 W^R, $n=0$粒子的作用，彼此相互抵消。

图5 和图6 展示了 γ_k、$\gamma_{ke}^{n=+1}$、$\gamma_{ke}^{n=-1}$、和$\gamma_{ke}^{n=0}$的分布，以及对于相对论电子硬群体，在 $f_e = n_e^R f_e^R$处估计的 W^R粒子、$W^R_{e}{}^{n=+1}$、$W^R_{e}{}^{n=-1}$和 $W^R_{e}{}^{n=0}$的分布，其范围从 $\theta = 0.01^\circ$到 $\theta = 89^\circ$。尽管损失锥驱动不稳定性发生在不同于软分布的 $k_\parallel$范围内，但硬电子群体的总体模式与软分布的模式相同。在图5中， $\gamma_{ke}^{n=-1}$仅对波不稳定性有贡献，并在从 $\theta = 0.01^\circ$ 到 $\theta = 30^\circ$的特定 $k_\parallel$范围内超过$\gamma_{ke}^{n=+1}$ 和$\gamma_{ke}^{n=0}$。在此θ范围内， W^R粒子在图6 中由于 $n = -1$ 共振，其波能量密度明显增加，大致位于不稳定的$k_\parallel$范围内，而 γ_k 在图5 中为正。因此，从波增长的角度来看，图6 所示 W^R粒子的行为 γ_k 与图5所示的行为也一致。

4 讨论与结论

动理学线性理论已被证明能够解释空间与天体物理等离子体中的许多波不稳定性（Achterberg, A. & Wiersma, J. 2007；Verscharen& Chandran 2013；Yoon，2017；Vasko等，2019；Verscharen等，2019；Sun et al. 2021；Jiang et al. 2022）。然而，尽管线性理论已被实际用于研究各种不稳定性，线性理论本身的基础仍须进一步发展，以便更深入地理解波不稳定性。

本文推导了相对于B的任意传播角下，任意共振波在相对论性等离子体中的能量密度（式37）和增长率（式**48**）。我们计算了相对论性等离子体介电张量的厄米部分和反厄米部分，并完成了相应的解析表达式。因此，我们明确给出了此前尚不清晰的式**1**，并通过Landau共振和回旋共振，以解析形式表达了与粒子动能相关的波场能量密度，如式39所示。此外，我们推广了Kennel & Wong （1967）给出的增长率解析表达式。

在不稳定性的作用下，不稳定波吸收共振粒子的动能。因此，如果在驱动波不稳定性的特定波数范围内，某一特定共振使式48变为正值，那么在相同的波数范围内，通过同一共振，式39必然明确表现出波能量密度的增加。本文以地球辐射带背景等离子体中的损失锥驱动不稳定性为具体示例，通过数值分析展示了式39与式48之间的这种相关性。我们分析了损失锥MDF中相对论电子群体的两种不同情形，该群体会导致不稳定的哨声模波。

图3 和图5分别对应软、硬相对论电子群体的结果，展示了式（48）（即共振哨声模波的增长率和阻尼率）。如图所示，在两种情况下，损失锥驱动不稳定性均通过 $n = -1$ 共振发生在特定的 $k_\parallel$范围内，并在传播角相对于**B**0 从 $\theta = 0.01^\circ$到 $\theta = 30^\circ$的范围内，克服了通过 $n = +1$ 和0共振产生的波阻尼。然而，在较高的 θ下，波阻尼在整个 $k_\parallel$空间中占主导地位，超过了波不稳定性。

图4和图6分别对应软、硬相对论电子群体的结果，展示了式（39）（即通过 $n = +1$、-1 和0共振，与相对论电子动能相关的哨声模波能量密度）。在损失锥驱动不稳定性的作用下，相对论电子和共振电子的动能通过 $n = -1$ 共振转移给不稳定的哨声模波。这就是为什么在发生损失锥驱动不稳定性的$k_\parallel$和 θ 不稳定范围内，图4和图6中的 W^RParticle都会通过 $n = -1$ 共振明显增加。从$\theta = 30^\circ$ 开始， W^RParticle中的这种明显增加几乎消失，损失锥驱动不稳定性也随之消失，而 W^RParticle 在 $k_\parallel$空间中几乎为零。这些结果表明，正如预期，式（39）在 $k_\parallel$空间中反映了式（48）所示的波增长。

方程（39）和（48）的结构相同。但是，方程（48）对于

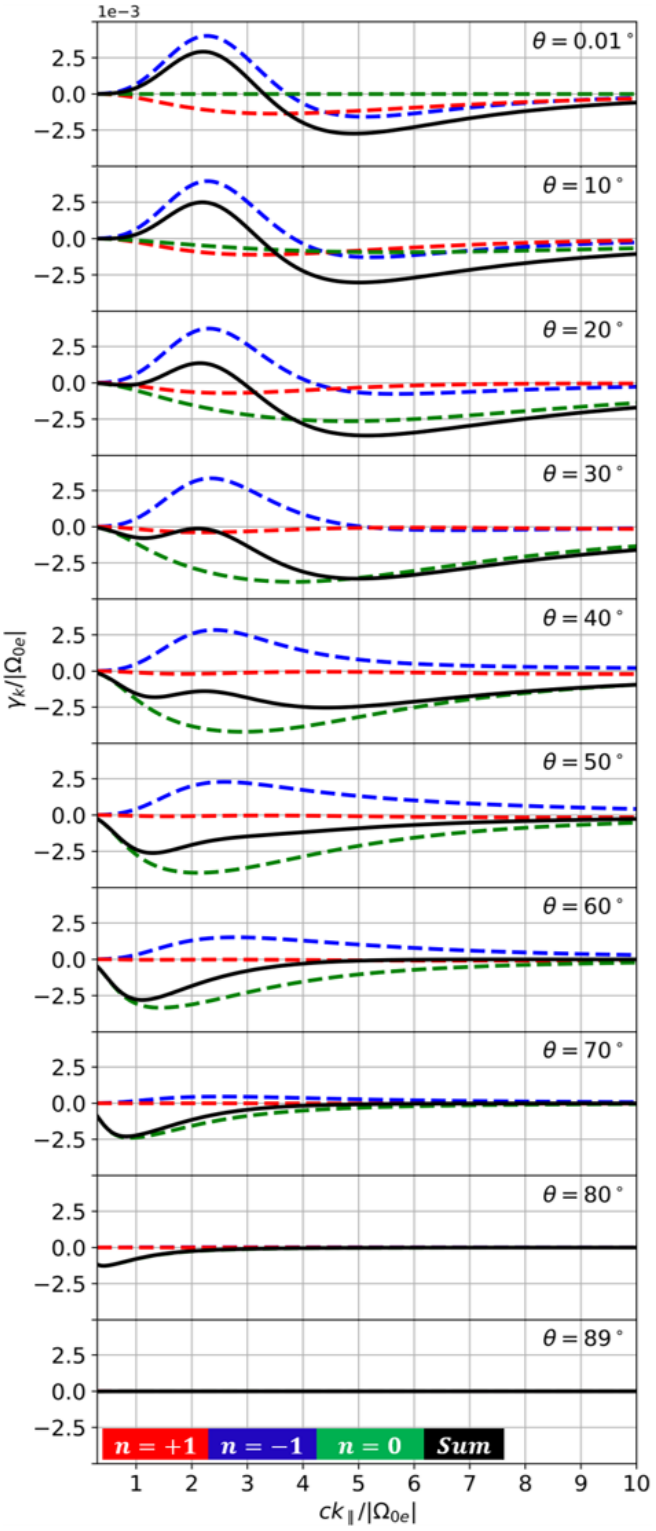


图3。 γ_k 随 $k_\parallel$ 变化的曲线，基于相对论性电子软群体，传播角取值范围为 $\theta = 0.01°$ 至 $\theta = 89°$。黑色实线以及红色、蓝色和绿色虚线分别对应 γ_k、$\gamma_{k\,e}^{n=+1}$、$\gamma_{k\,e}^{n=-1}$ 和 $\gamma_{k\,e}^{n=0}$。曲线显示，在 θ 范围内的特定 $k_\parallel$ 范围内，$n = -1$ 共振驱动不稳定性，压过了 $n = +1$ 和 $n = 0$ 共振；该范围为 $\theta = 0.01°$ 至 $\theta = 30°$。

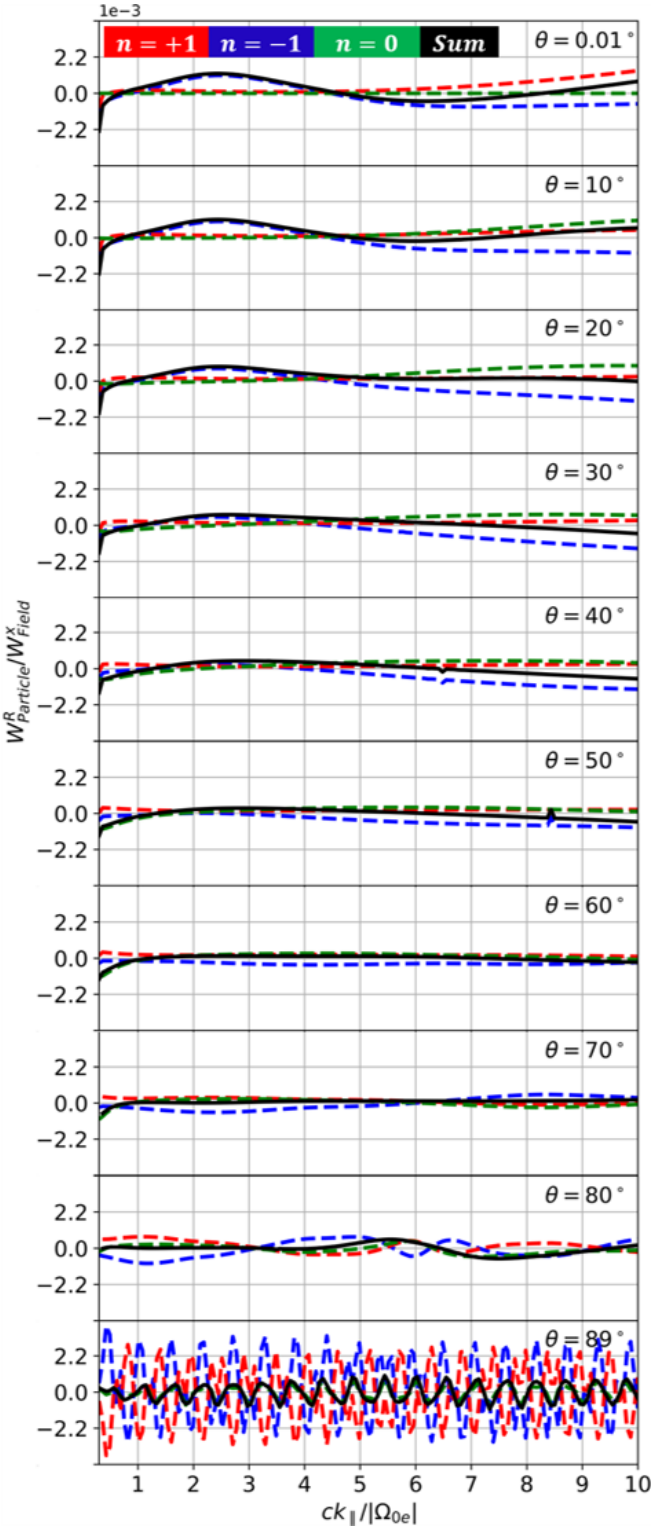


图4。基于相对论性电子软群体，W^R_{Particle} 随 $k_\parallel$ 变化的曲线，传播角取值范围为0 01° $\theta = 89°$ $W^x = |E^x_k|^2\ 16\pi$ 。至，并定义 Field / 。黑色实线以及红色、蓝色和绿色虚线分别对应 W^R_{Particle}、W^R、$_e$ $^{n=+1}$、W^R、$_e$ $^{n=-1}$和 W^R、$_e$ $^{n=0}$。曲线显示，在 γ_k 为正且不稳定性受到驱动的$k_\parallel$范围内，W^R_{Particle} 通过 $n = -1$ 共振从 $\theta = 0.01°$ 至 $\theta = 30°$呈现明显增长。

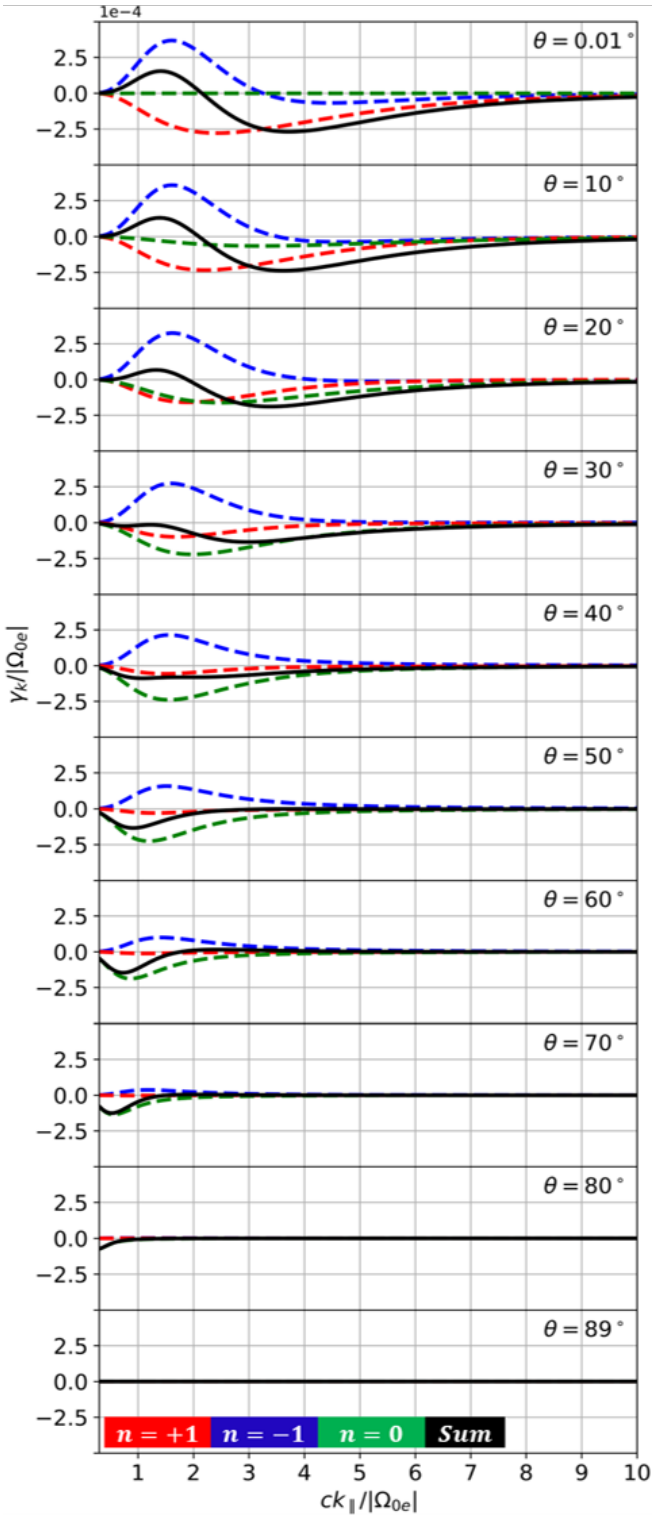


图5. 基于相对论电子硬群体，不同传播角下 γ_k 随 $k_{\|}$ 变化的分布，范围从 $\theta = 0$。01° 到 $\theta = 89°$。黑色实线以及红色、蓝色和绿色虚线分别对应 γ_k、$\gamma_{k\,e}^{n=+1}$、$\gamma_{k\,e}^{n=-1}$ 和 $\gamma_{k\,e}^{n=0}$。这些分布表明，在 θ范围内的特定 $k_{\|}$范围中，$n = -1$ 共振驱动不稳定性，其作用超过 $n = +1$ 和 $n = 0$ 共振，范围从 $\theta = 0$。01° 到 $\theta = 30°$。

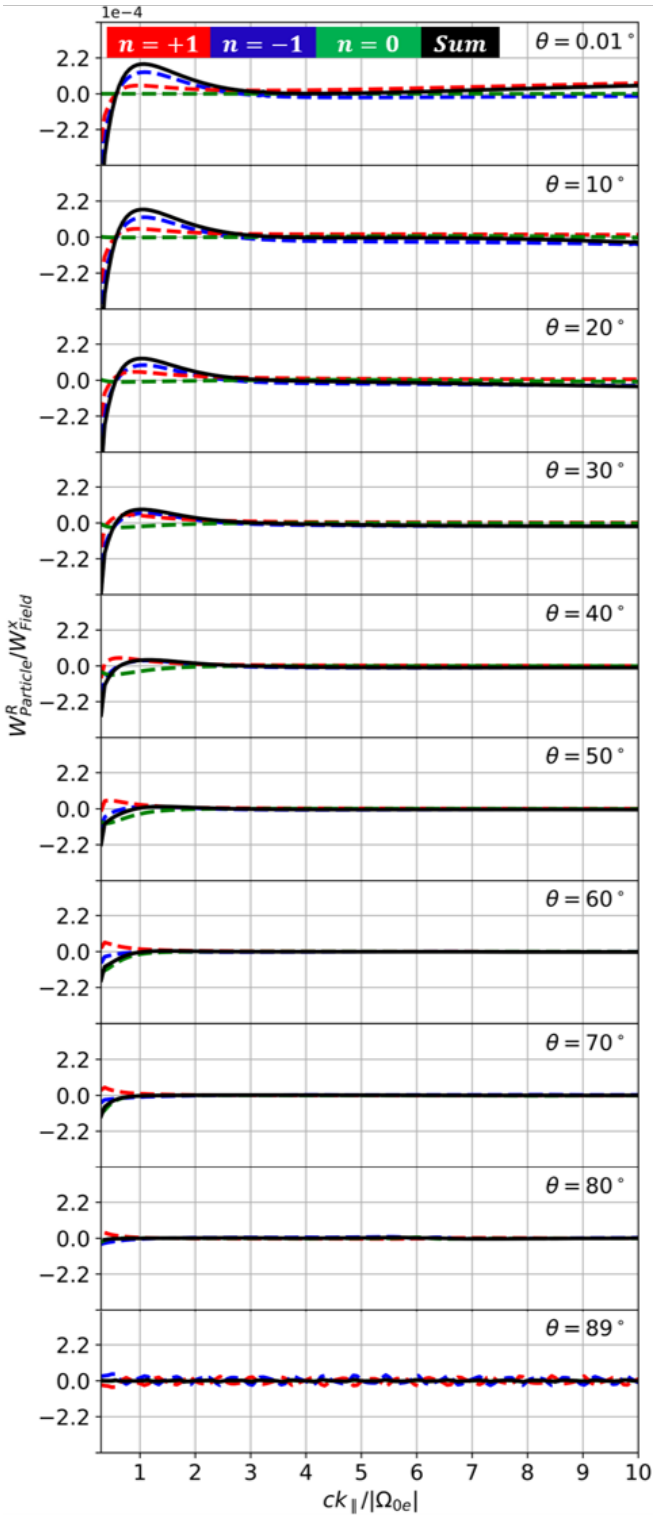


图6. 基于相对论电子硬群体，不同传播角下 W_{Particle}^{R} 随 $k_{\|}$ 变化的分布，范围从$\theta = 0$。01° 到 $\theta = 89°$。黑色实线以及红色、蓝色和绿色虚线分别对应 W^R粒子、$W^R{}_e{}^{n=+1}$、$W^R{}_e{}^{n=-1}$和 $W^R{}_e{}^{n=0}$。这些分布表明，在 γ_k 在图5中为正且不稳定性受到驱动的 $k_{\|}$范围内，W^R 粒子通过 $n = -1$ 共振，从$\theta = 0$。01° 到 $\theta = 30°$明显增加。

波增长/阻尼率仅与共振粒子有关，而波能量密度的公式（39）不仅与共振粒子有关，也与非共振粒子有关。因此，公式（39）考虑的是整个波-等离子体系统，与公式（48）相比，公式（39）呈现出一些不同且仍令人困惑的行为。如果等离子体是冷的（即，如果 $f_j = n_j^C f_j^C$），如公式（47）所示，公式（39）是半正定的。然而，对于热等离子体或相对论性等离子体，情况并非如此。例如，如图4和图6所示，W^R粒子存在一些负贡献，这违反直觉，至今仍是一个悬而未决的问题。请注意，在我们的数值计算中，W^R粒子的负贡献并不会导致负的波能量密度（即公式（58）中的 $W < 0$），因为W^R和 W^C粒子均为正值，且W^R $\gg$ |W^R粒子|以及 W^C粒子 $\gg$ |W^R粒子|。然而，Kadomtsev 等人（1965）认为，在存在温度各向异性的情况下，公式（1）的第二项（公式（39）的来源）可能导致负波能量（即 $W < 0$）。有观点认为，负波能量的概念对于理解非线性不稳定性和波-波相互作用十分重要（Hollweg & Völk 1971；Cairns 1979；Joarder 等人 1997）。然而，鉴于深入阐明波-粒子相互作用中负波能量这一概念超出了本文的范围，仍有必要对公式（39）开展进一步研究。

方程（39）和（48）使我们能够根据任意构型的回旋对称粒子MDF，估算相对论性等离子体中任意传播角下任意波的波能量密度和增长率。这些基于线性理论的解析结果可与相对论性等离子体中的准线性理论结合并加以扩展；准线性理论描述了不稳定性如何使动量空间中的相对论性粒子随时间演化。例如，给定一个初始不稳定动量分布函数，我们首先使用本文给出的解析表达式，找出不稳定波的性质。其次，将这些不稳定波的性质应用于 Jeong 等人 （2020年）提出的准线性扩散模型，使初始不稳定动量分布函数随时间演化至稳定状态。我们重复这两个步骤，直至实现熵稳定化。该方法能够展示图 1中的相对论性电子如何随时间扩散进入损失锥，并同时展示共振哨声模波性质随时间的演化。

因此，我们对相对论性等离子体中波能量密度和增长率的阐述，有助于我们更好地理解波与等离子体观测，以及波不稳定性的动理学模拟结果。此外，式（39）为研究波-粒子相互作用提供了新的见解，并提出了有趣的开放性问题。除损失锥驱动不稳定性外，式（39）还可应用于其他不稳定性，例如日冕和太阳风中的电子或离子驱动不稳定性，以研究共振波能量随波数空间的变化（Vocks和Mann，2003；Marsch 2006；Verscharen 等，2022）。

致谢

S-Y. J. 和 C. W. 获科学与技术设施委员会（STFC）资助，项目编号为 ST/W000369/1。我们感谢 Daniel Verscharen 提供的有益讨论。

数据可用性

如向通讯作者提出合理请求，本文所依据的数据将予以共享。

参考文献

Achterberg A., 1981, 《天文学与天体物理学》, 98, 161 Achterberg, A. Wiersma, J. 2007, 《天文学与天体物理学》, 475, 1 Agapitov O., Artemyev A., Krasnoselskikh V., Khotyaintsev Y. V., Mourenas D., Breuillard H., Balikhin M., Rolland G., 2013, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 118, 3407 Artemyev A., Agapitov O., Mourenas D., Krasnoselskikh V., Mozer F., 2015, Nature communications, 6, 8143 Barnes A., Scargle J. D., 1973, 《天体物理学杂志》, 184, 251 Borovsky J. E., Denton M. H., 2011, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 116 Borovsky J. E., Valdivia J. A., 2018, Surveys in Geophysics, 39, 817 Cairns R. A., 1979, Journal of Fluid Mechanics, 92, 1–14 Chen L., Thorne R. M., Li W., Bortnik J., 2013, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 118, 1074 Denton M. H., Borovsky J. E., Cayton T. E., 2010, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 115 Dorman L., 2020, 宇宙与磁层中的空间磁陷阱。经典与量子力学, Nova Science Publishers, https://books.google.co.uk/books?id=xnyhzQEACAAJ Dosch A., Zank G., 2016,] 10.1007/978-3-319-24880-6, 918 Gao X., Li W., Thorne R. M., Bortnik J., Angelopoulos V., Lu Q., Tao X., Wang S., 2014, Geophysical Research Letters, 41, 4805 Gurnett D. A., Bhattacharjee A., 2017, 等离子体物理学导论：空间、实验室与天体物理应用, 第2版。Cambridge University Press, doi:10.1017/9781139226059 Hollweg J. V., Völk H. J., 1971, Journal of Geophysical Research (1896- 1977), 76, 7527 Horne R. B., Kersten T., Glauert S. A., Meredith N. P., Boscher D., Sicard- Piet A., Thorne R. M., Li W., 2013, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 118, 6302 Jeong S.-Y., Verscharen D., Wicks R. T., Fazakerley A. N., 2020, 《天体物理学杂志》, 902, 128 Jeong S.-Y., et al., 2022, 《天体物理学快报》, 926, L26 JiangW., Verscharen D., LiH., Wang C., Klein K. G.,2022, 《天体物理学杂志》, 935, 169 Joarder P. S., Nakariakov V. M., Roberts B. J., 1997, Solar Physics, 176, 285 Kadomtsev B. B., Mikhailovskii A. B., Timofeev A. V., 1965, Zh. Eksperim. i Teor. Fiz., 20, 1517 Kennel C. F., Petschek H. E., 1966, Journal of Geophysical Research (1896-1977), 71, 1 Kennel C. F., Wong H. V., 1967, 《等离子体物理学杂志》, 1, 75–80 Lerche I., 1968, The Physics of Fluids, 11, 1720 Li W., Thorne R. M., Meredith N. P., Horne R. B., Bortnik J., Shprits Y. Y., Ni B., 2008, Journal of Geophysical Research (Space Physics), 113, A09210 Li W., et al., 2010, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 115 Li W., et al., 2013, 《地球物理研究杂志：空间物理学》 , 118, 1461 Li J., et al., 2019, Nature Communications, 10, 1 Liu X., Chen L., 2019, 《等离子体物理学》, 26, 042902 Lyutikov M., Gavriil F. P., 2006, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 368, 690 Marcowith A., et al., 2016, Reports on Progress in Physics, 79, 046901 Marsch E., 2006, Living Reviews in Solar Physics, 3, 1 Moya P. S., Navarro R. E., 2021, Frontiers in Physics, 9 Nakar E., Bret A., Milosavljević M., 2011, 《天体物理学杂志》, 738, 93 Orefice A., 1986, Nuovo Cimento D Serie, 8, 318 Ratcliffe H., Watt C. E. J., 2017, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 122, 8166 Roberg-Clark G. T., Drake J. F., Reynolds C. S., Swisdak M., 2016, 《天体物理学杂志》, 830, L9 Shaaban S. M., Lazar M., Wimmer-Schweingruber R. F., Fichtner H., 2021, 《天体物理学杂志》, 918, 37 Stix T. H., 1992, 等离子体中的波。纽约：美国物理联合会 Summers D., Tang R., Thorne R. M., 2009, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 114

SunH.,et al.,2021,《天体物理学杂志》,916,L4 Tong Y., Vasko I. Y., Artemyev A. V., Bale S. D., Mozer F. S., 2019, 《天体物理学杂志》, 878, 41 Ukhorskiy A. Y., Sitnov M. I., 2014, 辐射带粒子动力学。Springer US, 美国马萨诸塞州波士顿, doi:10.1007/978-1-4899-7433-4_17, https://doi.org/10.1007/978-1-4899-7433-4_17Vasko I. Y., Krasnoselskikh V., Tong Y., Bale S. D., Bonnell J. W., Mozer F. S., 2019, 《天体物理学快报》, 871, L29 Verscharen D., ChandranB. D. G., 2013, 《天体物理学杂志》, 764, 88 Verscharen D., Klein K., Chandran B., Stevens M., Salem C., Bale S., 2018,《等离子体物理学杂志》, 84, 905840403 Verscharen D., Chandran B. D. G., Jeong S.-Y., Salem C. S., Pulupa M. P., Bale S. D., 2019, 《天体物理学杂志》, 886, 136 Verscharen D., et al., 2022, 《天文学与空间科学前沿》, 9 Vocks C., Mann G., 2003, 《天体物理学杂志》, 593, 1134 Vocks, C. Mann, G. 2006, 《天文学与天体物理学》 , 452, 331Watt C. E. J., Degeling A.W.,Rankin R., 2013, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 118, 1984 Watt C. E. J., Allison H. J., Meredith N.P., Thompson R. L., Bentley S. N., Rae I. J., Glauert S. A., Horne R. B., 2019, 《地球物理研究杂志：空间物理学》, 124, 8488 Xiao F., Thorne R. M., Summers D., 1998, 《等离子体物理学》, 5, 2489 Yoon P. H., 2017, 《现代等离子体物理学评论》, 1, 4

本文由作者使用 TEX/LATEX 文件排版。