arXiv:2303.14625v2 [math.AC] 1 Jun 2023

塞格雷积的非交换解消与遗传表示型的科恩-麦考利环

NORIHIRO HANIHARA

Abstract. 我们研究交换科恩–麦考利环，其科恩–麦考利表示理论由箭图表示控制，我们称之为遗传表示型。基于倾斜理论和簇倾斜理论，我们构造了一些遗传表示型的交换科恩–麦考利环。首先，我们给出一个一般存在性定理：只要两个交换 Gorenstein 环的因子各自具有簇倾斜模或非交换保凹解消，那么它们的塞格雷积上也存在这样的对象。作为应用，我们从多项式环的塞格雷积中得到三个遗传表示型 Gorenstein 环的例子。接下来，我们引入扩展数值半群环，它推广了数值半群环，并构成一类一维科恩–麦考利非整环；在这类环中，我们给出一个遗传表示型 Gorenstein 环族。此外，我们讨论一个 4 维非戈伦斯坦科恩–麦考利环，其表示仍由有限维遗传代数控制。我们证明它具有唯一的 2-簇倾斜对象，并给出刚性 Cohen-Macaulay 模的完全分类，结果表明这类模只有有限多个。

Contents

1. 引言 1 2. 塞格雷积预备知识 5 3. 塞格雷积的非交换解消 7 4. 具有遗传表示型的 Gorenstein 环 11 5. Morita 型定理的应用 16 6. 扩展数值半群环与倾斜理论 21 7. 多项式环上的若干解消 24 8. 一个非戈伦斯坦例子 26 参考文献 33

1. Introduction

1.1. 遗传表示型。对科恩–麦考利环上的 Cohen-Macaulay 模[69, 51] 的研究是交换代数中最重要的课题之一。给定一个交换科恩–麦考利环 R，我们的目标是理解 R上的（极大）Cohen-Macaulay 模范畴 CM R 。当 R 具有有限表示型时，我们对该范畴有最全面的认识。回顾一下，这意味着在同构意义下，不可分解 Cohen–Macaulay模只有有限多个。此类交换环，尤其是二维中的简单奇点，是经典研究对象，已从许多角度得到深入研究，包括表示论 [12, 5] 和 McKay对应 [4], ；但一般而言，要理解整个范畴 CM R被认为是不可能的。

本文旨在从倾斜理论和簇倾斜理论的角度，研究可视为有限表示型之后“下一个简单层次”的 Cohen-Macaulay 表示。我们引入遗传表示型的概念，构造一些具有这种性质的环，并将其应用于给出若干分类结果。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13C14, 14A22, 16E35, 16G60, 16S38, 18G80.*Key words and phrases.* 遗传表示型、严格遗传表示型、科恩-麦考利环、遗传代数、塞格雷积、非交换保型解消、CT模、扩展数值半群环、刚性模。本文得到 JSPS KAKENHI Grant Number JP22J00649 的资助。

让我们说明这一概念的由来。设 k 是一个域，R 是一个交换诺特k-代数，并假设它是戈伦斯坦的。于是，Cohen-Macaulay 模的稳定范畴 CM R 是一个三角范畴；它也与 Buchweitz [11] 和 Orlov [54]的奇点范畴 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ R)/\mathrm{K^b}(\mathrm{proj}\, R)$典范等价。从环与群的表示论、代数几何、镜像对称等诸多视角出发，人们一直在积极研究这一范畴。

超越有限表示型后，研究 Cohen-Macaulay 表示的一种有效方法是倾斜理论。它给出了不同背景下产生的各种三角范畴之间的等价，从而使我们能够相互理解这些范畴，因此它是表示论中的一个重要课题。关于奇点范畴倾斜理论的大量研究，例如 [3, 13, 19, 28, 32, 33, 35, 40, 44, 48,47, 49, 53, 63], 以及一篇综述文章 [39], 表明，我们通常有一个三角等价

$$\underline{\mathrm{CM}}\, R \simeq \mathrm{C}_n(A)$$

对于某个有限维代数 A，可以将三角范畴 CM R 视为其规范形式。这里等式右侧是 A 的 n-簇范畴 [10, 2] ，它是由导出范畴 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, A)$的一个轨道范畴（的三角包络）得到的。

我们旨在用有限维代数 A来衡量 R 表示论的复杂性。这类代数中最基本的一类是遗传代数；回想一下，这意味着代数的全局维数至多为 1。在代数闭域上，每个这样的代数都与某个箭图的路径代数 Morita 等价，而其模不过是箭图表示。因此，它们是表示论中的基本对象，这促使我们给出以下定义。

定义 1.1（定义 4.6）。设 R 是一个交换完备戈伦斯坦局部环。如果存在有限维遗传代数 H 和 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, H)$ 的三角自等价 F，使得存在一个三角等价，则称 R 具有遗传表示型

$$\underline{\mathrm{CM}}\, R \simeq \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, H)/F.$$

作为遗传表示型戈伦斯坦环的第一个例子，可以将有限三角范畴 [1] 的结构定理表述如下。

命题 1.2（命题4.10）。有限表示型的戈伦斯坦环具有遗传表示型。此外，可以取遗传代数 H 为某个 Dynkin 箭图的路径代数。

遗传代数之所以在诸多方面独具特色，首要且关键的性质是其导出范畴具有简洁的结构；众所周知，每个对象都同构于其上同调，因此导出范畴 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, H)$ 的结构与模范畴的结构非常接近。作为戈伦斯坦环具有遗传表示型的首个推论，我们将 Keller 关于遗传代数 [45] 的导出轨道范畴的一项结果转化为 Cohen-Macaulay 模的可分次性（定理 4.13）。

为了给出与簇倾斜理论或非交换解消理论相关的更深入结论，我们还引入一个更强的版本，称为严格遗传表示型。设 R 是一个交换环，并假设它是域 k 上维数为 $d+1$ 的戈伦斯坦局部孤立奇点。那么，Auslander-Reiten 对偶表明，稳定范畴 CM R 是一个 d-Calabi-Yau 三角范畴，也就是说，第 d 个悬移函子 $[d]$ 是 Serre 函子。这类三角范畴在数学的诸多领域都具有重要意义。在表示论及其相关领域中，具有簇倾斜对象的三角范畴——称为簇范畴——尤其受到关注。它们在簇代数的范畴化中发挥着关键作用，也在奇点理论之间建立了深刻联系。关于将在本文中用到的更多细节，请参见第 3.3 节。现在，Calabi-Yau 三角范畴的 Morita 定理 [26] （见定理 4.7）给出了由遗传代数产生的 d-Calabi-Yau 三角范畴的标准形式，由此引出以下定义。

定义 1.3（定义 4.8）。设 R 是一个维数为 $d+1 \geq 3$ 的交换完备 Gorenstein 局部孤立奇点。若存在一个三角等价，我们称 R 具有严格遗传表示型

$$\underline{\mathrm{CM}}\, R \simeq \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, H)/\tau^{-1/(d-1)}[1]$$

其对应于某个有限维遗传代数 H，以及 Auslander– Reiten 平移的自然定义的 $(d-1)$ 次根。

与定义 1.1 相比，我们要求自等价 F 必须具有 $\tau^{-1/(d-1)}[1]$ 的形式；这是最优的，因为右侧自然具有一个 d-簇倾斜对象，并且是 H [48, 25, 28] 的 d-簇范畴的一种特定变体；关于 $\tau^{-1/(d-1)}$ 的行为可参见定义 4.8 和注4.9，它保证了这些蕴含关系。

我们讨论环具有严格遗传表示型所带来的一些推论。我们指出奇点范畴的增强具有唯一性（定理 4.14）。此外，充分利用代数 H 是遗传的这一性质，我们为非交换 Bondal–Orlov 猜想提供了初步证据（定理 4.15，另见注 4.16）；我们证明，若 R 具有维数为 $d+1 \geq 3$ 的严格遗传表示型，那么任意 d-簇倾斜对象都具有相同数目的直和项。

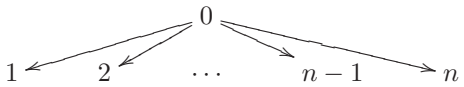
我们参阅 第4.4节，了解遗传表示型定义可能的变体 s.

构造具有（严格）遗传表示型的交换环是一项不简单的任务。据作者所知，目前仅有两个已知的此类例子（见定理 4.11），它们是某些有限商奇点。本文接下来的主要计算结果给出了一族具有遗传表示型的一维半群环，以及三个具有严格遗传表示型的环面奇点。

Theo注 1.4（定理 6.7）。设 k 是特征0的域。对于每个 $n \geq 3$，其 ng

$$k[[x_0, \ldots, x_{n-2}]]/(x_i x_j - x_l x_m \mid i+j = l+m \,(\mathrm{mod}\, n))$$

具有遗传表示型。事实上，其奇点范畴等价于下方 n-子空间箭图的 0-簇范畴。

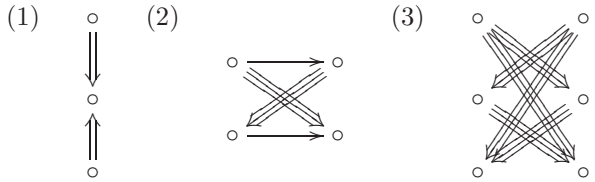


对于分次环 A （或其完备化），我们用 $A^{(n)}$ 表示 A 的第 n 个 Veronese 子环。

定理 1.5（第 5 节）。设 k 为任意域。以下各环均具有严格遗传表示型。

（1）塞格雷积 $k[[x,y]]^{(2)} \# k[[x,y]]^{(2)}$，其中 $\deg x = \deg y = 1$。（2）塞格雷积 $k[[x,y,z]] \# k[[u,v]]$，其中 $\deg x = \deg y = \deg z = 1$，且 $\deg u = 1$ 和 $\deg v = 2$。（3）塞格雷积 $k[[x,y,z]] \# k[[x,y,z]]$，其中 $\deg x = \deg y = \deg z = 1$。

事实上，上述各环的奇点范畴等价于由以下箭图导出的簇范畴。



对于每个 n，定理 1.4 中的环都是一维戈伦斯坦非整环。事实上，它是扩展数值半群环的一个例子；我们将其作为经典数值半群环的推广加以引入（定义 6.1）。对维数为 1 [13, 28] 的环应用倾斜理论可知，该环具有遗传表示型；事实上，我们给出的三角等价（定理 6.7）表明，其 Cohen-Macaulay 表示本质上等价于经典的 n-子空间问题。

定理 1.5 中的结果是作为 Calabi–Yau 三角范畴的 Morita 定理的应用而得到的，相关内容回顾于定理 5.1。要应用该定理，我们需要在所研究的环上构造一个簇倾斜对象；正如下一个小节所述，这一构造在更一般的情形下也能实现。

1.2. 塞格雷积的非交换保型解消与簇倾斜。设 R 是一个维数为 $d+1 \geq 2$ 的交换戈伦斯坦局部环，且为孤立奇点。回顾一下，按照 Iyama [37], 的定义，一个 d-簇倾斜对象是满足以下条件的 $M \in \mathrm{CM}\, R$

$$\begin{aligned}\operatorname{add} M &= \{X \in \mathrm{CM}\, R \mid \operatorname{Ext}^i_R(M, X) = 0 \text{ for } 0 < i < d\} \\ &= \{X \in \mathrm{CM}\, R \mid \operatorname{Ext}^i_R(X, M) = 0 \text{ for } 0 < i < d\}.\end{aligned}$$

它是高维奥斯兰德–赖滕理论的自然研究领域 [37, 38], ；该理论在表示论中受到积极研究，同时也在簇代数的范畴化中发挥着关键作用 [10]。与此同时，簇倾斜对象是非交换保型解消（简称 NCCR）的一种特殊类型，按照 Van den Bergh [65]的定义；回想一下，交换戈伦斯坦正规整环 R 上的 NCCR 是一个自反模 M，其自同态环 $\mathrm{End}_R(M)$具有有限整体维数，并且作为R-模是科恩–麦考利的。非交换环 $\mathrm{End}_R(M)$被视为一种虚拟空间，代表奇点 $\operatorname{Spec} R$的保型解消，因此，非交换环的研究是双有理几何中的重要课题。这些簇倾斜对象或 NCCR 由自同态环 $\mathrm{End}_R(M)$的显著同调性质所刻画，这些环称为卡拉比–丘代数 [20, 46]。簇倾斜对象或 NCCR 的诸多研究面向吸引了大量关注，包括表示论、代数几何、交换代数和组合学等视角。关于 NCCR 或簇倾斜模的相关研究，可参见 [9, 14, 15, 16, 18, 31, 33, 34, 38, 60, 61, 65] 以及综述 [50, 67, 66], 。

定理 1.5 基于一个关于塞格雷积上非交换保型解消存在性的一般定理。设 k 是完美域，$R' = \bigoplus_{i\geq 0} R'_i$ 和 $R'' = \bigoplus_{i\geq 0} R''_i$ 是正分次交换戈伦斯坦正规整环，维数为 ≥ 2，且 R'_0 和 R''_0 在 k 上有限维。设 R 为塞格雷积，即

$$R = \bigoplus_{i\geq 0} R'_i \otimes_k R''_i.$$

当 R' 和 R'' 具有相同的负 a 不变量时，R 仍然是戈伦斯坦的，且具有相同的 a 不变量（推论 2.2）。我们的主要一般性结果是以下关于塞格雷积上非交换保型解消的构造。

定理 1.6（定理 3.9）。设 R' 和 R'' 具有相同的 a 不变量 $-p$。如果 R'（分别为 R''）具有非交换保正则解消 M（分别为 M''），且 $\mathrm{End}_{R'}(M')$（分别为 $\mathrm{End}_{R''}(M'')$）是正分次的，那么 $\bigoplus_{l=0}^{p-1} M'(l)\#M''$ 是 R 的非交换保正则解消。

注意，若存在一个自同态环为正分次的非交换保正则解消，则 a-不变量为负（引理 3.8），因此直和总是有意义的。我们还给出了将“簇倾斜”替代非交换保正则解消的定理 1.6 版本，详见定理 3.9。

显然，若 S 是正则环，则 $S \in \mathrm{CM}\, S$ 是一个非交换保正则解消。将定理 1.6 应用于这个非常特殊的情形，可得以下一般性推论。

推论 1.7（推论 3.11）。设 $S_i = k[x_{i,0}, \dots, x_{i,d_i}]$、$1 \leq i \leq n$ 是满足 $\deg x_{i,j} = a_{i,j} > 0$ 的多项式环。假设 $\sum_{j=0}^{d_i} a_{i,j}$ 对所有 i 都相同。那么塞格雷积 $S_1\# \cdots \#S_n$ 存在一个非交换保正则解消。

我们指出，定理 1.6 是以如下方式对卡拉比–丘代数进行的一种运算。给定两个分次环和一个整数 $p > 0$，我们引入它们的 p-塞格雷积（定义 3.1），它包含通常的塞格雷积作为幂等子环。我们证明，具有相同 a-不变量 $-p$ 的两个卡拉比–丘代数 $\mathrm{End}_{R'}(M')$ 和 $\mathrm{End}_{R''}(M'')$ 的 p-塞格雷积会产生一个新的卡拉比–丘代数；事实证明，它是塞格雷积上的 $\bigoplus_{l=0}^{p-1} M'(l)\#M''$ 的自同态环。

值得注意的是，Calabi-Yau 代数与一类称为高表示无限代数的有限维代数之间有着密切的联系。我们即将发表的论文 [27] 将给出一个基于这类代数的定理 1.6 的独立证明。

1.3. 非戈伦斯坦环。最后，我们也讨论一些非戈伦斯坦例子。由于缺少将稳定范畴 $\mathrm{CM}\, R$ 视为导出范畴或簇范畴的“模型”，目前无法像定义 1.1 和 1.3 那样，为非戈伦斯坦情形给出类似的定义。不过，仍然可以找到一些例子

其中非戈伦斯坦环的 Cohen-Macaulay 表示由有限维遗传代数控制。这里我们将注意力限制在以下环上。令

$$R = k[[x_0, x_1]]\#k[[y_0, y_1, y_2]]$$

为具有标准分次的塞格雷积（的完备化）。它是一个 4 维科恩–麦考利孤立奇点，并非戈伦斯坦环。我们在 CM R 中构造了一个 2-簇倾斜对象，因此，的科恩–麦考利表示受 3-Kronecker 箭图的表示控制，这意味着 R 可视为"遗传表示型"。我们用 ω 表示典范模，用 Ω 表示 syzygy，即 mod R 中投射覆盖的核。

定理 1.8. 设 $R = k[[x_0, x_1]]\#k[[y_0, y_1, y_2]]$。

(1)（定理 8.9）模 $X = R \oplus \omega \oplus \Omega^2\omega \in \mathrm{CM}\, R$ 是 2-簇倾斜对象。(2)（推论 8.10）存在一个加性等价

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega X, -)\colon \mathrm{CM}\, R/[\mathrm{add}\, X] \xrightarrow{\simeq} \mathrm{mod}\, kQ_3$$

对于具有 3 条箭的 Kronecker 箭图 Q_3: $\circ \Longrightarrow \circ$。

这应与 Auslander-Reiten [7] 的研究进行比较（另见 [69]）。他们发现了有限表示型的 3 维非戈伦斯坦环，换言之，这些环具有 1-簇倾斜模。上述定理可视为一种高维类比，因为我们在一个 4 维环中有一个 2-簇倾斜对象。

定理 1.8(2) 中关于遗传表示型（其含义未定义）的陈述仍足以给出分类结果。回顾一下，环 A 上的模 M 若满足 $\mathrm{Ext}^1_A(M, M) = 0$，则称为刚性的。正如 Iyama–Yoshino [42] 针对某些 Gorenstein 商奇点所取得的成果，某些特殊箭图具有遗传表示型这一性质，使我们能够给出分类结果。结果表明，上文给出的 X是唯一的 2-簇倾斜对象，而且刚性 Cohen-Macaulay 模也只有有限多个。若一个模没有重复的直和项，我们就称其为基本模。

定理 1.9. 令 $R = k[[x_0, x_1]]\#k[[y_0, y_1, y_2]]$ 如上。

(1) $R \oplus \omega \oplus \Omega^2\omega$ 是 CM R 中唯一的基本 2-簇倾斜对象。

(2) 一个基本的科恩–麦考利 R-模是刚性的，当且仅当它是以下某个对象的直和项 *g.*

$$R \oplus \omega \oplus \Omega^2\omega, \quad R \oplus \Omega\omega, \quad \omega \oplus \mathrm{Hom}_R(\Omega\omega, \omega)$$

我们强调，使上述分类成为可能的是箭图表示理论；因此，这也证明了探讨表示与科恩-麦考利环及有限维代数之间关系的重要性，尤其是遗传表示型的科恩-麦考利环。

更多例子和推广将在 [27] 中讨论。

致谢。作者谨向 Osamu Iyama、Martin Kalck 和 Yusuke Nakajima 致以谢意，感谢他们进行的诸多宝贵讨论。作者也感谢 Yuji Yoshino 提醒他关注可分次性。

2. Preliminaries on Segre products

本节中的所有环均假设为交换环。

固定一个基环 k。设 $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ 和 $B = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} B_i$ 是 k上的分次代数。那么， A 和 B 在 k 上的塞格雷积是分次环

$$A\#_k B = A\#B := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i \otimes B_i.$$

这是乘积 Proj $A \times_{\mathrm{Spec}\, k}$ Proj B 的齐次坐标环。对于分次模$M \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}} A$ 和 $N \in \mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}} B$，我们类似地定义一个分次 ($A\#B$)-模

$$M\#N := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i \otimes N_i.$$

我们常常以下述方式将塞格雷积视为 Veronese 子环。可以自然地将张量积 $A\otimes B=\bigoplus_{i,j\in\mathbb{Z}}A_i\otimes B_j$ 视为一个 $\mathbb{Z}^2$-分次环，其中 $\deg(a\otimes b)=(\deg a,\deg b)$。那么，塞格雷积就是对应于 $\mathbb{Z}^2$ 的对角子群 $\{(i,i)\mid i\in\mathbb{Z}\}$ 的 Veronese 子环。

在下文中，我们假设 k 是一个域。设 $A=\bigoplus_{i\geq 0}A_i$ 是一个维数为 d 的正分次科恩–麦考利环，使得 A_0 是有限维局部 k-代数，并用 $\omega=\omega_A$ 表示 A 的分次典范模。若存在一个同构，我们称 A 具有 a-不变量 a：

$$\mathrm{RHom}_A(A_0,\omega_A)[d]\simeq A_0(-a)$$

在 $\mathsf{D}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{Z}}A)$ 中。这等价于说，单 A-模（集中于次数 0）的内射包的顶端位于次数 a。

Goto–Watanabe 关于塞格雷积的以下结果至关重要，因为对局部上同调群的这一计算有许多重要推论。设 k 为一个域，$A=\bigoplus_{i\geq 0}A_i$ 和 $B=\bigoplus_{i\geq 0}B_i$ 为正分次交换诺特环，且 A_0 和 B_0 为有限维局部 k-代数。我们用 $\mathfrak{m}=J_{A_0}\oplus\bigoplus_{i>0}A_i$ 和 $\mathfrak{n}=J_{B_0}\oplus\bigoplus_{i>0}B_i$ 表示它们的极大理想，其中 J 表示雅各布森根。

定理 2.1（[21, 定理 4.1.5]）。设 $M\in\mathsf{Mod}^{\mathbb{Z}}A$ 和 $N\in\mathsf{Mod}^{\mathbb{Z}}B$。假设 $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)=0$ 对 $i=0,1$ 成立。那么我们有

$$\mathrm{H}^p_{\mathfrak{m}\#\mathfrak{n}}(M\#N)=\mathrm{H}^p_{\mathfrak{m}}(M)\#N\oplus M\#\mathrm{H}^p_{\mathfrak{n}}(N)\oplus\bigoplus_{i=1}^{p}\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M)\#\mathrm{H}^{p+1-i}_{\mathfrak{n}}(N)$$

对所有 $p\geq 0$ 均成立。

由于后文将讨论 A 和 B 为多项式环的情形，这便得到“协变模的 Cohen–Macaulay 性”，这一主题已从多个角度得到研究，例如 [36, 62, 64]。现在先指出下面这个推论，我们将频繁用到它。

推论 2.2（[21, 定理4.2.3, 4.3.1]）。设 $A=\bigoplus_{i\geq 0}A_i$ 和 $B=\bigoplus_{i\geq 0}B_i$ 是正分次科恩–麦考利环，且 A_0 和 B_0 是有限维局部 k-代数，$\dim A=d\geq 2$，并且 $\dim B=e\geq 1$。

(1) 假设 A 和 B 的 a 不变量均为负数。那么 $A\#B$ 是维数为 $d+e-1$ 的科恩–麦考利环，且 $\omega_{A\#B}=\omega_A\#\omega_B$。(2) 若 A 和 B 是具有相同负 a 不变量的戈伦斯坦环，则 $A\#B$ 也是戈伦斯坦环，且具有相同的 a 不变量。

我们将研究塞格雷积 $A\#B$ 上的模，其中典型的模是直和项 $A\otimes B$。设 $A=\bigoplus_{i\geq 0}A_i$ 和 $B=\bigoplus_{i\geq 0}B_i$ 为正分次诺特整环，并设 $S=A\otimes B$，在其上赋予 $\mathbb{Z}^2$ 分次，使得 $\deg(a\otimes b)=(\deg a,\deg b)$。对于一个 $\mathbb{Z}^2$ 分次的 S-模 X，令 $X_i=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}X_{(i,0)+(j,j)}$。特别地，$S_0=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}S_{(j,j)}=:R$ 是塞格雷积 $A\#B$，且作为 $\mathbb{Z}$ 分次的 R-模，$S_i=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}S_{(i,0)+(j,j)}$ 等于 $A(i)\#B$。

以下结果应当是标准的，证明例如可见于 [69, 引理 16.7]。回忆一下，正规环是指在任意素理想处局部化后均为正规整环的交换环。任何诺特正规环都是有限个诺特正规整环的直积，反之亦然。

引理 2.3. 假设 S 是一个诺特正规环。那么对于自反的 $N\in$模$^{\mathbb{Z}^2}S$，自然映射

$$N_{j-i}\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(S_i,N_j)$$

是一个同构，如果 S/SS_i 的任意关联素理想的高度均为 ≥ 2。

证明. 对于 $N=S$，见 [69, 引理 16.7]。对于一般的 N，我们可以在 $\mathsf{mod}^{\mathbb{Z}^2}S$ 中取一个正合列 $0\to N\to P^0\to P^1$，其中 $P^0,P^1\in\mathsf{proj}^{\mathbb{Z}^2}S$，因为 N 是自反的。然后使用五引理。□

上述结果引出了以下有用的观察。设 k 为完美域，且 $A=\bigoplus_{i\geq 0}A_i$ 和 $B=\bigoplus_{i\geq 0}B_i$ 为维数为 ≥ 2 的正分次诺特正规整环，使得 A_0 和 B_0 在 k 上有限维。如上所述，令 $R=A\#B$ 为塞格雷积。

命题 2.4. 设 $M_1, M_2 \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}} A$ 和 $N_1, N_2 \in \mathrm{mod}^{\mathbb{Z}} B$，且 M_2 和 N_2 自反。那么典范映射

$$\mathrm{Hom}_A(M_1, M_2) \# \mathrm{Hom}_B(N_1, N_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M_1 \# N_1, M_2 \# N_2)$$

是一个同构。

证明。由于 k 是完美的，我们知道 $S = A \otimes B$ 是一个诺特正规环（见 [8, 第 V 章第 1.7 节命题 19] 的推论）。下面验证 S/S_iS 的关联素理想高度为 ≥ 2。首先考虑 $i \geq 0$ 的情形。容易看出， S_i 生成理想 $A_{\geq i} \otimes B$，因此 $S/S_iS = A/A_{\geq i} \otimes B$ 的余维为 $\dim S - \dim B = \dim A \geq 2$。类似地，若 $i \leq 0$，则环 S/S_iS 的余维为 $\geq \dim B \geq 2$。

若 M_1 和 N_1 是有限生成投射的，设为 $M_1 = A(i)$ 和 $N_1 = B(j)$，则映射变为

$$M_2(-i) \# N_2(-j) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(A(i) \# B(j), M_2 \# N_2)\ .$$

将引理 2.3 应用于 $N = M_2 \otimes N_2$，即可看出这是一个同构；由于每个因子都是自反的， $N = M_2 \otimes N_2$ 也是自反的。一般情形的断言现在便是例行的。取 M_1 的一个表示，并使用五引理证明 M_1 为一般情形且 N_1 为投射的情形。对 N_1 作同样的论证即可得出结果。□

3. Non-commutative resolutions for Segre products

我们证明本文的第一个主要结果：从每个分量上的这类模出发，在交换 Gorenstein 环的塞格雷积上构造非交换保型解消（NCCR）或簇倾斜（CT）模的一般方法。为此，我们在它们的 Auslander 代数上工作，换言之，即在 Calabi-Yau 代数上工作。它们具有独特的同调性质，足以用于刻画 NCCR 或 CT 模。事实上，我们根据给定的两个此类代数构造一个 Calabi-Yau 代数，并由此推导出我们的结果。

3.1. p-塞格雷积。我们从分次环的一种构造开始；对于任意正整数 p，我们将其称为 p-塞格雷积，它是经典塞格雷积的推广。本小节中，我们令 k 为交换基环。所有张量积均取在 k上。对于一个 $\mathbb{Z}$-分次的 k-代数 Λ 和一个子集 $I \subset \mathbb{Z}$，我们定义 $\mathrm{proj}^I \Lambda := \mathrm{add}\{\Lambda(-i) \mid i \in I\} \subset \mathrm{proj}^{\mathbb{Z}} \Lambda$，即由次数为 i 且满足 $i \in I$ 的射影模生成的全子范畴。

Let

$$\Lambda' = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \Lambda'_i, \qquad \Lambda'' = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \Lambda''_i$$

是分次 k-代数。我们首先将张量积 $\Lambda' \otimes \Lambda''$ 视为一个 $\mathbb{Z}^2$-分次环。固定一个整数 $p > 0$，并考虑范畴

$$\mathscr{P} = \mathrm{add}\{\Lambda' \otimes \Lambda''(i, j) \mid 0 \leq i - j \leq p - 1\} \subset \mathrm{proj}^{\mathbb{Z}^2} \Lambda' \otimes \Lambda''.$$

取一个代表元，例如 $P = \bigoplus_{l=0}^{p-1} \Lambda' \otimes \Lambda''(l, 0)$，作为 $\mathscr{P}$上的 (1,1) 作用的代表，我们得到 $\mathscr{P} \simeq \mathrm{proj}^{\mathbb{Z}} \Lambda$，对应于分次代数

$$\Lambda = \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}^2}_{\Lambda' \otimes \Lambda''}(P, P(l, l)).$$

定义 3.1。我们将上面的 Λ 称为 p-塞格雷积，记为 Λ' 和 Λ''的塞格雷积。

对于 $p = 1$，这就是通常的塞格雷积。上述定义赋予 p-塞格雷积 Λ一个分次环结构。容易看出，若 Λ'' 是正分次的，那么 Λ 也正分次。但请注意，分次取决于代表元 P的选择，因此并非规范的。（例如，选择另一个代表元 $\bigoplus_{l=0}^{p-1} \Lambda' \otimes \Lambda''(0, -l)$会得到不同的分次。）尽管如此，作为无分次环， Λ 由分次环 Λ' 和 Λ'' 在 Morita 等价意义下唯一确定，因为 $\mathrm{proj}\,\Lambda$ 与轨道范畴 $\mathscr{P}/(1, 1)$ 等价。

在下文中，我们假设

$$\Lambda' = \bigoplus_{i \geq 0} \Lambda'_i, \qquad \Lambda'' = \bigoplus_{i \geq 0} \Lambda''_i$$

是正分次的，并且在 k 上是平坦的。接下来固定 $S' \in \mathrm{Mod}\ \Lambda'_0$（分别为 $S'' \in \mathrm{Mod}\ \Lambda''_0$），我们将其视为集中在次数 0 的 Λ'（分别为 Λ''）上的分次模。我们假设它们有投射分解

$$P' : \quad 0 \longrightarrow P'_{m'} \longrightarrow P'_{m'-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P'_1 \longrightarrow P'_0 \longrightarrow 0$$

$$P'' : \quad 0 \longrightarrow P''_{m''} \longrightarrow P''_{m''-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P''_1 \longrightarrow P''_0 \longrightarrow 0$$

分别属于 $\mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda'$ 和 $\mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda''$，并满足以下条件。

- 首项 P'_0（分别地，P''_0）由次数 0 的元素生成。
- 中间项由次数 $[0, p]$ 的元素生成。
- 末项 $P'_{m'}$（分别地，$P''_{m''}$）由次数 p 的元素生成。

现在，利用这两个复形，我们为每个 $0 \leq l \leq p-1$ 构造 Λ-模 $S'(l) \otimes S''$ 的一个投射分解。首先，沿稳定的 t-结构 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}^{\mathbb{Z}}\Lambda') = \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}^{\leq 0}\Lambda') \perp \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}^{>0}\Lambda')$ 截断复形 $P'(l)$（它与 $S'(l)$ 拟同构），将其实现为一个映射锥

$$X' \longrightarrow Y' \longrightarrow S'(l) \longrightarrow X'[1]$$

在 $\mathrm{per}^{\mathbb{Z}}\Lambda'$ 中，$X' \in \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}^{[1,p-l]}\Lambda')$ 与 $Y' \in \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}^{[-l,0]}\Lambda')$ 内。类似地，沿 $\mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}^{\mathbb{Z}}\Lambda'') = \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}^{<p-l}\Lambda'') \perp \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}^{\geq p-l}\Lambda'')$ 截断第二个复形 P''，得到一个三角

$$X'' \longrightarrow Y'' \longrightarrow S'' \longrightarrow X''[1]$$

在 $\mathrm{per}^{\mathbb{Z}}\Lambda''$ 中，$X'' \in \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}^{[p-l,p]}\Lambda'')$ 与 $Y'' \in \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}^{[0,p-l-1]}\Lambda'')$ 内。

命题 3.2。该序列的限制

$$X' \otimes X'' \longrightarrow Y' \otimes Y'' \longrightarrow S' \otimes S''(l,0) \longrightarrow X' \otimes X''[1]$$

在 $\mathrm{D}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}^2}\Lambda' \otimes \Lambda'')$ 中到 $\mathscr{P}$ 得到 $\mathrm{D}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda)$ 中的一个三角。因此，第一个映射的映射锥给出了 $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ 中 $S'(l) \otimes S''$ 的一个投射分解。

证明。将第一个映射延拓为三角

$$X' \otimes X'' \longrightarrow Y' \otimes Y'' \longrightarrow C \longrightarrow X' \otimes X''[1]$$

在 $\mathrm{D}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}^2}\Lambda' \otimes \Lambda'')$ 中，我们证明将 C 限制到 $\mathscr{P}$，换言之，取次数 $\{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq j-i \leq p-1\}$ 部分（注意符号的区别），得到 $S'(l) \otimes S''$，从而得到其解消。

首先，由于 $X' \in \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}^{[1,p-l]}\Lambda')$ 且 $X'' \in \mathrm{K}^{\mathrm{b}}(\mathrm{proj}^{[p-l,p]}\Lambda'')$，我们有 $X' \otimes X''$ 的每一项都属于 $\mathrm{add}\{\Lambda' \otimes \Lambda''(-i,-j) \mid 1 \leq i \leq p-l, p-l \leq j \leq p\}$。由此可知，将它们限制到 $\mathscr{P}$ 后，得到分次投射 Λ-模（准确地说，属于 $\mathrm{add}\{\Lambda(-j) \mid p-l \leq j \leq p\}$）。类似地，根据 Y' 和 Y'' 的位置，我们发现 $Y' \otimes Y''$ 的每一项限制后都属于 $\mathrm{add}\{\Lambda(-j) \mid 0 \leq j \leq p-l-1\}$。

接下来我们计算 C 的上同调。将八面体公理应用于复合映射 $X' \otimes X'' \to Y' \otimes X'' \to Y' \otimes Y''$，得到一个三角

$$S' \otimes X''(l,0) \longrightarrow C \longrightarrow Y' \otimes S'' \longrightarrow S' \otimes X''(l,0)[1]$$

在 $\mathrm{D}(\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}^2}\Lambda' \otimes \Lambda'')$ 中。对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，我们有 $H^n(S' \otimes X''(l,0)) = H^0S'(l) \otimes H^nX''$，它集中在次数 $\{(-l,j) \mid j \geq p-l\}$，这是由 X'' 的位置所决定的，因此限制到 $\mathscr{P}$ 时，上同调为 0。类似地，我们有 $H^n(Y' \otimes S'') = H^nY' \otimes H^0S''$。如果 $n \neq 0$，则存在同构 $H^nX' \xrightarrow{\simeq} H^nY'$，使其集中在次数 > 0。因此，当 $n \neq 0$ 时，$H^n(Y' \otimes S'')$ 集中在次数 $\{(i,0) \mid i > 0\}$，故限制到 $\mathscr{P}$ 上为 0。剩下需要考虑 $H^0(Y' \otimes S'') = H^0Y' \otimes S''$。将正合列 $H^0X' \to H^0Y' \to S'(l) \to 0$ 截断到次数 ≤ 0，由 X' 的位置可得同构 $H^0Y'_{\leq 0} \xrightarrow{\simeq} S'(l)$；又由于 Y' 的每一项都由次数 $\geq -l$ 的元素生成，因此我们有 $H^0Y'_{\leq 0} = H^0Y'_{[-p+1,0]}$。注意到 S'' 集中在次数 0，故 $H^0Y' \otimes S''$ 到 $\mathscr{P}$ 的限制同构于 $H^0Y'_{[-p+1,0]} \otimes S'' = S'(l) \otimes S''$。□

3.2. 有限全局维数的诺特代数。下一步，我们将上述构造专门化到以下模有限代数的情形。

设 k 是一个域，$R=\bigoplus_{i\geq 0}R_i$ 是正分次交换诺特 k-代数，且 R_0 有限维。

(1) Λ' 和 Λ'' 是正分次、有限模生成的分次 R-代数，其全局维数分别为 n' 和 n''。此外，Λ'/J' 或 Λ''/J'' 在 k 上可分，其中 J' 和 J'' 是雅各布森根。(2) $S'=\Lambda'/J'$ 和 $S''=\Lambda''/J''$。(3) $m'\geq n'$、$m''\geq n''$ 和 $p>0$ 是满足以下两个条件的整数。

- $\mathrm{Ext}^i_{\Lambda'}(S',\Lambda')$ 集中在 $0<i<m'$ 对应的次数 $[-p,0]$ 上，而在 $i=m'$ 对应的次数 $-p$ 上。
- $\mathrm{Ext}^i_{\Lambda''}(S'',\Lambda'')$ 集中在次数 $[-p,0]$（当 $0<i<m''$ 时）和次数 $-p$（当 $i=m''$ 时）。

例如，可以取 $m'>n'$ 和 $m''>n''$，从而对任何充分大的 p，第三个条件都成立。现在令

$$\Lambda=\bigoplus_{l\geq 0}\mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}^2}_{\Lambda'\otimes\Lambda''}(P,P(l,l))$$

对于 $P=\bigoplus_{l=0}^{p-1}\Lambda'\otimes\Lambda''(l,0)$，即 p-塞格雷积。

命题 3.4. p-塞格雷积 Λ 的全局维数为 $\leq m'+m''-1$。若 $m'=n'$ 且 $m''=n''$，则全局维数恰为 $n'+n''-1$。此外，半单 Λ-模 $S'(l)\otimes S''$ 的投射分解按命题 3.2 中的方法计算。

证明。设 $P'\to S'$ 和 $P'\to S''$ 分别为 $\mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda'$ 和 $\mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda''$ 中的极小投射分解。根据我们对 Ext 群所在位置的假设，这些分解满足上一小节中关于投射分解的条件。由此，我们得到命题 3.2 中 $S'(l)\otimes S''\in\mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Lambda$ 的一个投射分解。由于这些是所有的简单 Λ-模（除次数移位外），我们看到 Λ/J_Λ 的投射维数为 $\leq m'+m''-1$。由 [22, Theorem A.1] 可知，Λ 的全局维数为 $\leq m'+m''-1$。□

3.3. 塞格雷积的非交换解消。为陈述本文的一项主要结果，我们回顾一些与非交换解消相关的重要概念。我们用 $\mathrm{ref}\,A$ 表示交换环 A 上的有限生成自反模范畴。

定义 3.5. 设 R 是 Gorenstein 正规整环，且 $M\in\mathrm{ref}\,R$。

(1) 若 $\mathrm{End}_R(M)$ 的全局维数有限，则 [65] M 是非交换解消（NCR）。(2) 若 [65] M 是 NCR，且 $\mathrm{End}_R(M)\in\mathrm{CM}\,R$，则 [65] M 是非交换保型解消（NCCR）。(3) 若 $M\in\mathrm{CM}\,R$ 且满足下列条件，则 [37, 41] M 是 CT 模。

$$\begin{aligned}\mathrm{add}\,M&=\{X\in\mathrm{CM}\,R\mid\mathrm{Hom}_R(M,X)\in\mathrm{CM}\,R\}\\&=\{X\in\mathrm{CM}\,R\mid\mathrm{Hom}_R(X,M)\in\mathrm{CM}\,R\}\end{aligned}$$

若 $M\in\mathrm{ref}\,R$ 是 NCCR，则 $\mathrm{End}_R(M)$ 的全局维数必须等于 $\dim R$。此外，根据 [41, 推论 5.9]，CT 模恰好是包含 R 作为直和项的 NCCR。（注意，此处不需要 $\dim R=3$。）而且，当 R 只有孤立奇点时，CT 模不过是 $\mathrm{CM}\,R$ 中的一个 $(\dim R-1)$-簇倾斜对象，具体含义见下文定义 4.1。这些事实可表述为下文的“Auslander对应”。

定理3.6（[38, 41]）。设 R 是戈伦斯坦局部正规整环，且 $M\in\mathrm{ref}\,R$。那么以下条件等价。

(i) $M\in\mathrm{CM}\,R$ 且是一个CT模。(ii) $R\in\mathrm{add}\,M$，$\mathrm{gl.dim}\,\mathrm{End}_R(M)=\dim R$，且$\mathrm{End}_R(M)\in$是CM R。

我们指出下面这个平凡但很有用的例子。

例3.7。设 R 是一个正则环。那么 $R\in\mathrm{CM}\,R$ 是一个CT模。

我们需要比较 a 的 R 与其 Auslander代数 Γ 的不变量。假设 $\dim R=d$，并回顾：如果对每个简单 Γ-模 S，$\mathrm{RHom}_\Gamma(S,\Gamma)[d]\in\mathrm{mod}^{\mathbb{Z}}\Gamma^{\mathrm{op}}$ 是一个集中在次数 a 的简单 Γ^{op}-模，那么 Γ 具有 a-不变量 a。

引理 3.8. 设 R 是一个正分次诺特正规整环，$M \in \mathsf{ref}\ R$，且 $\Gamma = \mathrm{End}_R(M)$。

(1) 我们有 $\Gamma \simeq \mathrm{Hom}_R(\Gamma, R)$，视为分次双模。(2) 如果 $M \in \mathsf{ref}\ R$ 是非交换保正则解消，那么 R 和 Γ 具有相同的 a-不变量；当 $\dim R > 0$ 和Γ为正分次时，该不变量为负。

证明。(1) 这可以从同构 $\mathrm{Hom}_R(\Gamma, R) \simeq \Gamma$ 是典范的这一点看出，参见 [41, 引理 2.9]。

(2) 注意，由 (1) 可知 $\mathrm{RHom}_R(\Gamma, R) \simeq \Gamma$ 属于 $\mathsf{D}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{Z}}\Gamma^{\mathrm{e}})$，因为 $\Gamma \in \mathsf{CM}\, R$。于是存在同构 $\mathrm{RHom}_\Gamma(-, \Gamma) = \mathrm{RHom}_\Gamma(-, \mathrm{RHom}_R(\Gamma, R)) = \mathrm{RHom}_R(-, R)$，定义在 $\mathsf{D}(\mathsf{Mod}^{\mathbb{Z}}\Gamma)$ 上。由于任意简单Γ-模都是集中在 0 次数的有限长度 R-模，结论得证。利用 Γ 为正分次且具有有限全局维数，很容易看出a-不变量为负。□

现在我们可以陈述并证明这一结果了。设 k 是一个完美域，设 $R' = \bigoplus_{i\geq 0} R'_i$ 和 $R'' = \bigoplus_{i\geq 0} R''_i$ 是维数为 ≥ 2 的正分次交换戈伦斯坦正规整环，且 R'_0 和 R''_0 是有限维局部 k-代数。

定理 3.9. 假设 R' 和 R'' 具有相同的 a-不变量 $-p < 0$，并令 $R = R'\#R''$ 为塞格雷积。设 $M' \in \mathsf{ref}\ R'$ 和 $M'' \in \mathsf{ref}\ R''$ 为分次模，使得 $\mathrm{End}_{R'}(M')$ 和 $\mathrm{End}_{R''}(M'')$ 都是正分次的，并对每个 $q > 0$，令 $M^q = \bigoplus_{l=0}^{q-1} M'(l)\#M''$。

(1) 若 M' 和 M'' 是非交换消解，则对任意充分大的 q，M^q 是一个非交换解消。

(2) 若 M' 和 M'' 是非交换保正则解消，则 M^p 对于 R 是一个非交换保正则解消。

(3) 若 M' 和 M'' 是 CT 模，则 M^p 对于 R 是一个 CT 模。

证明。令 $\dim R' = d' + 1$、$\dim R'' = d'' + 1$，以及 $\Gamma' = \mathrm{End}_{R'}(M')$、$\Gamma'' = \mathrm{End}_{R''}(M'')$。由推论 2.2(2)，我们知道 $R := R'\#R''$ 是维数为 $d + 1 := d' + d'' + 1$、a-不变量为 $-p$ 的戈伦斯坦环。我们还知道 $R' \otimes R''$ 是正规环，因为每个因子都是正规环。

由命题 2.4 可知，自反模的塞格雷积是自反的，因此 $M^q \in \mathsf{ref}\ R$。注意，对于任意 $q > 0$，M^q 的自同态环是 Γ' 与 Γ'' 的 q-塞格雷积。事实上，由命题 2.4，$\mathrm{Hom}_R(M'(i)\#M'', M'(j)\#M'') = \mathrm{Hom}_{R'}(M'(i), M'(j))\#\,\mathrm{Hom}_{R''}(M'', M'') = \Gamma'(j-i)\#\Gamma''$；而 Γ' 与 Γ'' 的 q-塞格雷积的各分量为 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}}_{\Gamma'\otimes\Gamma''}(\Gamma'(i) \otimes \Gamma'', \Gamma'(j) \otimes \Gamma'') = (\mathrm{Hom}_{\Gamma'}(\Gamma'(i), \Gamma'(j)) \otimes \mathrm{Hom}_{\Gamma''}(\Gamma'', \Gamma''))_0 = (\Gamma'(j-i) \otimes \Gamma'')_0 = \Gamma'(j-i)\#\Gamma''$。由命题 3.4，该断言立即推出 (1)。

下文假设 M'和 M''都是 NCCRS。我们需要证明 $\mathrm{End}_R(M^p)$ 是科恩–麦考利 R-模。根据上述计算，这等价于证明对于 $-p < l < p$，$\Gamma'(l)\#\Gamma'' \in \mathsf{CM}\, R$。由定理 2.1 可知，$\mathrm{H}^q_{\mathfrak{m}'\#\mathfrak{m}''}(\Gamma'(l)\#\Gamma'')$ 同构于以下三个模的直和：

$$\mathrm{H}^q_{\mathfrak{m}'}(\Gamma'(l))\#\Gamma'', \qquad \Gamma'(l)\#\,\mathrm{H}^q_{\mathfrak{m}''}(\Gamma''), \qquad \bigoplus_{i=1}^{q} \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}'}(\Gamma'(l))\#\,\mathrm{H}^{q+1-i}_{\mathfrak{m}''}(\Gamma'').$$

由于 $\Gamma' \in \mathsf{CM}\, R'$ 且 $\Gamma'' \in \mathsf{CM}\, R''$，第三个模在 $q < d + 1$ 时为零。对于第一个模，我们只需考察 $\mathrm{H}^{d'+1}_{\mathfrak{m}'}(\Gamma')$。由局部对偶和引理 3.8 可得 $\mathrm{H}^{d'+1}_{\mathfrak{m}'}(\Gamma') = (D\,\mathrm{Hom}_{R'}(\Gamma', R'))(p) = D\Gamma'(p)$，因此它集中在次数 $\leq -p$。由此可知，对所有 $l > -p$，$\mathrm{H}^q_{\mathfrak{m}}(\Gamma'(l)\#\Gamma'') = 0$。类似地，只要 $l < p$，模 $\Gamma'(l)\#\,\mathrm{H}^{d''+1}_{\mathfrak{m}''}(\Gamma'') = 0$。因此我们得出 $\mathrm{End}_R(M^p) \in \mathsf{CM}\ R$，从而证明了 (2)。

最后，如果 M'和 M''是 CT 模，则它们含有投射直和项，因此 M^p也含有投射直和项。因此，M^p 是 R上的 CT 模。这就证明了 (3)。□

即使两个环 R' 和 R'' 具有不同的 a不变量，也可以对分次进行倍乘，使 a不变量调整为相同的值。由此得到以下推论。

推论 3.10. 设 $R' = \bigoplus_{i\geq 0} R'_i$的 a不变量为 $-p'$，且 $R'' = \bigoplus_{i\geq 0} R''_i$的 a不变量为 $-p''$。设 p是 p' 和 p'' 的最小公倍数，其中 $p/p' = q'$ 和 $p/p'' = q''$。那么，只要 R' 和 R'' 具有非交换保正则解消（分别地，CT 模），$(R')^{(q'')}\#(R'')^{(q')}$ 就具有非交换保正则解消（分别地，CT 模）。

证明。对于分次环 A 和正整数 n，我们用 ${}^nA$ 表示分次放大后的分次环，即当 $n \mid i$时，$({}^nA)_i = A_{i/n}$；否则为 0。显然，这一构造会放大 a-不变量。我们可以将定理 3.9 应用于 ${}^{q'}R'$ 和 ${}^{q''}R''$，它们的 a-不变量均为 $-p$。它们的塞格雷积为 $\bigoplus_{i\geq 0}({}^{q'}R')_i \otimes ({}^{q''}R'')_i$,

其 i 次分量仅当 i 是 q' 和 q''的公倍数时才非零。由于它们互素，我们可以将塞格雷积写为 $\bigoplus_{j\geq 0} R'_{q''j}\otimes R''_{q'j}$，这不过就是 $(R')^{(q'')}\#(R'')^{(q')}$。□

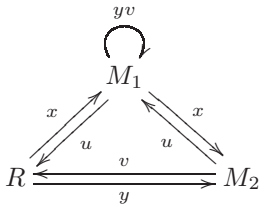
回顾一下，对于正则局部环 S，自由模 $S\in \mathsf{CM}\,S$ 显然是 CT 模。因此，我们得到了对标准分次下 [34] 的推广。

推论 3.11. 设 k 是任意域，且 $S_i = k[x_{i,0},\dots,x_{i,d_i}]$ 是满足 $\deg x_{i,\,j} = a_{i,\,j} > 0$ 的多项式环。假设 $\sum_{j=0}^{d_i} a_{i,\,j}$ 对所有 $1\leq i\leq n$ 都相同。那么塞格雷积 $S_1\#\cdots\#S_n$ 有一个由秩1模构成的 CT 模。

证明。注意，我们并不需要 k 是完美的，因为它仅在定理 3.9 的证明中用于确保 $R'\otimes R''$ 是正规 l. 关于秩的断言可由构造直接看出。 □

需要指出的是，即使 R' 和 R'' 都只有孤立奇点（甚至是正则的），塞格雷积也未必是孤立奇点。（因此，我们需要 CT 模的概念，而不仅仅是簇倾斜对象。）

例3.12。设 $R' = k[x,y]$、$R'' = k[u,v]$ 满足 $\deg x = \deg u = 1$ 且 $\deg y = \deg v = 2$。它们具有 a-不变量 -3，而 $R'\in \mathsf{CM}\,R'$ 和 $R''\in \mathsf{CM}\,R''$ 显然都是 CT 模。因此，$R := R'\#R''$（它与 $k[xu,x^2v,yu^2,yv]\simeq k[a,b,c,d]/(a^2d-bc)$ 同构，是一个复合 A_2-奇点）具有一个 CT 模 $R\oplus M_1\oplus M_2$，满足 $M_i = R'(i)\#R''$，其 Auslander代数是 R' 和 R'' 的 3-Segre积。它由下列带有交换关系的箭图表示。



更多例子请参见第 5 节。

4. Gorenstein rings of hereditary representation type

我们引入将要研究的交换环类。这些定义受到倾斜理论和簇倾斜理论的启发，后者体现了交换环与有限维代数的表示理论之间的相互作用。

4.1. 簇范畴与奇点范畴的背景。首先介绍簇倾斜对象的概念，它在交换代数和有限维代数中都发挥着重要作用。

定义 4.1（[37]）。设 $d\geq 1$ 为整数，且 $\mathscr{E}$ 为一个具有足够多投射对象和内射对象的正合范畴，或一个三角范畴。若函子有限子范畴 $\mathscr{M}\subset\mathscr{E}$ 满足以下等式，则称其为 d-簇倾斜。

$$\begin{aligned}\mathscr{M} &= \{X\in\mathscr{E}\mid \operatorname{Ext}^i_{\mathscr{E}}(M,X)=0 \text{ for all } M\in\mathscr{M} \text{ and } 0<i<d\}\\ &= \{X\in\mathscr{E}\mid \operatorname{Ext}^i_{\mathscr{E}}(X,M)=0 \text{ for all } M\in\mathscr{M} \text{ and } 0<i<d\}\end{aligned}$$

如前所见，有许多交换环的例子，其 $\mathsf{CM}\,R$ 具有簇倾斜模。另一方面，下面的簇范畴构造 [10, 45, 2, 23, 46] 及其推广 [48, 25, 28] 为有限维代数提供了对应物，因此可作为 Cohen-Macaulay 模稳定范畴 [39, 28]的模型。

定义 4.2. 设 H 为有限维遗传代数，$1\neq d\in\mathbb{Z}$ 和 $a\neq 0$。对于双模 $V\in \mathsf{per}\ H^e$，满足 $V^{\otimes^{\mathrm{L}}_H a}\simeq \mathsf{RHom}_H(DH,H)[d]$ 属于 $\mathsf{D}(H^e)$，a折叠的 d簇范畴为轨道范畴

$$\mathrm{C}_d^{(1/a)}(H) := \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} H)/-\otimes^{\mathrm{L}}_H V.$$

注意，我们将使用 V 的以下特殊形式（见定义 4.8）： U 是一个双模，满足$U\otimes_H^{\mathrm{L}}{}^{(d-1)}=\mathrm{RHom}_H(DH,H)[1]$且 $V=U[1]$，因此 $V^{\otimes_H^{\mathrm{L}}(d-1)}\simeq\mathrm{RHom}_H(DH,H)[d]$。

遗传范畴的导出范畴所蕴含的重要结论之一，是 Keller 的以下定理 [45], ；该定理尤其表明，上述轨道范畴具有自然的三角范畴结构（当 $d\neq 1$ 时）。对于加性范畴中的加性子范畴 $\mathscr{U}$、$\mathscr{V}$，我们用 $\mathscr{U}\vee\mathscr{V}$ 表示包含 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{V}$ 的最小加性子范畴。

定理 4.3（[45]）。设 H 是有限维遗传代数，并设 T 是一个（H， H）-双模复形，使得 $F=-\otimes_H^{\mathrm{L}}T$ 给出 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\,H)$ 的一个自等价，并满足以下条件。

（i）对于每个 $X\in\mathrm{mod}\ H$，至多存在有限多个 $i\in\mathbb{Z}$ 使得 $F^iX\in\mathrm{mod}\ H$。（ii）存在一个整数 n，使得 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ H)$ 中任一不可分解对象的 F-轨道都与子范畴 $\mathrm{mod}\ H\vee(\mathrm{mod}\,H)[1]\vee\cdots\vee(\mathrm{mod}\ H)[n]$ 相交。

那么，轨道范畴 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\,H)/F$ 具有自然的三角范畴结构。

在下文中，我们主要考虑完备局部情形下的交换环。从表示论的角度来看，这样做并无妨碍，以下结果对此作了说明。

命题 4.4 ([56])。设 R 是交换Gorenstein环，其奇点集由有限多个极大理想 $\{\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_n\}$构成。令 R_i为 R 的 $\mathfrak{m}_i$-adic 完备化。则 CM $R\simeq\prod_{i=1}^n$与 CMR_i 在相差直和项的意义下相同。

命题 4.5 ([48, 附录 A])。设 $R=\bigoplus_{i\geq 0}R_i$ 是正分次交换 Gorenstein 环，且 R_0 有限维。假设 R 的奇点集由 $\mathfrak{m}=\bigoplus_{i>0}R_i$ 定义，并令$\frown R=\prod_{i\geq 0}R_i$ 为在 $\mathfrak{m}$处的完备化。则典范函子

$$\underline{\mathrm{CM}}\,R\to\underline{\mathrm{CM}}\,R_{\mathfrak{m}}\to\underline{\mathrm{CM}}\,\widehat{R}$$

是模掉直和项后的等价。

4.2. 定义与首批例子。现在我们可以给出遗传表示型 Gorenstein 环的定义。根据分次或非分次/完备的情形，我们按照倾斜理论的启示给出以下定义。

定义 4.6. 设 R 是域 k 上的交换Gorenstein环。

(1) 假设 $R=\bigoplus_{i\geq 0}R_i$ 是正分次的，使得 R_0 是有限维局部 k-代数，且具有分次孤立奇点。若存在一个三角等价，我们称 R 为分次遗传表示型。

$$\underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}}R\simeq\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\,H)$$

其中 H 是某个有限维遗传代数。

(2) 假设 R 是完备局孤立奇点。若存在一个三角等价，我们称 R 具有遗传表示型。

$$\underline{\mathrm{CM}}\,R\simeq\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\,H)/F$$

对于某个有限维遗传代数 H 以及三角自等价 F： $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\,H$).

我们将看到，分次遗传表示型蕴含其完备化具有遗传表示型（见下文定理 4.13）。我们还给出一个更强的版本，其中要求自同构 F 是最佳选择。为此，我们回顾以下结构定理。回想一下，有限维代数 H 是 1-表示无限的，当且仅当 H 的每个连通分支都是表示无限遗传代数。此外，我们用 J_A 表示环 A的雅各布森根。

定理 4.7（[26]）。设 $d\geq 2$ 和 $\mathscr{T}$是一个代数的 d-Calabi-Yau 三角范畴，且具有一个 d-簇倾斜对象 T。假设 $H=\mathrm{End}_{\mathscr{T}}(\bigoplus_{i=0}^{d-2}T[-i])$是 1-表示无限的，且 H/J_H 在k上可分。那么存在一个三角等价

$$\mathscr{T}\simeq\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\,H)/\tau^{-1/(d-1)}[1]$$

对于 Auslander-Reiten 平移的一个自然定义的第 $d-1$ 个根 $\tau^{1/(d-1)}$。

关于 τ 的这个根的定义，请参见 [26, 定理 4.14]；其性质见下文注4.9。根据这个结构定理，右侧是源自遗传代数的 d-Calabi-Yau 范畴的规范形式，由此引出以下定义。

定义 4.8. 设 R 是一个维数为 $d+1 \geq 3$的完备 Gorenstein 局部孤立奇点。若存在一个三角等价

$$\underline{\mathrm{CM}}\, R \simeq \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, H)/\tau^{-1/(d-1)}[1] =: \mathrm{C}_d^{(1/(d-1))}(H)$$

对某个有限维遗传代数 H成立，其中 $\tau^{-1/(d-1)}$ 是 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ H)$ 的一个自等价，由一个双模复形 $U \in \mathrm{per}\ H^e$给出，并满足 $U^{\otimes^{\mathrm{L}}_H (d-1)} \simeq \mathrm{Hom}_H(DH, H)[1]$属于 $\mathrm{D}(H^e)$。

注4.9. 根据 [26, 推论 6.3], ，必要时将 H 替换为一个导出等价的遗传代数，我们知道存在一个满足以下条件的投射模 P。

- 添加 $H =$添加$(\bigoplus_{i=0}^{d-2} P \otimes^{\mathrm{L}}_H U^{\otimes^{\mathrm{L}} H^i})$,
- $\mathrm{Hom}_H(P \otimes^{\mathrm{L}}_H U^{\otimes^{\mathrm{L}} H^i}, P) = 0$对于 $1 \leq i \leq d-1$.

在这种情况下，投射模 P给出 d-簇倾斜对象 $\mathscr{T} := \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ H)/\tau^{-1/(d-1)}[1]$，使得 $\mathrm{End}_{\mathscr{T}}(\bigoplus_{i=0}^{d-2} P[-i])$ $= H$ ([26, 推论 6.4])。

虽然遗传型是分次遗传型的直接非分次类比，但严格遗传型的概念与簇倾斜理论以及我们将在后续工作中引入并研究的“严格倾斜”概念关系更为密切 [27]。

关于遗传表示型定义可能的变体，请参见下文第4.4节。

回想一下，若 CM R中存在一个加性生成元，则称科恩-麦考利环具有有限表示型。类似地，若存在一个对象$M \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}} R$，使得 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}} R = \mathrm{add}\{M(i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$，则称分次科恩–麦考利环具有分次有限表示型。

首先注意，“有限表示型蕴含遗传表示型”，这是基于平移箭图的组合学 [58, 30, 68]对有限三角范畴结构定理 [1, 24] 的一种解释。尽管下述结果的某些部分可从交换环情形下的分类得出，我们仍将其陈述出来，因为这些结构定理在更一般的情形下也成立。

命题4.10. 设 R 是代数闭域 k上的一个交换 Gorenstein 环。

(1) [1, 定理 7.2] 假设 R 是有限表示型。那么，存在一个三角等价 CM $R \simeq \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ kQ)/F$，其中 Q 是一个~~-~~Dynkin 箭图，且 F是一个三角自等价，前提是 CM R是标准的。特别地， R 是遗传表示型。(2) [24, 定理 7.3] 假设 $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ 是正分次的，且 $R_0 = k$，并且它是分次有限表示型。那么，存在一个三角等价 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}} R \simeq \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, kQ)$，其中 Q是一个 Dynkin 箭图。特别地， R是分次遗传表示型。

现在我们来讨论非平凡的例子。据作者所知，除有限表示型之外，目前已知的遗传表示型交换 Gorenstein 环的例子仅有以下这些：Keller–Reiten [47] 以及 Keller–Murfet–Van den Bergh [48], 的结果，这些结果基于 Iyama–Yoshino [42], 给出的例子；正是这些例子促使我们研究遗传类型的交换环。

定理 4.11。 我们用 Q_n 表示顶点之间有 n 条箭的 $\circ \xrightarrow{n} \circ$ Kronecker 箭图。

(1) [42, 47] 设 $R = k[[x, y, z]]^{(3)}$。则存在一个三角等价 CM $R \simeq \mathrm{C}_2(kQ_3)$。(2) [42, 48] 设 $R = k[[x, y, z, w]]^{(2)}$。则存在一个三角等价 $\mathrm{CM} R \simeq \mathrm{C}_3^{(1/2)}(kQ_6)$。

事实上，这些都属于严格遗传表示型。

为了在下一小节讨论（分次）遗传表示型的一些推论，这里先陈述一个小备注。

引理 4.12. 设 $R = \bigoplus_{i \geq 0} R_i$ 是 Gorenstein 孤立奇点， R_0 是一个域，并且存在一个三角等价 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}} R \simeq \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, A)$，其中 A 是有限维代数。假设 R 的 a-不变量为 0。则有如下结论。

(1) A 是半单的。(2) 存在一个三角等价 CM $R \simeq \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ A)/F$，其中 F 是一个自等价。(3) R 是有限表示型且具有~~遗传~~表示型。

证明。由于 R 的 a-不变量为 0，分次 Auslander-Reiten 对偶性表明，$\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}R$ 的 Serre 函子为$[\dim R - 1]$，因此 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ A)$ 是 Calabi-Yau 三角范畴。这迫使 A 为半单。随后很容易（或利用定理 4.3）推出一个三角等价 $\mathrm{CM}R \simeq \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ A)/F$，其中自等价$F$ 对应于 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ A)$~~上~~的次数移位 (1)，该移位置于 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}R$ 上。由此可知，R 也具有有限表示型和遗传表示型。□

4.3. 遗传表示型的推论。由于遗传代数在所有有限维代数中非常特殊，因此可以利用有限维代数理论推导出交换环的各种性质。本节将介绍其中一些。

4.3.1. 可分次性。首先是 Cohen-Macaulay 模的可分次性。我们也可以将其视为：分次遗传型蕴含完备化具有遗传型，这与有限表示型的相应结果类似 [6][69, 章 15]。

定理 4.13. 设 $R = \bigoplus_{i\geq 0} R_i$ 是一个正分次交换 Gorenstein 环，R_0 是一个域，且$\widehat{R} = \prod_{i\geq 0} R_i$ 是其完备化。假设 R 具有分次遗传表示型。

(1) $\widehat{R}$具有遗传表示型。(2) 每个 Cohen-Macaulay $\widehat{R}$-模都可分次，也就是说，函子 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}R/(1) \to \mathrm{CM}\ \widehat{R}$ 是一个等价。

证明。由命题 4.5 可知 $\mathrm{CM}R \simeq \mathrm{CM}\ \widehat{R}$。此外，借助 [28] 给定的三角等价 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}R \simeq \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ H)$，可得 $\mathrm{CM}\ R \simeq (\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ H)/F)_{\triangle}$，~~其中自等价~~ F是 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ H)$ 上与 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}R$ 上的次数移位 (1) 对应的函子，而 $(-)_{\triangle}$ 表示典范三角包络 [45]。~~剩~~下只需证明轨道函子 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, H) \to \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ H)/F$是稠密的。令 $M \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}R$为与$H \in \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, H)$对应的对象。我们只需验证定理 4.3 中的条件。

(i) 注意，不可分解对象 $X \in \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ H)$ 属于 $\mathrm{mod}\, H$，当且仅当 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{D}(H)}(H, X) \neq 0$。因此，我们必须证明，对于任意不可分解的 $N \in \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}R$，空间 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}}_R(M, N(i))$ ~~对~~几乎所有 $i \in \mathbb{Z}$ ~~都~~为零。这是因为 R 是孤立奇点，所以空间 $\mathrm{Hom}_R(M, N) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}}_R(M, N(i))$ 是有限维的。

(ii) 令 $d = \dim R$，并令 a 为 R 的 a-不变量。根据引理 4.12，只需考虑情形$a \neq 0$。比较 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}}R \simeq \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, H)$ 的 Serre 函子可得 $(a)[d-1] \leftrightarrow \nu := - \otimes^{\mathbb{L}}_H D\!H$，因此 $(a) \leftrightarrow \nu_{d-1} := \nu \circ [-d+1]$。注意，只需验证 F^a 的条件，因而只需验证 ν_{d-1}。若$d \geq 3$，则 ν_{d-1} 在 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ H)$ 上的作用的一个基本域可取为 $(\mathrm{mod}\ H) \vee (\mathrm{mod}\, H)[1] \vee \cdots \vee (\mathrm{mod}\ H)[d-3] \vee (\mathrm{proj}\, H)[d-2]$。因此，任意一个不可分解对象的 ν_{d-1}-轨道，尤其会与 $\mathrm{mod}\ H \vee (\mathrm{mod}\ H)[1] \vee \cdots \vee (\mathrm{mod}\ H)[d-2]$相交。若 $d = 2$，则有 $\nu_{d-1} = \tau$，即 Auslander-Reiten 平移。于是，$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{HomDb}(\mathrm{mod}\ H)(H, \tau^{-i}H) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}}_R(M, M(ia))$ 有限维~~，这~~意味着H 是 Dynkin 型。因此，上述子范畴 $\mathrm{proj}\, H$ 仍是 ν_{d-1}的一个基本域，所以任意一个 ν_{d-1}-轨道都会与 $\mathrm{mod}\ H$相交。最后，若 $d \leq 1$，则基本域变为 $\mathrm{mod}\ H \setminus \mathrm{inj}\, H$（对应$d = 1$），以及 $(\mathrm{mod}\ H)[-1] \vee \mathrm{mod}\ H \setminus \mathrm{inj}\ H$（对应 $d = 0$），其中“$\setminus \mathrm{inj}\, H$”表示这些直和项不得属于 $\mathrm{inj}\ H$，因此该断言成立。□

4.3.2. 增强的唯一性。现在来考察严格遗传表示型带来的推论。考虑三角范畴

$$\mathscr{T} = \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, H)/\tau^{-1/(d-1)}[1].$$

那么，根据注4.9，$P \in \mathscr{T}$ 是一个 d 簇倾斜对象；由 [26, 推论 6.4]，，我们有 $H = \mathrm{End}_{\mathscr{T}}(\bigoplus_{i=0}^{d-2} P[-i])$。因此，具有严格遗传表示型的一个 $(d+1)$ 维戈伦斯坦环 R 自然拥有一个 d 簇倾斜对象 $T \in \mathrm{CM}\, R$，使得 $\mathrm{End}_R(\bigoplus_{i=0}^{d-2} \Omega^i T)$ 是遗传的。

回忆一下，三角范畴 $\mathscr{T}$的增强是指满足 $\mathrm{per}\,\mathscr{A} \simeq \mathscr{T}$ 的 dg 范畴 $\mathscr{A}$。如果任意两个增强都导出 Morita 等价，则称该三角范畴具有唯一增强。由此可得 $\mathrm{CM}R$ 的增强具有唯一性，这里重复陈述自 [26]的结果。

定理 4.14. 设 R 是完美域上的一个维数为 ≥ 3 、具有严格遗传表示型的完备 Gorenstein 局部孤立奇点。那么 CM R 具有唯一增强。

证明。由 [26, 定理 4.19] 可直接推出。 □

4.3.3. 簇倾斜对象的直和项数量。设 R 是一个严格遗传表示型的交换环。我们借助三角等价研究 CM R 中的 d-簇倾斜对象

$$\underline{\mathrm{CM}}\, R \simeq \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, H)/\tau^{-1/(d-1)}[1].$$

更确切地说，我们在遗传代数一侧进行研究，并利用簇范畴 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ H)/\tau^{-1/(d-1)}[1]$ 中的 d-簇倾斜对象与导出范畴 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, H)$ [29] 中的 silting 对象之间的对应关系。作为应用，我们给出以下关于 CM R 中 d-簇倾斜对象集合结构的结果。需要指出的是，这一结果在 $d+1=3$ 的情形下（例如 [38, 57]）已广为人知，但在高维情形下仍有许多未解问题。

定理 4.15。设 R 是一个维数为 $d+1\geq 3$ 且具有严格遗传表示型的完备 Gorenstein 局部孤立奇点交换环。那么，CM R 中任意 d-簇倾斜对象都有相同数量的两两不同构的不可分解直和项。

证明。只需考虑稳定范畴。我们用 $F=\tau^{-1/(d-1)}[1]$ 表示 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, H)$ 上取轨道所用的自等价。在 [29] 中，我们将证明，$\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ H)/F$ 中任意 d-簇倾斜对象都可提升为 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ H)$ 中的一个对象 $T\in$，使得 $\bigoplus_{i=0}^{d-2} F^iT$ 是 $\mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\ H)$ 中的一个 silting 对象，并且当 $i\neq j$ 时，add $F^iT\cap$ = add $F^jT=0$。若用 $|X|$ 表示 X 的直和项数，则可得 $|T|=|H|/(d-1)$，这是一个常数。□

注 4.16。我们指出，上述结果为非交换 Bondal–Orlov 猜想 [65] 提供了证据；回顾一下，该猜想断言，对于交换 Gorenstein正规整环 R，只要 M 和 N 是 R 的非交换保正则解消（例如簇倾斜对象），自同态环 $\mathrm{End}_R(M)$ 和 $\mathrm{End}_R(N)$ 就导出等价。特别是，预期 M 和 N 具有相同数量的直和项；对于严格遗传表示型的 R，我们已经证明了这一点。

4.4. 定义的变体。我们来讨论遗传表示型定义的一些可能变体。这些变体基于这样的例子：其中以遗传阿贝尔范畴取代“有限维代数 H 的模 H”。我们不写出定义 4.6 的类比形式，而是给出一些在这一广义意义下具有遗传表示型的 Gorenstein 环的例子。

首先，我们给出一个来自 Geigle-Lenzing 加权射影直线的例子。

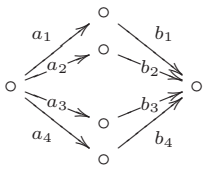
例 4.17。设 $R=k[x,y]/(f)$ 是一个分次一维超曲面奇点，由以下任一形式给出

$$f=\prod_{i=1}^{4}(x-\alpha_i y),\quad \deg x=\deg y=1 \qquad \text{or} \qquad f=\prod_{i=1}^{3}(x-\alpha_i y^2),\quad \deg x=2,\deg y=1.$$

根据 [13, 命题 2.4]，我们知道存在一个三角等价

$$\underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}} R \simeq \mathrm{D^b}(\mathrm{mod}\, A),$$

对于某个有限维代数 A，它可以取为类型为 (2, 2, 2, 2) 的典范代数。因此，它可由下述箭图及关系表示，其中某个 $\lambda\in k\setminus\{0,1\}$。



$$b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=0$$

$$b_1a_1+b_2a_2+\lambda b_4a_4=0$$

由于 A 与 Geigle-Lenzing 的加权射影直线 X 上的 coh X 导出等价，因此我们有一个三角等价

$$\underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}} R \simeq \mathrm{D^b}(\mathrm{coh}\, X)$$

对于遗传阿贝尔范畴 coh X。因此，R 属于“分次遗传表示型”。

第二个例子是在这一背景下对一个具有可数表示型的 Gorenstein 环的诠释。

例子 4.18。考虑环

$$R = k[[x, y]]/(y^2),$$

该环称为可数表示型的科恩-麦考利环，参见 [51, 第 14] 章。我们在 R 上定义分次，令 $\deg x = 0$，且 $\deg y = 1$。于是由 Minamoto–Yamaura 定理 [52]，可得三角等价

$$\underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}} R \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} k[[x]]).$$

事实上， R 在 [52, 定义 4.4、定理 5.3], 的意义下是同调良好分次的，因此典范函子 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} k[[x]]) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod}^{\mathbb{Z}} R) \twoheadrightarrow \mathrm{CM}^{\mathbb{Z}} R$ （在 [52] 中称为 Happel 函子）由 [52, 定理 1.3] 可知是一个等价。由于 $k[[x]]$ 是遗传的，我们可以认为 R 具有 “ 分次遗传表示型 ”。由于 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{mod} k[[x]])$ 中的对象很容易分类，我们由此得到 $\mathrm{CM}^{\mathbb{Z}} R$ 中对象的分类。

我们还要指出 Orlov 定理的以下一个应用。

例 4.19. 设 $S = k[x, y, z]$，将其视为分次环，其中 $\deg x = \deg y = \deg z = 1$，并设 $f \in S$ 是一个次数为 3 的齐次元素，使得 $R = S/(f)$ 是一个孤立奇点。则相应的射影簇 $E = \operatorname{Proj} R$ 是一条（光滑）椭圆曲线。由于分次环 R 的 a-不变量为 0，Orlov 定理 [55] 给出一个三角等价

$$\underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}} R \simeq \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{coh} E).$$

由于 $\operatorname{coh} E$ 是一个此处遗传阿贝尔范畴，我们可以说 R 具有“分次遗传表示型 ”.

5. Applications of the Morita-type theorem

我们给出严格遗传表示型的交换 Gorenstein 环的（非平凡）例子。给出范畴等价的最有力结果之一是 Morita 型定理。我们针对较小维数重述定理 4.7，并补充一些关于自同态环的断言。

定理 5. 1. 设 $\mathscr{T}$ 是一个代数 d-CY 三角范畴，且具有一个 d-簇倾斜对象 T。

(1) [47] 假设 $d = 2$ and $H = \operatorname{End}_{\mathscr{T}}(T)$ 是遗传的。那么存在一个三角等价

$$\mathscr{T} \simeq \mathrm{C}_2(H).$$

(2) [26, 定理 1.2、1.3(2)] 假设 $d = 3$ and $\operatorname{End}_{\mathscr{T}}(T)$ 是遗传的。那么 $H = \operatorname{End}_{\mathscr{T}}(T \oplus T[-1])$ 是遗传的，并且存在一个三角等价

$$\mathscr{T} \simeq \mathrm{C}_3^{(1/2)}(H)$$

前提是 H 是 1-表示无限的。

(3) [26, 定理 1.2、1.3(3)] 假设 $d = 4$ and $\operatorname{End}_{\mathscr{T}}(T)$ 是半单的。那么 $H = \operatorname{End}_{\mathscr{T}}(T \oplus T[-1] \oplus T[-2])$ 是遗传的，并且存在一个三角等价

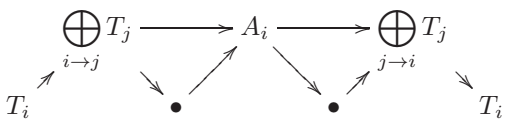
$$\mathscr{T} \simeq \mathrm{C}_4^{(1/3)}(H)$$

前提是 H 是 1-表示无限的。

此外，对于情形 $d = 3$,4，以下观察说明如何根据高阶几乎分裂序列，从较小的端同态代数 $\operatorname{End}_{\mathscr{T}}(T)$ 计算较大的端同态代数 $H = \operatorname{End}_{\mathscr{T}}(T \oplus \cdots \oplus T[-(d-2)])$。

定理 5.2（[26, 命题 2.13，2.22]）。设 $\mathscr{T}$ 为一个具有簇倾斜对象 T的 d-CY 三角范畴，且 d。

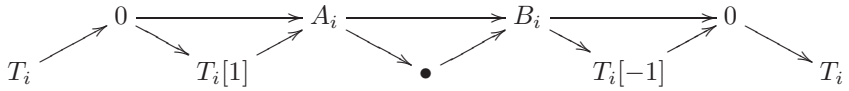
（1）假设 $d = 3$ 且 $\operatorname{End}_{\mathscr{T}}(T) = kQ$，其中 Q是一个有限无环箭图。考虑以下 3-几乎分裂序列



~ ~在 T 的每个直和项 T_i 处。然后，$\operatorname{End}_{\mathscr{T}}(T \oplus T[-1]) = kQ$ 对应于如下构造的箭图 Q：

- 取 Q 的两个副本 $Q_{(1)}$ 和 $Q_{(2)}$。
- 从 $i \in Q_0$ 到 $j \in Q_0$ 添加 n_{ij} 条箭 $i_{(1)} \to j_{(2)}$，其中 n_{ij} 是 A_i 中的直和项 T_j 的数量。

(2) 假设 $d = 4$ 和 $\mathrm{End}_{\mathscr{T}}(T) = \prod_{i=1}^{n} k$，即 k 的 n 个副本的直积。考虑 4-几乎分裂序列



$\sim$ $\sim$在 T 的每个直和项 T_i 处。则对于如下构造的箭图 Q，$\mathrm{End}_{\mathscr{T}}(T \oplus T[-1] \oplus T[-2]) = kQ$：

- 它有 $3n$ 个顶点 $\{(i, a) \mid 1 \le i \le n, a = 1, 2, 3\}$。
- 从 $(i, 1)$ 到 $(j, 2)$、从 $(i, 2)$ 到 $(j, 3)$，以及从 $(j, 1)$ 到 $(i, 3)$ 添加 m_{ij} 条箭，其中 m_{ij} 是 B_j 中直和项 T_i 的数量。

注5.3. 在上面的 (1) 中，我们有 $n_{ij} = n_{ji}$ ([26, 命题 2.13])。类似地，在 (2) 中，m_{ij} 等于 B_j ([26, 命题 2.22]) 中直和项 T_i 的数量。

我们给出一些可应用上述定理的交换 Gorenstein 环的例子。对于维数 3、4 和 5，我们各给出一个例子。

5.1. 维数 3。我们给出一个 3 维交换 Gorenstein 环，其 Cohen-Macaulay 模的稳定范畴具有一个 2-簇倾斜对象，且其自同态环是遗传端同环，因此可以应用定理 5.1(1)。设

$$R = k[[x, y]]^{(2)} \# k[[u, v]]^{(2)}$$

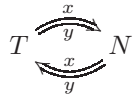
是第二 Veronese 子环的（完备）塞格雷积，其中我们在 $k[[x, y]]^{(2)}$ 上给出一个完备的 $\mathbb{Z}$-分次，其 n 次数部分由 x、y 中次数为 $2n$ 的多项式构成，$k[[u, v]]$ 也同样如此。我们的结果是，这个环具有遗传表示型。

定理 5.4. 设 $R = k[[x, y]]^{(2)} \# k[[u, v]]^{(2)}$ 是多项式环的 Veronese 子环的塞格雷积。那么我们有一个三角等价

$$\underline{\mathrm{CM}}\, R \simeq \mathrm{C}_2(kQ)$$

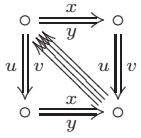
对于 $Q = \circ \Longrightarrow \circ \Longleftarrow \circ$.

证明。众所周知，二维 A_1-奇点 $T = k[[x, y]]^{(2)}$ 具有有限表示型，且有一个加性生成元（换言之，一个 1-簇倾斜对象） $k[[x, y]] = T \oplus N$，其中 N 由奇数次数的幂级数组成。它的自同态环由下方的箭图及交换关系给出。



我们通过令 N 的 n 次数部分为次数为 $2n + 1$ 的多项式，为其赋予完全分次；这在自同态环 $\mathrm{End}_T(T \oplus N)$ 上诱导出正分次。就上述箭图而言，这一分次规定向右的箭次数为 0，向左的箭次数为 1。我们为 $k[[u, v]]$ 对应的对象赋予相同的分次。

于是，由定理 3.9，塞格雷积 $R = k[[x, y]]^{(2)} \# k[[u, v]]^{(2)}$ 有一个 2-簇倾斜对象，其自同态环是两个 $\mathrm{End}_T(T \oplus N)$ 的 (1-)塞格雷积。它由下方的箭图及交换关系给出（其中，对角线上的箭表示 xu、yu、xv、yv）。



由此可知，稳定端同态环是上述箭图 $\circ \overset{x}{\underset{y}{\Longrightarrow}} \circ \overset{u}{\underset{v}{\Longleftarrow}} \circ$ 的路径代数。于是定理 5.1(1) 适用，并得出所需结果。

□

5.2. 4维。令 $S = k[[x,y,z,u,v]]$ 为一个含 5 个变量的幂级数环，我们将其视为一个完备的 $\mathbb{Z}^2$-分次环，其中 $\deg x = \deg y = \deg z = (1,0)$，$\deg u = (0,1)$，且 $\deg v = (0,2)$。我们感兴趣的奇点是 Veronese 子环

$$R = S^{(1,1)}.$$

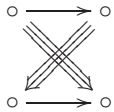
因此，R 同构于 $S' = k[[x,y,z]]$ 与 $S'' = k[[u,v]]$ 的塞格雷积，其中 $\deg x = \deg y = \deg z = 1$ 且 $\deg u = 1$，$\deg v = 2$。这是一个 4维 Gorenstein 孤立奇点。对于每个 $i \in \mathbb{Z}$，我们定义（完全分次的）R-模 M_i 如下：

$$M_i = \prod_{j\in\mathbb{Z}} S_{(i,0)+(j,j)}.$$

我们也可以将其写成塞格雷积 $M_i = S'(i)\#S''$。众所周知（例如使用引理 2.3），每个 M_i 都是自反的，但只有一小部分是 Cohen-Macaulay。事实上，在这种情况下，M_i中属于 Cohen-Macaulay 模的有 $M_0 = R$、$M_{\pm1}$和 $M_{\pm2}$。

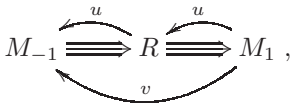
定理 5.5. 设 $R = S^{(1,1)}$ 和 $M_i \in \operatorname{mod} R$ 如上所述。

(1) R-模 $T := M_{-1} \oplus R \oplus M_1 \in \operatorname{CM} R$ 是 3-簇倾斜的。(2) 稳定端同态环 $\operatorname{End}_R(T)$ 同构于 A_2 型的路径代数。(3) $\operatorname{End}_R(T \oplus T[-1])$ 同构于下列箭图的路径代数 Q。

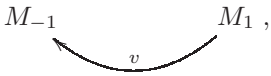


因此，R 是严格遗传表示型的，并且存在一个三角等价 $\operatorname{CM} R \simeq \mathsf{C}_3^{(1/2)}$ (kQ)。

证明。由定理 3.9 可知，$R \oplus M_1 \oplus M_2 \in \operatorname{CM} R$ 是 3-簇倾斜的，因此 $T = M_{-1} \oplus R \oplus M_1$ 也是如此。其自同态环由下列带有交换关系的箭图表示。



其中三重箭头表示 x、y 和 z。由此可得，稳定端同态环 $\operatorname{End}_R(T)$ 是



只是类型为 A_2 的路径代数。在下面的命题 5.6 中，我们将计算 $\operatorname{add} T$ 中的高阶几乎分裂序列。结合定理 5.2(1)，我们推得 $\operatorname{End}_R(T \oplus T[-1])$ 如所述，因此定理 5.1(2) 给出了所需的等价。□

命题 5.6。$\operatorname{add} T \in \operatorname{CM} R$ 中的 3-几乎分裂序列如下。

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow M_1^3 \oplus M_{-1} \longrightarrow R^6 \longrightarrow M_1 \oplus M_{-1}^3 \longrightarrow R$$

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow R \oplus M_{-1} \longrightarrow M_{-1}^3 \longrightarrow R^3 \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M_{-1} \longrightarrow R^3 \longrightarrow M_1^3 \longrightarrow R \oplus M_1 \longrightarrow M_{-1} \longrightarrow 0$$

证明。我们遵循第 3.1 节中的步骤。令 $S' = k[[x,y,z]]$ 和 $S'' = k[[u,v]]$，并将其视为一个完全分次环，其中 $\deg x = \deg y = \deg z = 1$ 且 $\deg u = 1$，$\deg v = 2$。令 $S = k[[x,y,z,u,v]]$ 为

$S' \otimes S''$的完备化，我们将其视为一个完全 $\mathbb{Z}^2$-分次环。首先构造 Koszul 复形

$$0 \longrightarrow S'(-3) \longrightarrow S'(-2)^3 \longrightarrow S'(-1)^3 \longrightarrow S' \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow S''(-3) \longrightarrow S''(-2) \oplus S''(-1) \longrightarrow S'' \longrightarrow 0$$

对于 S' 和 S''。

现在我们来计算 R处的 3-基本序列。我们将 Koszul 复形视为下述复形态射的映射锥。

$$\begin{array}{ccc} X': & S'(-3) \longrightarrow S'(-2)^3 & \\ \downarrow & \downarrow & \\ Y': & S'(-1)^3 \longrightarrow S', & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X'': & S''(-3) \longrightarrow S''(-2) \\ \downarrow & \downarrow \quad\quad \downarrow \\ Y'': & S''(-1) \longrightarrow S'' \end{array}$$

那么，它们的张量积 $X' \otimes X'' \to Y' \otimes Y''$ （的完备化）为

$$\begin{array}{ccc} X' \otimes X'': & S(-3,-3) \longrightarrow S(-2,-3)^3 \oplus S(-3,-2) \longrightarrow S(-2,-2)^3 \\ \downarrow & \downarrow \quad\quad\quad\quad \downarrow \\ Y' \otimes Y'': & S(-1,-1)^3 \longrightarrow S(0,-1) \oplus S(-1,0)^3 \longrightarrow S \end{array}$$

对于 $S = k[[x,y,z,u,v]]$，将其视为完全 $\mathbb{Z}^2$-分次环，其中 deg x =deg y =deg z =(1, 0)，deg u =(0, 1)，deg v =(0, 2)。取映射锥的次数 $\{(j,j) \mid j \in \mathbb{Z}\}$-部分，得到一个复形

$$0 \longrightarrow R(-3) \longrightarrow M_1(-3)^3 \oplus M_{-1}(-2) \longrightarrow R(-2)^3 \oplus R(-1)^3 \longrightarrow M_1(-1) \oplus M_{-1}^3 \longrightarrow R\ ,$$

根据命题 3.2，这就是 3-基本序列。

类似地，对于 M_1 处的几乎分裂序列，我们取如下复形态射。

$$\begin{array}{ccc} S'(-2) & & \\ \downarrow & & \\ S'(-1)^3 \longrightarrow S'^3 \longrightarrow S'(1), & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S''(-3) \longrightarrow S''(-2) \oplus S''(-1) \\ \downarrow \\ S'' \end{array}$$

取张量积及其对角部分，即得到所需的 M_1 处的几乎分裂序列。最后，对于 M_{-1}，我们考虑以下态射

$$\begin{array}{ccc} S'(-4) \longrightarrow S'(-3)^3 \longrightarrow S'(-2)^3 & & \\ \downarrow & & \\ S'(-1), & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S''(-3) \\ \downarrow \\ S''(-2) \oplus S''(-1) \longrightarrow S'', \end{array}$$

它们给出了 M_{-1} 处的几乎分裂序列。 □

5.3. 5 维。令 $S = k[[x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, y_2]]$ 为 6 个变量的幂级数环，并赋予其完全分次，其中 deg x_i =(1, 0)，deg y_i =(0, 1)。我们令

$$R = S^{(1,1)}$$

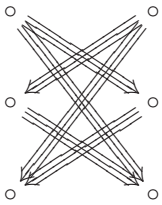
Veronese 子环。这是一个 5 维完备 Gorenstein 局部孤立奇点，它也同构于两个三变量幂级数环的完备 Segre 积。对于每个 $i \in \mathbb{Z}$，我们定义（完全分次的） R-模 M_i 如下：

$$M_i = \prod_{j \in \mathbb{Z}} S_{(i,0)+(j,j)}.$$

与上一小节一样，我们有 $M_i = S'(i)\#S''$ 作为完全分次的 R-模，而 M_i 中的 Cohen-Macaulay 模为 $M_0 = R$、$M_{\pm 1}$ 和 $M_{\pm 2}$。

定理 5.7. 令 $R = S^{(1,1)}$ 和 $M_i \in$ 模 R 如上所述。

(1) R-模 $T:=R\oplus M_1\oplus M_{-1}\in \mathsf{CM}\,R$ 是 4-簇倾斜。(2) 稳定端同态环为 $\mathrm{End}_R(T)\ =k\times k$，它是半单的。(3) 我们有 $\mathrm{End}_R(T\oplus T[-1]\oplus T[-2])$ 同构于以下带有三重箭头的 A_5-箭图的路径代数 Q。



因此， R 具有严格遗传表示型，并且存在一个三角等价 $\mathsf{CM}\,R\ \simeq \mathsf{C}_4^{(1/3)}\quad (kQ)$。

证明。由定理 3.9 可知， $R\oplus M_1\oplus M_2\in \mathsf{CM}\,R$ 是一个 4-簇倾斜对象，因此 $T\ =R\oplus M_1\oplus M_{-1}$也是如此。其自同态环由下方带交换关系的箭图给出，其中向右的箭标记为 x_0、 x_1、 x_2，向左的箭标记为 y_0、 y_1、 y_2。

$$M_{-1}\ \underset{}{\overset{}{\rightleftarrows}}\ R\ \underset{}{\overset{}{\rightleftarrows}}\ M_1$$

由此可得，稳定端同态环 $\mathrm{End}_R(M)$ 同构于 $k\times k$。接着，根据定理 5.2 和下文的命题 5.8，我们得到 $\mathrm{End}_R(T\oplus T[-1]\oplus T[-2])$ 的箭图。现在可以应用定理 5.1(3)。□

与三维情形一样，我们使用高阶 Auslander-Reiten 序列的计算。

命题 5.8。 $R, M_{\pm 1}\in \mathsf{CM}\,R$ 的 4-几乎分裂序列如下 g.

$$0\longrightarrow R\longrightarrow M_1^3\oplus M_{-1}^3\longrightarrow R^9\longrightarrow R^9\longrightarrow M_1^3\oplus M_{-1}^3\longrightarrow R$$
$$0\longrightarrow M_1\longrightarrow R^3\longrightarrow M_{-1}^3\longrightarrow M_{-1}^3\longrightarrow R^3\longrightarrow M_1\longrightarrow 0$$
$$0\longrightarrow M_{-1}\longrightarrow R^3\longrightarrow M_1^3\longrightarrow M_1^3\longrightarrow R^3\longrightarrow M_{-1}\longrightarrow 0$$

证明。设 $S'=k[[x_0,x_1,x_2]]$ 和 $S''=k[[y_0,y_1,y_2]]$ 是具有标准分次的完全分次幂级数环。回忆一下，我们的构造表明 $M_i=S'(i)\#S''$，也就是说，分次环 $S'\#S''=k[[x_0,x_1,x_2,y_0,y_1,y_2]]$ 的 $\{j\in\mathbb{Z}\}$ 部分中，“平移对角线”的次数为 $\{(i+j,j)$。我们先准备好 Koszul 复形

$$0\longrightarrow S'(-3)\longrightarrow S'(-2)^3\longrightarrow S'(-1)^3\longrightarrow S'\longrightarrow k\longrightarrow 0$$
$$0\longrightarrow S''(-3)\longrightarrow S''(-2)^3\longrightarrow S''(-1)^3\longrightarrow S''\longrightarrow k\longrightarrow 0$$

对于 S' 和 S''。

我们首先构造 R 处的 4-基本序列。为此，我们将 Koszul 复形视为下述复形态射的映射锥。

$$\begin{array}{ccc} X'\colon & S'(-3)\longrightarrow S'(-2)^3 & \\ \downarrow & \downarrow & \\ Y'\colon & S'(-1)^3\longrightarrow S', & \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} X''\colon & S''(-3)\longrightarrow S''(-2)^3 & \\ \downarrow & \downarrow & \\ Y''\colon & S''(-1)^3\longrightarrow S'', & \end{array}$$

取张量积 $X'\otimes X''\to Y'\otimes Y''$，我们得到一个复形态射

$$\begin{array}{ccccc} S(-3,-3) & \longrightarrow & S(-2,-3)^3\oplus S(-3,-2)^3 & \longrightarrow & S(-2,-2)^9 \\ & & & & \downarrow \\ & & & & S(-1,-1)^9\longrightarrow S(0,-1)^3\oplus S(-1,0)^3\longrightarrow S \end{array}$$

它由完全 $\mathbb{Z}^2$-分次的 S-模构成。根据命题 3.2，上述复形态射的映射锥的对角次数部分给出一个正合列

$$0 \longrightarrow R(-3) \longrightarrow M_1(-3)^3 \oplus M_{-1}(-2)^3 \longrightarrow R(-2)^9 \longrightarrow R(-1)^9 \longrightarrow M_1(-1)^3 \oplus M_{-1}^3 \longrightarrow R$$

完全 $\mathbb{Z}$ 分次 R-模的，它是 R 处的 4-基本序列。

对于 M_1 处的 4-几乎分裂序列，考虑如下复形之间的态射，分别记为 $X' \to Y'$ 和 $X'' \to Y''$。

$$\begin{array}{ccccc} S'(-2) & \xrightarrow{\geq} & S'(-1)^3 & \longrightarrow & S'^3 \\ & & & & \downarrow \\ & & & & S'(1), \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} S''(-3) & & & & \\ \downarrow & & & & \\ S''(-2)^3 & \xrightarrow{\geq} & S''(-1)^3 & \longrightarrow & S'' \end{array}$$

T取张量积及其对角次数部分，我们得到所需的序列 .

最后， M_{-1} 处的 4-几乎分裂序列是 M_1处该序列的 R-对偶。 □

6. Extended numerical semigroup rings and tilting theory

本节旨在利用倾斜理论，给出一族具有（分次）遗传表示类型的分次戈伦斯坦环。这些环是扩展数值半群环，我们将其作为经典数值半群环 [59] 的推广引入。

6.1. 扩展数值半群环。本节中，我们用 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ 表示非负整数集，用 L 表示有限阿贝尔群，并将其记为乘法形式。

定义 6.1. 扩展数值半群是一个子幺半群 $S \subset \mathbb{N} \times L$ （包含单位），其补集有限。对于任意域 k，我们称相应的半群代数 $k[S]$ 或其完备化 $k[[S]]$ 为与 S 关联的扩展数值半群代数。

我们将使用如下同一视 $k[\mathbb{N}] = k[t]$ 和 $k[\mathbb{N} \times L] = k[t] \otimes k[L]$，并将其元素写作 $t^n \otimes \lambda$，其中 $(n, \lambda) \in \mathbb{N} \times L$。由于 $S \subset \mathbb{N} \times L$ 的补集有限，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于所有 $n > N$ 和 $\lambda \in L$，均有 $(n, \lambda) \in S$。我们还通过规定对于 $(n, \lambda) \in \mathbb{N} \times L$，$\deg(t^n \otimes \lambda) = n$，在 $k[t] \otimes k[L]$ 上考虑一个 $\mathbb{Z}$-分次。于是 $R = k[S]$ 继承一个 $\mathbb{Z}$-分次。

命题 6.2. 设 k 为任意域， $S \subset \mathbb{N} \times L$ 为扩展数值半群， $R = k[S]$，且 $\frown R = k[[S]]$。

(1) R （分别地， R）是约化的，当且仅当 L 的阶在 k中可逆。(2) R 的分次全商环 K 是 $k[\mathbb{Z} \times L] = k[t^{\pm 1}] \otimes k[L]$。 (3) R 的全商环 K 是 $k[[\mathbb{Z} \times L]] = k((t)) \otimes k[L]$。

证明. (1) 注意到 R 是 $k[\mathbb{N} \times L] = k[t] \otimes k[L]$的子集，容易看出， R 是约化的，当且仅当 $\frown k[L]$是半单的。对 R 的陈述类似。

(2) 我们有一个映射 $R \subset k[t] \otimes k[L] \hookrightarrow k[t^{\pm 1}] \otimes k[L]$。由于 $k[t] \otimes k[L]$中次数为 n 的齐次元素具有 $t^n \otimes \mu$ 的形式，其中 $\mu \in k[L]$，因此它是非零因子，当且仅当 $\mu \in k[L]$ 是非零因子，或者等价地说，是单位。因此，我们看到该映射将每个齐次非零因子映为一个单位，从而诱导出一个映射 $K \to k[t^{\pm}] \otimes k[L]$。

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & k[t] \otimes k[L] \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \dashrightarrow & k[t^{\pm 1}] \otimes k[L] \end{array}$$

我们证明这个诱导映射是一个同构。由于映射 $R \to k[t^{\pm 1}] \otimes k[L]$ 是单射且 $R \to K$ 是本质的，因此我们可知 $K \to k[t^{\pm 1}] \otimes k[L]$ 是单射。为证明满射性，取 $t^n \otimes \mu \in k[t^{\pm 1}] \otimes k[L]$。于是我们有 $t^n \otimes \mu = (t^{n+m} \otimes \mu)/(t^m \otimes 1)$，其中分子和分母在充分大的 m 时都属于 R。

（3）留给读者。 □

下面介绍一些对经典概念进行推广的组合概念。

定义 6.3. 设 $S \subset \mathbb{N} \times L$ 是一个扩展数值半群。

(1) 若 $(0,\lambda) \notin S$ 对于 $\lambda \neq 1$ 成立，我们称 S 为连通的。(2) S 的弗罗贝尼乌斯数是满足 $(a,\lambda) \notin S$ 对某个 $\lambda \in L$ 成立的最大整数 $a \in \mathbb{N}$。若 $S = \mathbb{N} \times L$，则形式上令 $a = -1$。(3) 若存在 $\tau \in L$ 使得 $(\mathbb{Z} \times L) \setminus S = (a,\tau) - S$，其中 a 是 S 的弗罗贝尼乌斯数，且 $(a,\tau) - S = \{(a-n, \tau\lambda^{-1} \mid (n,\lambda) \in S\}$，则称 S 为扭对称的。

容易看出，扩展数值半群环是等余维的科恩–麦考利环，维数为 1。例如，可以如下证明这一点：取 $c \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $n \geq c$ 和 $\lambda \in L$，都有 $(n,\lambda) \in S$。那么 R 是 $k[t^c]$ 上的有限生成自由模，因此结论成立。

现在我们描述典范模，计算 a-不变量，并刻画 R 何时为戈伦斯坦环。这推广了经典数值半群环的著名结果。我们用 $D\colon M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i \mapsto \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_k(M_{-i}, k)$ 表示分次对偶。

命题 6.4. (1) R-模 $\omega := D(K/R)$ 是 R 的一个典范模

(2) R 的 a-不变量等于 S 的弗罗贝尼乌斯数。(3) R 是戈伦斯坦环，
当且仅当 S 是扭对称的。

证明。(1) 设 c 是一个大于 S 的弗罗贝尼乌斯数的整数。令 $T = k[t^c]$，并证明 $\mathrm{Hom}_T(R,T)(-c) \simeq \omega$ 属于 $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}} R$，这表明 ω 是一个（全局）典范模。

对每个 $\lambda \in L$，令 $C_\lambda := \{i \in \mathbb{N} \mid (i,\lambda) \in S,\ \text{且 } (i-c,\lambda) \notin S\}$。它是区间 $[0, 2c-1]$ 的一个子集，因此是有限的。于是 R 是一个以 $\bigcup_{\lambda\in L}\{t^i \otimes \lambda \mid i \in C_\lambda\}$ 为基的自由 T-模，因此 $\mathrm{Hom}_T(R,T)$ 是一个以 $\bigcup_{\lambda\in L}\{t^{-i} \otimes \lambda^{-1} \mid i \in C_\lambda\}$ 为基的自由模。另一方面，空间 K/R 作为一个 T-模，同构于顶端为 $\bigcup_{\lambda\in L}\{(t^i,\lambda) \mid i + c \in C_\lambda\}$ 的 DT 的直和，因此 $D(K/R)$ 是一个以 $\bigcup_{\lambda\in L}\{t^{-i} \otimes \lambda^{-1} \mid i + c \in C_\lambda\}$ 为基的自由 T-模。由此可知，乘以 t^c 给出一个同构 $\mathrm{Hom}_T(R,T)(-c) \xrightarrow{\simeq} D(K/R)$。由于所有对象都可以嵌入 R-模 K 中，显然这个同构是 R-线性的。

(2) 所断言的同构 $\mathrm{Hom}_T(R, T(-c)) \simeq \omega$ in $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}} R$ 表明，ω 是 R 的分次典范模。由于 a-不变量被刻画为 ω 的顶端次数的相反数，由 $\omega \simeq D(K/R)$ 可知，它必定是弗罗贝尼乌斯数。

(3) 设 S 的弗罗贝尼乌斯数为 a，并记 $\Omega := -(\mathbb{Z} \times L) \setminus S$。先假设 S 是扭对称的，并取 $\tau \in L$ 使得 $(\mathbb{Z} \times L) \setminus S = (a,\tau) - S$，于是 $\Omega = S - (a,\tau)$。乘以 $t^a \otimes \tau$ 所诱导的映射是一个同构 $\omega = D(K/R) \xrightarrow{\simeq} R(a)$，因此 R 是戈伦斯坦的。

现在证明逆命题。若 R 是戈伦斯坦的，则必存在同构 $\varphi\colon R \xrightarrow{\simeq} \omega(-a)$ in $\mathrm{mod}^{\mathbb{Z}} R$。我们将说明，必要时对 φ 作修改后，该同构可表示为乘以某个 $\tau \in L$ 的 $t^{-a} \otimes \tau^{-1}$，从而得到 $S - (a,\tau) = -(\mathbb{Z} \times L) \setminus S$。令 $M = \{\lambda \in L \mid (0,\lambda) \in S\}$ 且 $A := (\{a\} \times L) \setminus S$，它在 M 的作用下封闭。取同构 $R \simeq \omega(-a)$ 的零次部分，可得一个 $k[M]$-模同构 $\varphi_0\colon k[M] \simeq k[-A]$。现在注意，有限维代数 Λ 上的秩一自由模的任意两个生成元，都可以通过乘以 $\Lambda^\times$ 中的某个元素相互变换。因此，必要时通过 $\mathrm{End}^{\mathbb{Z}}_R(R)^\times = R_0^\times = k[M]^\times$ 修改 φ，我们可以假设 φ_0 将 $1 \in k[M]$ 映到某个 $(a,\tau) \in A$，因为对于任意 $(a,\tau) \in A$，相应的元素 $t^{-a} \otimes \tau^{-1} \in k[-A]$ 都生成 $k[-A]$ 作为一个 $k[M]$-模。于是 φ 可表示为乘以 $t^{-a} \otimes \tau^{-1}$。□

我们也不加证明地记录完备情形下的以下版本。这次我们用 D 表示马蒂斯对偶。

命题 6.5. 设 $\widehat{R} = k[[S]]$ 是一个扩展数值半群环。

(1) $\widehat{R}$-模 $\widehat{\omega} = D(K/R)$ 是 R 的一个典范模。(2) $\widehat{R}$ 是戈伦斯坦环，当且仅当 S 是扭对称的。

我们来看一个关于扩展数值半群环的简单例子。

例6.6. 设 p 和 q 是正整数，并考虑超曲面

$$R = k[x,y]/(x^p - y^q).$$

众所周知，若 p 和 q 互素，则 R 是整环，并且同构于（通常的）数值半群环 $k[S]$，其中 $S = \langle p、\ q\rangle$ 是由 p 和 q 生成的数值半群。

我们注意到，即使 p 和 q 不互素，仍然可以将 R 描述为扩展数值半群环。令 d 为 p 和 q 的最大公因数，并设 $a=p/d$、$b=q/d$。由于 a 和 b 互素，存在整数 i、j，使得 $ia-jb=1$ 属于 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$。现在考虑扩展数值半群 $S\subset\mathbb{N}\times L$，其中 $L=\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}=\langle\lambda\rangle$ 由 (b,λ^i) 和 (a,λ^j) 生成。例如，若 $p=6$ 和 $q=4$，则 $d=2$，且可以取 $i=j=1$。此时，S 可表示如下。

$S=$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	•				•	•	•		•	•	•	•	•
λ			•	•			•	•	•	•	•	•	•

那么映射

$$k[x,y]/(x^p-y^q)\to k[S],\qquad x\mapsto t^b\otimes\lambda^i, y\mapsto t^a\otimes\lambda^j$$

是一个同构。

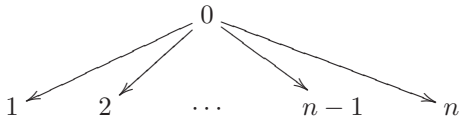
6.2. 遗传表示型的扩展数值半群环。现在，我们可以利用扩展数值半群环给出一族遗传表示型的一维戈伦斯坦环。对于一个有限维代数 A 和每个 $n\in\mathbb{Z}$，我们将 $\mathrm{C}_n(A)$ 记为 A 的 n-簇范畴，即 $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\,A)/-\otimes^{\mathrm{L}}_A DA[-n]$ 的三角包络。

定理 6.7. 设 L 是一个阶为 n的有限阿贝尔群，且 k 是一个特征不整除 n的域。取 $1\neq\lambda\in L$，并令 $R=k[[S]]$ 为对应于

$$S=(\mathbb{N}\times L)\setminus(\{(0,\mu)\mid\mu\neq 1\}\cup\{(1,\lambda)\}).$$

那么，对于 n-子空间箭图 Q，存在如下三角等价。

$$\underline{\mathrm{CM}}\,R\simeq\mathrm{C}_0(kQ),\qquad Q\ =$$



因此，R是遗传表示型。

证明。扩展数值半群可表示如下。

$S=$

	1	$*$	$\cdots$	$*$	λ
0	•				
1	•	•	$\cdots$	•	
2	•	•	$\cdots$	•	•
3	•	•	$\cdots$	•	•

我们很容易看出，S 是一个连通的扭对称扩展数值半群环，其弗罗贝尼乌斯数为 1，因此，$R^\circ=k[S]$ 是一个 1 维正分次约化戈伦斯坦环，且具有 $R_0=k$，其a-不变量为 1。于是，根据 [13]，我们得到一个三角等价

$$\underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}}R^\circ\simeq\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{mod}\,A)$$

对于 $A=\begin{pmatrix}R_0^\circ & K_1^\circ\\ 0 & K_0^\circ\end{pmatrix}$ 和分次全商环 $K^\circ=k[t^{\pm1}]\otimes k[L]$。现在，根据我们对 k 特征的假设，我们有 $K_0^\circ=k[L]\simeq k\times\cdots\times k$（$n$ 个副本）作为 k-代数，因此，对于上文所述的 n-子空间箭图 Q，有 $A=kQ$。根据 [28, 定理 6.5]，我们推得一个三角等价

$$\underline{\mathrm{CM}}\,R^\circ\simeq\mathrm{C}_0(kQ)$$

对于未分次的 Cohen-Macaulay 模，因此在完备情形下也有 $\underline{\mathrm{CM}}\,R\simeq\mathrm{C}_0(kQ)$。 □

特别地，当 $n\leq 3$ 时，R 是有限表示型；当 $n=4$ 时，则是温和表示型。

例子 6.8. 设 $L=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{1,\lambda,\mu,\nu\}$ 为克莱因四元群，设 $S\subset\mathbb{N}\times L$ 为由 (1, 1)、(1, λ) 和 (1, μ) 生成的数值子群，如下图所示。

$$S=\begin{array}{c|cccc} & 1 & \lambda & \mu & \nu \\ \hline 0 & \bullet & & & \\ 1 & \bullet & \bullet & \bullet & \\ 2 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 3 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}$$

那么它是连通的、扭对称的，且弗罗贝尼乌斯数为 1。在特征为 $\neq 2$ 的域上，我们得到一个等价

$$\underline{\mathrm{CM}}\,R\simeq \mathrm{C}_0(kQ)$$

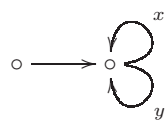
对于 $\widetilde{\quad}$ 型的扩展 Dynkin 箭图 Q D_4。特别地， R 属于温和表示型 .

注意，即使在 char $k=2$ 的情况下，我们确实有三角等价 [13, 28], ，但 R 不再是遗传表示型。

注 6.9。在例 6.8 的设定下，设 char $k=2$。扩展数值半群环 R 未约化，此时我们要研究的范畴由那些在去心谱上局部自由的科恩–麦考利模组成。

$$\underline{\mathrm{CM}}_0^{\mathbb{Z}}R=\{M\in\underline{\mathrm{CM}}^{\mathbb{Z}}R\mid M\otimes_R K\in\mathrm{proj}^{\mathbb{Z}}K\},$$
$$\underline{\mathrm{CM}}_0R=\{M\in\underline{\mathrm{CM}}\,R\mid M\otimes_R K\in\mathrm{proj}\,K\}.$$

代数 $K_0\simeq k[x,y]/(x^2,y^2)$ 是非半单的， $A=\begin{pmatrix}K_0 & K_1\\ 0 & K_0\end{pmatrix}$ 由以下带关系的箭图给出。



$$,\quad xy=yx, x^2=y^2=0.$$

根据 [28, 定理 6.5] ，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{per}\,A & \longrightarrow & \mathrm{C}_0(A) \\ | & & | \\ \underline{\mathrm{CM}}_0^{\mathbb{Z}}R & \longrightarrow & \underline{\mathrm{CM}}_0R, \end{array}$$

其中 $\mathrm{C}_0(A)$ 是 per $A/-\otimes_A^{\mathrm{L}}DA$ 的三角包络。

7. Some resolutions over polynomial rings

本节为我们将在第 8 节进行的计算做准备。

设 V 是一个 n 维向量空间。对于每个 $0\le l\le n$ 和 $m\ge 0$ ，我们都有一个典范映射

$$\alpha_{l,m}\colon \bigwedge^l V\otimes D(\mathrm{Sym}^m V)\longrightarrow \bigwedge^{l-1}V\otimes D(\mathrm{Sym}^{m-1}V)$$

$$(x_1\wedge\cdots\wedge x_l)\otimes\varphi\longmapsto\sum_{i=1}^{l}(-1)^{i-1}(x_1\wedge\cdots\wedge\widehat{x_i}\wedge\cdots\wedge x_l)\otimes\varphi x_i,$$

其中 $x\in V$ 通过乘法映射 x: $\mathrm{Sym}^{m-1}V\to\mathrm{Sym}^m V$ 的对偶作用于 $\varphi\in D(\mathrm{Sym}^m V)$。对于 $m<0$ ，我们将 $\mathrm{Sym}^m V=0$ 视为。

引理 7.1. 对于每个 $m\neq -n$，向量空间序列

$$0\longrightarrow\bigwedge^n V\otimes D(\mathrm{Sym}^{m+n}V)\xrightarrow{\alpha_{n,m+n}}\cdots\longrightarrow V\otimes D(\mathrm{Sym}^{m+1}V)\xrightarrow{\alpha_{1,m+1}}D(\mathrm{Sym}^m V)\longrightarrow 0$$

是正合的。

证明。我们将 V 视为集中在次数 1 的分次向量空间，并将对称代数 $S = \operatorname{Sym} V$ 视为分次环。设 $E = E_S(k)$ 是简单 S-模 k 在 $\operatorname{Mod}^{\mathbb{Z}} S$ 中的内射包。我们知道 $E \simeq DS = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} D(\operatorname{Sym}^m V)$，其中 D 是分次对偶 $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i \mapsto \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_k(M_{-i}, k)$。将 $- \otimes_S E$ 应用于 S 的 Koszul 复形，得到一个序列

$$0 \longrightarrow \bigwedge^n V \otimes E \longrightarrow \cdots \longrightarrow V \otimes E \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

用于计算 $\operatorname{Tor}_i^S(k, E)$。我们有 $k \otimes_S^{\mathrm{L}} E = k \otimes_S^{\mathrm{L}} DS = D \operatorname{RHom}_S(k, S) = D(k(n)[-n]) = k(-n)[n]$，因此上述序列除最左端项外均为无环复形；最左端项在次数 n 处有 1 维上同调。取次数 $-m$ 部分即可得到结论。□

设 $S = \operatorname{Sym} V$ 为 V 上的对称代数，因此它同构于一个有 n 个变量的多项式环。考虑 Koszul 复形

$$0 \longrightarrow S \otimes \bigwedge^n V \xrightarrow{d_n} S \otimes \bigwedge^{n-1} V \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots \longrightarrow S \otimes \bigwedge^2 V \xrightarrow{d_2} S \otimes V \xrightarrow{d_1} S$$

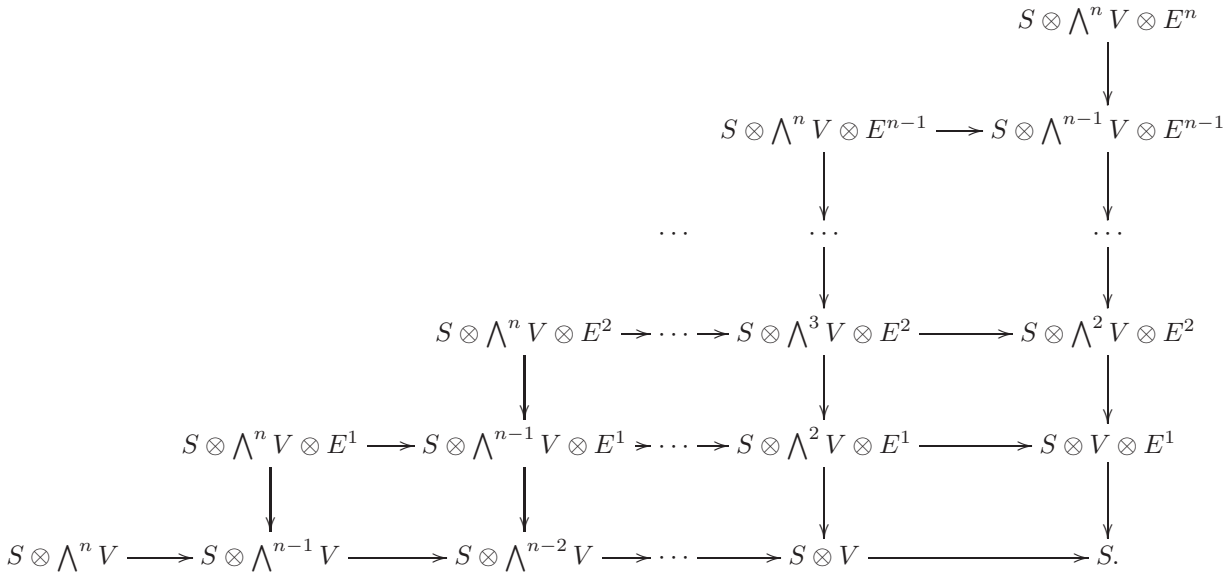
S 的，并令 $\Omega^i = \operatorname{Ker} d_i$。

引理 7.2。存在一个 S-模的正合列

$$0 \longrightarrow S \otimes \bigwedge^n V \longrightarrow \Omega^{n-1} \otimes D(\operatorname{Sym}^{n-1} V) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^2 \otimes D(\operatorname{Sym}^2 V) \longrightarrow \Omega \otimes DV \longrightarrow S\ ,$$

其中最后一个映射的余核为 k。

证明。为节省篇幅，我们将 E^i 简记为 $D(\operatorname{Sym}^i V)$。考虑以下图表



这里，每一行都是对截断 Koszul 复形应用 $- \otimes E^i$ 得到的，因此除最右端的位置外均为无挠的。此外，每一列都是对引理 7.1 中的序列（对于$m = -n, -n+1, -n+2, \ldots, -1, 0$）应用 $S \otimes -$ 得到的，因此除最左边的一列外均为正合的。此外，容易验证每个方块都是交换的。

现在，取最右侧水平映射的像，我们得到一个复形

$$0 \longrightarrow \Omega^{n-1} \otimes E^{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^2 \otimes E^2 \longrightarrow \Omega \otimes E^1 \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow 0\ ,$$

其中 $\mathfrak{m}$ 是由 V生成的 S 的极大理想。将上述图视为由垂直复形构成的水平复形，由于中间垂直复形是无环的，故上述复形拟同构于 $S \otimes \bigwedge^n V$平移 $[n-1]$。这就得到了所需的断言。□

注记 7.3. 通过简单的图追踪可知，第一个映射 $S \otimes \bigwedge^n V \to \Omega^{n-1} \otimes D(\mathrm{Sym}^{n-1} V)$ 如下给出：取 $\mathrm{Sym}^{n-1} V$ 的一组基 $\{m_i\}_i$，并令 $\{\mu_i\}_i$ 为其对偶基。那么该映射给出为

$$1 \otimes (x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \mapsto \sum_i \pm m_i \otimes (x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \otimes \mu_i$$

在规范同一识别 $S \otimes \bigwedge^n V \xrightarrow{\simeq} \Omega^{n-1}$ 下。

8. A non-Gorenstein example

到目前为止，我们一直在讨论遗传表示型的 Gorenstein 环。本节中，我们给出一个非戈伦斯坦例子，其 Cohen-Macaulay 表示可以由箭图表示加以控制，因此应视为遗传表示型。

8.1. 2-簇倾斜对象。我们来汇总一些关于簇倾斜理论的进一步结果，重点指出“2”簇倾斜比一般的高维簇倾斜对象表现得好得多。

首先，我们注意到以下众所周知的引理，后文将频繁用到。

引理 8.1. 设 $\mathscr{E}$ 是一个有足够多投射对象 $\mathscr{P}$，$A, B \in \mathscr{E}$ 的正合范畴，并假设对所有 $P \in \mathscr{P}$，$\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{E}}(A, P) = 0$。那么存在自然同构

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{E}}(A, B) \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{E}}(\Omega A, \Omega B),$$
$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{E}}(\Omega A, B) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{E}}(A, B).$$

以下结果概述了如何通过一个 2-簇倾斜对象，将 R 的表示论与有限维代数的表示论联系起来。

命题 8.2（例如，[17, 定理 3.2]）。设 R 是一个完备科恩-麦考利局部孤立奇点。假设 $\mathrm{CM}\, R$ 含有一个 2-簇倾斜对象 X，并令 $\Gamma = \mathrm{End}_R(X)$。

(1) 我们有 $\Gamma = \mathrm{End}_R(\underline{\Omega X})$，且 $\mathrm{Hom}_R(\underline{\Omega X}, X) = 0$。

(2) 函子

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega X, -) \colon \underline{\mathrm{CM}}\, R/[X] \longrightarrow \mathrm{mod}\, \Gamma$$

是一个等价。

注意一个补充观察，它是 [42, 推论 6.5(1)]在非戈伦斯坦情形下的对应结果。若函子 F 从 $\mathrm{CM}\ R$ 到阿贝尔范畴 $\mathscr{A}$，并且只要 $\mathrm{Ext}^1_R(M, M) = 0$，就有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(FM, FM) = 0$，则称该函子保持刚性。

命题 8.3. 在命题 8.2 的设定下，考虑函子 $F = \mathrm{Hom}_R(\Omega X, -) : \mathrm{CM}\ R \to \mathrm{mod}\ \Gamma$。若 $M, N \in \mathrm{CM}\ R$ 满足 $\mathrm{Ext}^1_R(M, N) = 0$，则 $\mathrm{Hom}_\Gamma(FN, \tau FM) = 0$。特别地，该函子 F 保持刚性。

证明。令 $0 \to M \to X^0 \to X^1 \to 0$ 为正合列，其中 $X^0, X^1 \in \mathrm{add}\, X$，且 $X^0 \to X^1$ 为根映射。应用 F 得到正合列

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega X, \Omega X^0) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega X, \Omega X^1) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega X, M) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega X, X^0)\ .$$

由于末项由命题 8.2(1) 可知为 0，因此它是 FM 在 $\mathrm{mod}\ \Gamma$ 中的极小投射表示。对 Γ 应用中山函子，得到正合列

$$0 \longrightarrow \tau FM \longrightarrow D\, \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega X^0, \Omega X) \longrightarrow D\, \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega X^1, \Omega X)$$

由此可计算 τFM。现在，我们要证明的 $\mathrm{Hom}_\Gamma(FN, \tau FM) = 0$，归结为证明映射

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(FN, D\, \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega X^0, \Omega X)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(FN, D\, \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega X^1, \Omega X))$$

是单射。根据对偶性，这等价于映射

$$\underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega X^1, N) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}_R(\Omega X^0, N)\ ,$$

或 $\mathrm{Ext}^1_R(X^1, N) \to \mathrm{Ext}^1_R(X^0, N)$ 是满射。这由假设 $\mathrm{Ext}^1_R(M, N) = 0$ 得出。 □

请注意，这个函子不一定能检测刚性。

8.2. 定理 1.8 的证明。回忆 $S = k[[x_0, x_1, y_0, y_1, y_2]]$。我们在 S 上赋予完全分次，令 deg $x_i = (1, 0)$，deg $y_i = (0, 1)$。我们所关注的完全分次 CM 环为

$$R = S^{(1,1)}.$$

此外，定义完全分次的 R-模 M_i，令 $M_i = \prod_{j\in\mathbb{Z}} S_{(i,0)+(j,j)}$。因此，当 $i \geq 0$ 时，M_i 由次数 0 的元素生成；当 $i < 0$ 时，则由次数 $-i$ 的元素生成。由推论 2.2（或 [62]），我们知道典范模同构于 M_1，且模 M_{-1}、$M_0 = R$、$M_1 = \omega_R$ 和 M_2 均为 CM。

我们先汇总一些将在本节中反复用到的基本信息。

引理 8.4。存在正合列

(1) $0 \longrightarrow M_{i-2} \longrightarrow M_{i-1}^2 \longrightarrow M_i \longrightarrow k[[y_0, y_1, y_2]]_{-i} \longrightarrow 0$ *for all* $i \in \mathbb{Z}$.

(2) $0 \longrightarrow M_{i+3} \longrightarrow M_{i+2}^3 \longrightarrow M_{i+1}^3 \longrightarrow M_i \longrightarrow k[[x_0, x_1]]_i \longrightarrow 0$ *for all* $i \in \mathbb{Z}$.

证明。我们只证明 (1)。考虑 Koszul 复形

$$0 \longrightarrow S(-2,0) \longrightarrow S(-1,0)^2 \longrightarrow S \longrightarrow k[[y_0, y_1, y_2]] \longrightarrow 0$$

对于 $x_0, x_1 \in S$。取其次数 $\{(i, 0) + (j, j) \mid j \in \mathbb{Z}\}$-部分，即得所需的正合列。□

由此可得正合列 $0 \to M_{-1} \to R^2 \to \omega \to 0$，这说明 $\Omega\omega = M_{-1}$。将范畴 $\mathsf{add}\{M_i \mid i \in \mathbb{Z}\} \subset \mathsf{mod}\, R$ 可视化如下会很有帮助。

$$\cdots \rightleftarrows M_{-2} \rightleftarrows \Omega\omega \rightleftarrows R \rightleftarrows \omega \rightleftarrows M_2 \rightleftarrows \cdots$$

这里，右 向右的双箭头是 x_0 和 x_1，向左的三重箭头是 y_0、y_1和 y 2.

还要注意，对 $i = -1$ 应用引理 8.4(2)，我们得到一个 4 项正合列，其中中间映射的像是 $\Omega^2\omega$。下面记录这一事实。

引理 8.5. 存在如下正合列，其中 $\Omega^2\omega$ 是中间映射的像。

$$0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \omega^3 \longrightarrow R^3 \overset{\Omega\omega}{\longrightarrow} \longrightarrow 0$$

（$\omega^3 \to R^3$ 经过 $\Omega^2\omega$）

我们将经常用到下面这个有用的结果。

命题 8.6（[37, 命题 2.5.1]）。设 A 是维数为 $d \geq 2$ 的交换 Cohen–Macaulay 局部孤立奇点，且 $M, N \in$ 是 CM A。那么对所有 $0 < i \leq n\}$，深度$_A \mathsf{Hom}_A(M, N) = 2 + \max\{0 \leq n < d-1 \mid \mathsf{Ext}^i_A(M, N) = 0$。

N现在我们来计算一些模之间的态射和扩张 s.

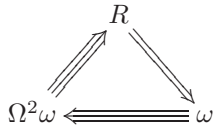
引理 8.7。（1）$\mathsf{End}_R(\omega) = \mathsf{End}_R(\Omega\omega) = \mathsf{End}_R(\Omega^2\omega) = k$。（2）$\mathsf{Ext}^i_R(\omega, R) = 0$，其中 $i = 1$ 为 2、3。（3）$\mathsf{Ext}^1_R(X, X) = 0$，其中 $X = R \oplus \omega \oplus$ 为 $\Omega^2\omega$。

证明。（2）我们有 $\mathsf{Hom}_R(\omega, R) = \mathsf{Hom}_R(M_1, R) = M_{-1}$ 是 Cohen–Macaulay。因此，由命题 8.6 可得 $\mathsf{Ext}^1_R(\omega, R) = \mathsf{Ext}^2_R(\omega, R) = 0$。类似地，由于 $\mathsf{Hom}_R(\Omega\omega, R) = \mathsf{Hom}_R(M_{-1}, R) = M_1$ 的深度为 4，我们有 $\mathsf{Ext}^2_R(\Omega\omega, R) = 0$，因而 $\mathsf{Ext}^3_R(\omega, R) = 0$。

(1) 由 (2) 和引理 8.1 可知，这三个自同态环同构。将 $\mathsf{Hom}_R(\omega, -)$ 作用于正合列 $0 \to \Omega\omega \to R^2 \to \omega \to 0$，得到 $0 \to \mathsf{Hom}_R(\omega, \Omega\omega) \to \mathsf{Hom}_R(\omega, R^2) \to \mathsf{Hom}_R(\omega, \omega)$，其余核为 $\mathsf{End}_R(\omega)$。根据引理 2.3，前三项同构于 $0 \to M_{-2} \to M_{-1}^2 \to R$；由引理 8.4(1)，其余核为 k，因此我们得出 $\mathsf{End}_R(\omega) = k$。

(3) 我们需要证明 $\mathsf{Ext}^1_R(\omega \oplus \Omega^2\omega, R \oplus \Omega^2\omega) = 0$。由 (1) 可知 $\mathsf{Ext}^1_R(\omega \oplus \Omega^2\omega, R) = 0$，因此只需考虑 $\mathsf{Ext}^1_R(\omega \oplus \Omega^2\omega, \Omega^2\omega)$。对于 $\mathsf{Ext}^1_R(\omega, \Omega^2\omega)$，考虑引理 8.5 中的正合列 $0 \to M_2 \to \omega^3 \to \Omega^2\omega \to 0$。应用 $\mathsf{Hom}_R(\omega, -)$，可知 $\mathsf{Ext}^1_R(\omega, \Omega^2\omega) \xrightarrow{\simeq} \mathsf{Ext}^2_R(M_2, \omega)$，由命题 8.6 可知其为零，因为 $\mathsf{Hom}_R(M_2, \omega) \simeq M_{-1}$ 的深度为 4。对于 $\mathsf{Ext}^1_R(\Omega^2\omega, \Omega^2\omega)$，由 (2) 可知它同构于 $\mathsf{Ext}^3_R(\omega, \Omega^2\omega) = \mathsf{Ext}^1_R(\omega, \omega)$，因此为 0。□

命题 8.8。代数 $\Gamma = \mathrm{End}_R(R \oplus \omega \oplus \Omega^2\omega)$ 由以下箭图给出。



证明。令 $X = R \oplus \omega \oplus \Omega^2\omega$，并证明以下结论。

(1) $f\colon R^2 \to \omega$ 是 $\mathrm{add}\, X$ 中 ω 处的汇映射。(2) $g\colon \omega^3 \to \Omega^2\omega$ 是 $\mathrm{add}\ X$ 中 $\Omega^2\omega$ 处的汇映射。(3) $h\colon \Omega^2\omega \to R^3$ 是 $\mathrm{add}\ X$ 中 $\Omega^2\omega$ 处的源映射。

这些断言给出了 $\mathrm{End}_R(X)$ 的箭图。事实上，断言 (2) 和 (3) 已涵盖与 Ω^2, 相邻的所有箭，而 (1) 则涵盖从 R 到 ω 的箭。接下来只需证明，在 $\mathrm{add}\, X$ 中不存在从 ω 到 R 的不可约态射。由于 $\mathrm{Hom}_R(\omega, R) \simeq M_{-1}$ 由 y_0, y_1, y_2 生成（见引理 8.4(2)），这些生成元中的任意一个，因而任意映射 $\omega \to R$，都可分解为经过 $\Omega^2\omega$，这可由引理 8.5 得知。

现在我们转而证明这些断言。

(1) 考虑正合列 $0 \to \Omega\omega \to R^2 \xrightarrow{f} \omega \to 0$。显然，任何 $R \to \omega$ 都经过 f分解；根据引理 8.7(1)，任何非同构 $\omega \to \omega$也如此。此外，由引理 8.7(2)，我们得到 $\mathrm{Ext}^1_R(\Omega^2\omega, \Omega\omega) = \mathrm{Ext}^2_R(\Omega\omega, \Omega\omega) = \mathrm{Ext}^1_R(\Omega\omega, \omega) = 0$，因此任何 $\Omega^2\omega \to \omega$ 也都经过 f分解。

(2) 考虑正合列 $0 \to M_2 \to \omega^3 \xrightarrow{g} \Omega^2\omega \to 0$。由于 $\mathrm{Ext}^1_R(R \oplus \omega, M_2) = 0$，任何映射$R \oplus \omega \to \Omega^2\omega$都经过 g分解。此外，我们有 $\mathrm{Ext}^1_R(\Omega^2\omega, M_2) = \mathrm{Ext}^3_R(\omega, M_2)$，根据引理 8.5 中的正合列和引理 8.7(2)，它同构于 $\mathrm{Ext}^1_R(\omega, \Omega\omega)$，进而同构于 $\mathrm{End}_R(\omega) = k$；这表明任何非同构 $\Omega^2\omega \to \Omega^2\omega$ 都经过 g分解。

(3) 同样可利用正合列 $0 \to \Omega^2\omega \xrightarrow{h} R^3 \to \Omega\omega \to 0$ 得到证明。 □

现在我们可以给出结果的核心部分。

定理 8.9. 设 $R = k[[x_0, x_1]] \# k[[y_0, y_1, y_2]]$。那么 $X := R \oplus \omega \oplus \Omega^2\omega$ 是一个 2-簇倾斜对象。

证明. 根据 Auslander对应 [38, 定理 4.2.3]（对于 $d = m = 4$ 和 $n = 2$），我们需要证明 $\Gamma := \mathrm{End}_R(X)$ 满足以下条件。

- Γ 是一个孤立奇点，$\mathrm{gl.dim}\,\Gamma = 4$，且深度$_R\,\Gamma \geq 3$。
- $\mathrm{proj.dim}_\Gamma L \leq 3$ 对所有满足 $Le = 0$ 的简单 Γ-模 L 均成立，其中 $e \in \Gamma$ 是对应于 R 的幂等元。

显然， Γ 是孤立奇点，因为 R 是，并且由命题 8.6 和引理8.7(3)可知深度$_R\,\Gamma \geq 3$ 。为证明其余断言，我们计算简单 Γ-模的极小投射分解，换言之，即 R、 ω和 $\Omega^2\omega$ 在 $\mathrm{add}\, X$中的汇序列（按 [37, 定义 3.1]的意义）。

断言1： ω 处的汇序列为

$$0 \longrightarrow \Omega^2\omega \longrightarrow R^3 \longrightarrow R^2 \longrightarrow \omega \longrightarrow 0\ .$$

由命题 8.8，CM R 中 ω 处的汇映射为 $R^2 \to \omega$，它由 x_0 和 x_1的乘法给出。由引理 8.4，它可扩张为正合列 $0 \to \Omega\omega \to R^2 \to \omega \to 0$。将其与引理 8.5 中正合列的右半部分$0 \to \Omega^2\omega \to R^3 \to \Omega\omega \to 0$ 连接，便得到上述序列。为验证这确实是汇序列，我们只需证明 $R^3 \to \Omega\omega$ 是极小的右 $(\mathrm{add}\, X)$-逼近；而由 $\mathrm{Ext}^1_R($ X,$\Omega^2\omega) = 0$，这显然成立。

断言2：$\Omega^2\omega$ 处的汇序列为

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow \omega^2 \longrightarrow \omega^3 \longrightarrow \Omega^2\omega \longrightarrow 0\ .$$

由命题 8.8，CM R 中$\Omega^2\omega$ 处的汇映射为 $\omega^3 \to \Omega^2\omega$，它可延伸为引理 8.5中正合列的左半部分 $0 \to M_2 \to \omega^3 \to \Omega^2\omega \to 0$ 。通过与正合列 $0 \to R \to \omega^2 \to M_2 \to 0$连接，我们得到该序列。如上所述，我们可知 $\omega^2 \to M_2$ 是一个最小右（$\mathrm{add}\, X$）-逼近，因为 $\mathrm{Ext}^1_R(X, R) = 0$。

断言 3： R 处的汇序列为

$$0 \longrightarrow \omega \longrightarrow \omega^6 \longrightarrow \Omega^2\omega^2 \oplus \omega^6 \longrightarrow \Omega^2\omega^3 \longrightarrow R\ .$$

由命题 8.8 可知，汇映射是 $\Omega^2\omega^3 \to R$。我们利用引理 7.2 计算其核。将引理 7.2 应用于由 $\{y_0, y_1, y_2\}$ 生成的三维向量空间 W，得到一个正合列

$$0 \longrightarrow S'' \otimes \bigwedge^3 W \longrightarrow S'' \otimes \bigwedge^3 W \otimes D(\mathrm{Sym}^2 W) \longrightarrow \Omega^1 \otimes DW \longrightarrow S'' \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

其中 $S'' = k[y_0 y_1、\ y_2]$ 和 $\Omega^1 = \mathrm{Ker}(S'' \otimes W \to S'')$。对 $S' = k[x_0, x_1]$ 取张量积并完成后，我们有 ve

$$0 \longrightarrow S \otimes \bigwedge^3 W \longrightarrow S \otimes \bigwedge^3 W \otimes D(\mathrm{Sym}^2 W) \longrightarrow \widehat{(\Omega^1 \otimes S')} \otimes DW \longrightarrow S \longrightarrow k[[x_0, x_1]] \longrightarrow 0$$

对于我们的 $S = k[[x_0, x_1, y_0, y_1, y_2]]$。取次数 $\{(j, j)$ 的 $\mid j \in \mathbb{Z}\}$-部分，可得一个正合列

$$0 \longrightarrow M_3 \longrightarrow \omega^6 \xrightarrow{a} \Omega^2\omega^3 \longrightarrow R \longrightarrow k \longrightarrow 0$$

它扩张了汇映射 $\Omega^2\omega^3 \to R$。

现在令 $N := \mathrm{Im}\, a$，于是我们有一个正合列

$$0 \longrightarrow M_3 \longrightarrow \omega^6 \xrightarrow{b} N \longrightarrow 0\ .$$

为了检验 b 是否是一个右 $(\mathrm{add}\, X)$-逼近，我们计算 $\mathrm{Ext}^1_R(X, M_3)$。显然，$\mathrm{Ext}^1_R(R, M_3) = 0$；又由于 $\mathrm{Hom}_R(\omega, M_3) = M_2$ 的深度为 4，由命题 8.6，我们还有 $\mathrm{Ext}^1_R(\omega, M_3) = 0$。然而请注意，$\mathrm{Ext}^1_R(\Omega^2\omega, M_3) \neq 0$，因此 b 不是一个右 $(\mathrm{add}\, X)$-逼近。事实上，我们证明 $\mathrm{Ext}^1_R(\Omega^2\omega, M_3) = k^2$。确实，由引理 8.4(1)，存在一个正合列 $0 \to \omega \to M_2^2 \to M_3 \to 0$。应用 $\mathrm{Hom}_R(\Omega^2\omega, -)$，得到一个同构 $\mathrm{Ext}^1_R(\Omega^2\omega, M_2^2) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ext}^1_R(\Omega^2\omega, M_3)$，该同构由乘以 x_0 和 x_1 诱导。此外，正合列的左半部分

$$0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \omega^3 \longrightarrow \Omega^2\omega \longrightarrow 0$$

由引理 8.5 得到 $\mathrm{Ext}^1_R(\Omega^2\omega, M_2) = k$，其非零元素由同一个正合列表示。这些讨论表明，下方交换图第二行中的正合列（它由上面正合列的两个副本的直和沿乘法 $M_2^2 \to M_3$ byx_0和 x_1推出得到）诱导出一个投射覆盖 $\mathrm{Hom}_R(\Omega^2\omega, \Omega^2\omega^2) \to \mathrm{Ext}^1_R(\Omega^2\omega, M_3)$，视为 $\mathrm{End}_R(\Omega^2\omega)$-模。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_2^2 & \longrightarrow & \omega^6 & \longrightarrow & \Omega^2\omega^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \Omega^2\omega^2 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

回到上一段的第一个正合列。应用 $\mathrm{Hom}_R(\Omega^2\omega, -)$ 得到一个满射 $\mathrm{Hom}_R(\Omega^2\omega, N) \to \mathrm{Ext}^1_R(\Omega^2\omega, M_3)$，因此存在一个映射 $\Omega^2\omega^2 \to N$，它给出一个交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \Omega^2\omega^2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & \omega^6 & \xrightarrow{b} & N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

沿最右侧的竖直映射作拉回即可得到。现在我们得到了一个右（$\mathrm{add}\, X$）-逼近$\omega^6 \oplus \Omega^2\omega^2 \to N$，其核为 E。

最后，我们计算 E 的右（$\mathrm{add}\, X$）-逼近。倒数第二段中的最后一个交换图表明，存在一个满射 $\omega^6 \to E$，其核与 $M_2^2 \to M_3$ 相同，而这恰好就是 $M_1 = \omega$。因此，我们有一个正合列

$$0 \longrightarrow \omega \longrightarrow \omega^6 \xrightarrow{c} E \longrightarrow 0\ .$$

由于 ω 是 CM R 中的内射对象，我们可知 c 确实是一个逼近。连接我们构造的逼近序列，即得到该断言。

现在，汇序列表明，在 X 的非投射直和项处，简单 Γ-模的投射维数为 3；而在投射直和项处，其投射维数为 4。由此得到 Γ 所需的 Auslander 型条件，并完成该定理的证明。□

因此，我们得到我们的 $R = k[[x_0, x_1, y_0, y_1, y_2]]^{(1,1)}$ 具有“遗传表示型”。

推论 8.10. 存在一个等价

$$\operatorname{CM} R/[X] \xrightarrow{\simeq} \operatorname{mod} kQ_3$$

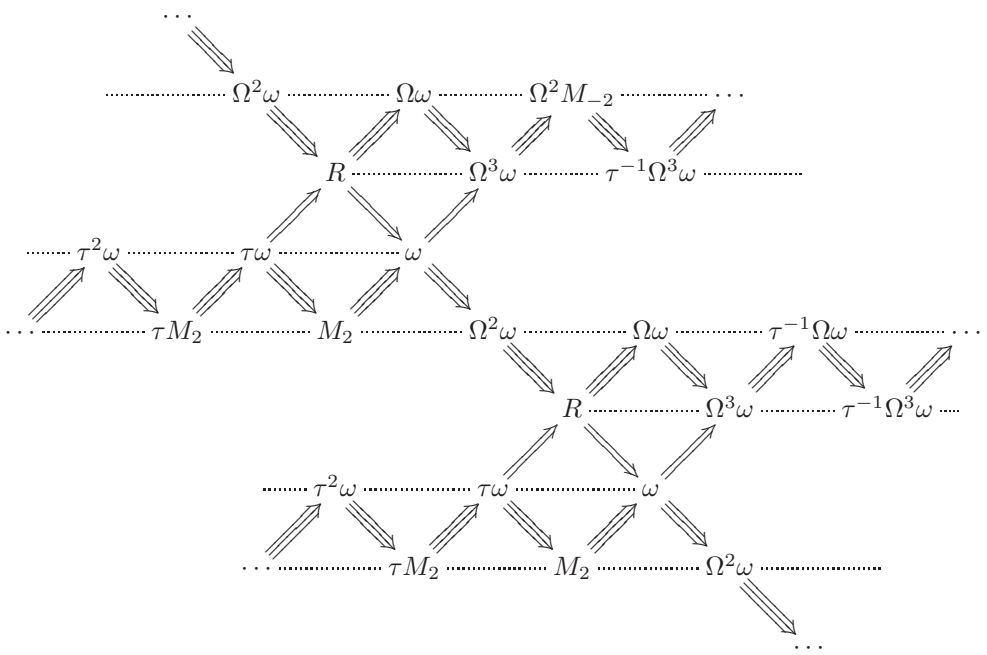
对于 3-Kronecker 箭图 Q_3: $\circ \Longrightarrow \circ$ 。

证明. 由定理 8.9 和命题 8.2，我们有一个等价

$$\underline{\operatorname{Hom}}_R(\Omega X, -)\colon \underline{\operatorname{CM}} R/[X] \xrightarrow{\simeq} \operatorname{mod} \underline{\operatorname{End}}_R(X)\ .$$

由命题 8.8 可知 $\operatorname{End}_R(X) = kQ_3$。 □

为方便后续讨论，我们加入包含 X 的 $\operatorname{CM} R$ 的 Auslander-Reiten 箭图分支。通过截去 X 的直和项，可以找到等价 $\operatorname{CM} R/[X] \xrightarrow{\simeq} \operatorname{mod} kQ_3$ 的一个影子，从而得到 $\operatorname{mod} kQ_3$ 的预投射分支和预内射分支。



8.3. 刚性 Cohen-Macaulay 模的分类。如同上一小节，令

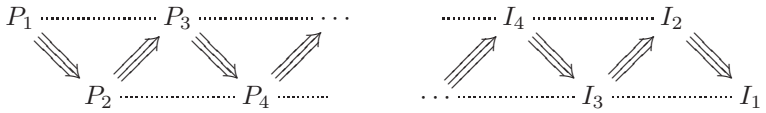
$$R = k[[x_0, x_1]] \# k[[y_0, y_1, y_2]]$$

它是带标准分次的多项式环的完备 Segre 积。我们已经看到，$X = R \oplus \omega \oplus \Omega^2\omega$ 是 $\operatorname{CM} R$ 中的一个 2-簇倾斜对象（定理 8.9），它给出一个函子

$$F\colon \operatorname{CM} R \twoheadrightarrow \operatorname{CM} R/[X] \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(\Omega X, -)} \operatorname{mod} kQ_3$$

对于 3-Kronecker 箭图 Q_3: $\circ \Longrightarrow \circ$，其中第二个是等价（推论 8.10）。本小节旨在应用推论 8.10，对 R 上的刚性 Cohen-Macaulay 模进行完全分类。

设 kQ_n 为具有 n 个箭的 Kronecker 箭图。mod kQ_n 的 Auslander-Reiten 箭图包含称为预投射分支和预内射分支的连通分支，我们将对象标记为 P_i 和 I_i （$i \geq 1$），如下所示。



与 Iyama–Yoshino 方法一样，我们的分类定理基于箭图表示的一个此类结果，更确切地说，是 Kac 定理 [43]。回想一下，若一个模的不可分解直和项两两不同构，则称该模为基本。

命题 8.11 ([43][42, 节 7])。设 Q_n 为带有 n 条箭的 Kronecker 箭图。那么基本刚性kQ_n-模是 $P_i \oplus P_{i+1}$ 或 $I_i \oplus I_{i+1}$ 的直和项，其中 $i \geq 1$。

由此得到 CM R 中刚性对象的候选清单。滥用记号，我们也用 P_i 或 I_i 表示在 F 下与预射分支或预内射分支中的 kQ_3-模相对应的不可分解科恩–麦考利 R-模。例如，我们有 $P_1 = \Omega\omega$、 $P_2 = \Omega^3\omega$、 $P_3 = \Omega^2 M_{-2}$，以及$I_1 = M_2$、 $I_2 = \tau\omega$。

引理 8.12. 基本对象 $M \in \mathrm{CM}\, R$ 具有刚性，当且仅当它在 CM $R/[X]$ 中同构于 $P_i \oplus P_{i+1}$ 或 $I_i \oplus I_{i+1}$ 的某个直和项，其中 $i \geq 1$。

证明. 这是命题 8.3 和命题 8.11 的直接推论。 □

本小节的主要结果是对 R 上刚性 Cohen-Macaulay 模的如下完全分类。事实上，结果表明，在上述候选对象中，只有有限多个具有刚性。

定理 8.13. 基本 Cohen-Macaulay R-模具有刚性，当且仅当它是下列某个对象的直和项。

$$R \oplus \omega \oplus \Omega^2\omega, \quad R \oplus \Omega\omega, \quad \omega \oplus M_2$$

此外， $R \oplus \omega \oplus \Omega^2\omega$ 是 CM R 中唯一的基本 2-簇倾斜对象。

证明需要一些额外的计算。我们先给出其中的两个，它们已经是推论 8.10 的应用。

引理 8.14. 设 $M \in \mathrm{CM}\, R$。

(1) $\mathrm{Ext}^1_R(M, R) = 0$ 当且仅当 $M \in \mathrm{add}(X \oplus \Omega\omega)$。(2) $\mathrm{Ext}^1_R(\omega, M) = 0$ 当且仅当 $M \in \mathrm{add}(X \oplus M_2)$。

证明。我们只证明 (1)，因为 (2) 是对偶的。由引理 8.7 可知，$\mathrm{Ext}^1_R(X \oplus \Omega\omega, R) = 0$。假设 $\mathrm{Ext}^1_R(M, R) = 0$。那么由 Auslander-Reiten 对偶可得 $\mathrm{Hom}_R(\Omega^3\omega, M) = 0$，因此在函子 $\underline{F}$: CM $R \to$ mod kQ_3下，$\mathrm{Hom}_{kQ_3}(P_2, FM) = 0$。由此可知， FM必定是对应于另一个顶点的半单 kQ_3-模 $F(\Omega\omega)$，因此 $M \in \mathrm{add}(X \oplus \Omega\omega)$。□

引理 8.15. 设 $M \in \mathrm{CM}\, R$。

(1) $\mathrm{Ext}^1_R(M, \Omega^2\omega) = 0$ 当且仅当 $M \in \mathrm{add}(X \oplus M_2)$。

(2) $\mathrm{Ext}^1_R(\Omega^2\omega, M) = 0$ 当且仅当 $M \in \mathrm{add}(X \oplus \Omega\omega)$。

证明。(1) 假设 $\mathrm{Ext}^1_R(M, \Omega^2\omega) = 0$。由 Auslander-Reiten 对偶性可得 $\mathrm{Hom}_R(\Omega\omega, \underline{M}) = 0$，因此在函子 F: CM $R \to$ CM $R/[X]\, \mathrm{Hom}_R(\Omega X, -)$⟶ mod kQ_3 下，$\mathrm{Hom}_{kQ_3}(P_1, FM) = 0$。由此可知， FM 必定是与另一个顶点对应的简单 kQ_3-模 FM_2，因此 $M \in \mathrm{add}(X \oplus M_2)$。为证明逆命题，只需验证 $\mathrm{Ext}^1_R(M_2, \Omega^2\omega) = 0$。将 $\mathrm{Hom}_R(M_2, -)$ 应用于引理 8.5 中的序列，可得一个正合列

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M_2, M_2) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M_2, \omega^3) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M_2, \Omega^2\omega) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^1_R(M_2, M_2) \\ & & \| & & \| & & & & \| \\ & & R & & M^3_{-1} & & & & 0 \end{array}$$

这表明 $\mathrm{Hom}_R(M_2, \Omega^2\omega)$ 的深度必为 ≥ 3。于是由命题 8.6 得到该断言。

(2) 对偶应用典范对偶即可由 (1) 得出。注意，由于引理 8.5 中的正合列是自对偶的，$\mathrm{Hom}_R(\Omega^2\omega, \omega) = \Omega^2\omega$。□

我们再指出一个观察结果。

引理 8.16. 设 $N \in \mathsf{CM}\, R$，并考虑推出图

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{j} & P \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow \\ I & \xrightarrow[l]{} & L \end{array}$$

其中 i 是到内射包 $I \in \mathsf{add}\ \omega$ 中的包含映射，而 j 是最小左 $(\mathsf{proj}\, R)$-逼近。则 l 是根映射，且 $L \in \mathsf{add}(X \oplus \Omega\omega)$。

证明. 由于 i 是最小的，映射 l 是根映射。该方块是一个推出图，因此得到正合列

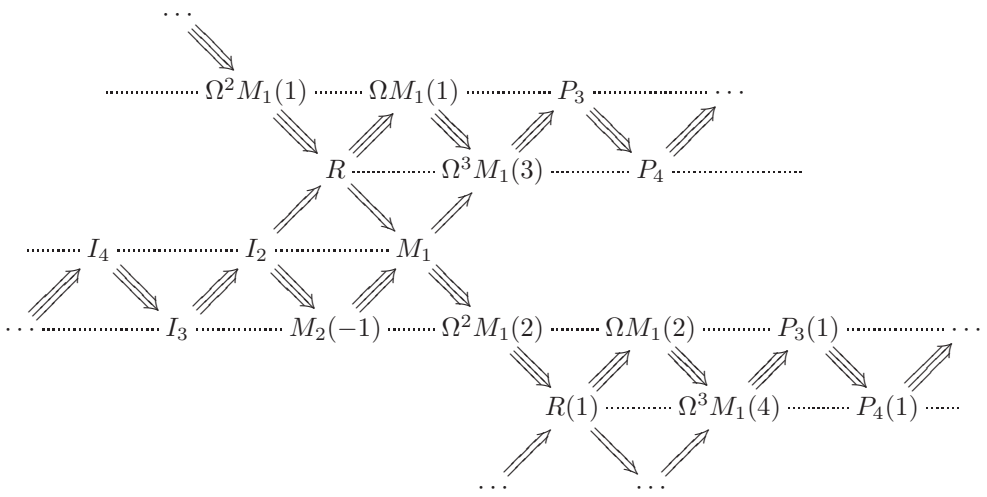
$$0 \longrightarrow N \longrightarrow P \oplus I \longrightarrow L \longrightarrow 0\ .$$

应用 $\mathrm{Hom}_R(-, \omega)$ 可得 $L \in \mathsf{CM}\ R$，因为 i 是一个左 $(\mathsf{add}\,\omega)$-逼近；应用 $\mathrm{Hom}_R(-, R)$ 可得 $\mathrm{Ext}^1_R(L, R) = 0$，因为 j 是一个左 $(\mathsf{proj}\, R)$-逼近。于是，由引理 8.14(1) 可得 $L \in \mathsf{add}(X \oplus \Omega\omega)$。□

现在我们可以证明分类结果了。

定理 8.13 的证明。利用引理 8.14 很容易验证，所列出的模都是极大刚性的。我们证明“仅当”部分。设 M 是一个刚性模。由引理 8.12，M 属于 $\mathsf{add}(X \oplus P_i \oplus P_{i+1})$，或属于某个 $i \geq 1$ 对应的 $\mathsf{add}(X \oplus I_i \oplus I_{i+1})$。如果 M 与 X 有一个共同的直和项，那么由引理 8.14 和 8.15 可立即得出，M 必须是列表中某个模的直和项。

还需证明当 $i \geq 2$ 时，P_i 和 I_i 不刚性。根据典范对偶，只需讨论 P_i。为此，我们重新考虑 R 上的分次，如第 8.2 节开头所述：我们曾考虑 $R = M_0$ 上的分次模 $M_i = \prod_{j\in\mathbb{Z}} S_{(i,0)+(j,j)}$。此时 $\mathsf{CM}^{\mathbb{Z}} R$ 的 Auslander–Reiten 箭图如下，其中我们给出了 P_i 的分次，使得 $P_1 = \Omega M_1(1)$、$P_2 = \Omega^3 M_1(3)$，其余则是 Auslander–Reiten 箭图中的后继。我们也类似地给出了 I_i 的分次。注意，我们有 $P_i = \mathrm{Hom}_R(I_i, M_1)$。



我们分几步进行。

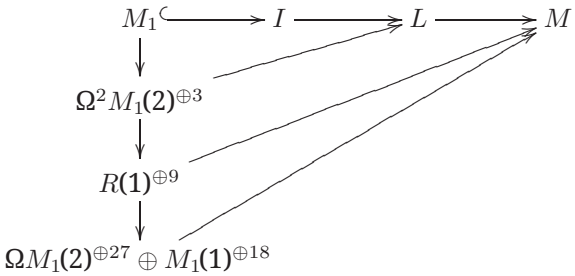
步骤 1：每个 P_i 都由次数 0 的元素生成。事实上，根据引理 8.4(2) 的分次版本，$P_1 = \Omega M_1(1) = M_{-1}(1)$ 显然满足这一点。接下来，几乎分裂序列 $0 \to R \to \Omega M_1(1) \oplus M_1 \to \Omega^3 M_1(3) \to 0$表明，最右端项 P_2 由次数 0 的元素生成。归纳地，正合列 $0 \to P_{i-2} \to P_{i-1}^{\oplus 3} \to P_i \to 0$ 表明，所有 P_i 都必须由次数 0 的元素生成。

步骤 2：每个 I_i 都集中在次数 ≥ 1，且次数 1 部分非零。第一部分可用类似的方法证明； $I_1 = M_2(-1)$ 满足这一点，而几乎分裂序列归纳地推出该结论。对于第二部分，设 d_i 是 I_i的次数 1 部分的维数。于是我们有 $d_1 = 3$，而几乎分裂序列给出 $d_2 = 12$，并且对于 $i \geq 3$有 $d_i = 3d_{i-1} - d_{i-2}$。由此很容易得到 $d_i > 0$。

步骤 3：构造。现在，对于 $M = P_i$且满足 $i \geq 2$ 的情形，我们在 CM R 中构造一个态射 $\tau^{-1}M \to M$，它不能通过一个投射模分解。于是 Auslander–Reiten 对偶将给出 $\mathrm{Ext}^1_R(M, M) \neq 0$。事实上，我们将其表示为 $\mathsf{CM}^{\mathbb{Z}}R$ 中的一个态射 $\tau^{-1}M(-1) \to M$。令 $\tau^{-1}M(-1) \to I$ 为 $\mathsf{CM}^{\mathbb{Z}}R$ 中的内射包。根据步骤 2，投射覆盖 $P \to I_i$ 满足 $P \in \mathsf{add}\{R(-i) \mid i \geq 1\}$ 且 $R(-1) \in \mathsf{add}\ P$，因此通过 $\mathrm{Hom}_R(-, M_1(-1))$ 取对偶后可知， $I \in \mathsf{add}\{M_1(i) \mid i \geq 0\}$ 且 $M_1 \in \mathsf{add}\ I$。现在将态射 $\tau^{-1}M \to M$ 定义为复合 $\tau^{-1}M \hookrightarrow I \twoheadrightarrow M_1 \to M$，其中第二个映射是到某个因子的投影，第三个映射是一个非零的不可约态射复合 $M_1 \to P_2 \to \cdots \to M$，其存在性由以下断言保证。

步骤 4：存在一个不可约态射的复合 $M_1 \to P_2 \to \cdots \to M$，它非零。首先注意，任意非零映射 $M_1 \to P_2$ 都是单射。事实上，它是非零映射 $I_2 \to R$的对偶映射，其余核 C 的维数为 < 4，因此由 $\mathrm{Hom}_R(C, M_1) = 0$可知，该对偶映射是单射。接下来，对每个 $i \geq 2$，我们都有一个单态射 $P_i \to P_{i+1}^{\oplus 3}$ 作为源映射，因此它们的复合 $P_2 \to P_n^{\oplus 3^{n-2}}$ 是单射。因此我们有一个非零映射 $M_1 \to P_2 \to M^{\oplus}$，故其中一个分量非零。

步骤 5：结论。我们证明步骤 3 中构造的态射 $\tau^{-1}M(-1) \to I \to M$不能通过投射模分解。若能分解，则它通过最小左投射逼近$\tau^{-1}M(-1) \to P$分解，进而通过图式 $I \leftarrow \tau^{-1}M(-1) \to P$的推出 L分解；根据引理 8.16，该推出属于 $\mathsf{add}(X \oplus \Omega\omega)$（作为非分次模）。现在我们得到一个 $\mathsf{CM}^{\mathbb{Z}}R$ 中的态射 $M_1 \hookrightarrow I \to L \to M$，它等于步骤 4 中不可约态射的非零复合；而第二个映射 $I \to L$，因此 $M_1 \to L$，根据引理 8.16 是根映射。



现在，容易验证映射 $M_1 \to \Omega^2 M_1(2)^{\oplus 3}$ 是 $\mathsf{add}\{R(i) \oplus M_1(i) \oplus \Omega^2 M_1(i) \oplus \Omega M_1(i) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ 中的源映射，因此根映射 $M_1 \to L$ 可经由 $M_1 \to \Omega^2 M_1(2)^{\oplus 3}$分解。于是，如上图所示，到 M 的映射可经由源映射（在 $\mathsf{CM}^{\mathbb{Z}}R$ 中）分解，因此所构造的映射$M_1 \to M$ 又可经由 $\mathsf{add}(M_1(1) \oplus \Omega M_1(2))$ 分解。然而，根据 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}}_R(M_1(1) \oplus \Omega M_1(2), M) = 0$，非零映射不可能如此分解；事实上， $M_1(1)$ 和 $\Omega M_1(2) = M_{-1}(2)$ 都由次数 -1 生成，而 M 集中在次数 ≥ 0。□

References

[1] C. Amiot，《关于具有有限多个不可分解对象的三角范畴的结构》，《法国数学会通报》135 (3)，2007，435-474。[2] C. Amiot，《整体维数为 2 的代数与具有势的箭图的簇范畴》，《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》59，第 6 期（2009）2525-2590。[3] C. Amiot、O. Iyama 和 I. Reiten，《Cohen-Macaulay 模的稳定范畴与簇范畴》，《美国数学杂志》137 (2015) 第 3 期，813-857。[4] M. Artin 和 J. L. Verdier，《有理双重点上的自反模》，《数学年刊》270，79-82 (1985) [5] M. Auslander，《有理奇点与几乎分裂序列》，《美国数学会汇刊》293 (2) (1986)，511-531。[6] M. Auslander 和 I. Reiten，《分次 Cohen-Macaulay 环及其完备化上的 Cohen-Macaulay 模》，载于：交换代数（加利福尼亚州伯克利，1987），21–31，数学科学研究所出版物，15，Springer，纽约，1989。[7] M. Auslander 和 I. Reiten，《Cohen-Macaulay 环的 Cohen–Macaulay 型》，《数学进展》73 (1989) 1-23。[8] N. Bourbaki，《交换代数》，第 1–7 章，法文译本。1989 年英文译本重印。《数学基础》（柏林）。Springer-Verlag，柏林，1998。xxiv+625 页。[9] N. Broomhead，《二聚体模型与 Calabi-Yau 代数》，《美国数学会回忆录》215 (2012) 第 1011 号，viii+86。

[10] A. B. Buan、R. Marsh、M. Reineke、I. Reiten 和 G. Todorov，《倾斜理论与簇组合学》，《数学进展》204 (2006) 572-618。[11] R. O. Buchweitz，《戈伦斯坦环上的极大 Cohen-Macaulay 模与 Tate 上同调》，附录由 L. L. Avramov、B. Briggs、S. B. Iyengar、J. C. Letz 撰写，《数学调查与专著》第 262 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，(2021)。[12] R. O. Buchweitz、G. M. Greuel 和 F. O. Schreyer，《超曲面奇点上的 Cohen-Macaulay 模，II》，Invent. Math. 88 (1987)，第 1 期，165–182。[13] R. O. Buchweitz、O. Iyama 和 K. Yamaura，《一维戈伦斯坦环的倾斜理论》，Forum of Mathematics, Sigma，8，E36。[14] R. O. Buchweitz、G. J. Leuschke 和 M. Van den Bergh，《行列式簇的非交换解奇 I》，Invent. Math. 182 (2010)，第 1 期，47–115。[15] I. Burban、O. Iyama、B. Keller 和 I. Reiten，《一维超曲面奇点的簇倾斜》，《数学进展》217 (2008)，第 6 期，2443–2484。[16] H. Dao、E. Faber 和 C. Ingalls，《交换环的非交换（保型）解奇与全局谱》，Algebr. Represent. Theory 18 (2015)，第 3 期，633–664。[17] L. Demonet 和 Y. Liu，《正合范畴对簇倾斜子范畴取商所得的模范畴》，J. Pure Appl. Algebra 217 (2013)，第 12 期，2282–2297。[18] E. Faber、G. Muller 和 K. E. Smith，《托里克簇的非交换解消》，《数学进展》351 (2019)，236–274。[19] M. Futaki、K. Ueda，《Brieskorn-Pham 奇点的同调镜像对称》，Selecta Math. (N.S.) 17 2, 435 2011 452 ( ), no. – 。[20] V. Ginzburg，《Calabi-Yau 代数》，arXiv:0612139。[21] S. Goto 和 K. Watanabe，《关于分次环 I》，J. Math. Soc. Japan 30 (1978)，第 2 期，179–213。[22] J. Grant 和 O. Iyama，《高阶预投射代数、Koszul 代数与超势》，《组合数学》156 (2020)，第 12 期，2588-2627。[23] L. Guo，《广义高阶簇范畴中的簇倾斜对象》，J. Pure Appl. Algebra 215 (2011)，第 9 期，2055–2071。[24] N. Hanihara，《三角范畴的 Auslander 对应》，Algebra & Number Theory 14-8 (2020)，2037–2058。[25] N. Hanihara，《形式 DG 代数的簇范畴与奇点范畴》，Forum of Mathematics, Sigma (2022)，第 10 卷：e35，1–50。[26] N. Hanihara，《遗传 Calabi-Yau 范畴的 Morita 定理》，《数学进展》395 (2022) 108092。[27] N. Hanihara，准备中。[28] N. Hanihara 和 O. Iyama，《奇点范畴的增强 Auslander-Reiten 对偶与倾斜理论》，arXiv:2209.14090。[29] N. Hanihara 和 O. Iyama，《silting-簇倾斜对应》，准备中。[30] D. Happel、U. Preiser 和 C.M. Ringel，《利用次可加函数刻画 Dynkin 图及其在 $D\mathrm{T}r$-周期模中的应用》，《表示论 II》（第二届国际会议论文集，加拿大安大略省渥太华卡尔顿大学，1979），第 280–294 页，《数学讲义》832，Springer，柏林，1980。[31] W. Hara，《A 型极小幂零轨道闭包的非交换保型解消与 Mukai 翻转》，《数学进展》318 (2017)，355–410。[32] M. Herschend、O. Iyama，准备中。[33] M. Herschend、O. Iyama、H. Minamoto 和 S. Oppermann，《Geigle-Lenzing 完全交的表示论》，即将在《美国数学会回忆录》发表，arXiv:1409.0668。[34] A. Higashitani 和 Y. Nakajima，《Hibi 环的圆锥除子理想及其在非交换保型解消中的应用》，Selecta Math. (N.S.) 25 (2019)，第 5 期，论文编号 78，25 页。[35] Y. Hirano、G. Ouchi，《势的非 Thom–Sebastiani 型和的导出分解范畴》，即将在 Proc. Lond. Math. Soc. 发表，arXiv:1809.09940[36] M. Hochster 和 J. Roberts，《约化群作用在正则环上的不变量环是 Cohen-Macaulay 环》，《数学进展》13 (1974)，313-373。[37] O. Iyama，《极大正交子范畴上的高维 Auslander-Reiten 理论》，《数学进展》210 (2007) 22-50。[38] O. Iyama，《Auslander 对应》，《数学进展》210 (2007) 51-82。[39] O. Iyama，《倾斜 Cohen-Macaulay 表示》，《2018 年国际数学家大会论文集——里约热内卢》，第二卷，特邀报告，125-162，World Sci. Publ.，新泽西州哈肯萨克，2018。[40] O. Iyama 和 R. Takahashi，《商奇点的倾斜与簇倾斜》，《数学年刊》356 (2013)，1065-1105。[41] O. Iyama 和 M. Wemyss，《非孤立奇点的极大修正与 Auslander-Reiten 对偶》，Invent. Math. 197 (2014)，第 3 期，521-586。[42] O. Iyama 和 Y. Yoshino，《三角范畴中的突变与刚性 Cohen-Macaulay 模》，Invent. math. 172，117-168 (2008)。[43] V. Kac，《无限根系、图的表示与不变量理论》，Invent. Math. 56 (1980)，第 1 期，57–92。[44] H. Kajiura、K. Saito 和 A. Takahashi，《矩阵分解与箭图表示 II：ADE 型情形》，《数学进展》211 (2007) 327-362。[45] B. Keller，《关于三角轨道范畴》，Doc. Math. 10 (2005)，551-581。[46] B. Keller，《变形 Calabi-Yau 完备化》，附录由 M. Van den Bergh 撰写，J. Reine Angew. Math. 654 (2011) 125-180。[47] B. Keller 和 I. Reiten，《无环 Calabi-Yau 范畴》，附录由 M. Van den Bergh 撰写，《组合数学》144 (2008) 1332-1348。

[48] B. Keller、D. Murfet 和 M. Van den Bergh，《论 Iyama 和 Yoshino 的两个例子》，《组合数学》147 (2011)，591–612。[49] D. Kussin、H. Lenzing 和 H. Meltzer，《三角奇点、ADE 链与加权射影直线》，《数学进展》237 (2013)，194–251。[50] G. J. Leuschke，《非交换保型解消：范畴几何中的若干场景》，载于：《交换代数进展 1》，293–361，de Gruyter，柏林，2012。[51] G. J. Leuschke 和 R. Wiegand，《Cohen–Macaulay 表示》，《数学调查与专著》第181卷，美国数学会，Province，RI，（2012）。[52] H. Minamoto 和 K. Yamaura，《Happel 函子与同调良分次 Iwanaga-Gorenstein 代数》，《代数杂志》565 (2021)，441–488。[53] Y. Nakajima，《论由二聚体模型产生的 2-表示无限代数》，《数学季刊》2022。[54] D. Orlov，《Landau–Ginzburg 模中的奇点三角范畴与 D-膜》，《斯捷克洛夫数学研究所论文集》246 (2004)，《代数几何：方法、联系与应用》，240–262。[55] D. Orlov，《相干层的导出范畴与奇点三角范畴》，《代数、数论与几何：纪念 Yu. I. Manin。第二卷》，503–531，《数学进展丛书》270，Birkhauser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，2009。[56] D. Orlov，《奇点三角范畴的形式完备化与幂等元完备化》，《数学进展》226 (2011)，第1期，206–217。[57] Y. Palu，《2-Calabi–Yau 三角范畴的 Grothendieck 群与广义突变规则》，《纯粹与应用代数杂志》213 (2009)，第7期，1438–1449。[58] C. Riedtmann，《代数、表示篱、覆盖与回归》，《瑞士数学评论》55 (1980)，199–224。[59] J. C. Rosales 和 P. A. García-Sánchez，《数值半群》，《数学进展》第20卷。Springer，纽约，2009。x+181 页。[60] Š. Špenko 和 M. Van den Bergh，《约化群商奇点的非交换解消》，《数学发明》210 (2017)，第1期，3–67。[61] Š. Špenko 和 M. Van den Bergh，《若干环面奇点的非交换保型解消 I》，《国际数学研究通知》IMRN 2020，第21期，8120–8138。[62] R. P. Stanley，《组合学与交换代数》，第二版。《数学进展》41，Birkhauser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1996。x+164 页。[63] K. Ueda，《戈伦斯坦循环商奇点的三角范畴》，《美国数学会会刊》136 8，2745 2008 2747 ( ) 第 - 期。[64] M. Van den Bergh，《代数环面的半不变量的 Cohen–Macaulay 性》，《美国数学会汇刊》336 (1993)，第2期，557–580。[65] M. Van den Bergh，《非交换保型解消》，《Niels Henrik Abel 的遗产》，749–770，Springer，柏林，2004。[66] M. Van den Bergh，《非交换保型解消：综述》，arXiv:2207.09703。[67] M. Wemyss，《非交换解消》，载于：《非交换代数几何》，239–306，数学科学研究所出版物，64，剑桥大学出版社，纽约，2016。[68] J. Xiao 和 B. Zhu，《局部有限三角范畴》，《代数杂志》290 (2005)，473–490。[69] Y. Yoshino，《科恩–麦考利环上的 Cohen-Macaulay 模》，伦敦数学会讲义系列146，剑桥大学出版社，剑桥，1990。

Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe (WPI),The University of Tokyo Institutes for Advanced Study, The University of Tokyo, Kashiwa, Chiba 277-8583, Japan
Email address: norihiro.hanihara@ipmu.jp