arXiv:2303.14687v1 [math.QA] 26 Mar 2023

弗罗贝尼乌斯张量范畴的正合列

TAIKI SHIBATA 和 Kenichi Shimizu

Abstract. 给定张量范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$之间的张量函子，我们给出一些判据，说明在某些假设下，若 $\mathcal{C}$ 或 $\mathcal{D}$ 具有弗罗贝尼乌斯性质，则另一个也具有弗罗贝尼乌斯性质。我们还对 Natale 关于弗罗贝尼乌斯张量范畴类是否在正合列下封闭这一问题给出了肯定回答。

1. Introduction

仿射群概形上的函数代数，是霍普夫代数理论诞生之初便出现的重要例子之一。当把一个 Hopf 代数视为群上的函数代数时，Hopf 代数上的余积分可解释为一种抽象：它对应于对函数按照 Haar测度积分所定义的函数空间上的线性泛函。存在非零余积分的 Hopf 代数作为余代数是余 Frobenius 的。余弗罗贝尼乌斯霍普夫代数已得到广泛研究；参见 [DNR01] 及其中的参考文献。

在 Hopf 代数的（余）模范畴中，可以构造对象的张量积和对偶。张量范畴 [EGNO15] 将这种情形推广了。张量范畴出现在数学和数学物理的许多领域中。研究张量范畴的一个有趣方向，是从张量范畴的视角重新审视关于 Hopf 代数的结果。这种方法也为 Hopf 代数理论带来了新的见解。

余 Frobenius Hopf 代数可刻画为这样一种 Hopf 代数： H 其每个简单 H余模都有有限维内射包 [DNR01]。因此，Andruskiewitsch、Cuadra 和 Etingof [ACE15] 引入了弗罗贝尼乌斯张量范畴的概念，即每个简单对象都存在内射包的张量范畴。在 [SS23], 中，我们将余弗罗贝尼乌斯霍普夫代数的一些重要结果推广到了弗罗贝尼乌斯张量范畴。本文旨在沿着这一方向作进一步发展。具体而言，对于 Hopf 代数的一个映射 ϕ： $H \to K$，Andruskiewitsch 和 Cuadra 证明，在某些假设下， H 或 K 的余 Frobenius 性蕴含另一者也具有余 Frobenius 性 [AC13，推论 2.9]。本文用张量范畴和张量函子的术语表述他们结果的一个推广，并证明以下定理：

定理1.1（= 定理 3.4）。设 F： $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是张量范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$之间的张量函子，并设 G 是 F的 ind-伴随，也就是说，它是由 F诱导的函子 Ind($\mathcal{C}$) $\to$ Ind($\mathcal{D}$) 的右伴随，其中 Ind(–) 表示 ind-完备化[KS06]。则以下结论成立：

(a) 如果 $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯且 G 是正合的，那么 $\mathcal{D}$ 是弗罗贝尼乌斯。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 18M05, 16T05.*Key words and phrases.* 余代数、Hopf 代数、中山函子、局部有限阿贝尔范畴、弗罗贝尼乌斯张量范畴。

(b) 若 $\mathcal{D}$ 是弗罗贝尼乌斯，且 $G(\mathcal{D}) \subset \mathcal{C}$，则 $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯。

张量范畴的正合列这一概念（见第4.1小节）由 Brugui`ères 和 Natale 在 [BN11, BN14] 中提出并加以研究，作为霍普夫代数正合列的一种推广。Andruskiewitsch 和 Cuadra 还证明，余弗罗贝尼乌斯霍普夫代数在正合列下封闭[AC13, 定理 2.10]。最近，Natale 提出，张量范畴的正合列是否也具有相同性质 [Nat21, 问题 6.12]。本文的主要结果肯定地回答了这个问题，表述如下：

定理1.2（= 定理 4.5）。设 $\mathcal{C}' \xrightarrow{\iota} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ 是张量范畴的一个正合列，且 F 的一个 ind-伴随是正合的。那么，当且仅当 $\mathcal{C}'$ 和 $\mathcal{D}$ 均为弗罗贝尼乌斯时， $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯。

Andruskiewitsch 和 Cuadra 基于霍普夫代数的积分理论，证明了定理 1.1 和定理 1.2 最初的霍普夫代数版本。由于张量范畴中不存在余积分这一概念，他们的方法无法直接推广到张量范畴。本文基于 [SS23]所建立的局部有限阿贝尔范畴的中山函子理论，证明了定理 1.1 和定理 1.2。我们已在 [SS23]中展示，利用中山函子可以将许多关于霍普夫代数的结果推广到张量范畴。鉴于这些成果，我们可以将中山函子视为余积分概念的一种范畴论替代。

本文还给出了定理 1.1 和 1.2 的应用。设 $\mathcal{C}$ 是一个半单编织张量范畴，且设 H 是 Ind($\mathcal{C}$) 中一个具有可逆反极的 Hopf 代数。我们注意到， H 有一个极大商 Hopf 代数 $\overline{H} \in$ Vec，其中 Vec 是所有向量空间构成的范畴，并被视为 Ind($\mathcal{C}$) 的全子范畴。我们的第一个应用涉及张量范畴$\mathcal{C}^H$ 的弗罗贝尼乌斯性质；该范畴由底层对象属于 $\mathcal{C}$ 的右 H-余模构成。作为仿射代数超群概形 [MSS22], 的坐标超代数上存在非零余积分的判别准则的推广，我们给出：

定理 1.3（= 定理 5.2）。假设存在一个对象 $W \in \mathcal{C}$ 以及一个左 $\overline{H}$-余模的同构 $H \cong \overline{H} \otimes W$。那么，张量范畴 $\mathcal{C}^H$ 是弗罗贝尼乌斯的，当且仅当 Hopf 代数 $\overline{H}$ 是余 Frobenius 的。

第二个应用涉及去等变化。设 G 是一个仿射群概形，且 $\mathcal{C}$ 是一个配备了“中心”包含函子 Rep(G) $\to \mathcal{C}$ 的张量范畴。那么，坐标代数 $\mathcal{O}(G)$ 以自然的方式成为 Ind($\mathcal{C}$) 的 Drinfeld 中心中的一个交换代数，因此，Ind($\mathcal{C}$)$^{\mathcal{O}(G)}$ 中的 $\mathcal{O}(G)$-模范畴 Ind($\mathcal{C}$) 关于 $\mathcal{O}(G)$ 上的张量积构成一个幺半范畴。令 $\mathcal{D}$ 为 Ind($\mathcal{C}$)$^{\mathcal{O}(G)}$ 中有限生成对象构成的全子范畴。范畴 $\mathcal{D}$ 是 Ind($\mathcal{C}$)$^{\mathcal{O}(G)}$ 的一个幺半全子范畴（更多细节见第5.2小节）。我们证明：

定理 1.4（= 定理 5.9）。假设幺半范畴 $\mathcal{D}$ 是一个张量范畴。那么以下结论成立：

（1） $\mathcal{D}$ 与 Ind($\mathcal{C}$)$^{\mathcal{O}(G)}$ 中有限表示对象构成的全子范畴重合 .
(2) Ind($\mathcal{D}$) 等价于 Ind($\mathcal{C}$)$^{\mathcal{O}(G)}$。(3) 存在张量范畴的正合列 Rep(G) $\to \mathcal{C} \to \mathcal{D}$。
(4) $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯张量范畴，当且仅当 $\mathcal{O}(G)$ 是余 Frobenius，且 $\mathcal{D}$是弗罗贝尼乌斯。

我们可以将本定理的 $\mathcal{D}$ 称为 $\mathcal{C}$ 关于 G 的去等变化（参见 [DGNO10, Neg21]）。诚然，一般而言，要检验 $\mathcal{D}$ 是否满足本定理的假设并不容易。不过，鉴于其未来的应用，我们认为本定理值得关注。事实上，去等变化构造（或“模化”）已用于 [GLO18, Neg21]，以构造新的非半单模张量范畴实例。

本文的组织结构。本文安排如下：在第2节中，我们固定记号，并从 [SS23] 回顾余代数和局部有限阿贝尔范畴中关于中山函子的基本结果。此外，我们还给出若干技术性引理，利用中山函子刻画拟余弗罗贝尼乌斯余代数（引理 2.6 和 2.10）。

在第3节中，我们证明定理1.1。我们首先回顾 [ACE15] 中弗罗贝尼乌斯张量范畴的定义，并引用 [SS23] 中的一些等价条件，作为引理 3.2。一个有用的判据是：张量范畴是弗罗贝尼乌斯范畴，当且仅当它具有非零投射对象，也当且仅当它具有非零内射对象。在讨论如何从范畴和函子的角度诠释 [AC13, 推论 2.9] 中的情形之后，我们通过利用张量函子的 ind-伴随函子，找到非零投射对象或内射对象，从而证明定理1.1。

在第4节中，我们证明定理1.2。回顾 [BN11, BN14], 中张量范畴的正合列的定义后，我们给出张量范畴的中山函子的一个公式，并发现张量范畴的中山函子是正合的（引理 4.3）。结合这一结果与引理 2.10，我们证明了一个关键引理：张量范畴 $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯的，当且仅当存在一个内射对象 $E \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 和一个对象 $V \in \mathcal{C}$，使得 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(E, V) \neq 0$（引理 4.4）。“若”部分的证明是利用张量函子的一个 ind-伴随，找出这样的对象 $E$and V。“唯若”部分则由定理1.1以及 [Sul72] 中给出的 Sullivan论证的推广得出。

在第5节中，我们给出结果的应用。定理 1.3 是将定理1.1应用于由商态射 $H \to \overline{H}$ 诱导的张量函子 $\mathcal{C}^H \to \mathcal{C}^{\overline{H}}$ 得到的。定理 1.4 在第5.2小节中证明。本小节很大一部分实际上是用来解释定理陈述中的范畴 $\mathcal{D}$ 是一个幺半范畴。定理1.1的第 (1) 和 (2) 部分由关于 ind-完备化 [KS06] 的基本结果以及定理的强假设 $\mathcal{D}$ 是一个张量范畴推出。第 (3) 部分显然成立，而第 (4) 部分由定理 1.4 立即推出。

设 $\mathcal{V}$ 是一个张量范畴，且 C 是 Ind($\mathcal{V}$) 中的一个余代数。在附录 A 中，我们证明，Ind($\mathcal{V}$)$^{\mathbf{C}}$ 中 Ind($\mathcal{V}$) 内所有 C-余模构成的范畴可识别为 $\mathcal{V}^{\mathbf{C}}$ 的 ind-完备化（定理 A.1）。该定理用于定理1.3的证明。Lyubashenko [Lyu99, 第2节.3] 在平方余代数的一般框架下证明了定理 A.1。为方便读者，我们在附录中给出定理 A.1 的一个直接证明。

致谢。第一作者（T.S.）获得日本学术振兴会科学研究费助成事业项目（编号：JP22K13905）的资助。第二作者（K.S.）获得日本学术振兴会科学研究费助成事业项目（编号：JP20K03520）的资助。

2. Preliminaries

2.1. 基本记号。关于范畴论基础，我们参考 Mac Lane 的著作 [ML98]。给定一个范畴 $\mathcal{C}$，我们将 $\mathcal{C}$ 的对偶范畴记为 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$。

本文中，我们始终在域 $\Bbbk$ 上进行讨论。所有（域 $\Bbbk$ 上的）向量空间构成的范畴记为 Vec。$X \in$Vec 的对偶空间记为 X^*。对于 $f \in X^*$ 和 $x \in X$，我们常将 $f(x) \in \Bbbk$ 记作 $\langle f, x\rangle$。所谓（余）代数，始终指域 $\Bbbk$ 上的（余）结合（余）含幺（余）代数。余代数的余乘法和余单位 C 分别记为 Δ 和 ε。我们将使用 Sweedler记号，例如 $\Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$，来表示元素 $c \in C$ 的余乘法。注意，C^* 关于由 $\langle fg, c\rangle = \langle f, c_{(1)}\rangle\langle g, c_{(2)}\rangle$ 定义的卷积乘积构成一个代数，其中 $f, g \in C^*$ 和 $c \in C$。

给定一个代数 A，我们分别用 ${}_A\mathfrak{M}$ 和 $\mathfrak{M}_A$ 表示左A-模范畴和右A-模范畴。类似地，给定一个余代数 C，我们分别用 ${}^C\mathfrak{M}$ 和$\mathfrak{M}^C$ 表示左 C-余模范畴和右 C-余模范畴。这四个范畴的 Hom函子分别记作 ${}_A\mathrm{Hom}$、Hom_A、${}^C\mathrm{Hom}$和Hom^C。下标“fd”表示由所有有限维对象构成的全子范畴。例如，$\mathfrak{M}^C_{\mathrm{fd}}$ 表示有限维右 C-余模范畴。

2.2. 余代数与余模。关于余代数和余模的基础知识，请读者参阅 [DNR01]。设 C 为一个余代数。给定一个右 C-余模M，我们通常将 C 在 M 上的余作用记为 δ_M：$M \to M \otimes_{\Bbbk} C$，并将其表示为 $\delta_M(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)} (m \in M)$。右 C-余模 M通过作用 $f \rightharpoonup m := m_{(0)}\langle f, m_{(1)}\rangle$ $(f \in C^*, m \in M)$成为左 C^*-模。若一个左C^*-模可由这种方式从右 C-余模得到，则称其为有理的。$M \in {}_{C^*}\mathfrak{M}$的有理部分记为 M^{rat}，它是 M的最大有理左 C^*-模。我们可以并且确实将 M^{rat} 视为右 C-余模。右 C^*-模的有理部分以类似方式定义。

我们回顾以下几类重要的余代数：

(1) 左半完美余代数是指余代数 C，其中每个单纯左 C-余模在 ${}^C\mathfrak{M}$中都有一个投射覆盖。若余代数 C 满足 C^{cop} 是左半完美的，则称其为右半完美（其中 C^{cop} 是对余代数）。半完美余代数是既左半完美又右半完美的余代数。(2) 左拟余弗罗贝尼乌斯（QcF）余代数是指余代数 C，其中存在一个基数 κ 和一个单同态 $C \to (C^*)^{\oplus\kappa}$，它是左 C^*-模之间的单同态。若余代数 C 满足 C^{cop} 是左 QcF 的，则称其为右 QcF。QcF 余代数是既左 QcF 又右 QcF 的余代数。(3) 左余 Frobenius 余代数是指余代数 C，其中存在一个单同态 $C \to C^*$，它是左 C^*-模之间的单同态。若余代数 C 满足 C^{cop} 是左余 Frobenius 的，则称其为右余 Frobenius。余 Frobenius 余代数是既左余 Frobenius 又右余 Frobenius 的余代数。

已知左（右）余 Frobenius 余代数是 QcF 余代数，而左（右）QcF 余代数是左（右）半完美的。本文将用到的关于这些余代数类的大多数结果见 [DNR01]。其中一个例外是 Iovanov [Iov14, 引理 1 给出的 QcF 余代数刻画。7]

2.3. 余代数的中山函子。设 C 是一个余代数。给定一个右 C余模 M，我们按照第 2.2 小节中说明的方式，将 M 视为左 C^*-模

并将 $\mathbb{N}_C(M) = C \otimes_{C^*} M$ 定义为一个向量空间。存在一个定义良好的右 C余作用，其定义为

$$\mathbb{N}_C(M) \to \mathbb{N}_C(M) \otimes_{\Bbbk} C, \quad c \otimes_{C^*} m \mapsto (c_{(1)} \otimes_{C^*} m) \otimes c_{(2)}$$

对于 $c \in C$ 和 $m \in M$。

定义 2.1。我们将 C 的中山函子定义为

$$\mathbb{N}_C : \mathfrak{M}^C \to \mathfrak{M}^C, \quad M \mapsto C \otimes_{C^*} M.$$

严格来说，这个函子是 C 的右正合中山函子，由 [SS23]引入并加以研究。此外还有一个左正合版本，本文不会用到。为方便读者，我们将 [SS23] 中关于中山函子的若干结果列为以下引理：

引理 2.2。设 C 是一个余代数。则以下结论成立：

(1) $\mathbb{N}_C$ 有右伴随，因此保持余极限。(2) 若 C 是半完美的，则全子范畴 $\mathfrak{M}^C_{\mathtt{fd}}$ 在 $\mathbb{N}_C$下封闭。(3) C 是 QcF，当且仅当 $\mathbb{N}_C$ 是等价。(4) C 是余 Frobenius，当且仅当 $\mathbb{N}_C$ 是等价，且保持简单右 C-余模的维数。

为了本文的目的，我们补充一些结果。设 C 是一个余代数。我们分别将 $C^{*\mathrm{rat}}_\ell \in \mathfrak{M}^C$ 和 $C^{*\mathrm{rat}}_r \in {}^C\mathfrak{M}$ 定义为 C^* 作为左 C^*-模和右 C^*-模时的有理部分。注意：

引理 2.3. 对于 $M \in \mathfrak{M}^C$，存在自然同构

$$\mathbb{N}_C(M)^* \cong {}_{C^*}\mathrm{Hom}(M, C^*) \cong \mathrm{Hom}^C(M, C^{*\mathrm{rat}}_\ell)$$

向量空间的同构。

证明。第一个同构就是张量-Hom 伴随，第二个同构由有理 C^*-模的像仍是有理模这一事实得出。□

若对所有 $X \in \mathfrak{M}^C_{\mathtt{fd}}$，$\mathrm{Hom}^C(X, Q)$ 都是有限维的，则称右 C-余模 Q 为拟有限的 [Tak77]。根据引理 2.3 以及反变自函子 $X \mapsto X^*$ 保持并反映 Vec 上正合列这一事实，可立即证明：

引理 2.4. 设 C 是一个余代数。

(a) $\mathbb{N}_C$ 是零函子，当且仅当 $C^{*\mathrm{rat}}_\ell = 0$。(b) $\mathbb{N}_C$ 是正合的，当且仅当 $C^{*\mathrm{rat}}_\ell$ 是一个内射右 C-余模。(c) $\mathbb{N}_C$ 保持 $\mathfrak{M}^C_{\mathtt{fd}}$，当且仅当 $C^{*\mathrm{rat}}_\ell$ 是拟有限的。

我们回顾一下，若环 R 作为左 R-模时 R 是内射的，则称该环为左自内射。根据引理 2.3，还可得：

引理 2.5. 若环 C^* 是左自内射的，则 $\mathbb{N}_C$ 是正合的。

这个引理的逆命题一般不成立。事实上，令 $C = \Bbbk[t]$ 为 $\Bbbk$上的多项式代数，并赋予它由 $\Delta(t) = t \otimes 1 + 1 \otimes t$确定的 Hopf 代数结构。于是 C^* 同构于形式幂级数代数 $\Bbbk[[t]]$。由于 C^* 没有非零有限维子模，根据 [DNR01，推论 2.2.16]，我们有 $C^{*\mathrm{rat}}_\ell = 0$。因此， $\mathbb{N}_C$ 是零函子，尤其是它

正合。然而，根据经典结论，主理想整环上的模是内射模当且仅当它是可除模，因此 C^* 不是左自内射的。

我们还给出了 QcF 余代数的以下新刻画：

引理 2.6. 设 C 是一个余代数，满足

$$\text{the functor } \mathbb{N}_{C^{\mathrm{cop}}} : {}^C\mathfrak{M} \to {}^C\mathfrak{M} \text{ is exact}, \tag{2.1}$$

其中 ${}^C\mathfrak{M}$ 与 $\mathfrak{M}^{C^{\mathrm{cop}}}$ 等同。则以下断言等价：

(1) C 是 QcF。(2) 每个单右 C-余模都是某个单射右C-余模的满射像。(3) 每个单右 C-余模都是 C的满射像。

注意，(2.1) 可以改述如下：对于 $D = C^{\mathrm{cop}}$，我们有 $D^{*\mathrm{rat}}_{\ell} = C^{*\mathrm{rat}}_{r}$作为 D^* $(= C^*)$ 的子空间。因此，根据引理 2.4，假设 (2.1) 等价于 $C^{*\mathrm{rat}}_{r}$作为左 C-余模是单射的。假设 (2.1) 的必要性将在注 2.7 中讨论。

引理 2.6 的证明。(1) $\Rightarrow$ (2)。假设 (1) 成立。则每个内射右C-余模都是投射的，反之亦然 [DNR01，定理 3.3.4]。由于 QcF 余代数是半完美的，每个单右 C-余模都有一个投射覆盖，而该覆盖实际上是内射的。因此 (2) 成立。

(2) $\Rightarrow$ (3)。假设 (2) 成立。设 S 是一个单右 C-余模，并设$\pi : E \to S$ 是 $\mathfrak{M}^C$ 中的一个满态射，其中 E 是内射的。我们将 E 分解为不可分解内射右 C-余模的直和，即 $E = \bigoplus_{i\in I} E_i$，并令 $\pi_i : E_i \to S$ 为 π 在 E_i上的限制。注意，每个 E_i 都是某个单右 C-余模的内射包，因而是 C [的一个直和项16]DNR01，定理 2.4.16]。现在取一个元素 $i_0 \in I$ 使得 $\pi_{i_0} \neq 0$。由于 S 是单的，故 π_{i_0} 是满射。因此 S 是 C的一个满射像。

(3) $\Rightarrow$ (1)。假设 (3) 成立。设 $\{S_i\}_{i\in I}$ 是左 C-余模的同构类的一组完备代表元，并设 E_i 是 S_i 在 ${}^C\mathfrak{M}$ 中的一个内射包。我们将内射左 C-余模 C 和 $C^{*\mathrm{rat}}_{r}$ 分解为 E_i 的直和，如下所示：

$$C \cong \bigoplus_{i\in I} E_i^{\oplus a_i}, \quad C^{*\mathrm{rat}}_{r} \cong \bigoplus_{i\in I} E_i^{\oplus b_i}.$$

对所有 $i \in I$，都有 $a_i > 0$。根据假设，对每个 $i \in I$，存在 $\mathfrak{M}^C$ 中的一个满态射 $C \to S_i^*$。因此，存在一个从 $S_i(\cong S_i^{**})$ 到 C^* 的右 C^*-模单态射。由于右 C^*- 模 S_i 是有理的，$C^{*\mathrm{rat}}_{r}$ 有一个与 S_i 同构的子余模。这意味着 $b_i > 0$。

设 κ 是一个大于所有 a_i 和 b_i 的无限基数。根据上述讨论，作为左 C-余模，有 $C^{\oplus\kappa} \cong \bigoplus_{i\in I} E_i^{\oplus\kappa} \cong (C^{*\mathrm{rat}}_{r})^{\oplus\kappa}$。现在，(1) 可由 Iovanov 的结果 [Iov14, 引理 1.7] 得出，该结果指出：余代数 Q 是 QcF，当且仅当存在一个基数 $\kappa > 0$，使得作为左 Q-余模，有 $(Q^{*\mathrm{rat}}_{r})^{\oplus\kappa} \cong Q^{\oplus\kappa}$。□

注 2.7. 证明 (1) $\Rightarrow$ (2) 和 (2) $\Rightarrow$ (3) 时，并未用到引理 2.6 的假设 (2.1)。此外，显然即使不假设 (2.1)，(3) $\Rightarrow$ (2) 也成立。要证明 (3) $\Rightarrow$ (1)，则必须假设 (2.1)。事实上，设 C 是一个非左 QcF 的右 QcF 余代数（这种余代数的一个具体例子

见于 [DNR01，例 3.3。7]）。那么 C 不是 QcF，然而，由于 C 是 $\mathfrak{M}^C$ [DNR01，推论 3.3。10]中的一个生成元，条件 (3) 成立。

对于一个不是左 QcF 的右 QcF 余代数 C，由引理 2.5 以及右半完美余代数的对偶代数是左自内射的这一事实 [DNR01，推论 3.3.9]，我们也有 $\mathbb{N}_C$ 是正合的。这意味着不能用 $\mathbb{N}_C$ 是正合的假设来替代 (2.1)。

2.4. 局部有限阿贝尔范畴的中山函子。设 $\mathcal{A}$ 是一个线性范畴，$W \in$Vec 和 $M \in \mathcal{A}$ 是对象。M 关于 W 的余幂，记作 $W \otimes M$，是 $\mathcal{A}$ 中的一个对象，使得存在自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(W \otimes M, N) \cong \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W, \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(M, N))$$

对于 $N \in \mathcal{A}$。假设对所有对象 $W \in$ Vec 和 $M \in \mathcal{A}$，余幂 $W \otimes M$ 都存在。那么，对于对象 M、$N \in \mathcal{A}$，coHom 空间 $\mathrm{coHom}_{\mathcal{A}}(M, N)$ 定义为满足如下自然同构的向量空间

$$\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\mathrm{coHom}_{\mathcal{A}}(M, N), W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N, W \otimes M)$$

对于 $W \in$Vec。

这些定义受到 Takeuchi [Tak77], 的启发；他在那里引入了余模范畴的 coHom函子，并用它建立了余代数的 Morita理论。设 C 为一个余代数。$M \in \mathfrak{M}^C$ 在 $W \in$ Vec 上的余幂就是它们的张量积 $W \otimes_{\Bbbk} M$，其余作用为 $\mathrm{id}_W \otimes \delta_M$。固定 $M \in \mathfrak{M}^C$。那么，根据 [Tak77], ，当且仅当 M 是拟有限的时，对于所有 $N \in \mathfrak{M}^C$，从 M 到 N 的 coHom空间都存在。此外，在这种情况下，从 M 到 N 的 coHom空间为

$$\mathrm{coHom}_{\mathfrak{M}^C}(M, N) = \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Hom}^C(N_\lambda, M)^*$$

对于 $N \in \mathfrak{M}^C$，其中 $\{N_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 N的所有有限维余子模构成的有向集。

局部有限阿贝尔范畴 [EGNO15] 是一个本质小的线性范畴$\mathcal{A}$，其中每个对象 $\mathcal{A}$ 都具有有限长度，并且对于任意对象 X、$Y \in \mathcal{A}$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ 都是有限维的。众所周知，局部有限阿贝尔范畴恰好是与某个余代数C 的 $\mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}^C$ 等价的线性范畴（见 [Tak77] 和 [EGNO15，定理 1.9.15]）。

给定一个范畴 $\mathcal{A}$，我们将其 ind-完备化 [KS06] 记作 $\mathrm{Ind}(\mathcal{A})$。存在一个典范函子 $\iota_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathrm{Ind}(\mathcal{A})$，通过它我们将 $\mathcal{A}$ 视为 $\mathrm{Ind}(\mathcal{A})$ 的全子范畴。若 $\mathcal{A} = \mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}^C$ 是某个余代数 C的情形，则我们可以分别将 $\mathrm{Ind}(\mathcal{A})$ 和 $\iota_{\mathcal{A}}$ 视为 $\mathfrak{M}^C$ 及包含函子。此外，$\mathrm{Ind}(\mathcal{A})$ 中的一个对象属于 $\mathcal{A}$ 当且仅当它具有有限长度。

在 [SS23 的定理 3.6], 中，我们已经证明中山函子由下式给出

$$\mathbb{N}_C(M) = \int^{X \in \mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}^C} \mathrm{coHom}_{\mathfrak{M}^C}(X, M) \otimes_{\Bbbk} X \quad (M \in \mathfrak{M}^C),$$

其中，积分表示余端 [ML98]。鉴于中山函子的这一泛性质，以及局部有限阿贝尔范畴等价于某个余代数 C对应的 $\mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}^C$，我们定义：

定义 2.8（[SS23]）。对于局部有限阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$，我们将中山函子定义为 Ind($\mathcal{A}$) 上由下式给出的自函子 $\mathbb{N}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{A})}$

$$\mathbb{N}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{A})}(M) = \int^{X\in\mathcal{A}} \mathrm{coHom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{A})}(X, M) \otimes X \quad (M \in \mathrm{Ind}(\mathcal{A})).$$

我们注意到，全子范畴 $\mathcal{A} \subset$ Ind($\mathcal{A}$)可能不对 $\mathbb{N}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{A})}$封闭。根据引理 2.2，若存在半完美余代数 C 使得 $\mathcal{A} \approx \mathfrak{M}^C_{\mathtt{fd}}$，则函子 $\mathbb{N}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{A})}$ 限制为 $\mathcal{A}$ 上的一个自函子。

给定一个函子 F，我们用 F^{la} 表示 F的一个左伴随（若其存在）。以下引理在 [SS23] 中以与 [FSS20]中建立有限情形类似的方式，利用中山函子的泛性质得到了证明。

引理 2.9（[SS23，定理 4.7]）。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 为局部有限阿贝尔范畴，且设 F: Ind($\mathcal{A}$) →Ind($\mathcal{B}$) 为一个线性函子，使得 F 保持余极限，并且二重左伴随 $F^{\mathrm{lla}} := (F_{\mathrm{la}})^{\mathrm{la}}$ 存在。则存在一个函子同构$F \circ \mathbb{N}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{A})} \cong \mathbb{N}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{B})} \circ F^{\mathrm{lla}}$。

为便于后续使用，我们将引理 2.6 改述如下:

引理 2.10. 设 $\mathcal{A}$ 是一个局部有限阿贝尔范畴，且 $\mathbb{N}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})}$ 是正合的；设 Q 是一个余代数，使得 $\mathcal{A} \approx \mathfrak{M}^Q_{\mathtt{fd}}$ 作为线性范畴。则以下条件等价:

(1) 余代数 Q 是 QcF。 (2) $\mathcal{A}$ 中的每个简单对象都是 Ind($\mathcal{A}$)中某个内射对象的满射像。

证明. 由于 $(\mathfrak{M}^Q_{\mathtt{fd}})^{\mathrm{op}}$ 和 $\mathfrak{M}^{Q^{\mathrm{cop}}}_{\mathtt{fd}}$ 通过函子 $X \mapsto X^*$等价，$\mathbb{N}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}})}$ 的正合性等价于 $\mathbb{N}_{Q^{\mathrm{cop}}}$的正合性。因此，本引理只需将引理 2.6 改述即可得到。 □

3. Frobenius property and tensor functors

3.1. 张量范畴与张量函子。关于张量范畴的基础知识，请读者参阅 [EGNO15]。我们首先约定幺半范畴的记号：鉴于 Mac Lane 严格性定理，所有幺半范畴均假定为严格的。给定幺半范畴 $\mathcal{C}$，我们通常分别用 $\otimes$ 和 $\mathbf{1}$ 表示 $\mathcal{C}$的张量积和单位对象。$X \in \mathcal{C}$ 的左对偶对象是一个对象 $X^\vee \in \mathcal{C}$，配备态射 ev_X： $X^\vee \otimes X \to \mathbf{1}$ 和 coev_X： $\mathbf{1} \to X \otimes X^\vee$，满足之字形方程（精确定义见 [EGNO15，第2节10]）。X的右对偶对象记作 ${}^\vee X$，是一个以 X 为左对偶对象的对象。若幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 $\mathcal{C}$ 都有左对偶对象和右对偶对象，则称 $\mathcal{C}$ 是刚性的。

如果线性阿贝尔范畴中的一个简单对象的自同态代数同构于基域 $\Bbbk$，则称它是绝对简单的。张量范畴是一个局部有限阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$，并带有刚性幺半范畴结构，使得 $\mathcal{C}$ 的张量积是双线性的，且 $\mathcal{C}$ 的单位对象是绝对简单的。给定两个张量范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$，从 $\mathcal{C}$ 到$\mathcal{D}$ 的张量函子是一个线性正合函子 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，并配备自然同构

$$F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y) \quad (X, Y \in \mathcal{C})$$

以及满足某些方程的同构 $\mathbf{1} \to F(\mathbf{1})$。

3.2. 弗罗贝尼乌斯张量范畴。本文的主要研究对象是以下这类张量范畴：

定义 3.1. 弗罗贝尼乌斯张量范畴 [ACE15] 是一个张量范畴 $\mathcal{C}$，其中每个对象 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{C}$ 中都有一个内射包。

我们回顾一下，余代数 Q 是左半完美的，当且仅当每个有限维右 Q-余模都有一个有限维内射包 [DNR01，定理 3.2.3]。因此，弗罗贝尼乌斯张量范畴等同于与某个左半完美余代数 Q的$\mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}^{Q}$ 线性等价的张量范畴。已知一个 Hopf 代数是左半完美的，当且仅当它是 QcF [DNR01，定理 5.3.2]。受这一结果以及余弗罗贝尼乌斯霍普夫代数的其他一些刻画的启发，我们给出了弗罗贝尼乌斯张量范畴的以下刻画：

引理 3.2（[SS23，定理 5.7]）。对于张量范畴 $\mathcal{C}$，以下条件等价：

（1） $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯的。（2） $\mathcal{C}$ 有非零内射对象。（3） $\mathcal{C}$ 有非零投射对象。
（4） $\mathcal{C} \approx \mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}^{Q}$ 对某个 QcF 余代数 Q成立。

中山函子在证明中发挥了重要作用。我们将在第 4.2 小节再次利用中山函子，给出 $\mathcal{C}$ 为弗罗贝尼乌斯的更多等价条件。

3.3. 弗罗贝尼乌斯性质与张量函子。设 $\phi: H \to K$ 是 Hopf 代数之间的映射，并通过由 ϕ 诱导的余作用将 H 视为右 K-余模。若存在正整数 n，以及从 M 到 $K^{\oplus n}$ 的右 K- 余模单态射，则称右 K- 余模 M 为有限余生成。Andruskiewitsch 和 Cuadra [AC13，推论 2.9] 给出了以下关于 H 或 K 为余 Frobenius 的判据：

(a) 如果 H 是余 Frobenius 的，且 $H \in \mathfrak{M}^K$ 是内射的，那么 K 是余 Frobenius 的。
(b) 如果 K 是余 Frobenius 的，且 $H \in \mathfrak{M}^K$ 是有限余生成的，那么 H 是余 Frobenius 的。

我们旨在将这些结果推广到张量范畴的情形。为此，我们用范畴论术语来解释 (a) 和 (b) 中关于 H 的条件。设 $\phi_*: {}^H\mathfrak{M} \to {}^K\mathfrak{M}$ 是由 ϕ 诱导的左余模范畴之间的函子。此函子有一个右伴随

$$\phi_*^{\mathrm{ra}} := H \,\square_K (-) : {}^K\mathfrak{M} \to {}^H\mathfrak{M},$$

其中 $\square_K$ 表示关于 K [DNR01 的余张量积，§2.3]。根据 [DNR01，练习 2.4.23]，H 是右 K-余模内射的，当且仅当 ϕ_*^{ra} 是正合的。

我们假设 $H \in \mathfrak{M}^K$ 是有限余生成的。根据定义，存在一个正整数 n 和一个右 K-余模的单态射 $H \hookrightarrow K^{\oplus n}$。由于余张量积保单态射，因此有一个单态射

$$\phi_*^{\mathrm{ra}}(M) = H \,\square_K M \hookrightarrow K^{\oplus n} \,\square_K M \cong M^{\oplus n}$$

的向量空间。因此，对于所有 $M \in {}^K\mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}$，$\phi_*^{\mathrm{ra}}(M)$ 都是有限维的。虽然稍微偏离主题，但我们给出函子 ϕ_*^{ra} 保持有限维性的一个刻画。

L引理 3.3. 对于 Hopf 代数的映射 ϕ: $H \to K$，以下条件等价：(1) 对于所有 $M \in {}^K\mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}$，向量空间 $\phi_*^{\mathrm{ra}}(M)$ 都是有限维的。(2) H 作为左 K-余模是拟有限的。

虽然我们不知道任何具体的反例，但我们认为，本引理中等价条件 (1) 和 (2) 严格弱于 H 作为右 K-余模是有限余生成的条件。

证明。赋值 $X \mapsto X^*$ 导出了 ${}^K\mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}$ 与 $\mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}^K$ 之间的反等价，并且对于 $X \in {}^K\mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}$ [，存在向量空间的自然同构 $H \square_K X \cong {}^K\mathrm{Hom}(X^*, H)$，参见 DNR01，命题 2.3。7]。由此同构及拟有限性的定义可轻易得出结论。□

考虑到上述关于 ϕ_*^{ra} 的讨论，我们将 Andruskiewitsch 和 Cuadra 的结果 [AC13，推论 2。9] 推广到张量范畴的情形如下：设 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 为张量范畴，并设 F: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为张量函子。根据定义，F 是右正合的，因此它存在 ind- 伴随，也就是说，由 F 诱导的函子 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ind}(\mathcal{D})$ 存在右伴随。

定理 3.4. 设 F: $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个张量函子，且 G 是 F 的 ind-伴随。则有以下结论:

(a) 若 $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯且 G 正合，则 $\mathcal{D}$ 是弗罗贝尼乌斯。
(b) 若 $\mathcal{D}$ 是弗罗贝尼乌斯且 $G(\mathcal{D}) \subset \mathcal{C}$，则 $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯。

证明. (a) 假设 $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯且 G 正合。令 $P \in \mathcal{C}$ 为一个非零投射对象（由引理 3.2 可知这样的对象存在）。注意到 P 在 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 中也是投射的（见 SS23, 引理 2.4]）。存在一个函子同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(P), -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(P, G(-)) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(P, -) \circ G$$

从 $\mathcal{D}$ 到 Vec。由于 G 正合且 F 忠实，$F(P)$ 是 $\mathcal{D}$ 的一个非零投射对象。由引理 3.2, $\mathcal{D}$ 是弗罗贝尼乌斯。

(b) 假设 $\mathcal{D}$ 是弗罗贝尼乌斯且 $G(\mathcal{D}) \subset \mathcal{C}$。根据后一假设，我们可以并且确实将 G 视为从 $\mathcal{D}$ 到 $\mathcal{C}$ 的函子。若对所有内射对象 $E \in \mathcal{D}$ 都有 $G(E) = 0$，则 $G = 0$ 作为函子成立，因为 $\mathcal{D}$ 有足够多的内射对象，且 G 作为 F 的右伴随是左正合的。因此我们有 $F = 0$，这与假设矛盾。故存在一个内射对象 $E \in \mathcal{D}$，使得 $G(E) \neq 0$。我们取这样的对象 E。于是存在一个函子同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(E)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, E) \circ F$，从 $\mathcal{C}$ 到 Vec。由于 F 正合且 E 是内射对象，我们得出 $G(E)$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个非零内射对象。由引理 3.2, $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯。□

4. Exactsequence of Frobenius tensor categories

4.1. 张量范畴的正合列。张量范畴的正合列 [BN11, BN14, Nat21] 是一列张量函子，为霍普夫代数正合列提供了范畴论上的解释。Natale [Nat21, Question 6. 12] 提出，弗罗贝尼乌斯张量范畴这一类是否在正合列下封闭。本节旨在对此问题给出肯定的回答（定理 4.5）。中山函子在我们的方法中发挥着关键作用。

设 $\mathcal{C}$ 为一个张量范畴。若一个对象同构于有限个单位对象的直和，则称 $\mathcal{C}$ 中的该对象为平凡对象。给定一个对象 $X \in \mathcal{C}$，我们将 X 的最大平凡子对象记为 X_{triv}（它存在是因为 X 具有有限长度）。我们回顾 [BN11] 中的以下定义:

定义 4.1. 张量范畴的正合列是一个序列

$$\mathcal{C}' \xrightarrow{\iota} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$$

张量范畴 $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ 和 $\mathcal{D}$ 之间的张量函子，满足以下条件：

(1) 函子 ι 是全忠实的，因此我们可以将 $\mathcal{C}'$ 视为 $\mathcal{C}$的张量全子范畴。(2) 函子 F是占优的，即 $\mathcal{D}$ 中的每个对象都是某个形如 $F(X)$的对象的子对象，其中 $X \in \mathcal{C}$是某个对象。(3) 函子 F 是正规的，即每个对象 $X \in \mathcal{C}$ 都有一个子对象 X_0，使得 $F(X_0) = F(X)_{\mathrm{triv}}$ 是 $F(X)$的子对象。(4) F的核定义如下，并记作

$$\mathrm{Ker}(F) = \{X \in \mathcal{C} \mid F(X) \text{ is trivial}\},$$

与张量函子 ι的本质像重合。

张量函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是占优的，当且仅当 $\mathcal{D}$ 中的每个对象都是某个形如 $F(X)$的对象的商对象，其中 $X \in \mathcal{C}$是某个对象；这又当且仅当 F 的一个 ind-伴随是忠实的 [BN11，引理 3.1]。

以下对正规性的刻画很有用：

引理 4.2. 设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是张量范畴 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$之间的张量函子，且 G 是 F的 ind-伴随。那么， F 是正规的，当且仅当 $G(\mathbf{1})$ 的每个有限长度子对象都属于 $\mathrm{Ker}(F)$。

证明. 该引理已在 [BN11, 命题 3.5] 中证明，当时假设 F 有右伴随，或者等价地，$G(\mathcal{D}) \subset \mathcal{C}$。尽管在我们的设定中， G 仅是一个 ind-伴随，我们仍可用与 [BN11] 类似的方法证明该引理。为求完整起见，我们给出证明。

为证明该引理，将 F的正规性改述如下会比较方便：给定张量范畴中的一个对象 X，记 $\overline{X}_{\mathrm{triv}}$ 为 X 的最大平凡商对象（它存在，因为 X 具有有限长度）。由对偶性，对象 $\overline{X}_{\mathrm{triv}}$ 可识别为 $^\vee((X^\vee)_{\mathrm{triv}})$。由于张量函子保对偶， F的正规性等价于以下命题：对于每个对象$X \in \mathcal{C}$，存在 X 的一个商对象 X_0，使得 $F(X_0) = F(X)_{\mathrm{triv}}$ 作为 $F(X)$ 的商对象相同。

“仅当”部分。假设 F 是正规的。设 X 是 $G(\mathbf{1})$ 的一个有限长度子对象。我们要证明 X 属于 $\mathrm{Ker}(F)$。由 F的正规性，存在一个满态射 $q\colon X \to X_0$ in $\mathcal{C}$，使得 $F(X_0) = F(X)_{\mathrm{triv}}$ 作为 $F(X)$ 的商对象。考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X_0), \mathbf{1}) & \xrightarrow{\psi} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), \mathbf{1}) \\ {\scriptstyle \text{adjunction}}\downarrow\cong & & \cong\downarrow{\scriptstyle \text{adjunction}} \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(X_0, G(\mathbf{1})) & \xrightarrow{\phi} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(X, G(\mathbf{1})), \end{array} \tag{4.1}$$

其中 $\psi = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(q), \mathbf{1})$ 且 $\phi = \mathrm{Hom}^{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(q, G(\mathbf{1}))$。由于 $F(X_0) = F(X)_{\mathrm{triv}}$，上图中的映射 ψ 是双射，因此 ϕ 也是双射。令 $i\colon X \to G(\mathbf{1})$ 为包含态射。根据上述讨论，存在一个态射

$f\colon X_0 \to G(1)$ 属于 $\mathcal{C}$，使得 $i = f \circ q$。由于 i 是单态射，q 也是单态射。因此 q 实际上是一个同构。这意味着 $F(X)$ 是平凡的。

“若”部分。我们假设，$G(1)$ 的每个有限长度子对象都属于 $\mathrm{Ker}(F)$。令 $X \in \mathcal{C}$ 为任意对象，并令 $X_0 \in \mathcal{C}$ 为属于 $\mathrm{Ker}(F)$ 的 X 的最大商对象。记 $q\colon X \to X_0$ 为商态射，我们考虑上文的交换图 (4.1)。根据 X_0的定义，图中的映射 ϕ 是双射，因此 ψ也是双射。换言之，每个态射$F(X) \to \mathbf{1}$都唯一地经由 $F(q)$分解。这意味着，$F(X_0) = F(X)_{\mathrm{triv}}$作为 $F(X)$ 的商对象相同。证明完毕。□

4.2. 张量范畴的中山函子。设 $\mathcal{C}$ 为一个张量范畴，并设 $\mathbb{N} := \mathbb{N}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})} : \mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 为中山函子。如[FSS20, SS23], 所示，若 $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯的，则有 $\mathbb{N}(X) = \mathbb{N}(\mathbf{1}) \otimes X^{\vee\vee}$，其中 $X \in \mathcal{C}$。在本小节中，我们首先证明，对于 $\mathbb{N}(X)$，即使不假设 $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯的，该公式仍然成立。

注意到，范畴 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 具有自然的幺半范畴结构，使得张量积是线性的、正合的且余连续的。令 $\mathbb{D}$ 表示由 $\mathcal{C}$ 上的双重对偶函子 $(-)^{\vee\vee}$ 诱导的 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 上的自函子。换言之，对于一个表示为 $M = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ 的对象 $M \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$，其中 $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathcal{C}$ 的对象所成的某个滤系，我们有 $\mathbb{D}$ 是由 $\mathbb{D}(M) = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda^{\vee\vee}$ 定义的函子。由于函子 $(-)^{\vee\vee}$ 是 $\mathcal{C}$ 的自等价，函子 $\mathbb{D}$ 是 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 的自等价。现在我们证明：

引理 4.3。存在自然同构

$$\mathbb{N}(V) \otimes \mathbb{D}(W) \cong \mathbb{N}(V \otimes W) \cong \mathbb{D}^{-1}(V) \otimes \mathbb{N}(W) \quad (V, W \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C})).$$

特别地，对于 $X \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$，我们有 $\mathbb{N}(X) \cong \mathbb{N}(\mathbf{1}) \otimes \mathbb{D}(X)$，因此 $\mathbb{N}$ 是正合的。

证明。将引理 2.9 应用于 $F = (-) \otimes X^{\vee\vee}$，我们得到如下自然同构：

$$\mathbb{N}(V \otimes X) \cong \mathbb{N}(V) \otimes X^{\vee\vee} \quad (V \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C}), X \in \mathcal{C}).$$

因此，若 W 是 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 中的一个对象，且对某个 $W_\lambda \in \mathcal{C}$ 有 $W = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} W_\lambda$，则我们有

$$\mathbb{N}(V \otimes W) \cong \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{N}(V \otimes W_\lambda) \cong \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{N}(V) \otimes W_\lambda^{\vee\vee} \cong \mathbb{N}(V) \otimes \mathbb{D}(W),$$

这里我们用到了 $\mathbb{N}$ 和 $\otimes$ 保持余极限这一事实。由此，我们证明了该引理陈述中的第一个同构。第二个同构的证明方法类似。□

众所周知，Hopf 代数 H 是余 Frobenius 的，当且仅当 $H_\ell^{*\mathrm{rat}} \neq 0$[DNR01，推论 5.2.4]。引理 2.4 表明，$H_\ell^{*\mathrm{rat}} \neq 0$ 等价于中山函子 $\mathbb{N}_H$ 非零。我们将这一观察推广到张量范畴如下：

引理 4.4. 对于张量范畴 $\mathcal{C}$，以下条件等价：

(1) $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯。(2) $\mathbb{N}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}$ 是等价。(3) $\mathbb{N}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}$ 是非零函子。

(4) 存在一个内射对象 $E \in$Ind($\mathcal{C}$) 和一个对象 $V \in \mathcal{C}$，使得

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(E, V) \neq 0.$$

证明。我们固定一个余代数 Q，使得 $\mathcal{C} \approx \mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}^{Q}$ 作为线性范畴。如果 (1) 成立，那么根据引理 3.2，Q 是 QcF，因此根据引理 2.2，(2) 成立。(2) $\Rightarrow$ (3) 的推论显然。下面我们证明 (3) $\Rightarrow$ (4) 和 (4) $\Rightarrow$ (1)。

(3) $\Rightarrow$ (4)。假设 (3) 成立。那么，根据引理 2.4，我们有 $Q_{\ell}^{*\mathrm{rat}} \neq 0$。我们取一个非零元素 f，它属于 $Q_{\ell}^{*\mathrm{rat}}$。根据 DNR01 中有理部分 [的一个刻画，推论 2.2。16], 的核 f 包含一个余维有限的右 Q-子余模 $K \subset Q$。由于 $f \neq 0$，我们有 $Q/K \neq 0$。现在设 E 和 V 是 Ind($\mathcal{C}$) 中的对象，分别通过等价 Ind($\mathcal{C}$) $\approx \mathfrak{M}^{Q}$ 对应于 Q 和 Q/K。那么 E 是单射，V 是有限的，并且存在一个从 E 到 V 的非零态射，对应于商映射 $Q \to Q/K$。

(4) $\Rightarrow$ (1)。我们注意到，$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ 具有自然的张量范畴结构。因此，由引理 4.3，函子 $\mathbb{N}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}})}$ 是正合的。根据引理 2.10，只需证明 $\mathcal{C}$ 中的每个简单对象都是 Ind($\mathcal{C}$) 中某个内射对象的满射像。

现在假设 (4) 成立，并取一个内射对象 $E \in$Ind($\mathcal{C}$) 以及一个 $V \in \mathcal{C}$ 中的对象，使得存在一个非零态射 $\pi\colon E \to V$ in Ind($\mathcal{C}$)。将 V 替换为 π的像后，我们可以假设 π 是满态射。我们注意到，对于所有 $X \in \mathcal{C}$，$X \otimes E$ 都是内射的，因为

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X \otimes E) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{\vee} \otimes (-), E)$$

作为从 Ind($\mathcal{C}$) 到 Vec 的函子。因此，每个简单对象 $S \in \mathcal{C}$ 都是 Ind($\mathcal{C}$) 中某个内射对象的满射像，如下所示：

$$S \otimes V^{\vee} \otimes E \xrightarrow{\mathrm{id}_S \otimes \mathrm{id}_{V^{\vee}} \otimes \pi} S \otimes V^{\vee} \otimes V \xrightarrow{\mathrm{id}_S \otimes \mathrm{ev}_V} S.$$

证明完毕。 □

4.3. 弗罗贝尼乌斯张量范畴的正合列。设 H、K 和 H' 为具有双射反粒子的 Hopf 代数，并设

$$H' \xrightarrow{i} H \xrightarrow{\phi} K \tag{4.2}$$

为 Hopf 代数之间的一列映射。众所周知，序列 (4.2) 正合，当且仅当其诱导的

$$\mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}^{H'} \xrightarrow{i_*} \mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}^{H} \xrightarrow{\phi_*} \mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}^{K}$$

张量函子序列是张量范畴的正合列。Andruskiewitsch 和 Cuadra [AC13, Theorem 2.10] 证明，若 H 作为右 K-余模是忠实余平坦的，则 H 是余 Frobenius，当且仅当 H' 和 K 都是余 Frobenius。Natale[Nat21, Question 6. 12] 提出，张量范畴是否也有同样的结论。根据定义，假设 H 作为右 K-余模是忠实余平坦的，等价于函子$\phi_*^{\mathrm{ra}} = H \square_K (-)\colon {}^{K}\mathfrak{M} \to {}^{H}\mathfrak{M}$ 是正合且忠实的。基于这一观察，我们以下述形式对 Natale 的问题给出肯定答复：

定理 4.5. 设 $\mathcal{C}' \xrightarrow{\iota} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ 是张量范畴的正合列，且 G 是 F 的 ind-伴随。假设 G 是正合的。则以下条件等价：

(1) $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯的。(2) $\mathcal{C}'$ 和 $\mathcal{D}$ 都是弗罗贝尼乌斯的。

证明。为简单起见，我们假设 $\mathcal{C}'$ 通过张量函子 ι 是 $\mathcal{C}$ 的全子范畴。于是，Ind($\mathcal{C}'$) 可以视为 Ind($\mathcal{C}$) 的全子范畴，其中包含 Ind($\mathcal{C}$) 中所有可写成 $\mathcal{C}'$ 中对象的滤过余极限的对象。

(1) $\Rightarrow$ (2)。我们假设 $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯的。由定理 3.4, $\mathcal{D}$ 是弗罗贝尼乌斯的。我们通过一个受 Sullivan 的 [Sul72, 定理 2.15] 启发的论证，证明 $\mathcal{C}'$ 是弗罗贝尼乌斯的。设 E_0 是 Ind($\mathcal{C}'$) 中单位对象 1 的一个内射包，且 E 是 Ind($\mathcal{C}$) 中 E_0 的一个内射包。于是我们在 Ind($\mathcal{C}$) 中得到一个本质扩张序列 $\mathbf{1} \hookrightarrow E_0 \hookrightarrow E$。因此, E 是 Ind($\mathcal{C}$) 中 1 的一个内射包。根据弗罗贝尼乌斯张量范畴的定义, $\mathcal{C}$ 中简单对象的内射包是 $\mathcal{C}$ 中的对象，因此 E 实际上是 $\mathcal{C}$ 中的对象。于是，作为 E 的子对象, E_0 属于 $\mathcal{C}$。总之，我们有 $E_0 \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C}') \cap \mathcal{C} = \mathcal{C}'$。因此，由引理 3.2, $\mathcal{C}'$ 是弗罗贝尼乌斯的。

(2) $\Rightarrow$ (1)。我们假设 $\mathcal{C}'$ 和 $\mathcal{D}$ 都是弗罗贝尼乌斯的。由引理 4.2, $G(\mathbf{1})$ 的每个有限长度子对象都属于 $\mathrm{Ker}(F) = \mathcal{C}'$。换言之，我们有$G(\mathbf{1}) \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C}')$。对象 $G(\mathbf{1})$ 实际上是 Ind($\mathcal{C}'$) 中的一个内射对象。事实上，设 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 是 $\mathcal{C}'$ 中的一个正合列。由于 F 是正合的，我们在 $\mathcal{D}$ 中有一个正合列 $0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to 0$。这个列分裂，因为其中每一项都是 $\mathcal{D}$ 中的一个平凡对象。因此我们得到分裂正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Z), \mathbf{1}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), \mathbf{1}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), \mathbf{1}) \to 0,$$

它与下列序列同构

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(Z, G(\mathbf{1})) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(Y, G(\mathbf{1})) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(X, G(\mathbf{1})) \to 0.$$

因此，反变函子 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(-, G(\mathbf{1})) : \mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Vec}$ 保持 $\mathcal{C}'$ 中的正合列。根据以下事实，我们得出结论： $G(\mathbf{1})$ 是 Ind($\mathcal{C}'$) 中的一个内射对象：余代数 Q 上的右余模 E 是内射的，当且仅当 $\mathrm{Hom}^{Q}(-, E)$ 保持有限维右 Q-余模[的正合列17]（DNR01，定理 2.4）。

我们有 $G(\mathbf{1}) \neq 0$，因为 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(\mathbf{1}, G(\mathbf{1})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \neq 0$。我们将对象 $G(\mathbf{1})$ 分解为 Ind($\mathcal{C}'$) 中不可分解内射对象的直和，即 $G(\mathbf{1}) = \bigoplus_{i \in I} E_i$。根据 $\mathcal{C}'$ 是弗罗贝尼乌斯范畴这一假设，每个 E_i 都属于 $\mathcal{C}'$。因此，特别地，存在对象 $V \in \mathcal{C}'$ 和满态射 $\pi' : G(\mathbf{1}) \to V$，它们位于 Ind($\mathcal{C}'$) 中。

根据 $\mathcal{D}$ 是弗罗贝尼乌斯范畴这一假设，在 $\mathcal{D}$ 中存在 1 的投射覆盖 $\pi : P \to \mathbf{1}$。此外, P 是 $\mathcal{D}$ 中某个简单对象的内射包。由于存在从 $\mathcal{C}$ 到 Vec 的函子之间的同构 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(-, G(P)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-) P)$, 且 F 是正合的，因此 $E := G(P)$ 是 Ind($\mathcal{C}$) 中的内射对象。由于假设 G 是正合的, $G(\pi) : G(P) \to G(\mathbf{1})$ 是 Ind($\mathcal{C}$) 中的满态射。现在我们有 Ind($\mathcal{C}$) 中的满态射 $\pi' \circ G(\pi) : E \to V$，其中 $V \in \mathcal{C}$ 和 $E \in$ 是 Ind($\mathcal{C}$) 中的内射对象。根据引理 4.4, $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯范畴。证明完毕。□

5. Applications

5.1. 辫群霍普夫代数上的余模。设 $\mathcal{C}$ 是一个张量范畴，并设 H 是 Ind($\mathcal{C}$) 中的一个余代数。我们将 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})^H$ 和 $\mathcal{C}^H$ 分别记为 Ind($\mathcal{C}$) 中右 H-余模构成的范畴及其全子范畴，后者由所有底层对象为有限对象的余模构成

。根据 Lyubashenko [Lyu99, 第2节。3],我们可以将 Ind($\mathcal{C}$)^H 识别为 $\mathcal{C}^H$ 的 ind-完备化（参见附录 A）。

假设 $\mathcal{C}$ 是半单且辫化的，并设 $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 $\mathcal{C}$ 中简单对象同构类的一组完备代表。为简化记号，我们假设存在一个特殊指标 $0\in\Lambda$，使得 $V_0=\mathbf{1}$。由于假设 $\mathcal{C}$ 带有编织，因此 Ind($\mathcal{C}$) 中 Hopf 代数的概念是有意义的。令 H 是 Ind($\mathcal{C}$) 中的一个 Hopf 代数，其余乘法为 Δ，余单位为 ε，对映为S。由 $\mathcal{C}$ 的半单性，H 分解为 $H=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda$，其中 H_λ 是 H 的所有与 V_λ 同构的子对象之和。令 J 为由 $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda\setminus\{0\}}H_\lambda$ 生成的 H 的理想。那么 J 是 H 的一个 Hopf 理想，因此商对象 H/J 是 Vec 中的一个 Hopf 代数（即通常意义下的 Hopf 代数）；这里通过 $\Bbbk\mapsto\mathbf{1}$ 将 Vec 视为 Ind($\mathcal{C}$) 的一个全子范畴。

定义 5.1（[Ven19，定义 2.6]）。给定 Ind($\mathcal{C}$) 中的 Hopf 代数 H，我们将上述提到的 Hopf 代数 H/J 记作 $\overline{H}$，并称其为 H的底层普通 Hopf 代数。

若 $\mathcal{C}$ 是超向量空间范畴，且 H 是超交换的，那么 $\overline{H}$ 就是仿射超群概形 Spec(H) 的偶部分的坐标代数。下述定理的灵感来自 [MSS22] 关于仿射代数超群概形上的积分的结果（讨论见例 5.3）。

定理 5.2。设 H 是 Ind($\mathcal{C}$) 中具有可逆对映的 Hopf 代数。假设存在一个对象 $W\in\mathcal{C}$，以及 Ind($\mathcal{C}$) 中左 $\overline{H}$-余模的一个同构 $H\cong\overline{H}\otimes W$，其中 H 通过商态射$H\to\overline{H}$被视为左 $\overline{H}$-余模。那么以下条件等价:

(1) 底层 Hopf 代数 $\overline{H}$ 是余 Frobenius 的。(2) $\mathcal{C}$ 中右 H-余模构成的范畴是弗罗贝尼乌斯张量范畴。

证明。由 H 的对映可逆这一假设可知，$\mathcal{C}^H$ 和 $\mathcal{C}^{\overline{H}}$都是张量范畴。令 $q:H\to\overline{H}$ 为商态射。我们考虑由 H 诱导的函子

$$F:\mathcal{C}^H\to\mathcal{C}^{\overline{H}},\quad (M,\delta_M)\mapsto(M,(\mathrm{id}_M\otimes q)\delta_M)$$

Ind(F)。函子 Ind(F)有一个右伴随 $G:\mathrm{Ind}(\mathcal{C})^{\overline{H}}\to\mathrm{Ind}(\mathcal{C})^H$，由余张量积 $G(M)=M\square_{\overline{H}}H$给出，其中 $M\in\mathrm{Ind}(\mathcal{C})^{\overline{H}}$。由于我们有

$$G(M)\cong M\square_{\overline{H}}(\overline{H}\otimes W)\cong M\otimes W\quad (M\in\mathrm{Ind}(\mathcal{C}^{\overline{H}}))$$

作为 Ind($\mathcal{C}$)中的对象，因此有 $G(\mathcal{C}^{\overline{H}})\subset\mathcal{C}^H$，并且 G 是正合的。现在可以应用定理 3.4，证明 (2) 等价于张量范畴 $\mathcal{C}^{\overline{H}}$ 是弗罗贝尼乌斯的。由于 $\mathcal{C}$ 是半单的，且 $\overline{H}$ 属于 Vec，因此作为线性范畴有 $\mathcal{C}^{\overline{H}}\approx(\mathfrak{m}_{\mathrm{fd}}^{\overline{H}})^{\oplus\Lambda}$。于是，张量范畴$\mathcal{C}^{\overline{H}}$ 是弗罗贝尼乌斯的，当且仅当$\mathfrak{m}_{\mathrm{fd}}^{\overline{H}}$也是如此。根据引理 3.2 和 [DNR01, Chapter 5], ，后一个条件等价于$\overline{H}$ 是余 Frobenius 的。证明完毕。□

例 5.3（仿射代数超群概形上的积分 [MSS22]）。我们假设基域 $\Bbbk$ 的特征为 $p\neq2$。取 $\mathcal{C}$ 为超向量空间范畴。设 G 是由 Hopf 超代数 $H:=\mathcal{O}(G)$ 表示的仿射代数超群概形。我们用 Rep(G) 表示 H上的有限维超余模范畴。Masuoka [Mas05, 定理 4.5] 证明了

存在一个有限维向量空间 V以及左$\overline{H}$-余模的一个同构 $H \cong \overline{H} \otimes_{\Bbbk} \bigwedge V$，其中 $\bigwedge V$表示 V的外代数。因此，根据定理 5.2，Rep(G) 是弗罗贝尼乌斯的，当且仅当 Hopf 代数 $\mathcal{O}(G_{\mathrm{ev}})$ 是余 Frobenius 的，其中 G_{ev} 是 G 的偶部分（参见 [MSS22, 定理 3.7]）。

例 5.4（Verlinde 范畴中的仿射代数群概形 [Ven16, Ven19, Ven22]）。我们假设基域 $\Bbbk$ 是特征为 $p > 2$的代数闭域。称为 Verlinde 范畴的对称有限张量范畴 $\mathcal{C} := \mathrm{Ver}_p$，定义为阶为 p的循环群的有限维表示范畴的半单化。Venkatesh 在 [Ven16, Ven19, Ven22] 中研究了 Ind($\mathcal{C}$) 中的交换 Hopf 代数。设 H是 Ind($\mathcal{C}$) 中一个有限生成交换 Hopf 代数。根据 [Ven16，命题 3.1] 和 [Ven19，引理 7.15], ，存在一个对象 $W \in \mathcal{C}$ 以及一个左 $\overline{H}$-余模的同构 $H \cong \overline{H} \otimes W$。因此，根据定理 5.2，张量范畴 $\mathcal{C}^H$ 是弗罗贝尼乌斯的，当且仅当 Hopf 代数 $\overline{H}$ 是余 Frobenius 的。

5.2. 由仿射群概形进行去等变化。给定一个群作用其上的范畴，其等变化定义为群 [DGNO10] 作用的 “ 不动点 ” 范畴。去等变化在某种意义上是这一过程的逆过程。正如 [BN11, BN14], 所指出的，有限群的去等变化可以通过张量范畴的正合列来理解。鉴于关于仿射群概形 [AGP14], 对 Hopf 代数进行去等变化的结果，我们略微扩展 [BN14] 的论证，并讨论如何将我们的结果应用于由仿射群概形进行的去等变化。

我们先准备一些引理，以介绍去等变化。设 $\mathcal{C}$ 是一个张量范畴。给定 Ind($\mathcal{C}$) 中的一个代数 A，我们将 Ind($\mathcal{C}$)$_A$ 记为 Ind($\mathcal{C}$) 中右 A-模所成的范畴。由于 Ind($\mathcal{C}$) 是一个 Grothendieck 范畴，并且 $(-) \otimes A$ 是其上的线性正合余连续幺半群，因此 Ind($\mathcal{C}$)$_A$ 是一个 Grothendieck 范畴。

如果函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, -) : \mathcal{A} \to \mathrm{Set}$ 保持滤过余极限（分别地，保持单态射的滤过余极限），则称范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象 X 是有限表示的（分别地，是有限生成的）。当范畴 $\mathcal{A}$ 是 Grothendieck 范畴时，已知对象 $X \in \mathcal{A}$ 满足以下断言等价（参见[Ste75，第 V 章，命题 3.2]）：

(1) X 是有限生成的。(2) 对于每个满足 $X = \varinjlim_{i \in I} X_i$ 的子对象滤过族 $\{X_i\}_{i \in I}$（其成员均为 X 的子对象），存在一个元素 $i_0 \in I$，使得 $X_{i_0} = X$。(3) 对于每个满足 $X = \sum_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 的子对象族 $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$（其成员均为 X 的子对象），存在 Λ 的一个有限子集 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$，使得 $X = \sum_{i=1}^{n} X_{\lambda_i}$。

我们还注意到，对于对象 $X \in \mathcal{A}$，以下断言等价（参见 [Ste75，第 V 章，命题 3.4]）：

(1) X 是有限表示的。(2) 对于任意满态射 $f : W \to X$ 属于 $\mathcal{A}$，其中 W 是 $\mathcal{A}$ 的有限生成对象，f 的核是有限生成的。

Ind($\mathcal{C}$)$_A$ 的有限生成对象可按如下方式刻画：

引理 5.5. Ind($\mathcal{C}$)$_A$ 中的一个对象是有限生成的，当且仅当它是某个对象 $X \in \mathcal{C}$对应的右 A-模 $F_A(X)$ 的商对象，其中 F_A 是自由右 A-模函子

$$F_A : \mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ind}(\mathcal{C})_A, \quad X \mapsto X \otimes A. \tag{5.1}$$

证明。假设右 A-模 M 是有限生成的。令 $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 为 M （作为 Ind($\mathcal{C}$)中的对象）的所有有限子对象组成的集合。对每个 λ，我们定义M_λ 为 $X_\lambda \otimes A$ 在作用 $M \otimes A \to M$下的像。于是，$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是 M 的一族子模，且 $M = \sum_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$。由 M有限生成这一假设，存在 Λ的一个有限子集 $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$，使得 $M = \sum_{i=1}^{n} M_{\lambda_i}$。因此，$M$是 $F_A(X_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus X_{\lambda_n})$的商对象。

我们证明逆命题。由于有限生成对象的商对象仍是有限生成的，只需证明形如 $F_A(V)$、$V \in \mathcal{C}$ 的右 A-模是有限生成的。设 V 是 $\mathcal{C}$ 中的一个对象（注意，此时 V 是 Ind($\mathcal{C}$) 中的有限表示对象）。设 U: Ind($\mathcal{C}$)$_A$ →Ind($\mathcal{C}$) 为遗忘函子。于是存在函子同构 $\mathrm{Hom}_A(F_A(V)\ -) \cong \mathrm{Hom}^{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(V, -)\circ U$。由于 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Ind}(\mathcal{C})}(V, -)$ 和 U 都保持滤过余极限，$F_A(V)$ 是有限表示的。特别地，它是有限生成的。证明完毕。□

令 mod$_{\mathcal{C}}(A)$ 表示 Ind($\mathcal{C}$)$_A$ 中由有限生成对象构成的全子范畴。范畴 mod$_{\mathcal{C}}(A)$ 对余核封闭，但未必对核封闭。下面的引理说明，mod$_{\mathcal{C}}(A)$ 有核，当且仅当 mod$_{\mathcal{C}}(A)$ 对核封闭。

引理 5.6. 设 $f: M \to N$ 是 mod$_{\mathcal{C}}(A)$ 中的一个态射。那么，f 的核在 mod$_{\mathcal{C}}(A)$ 中存在，当且仅当 f 在 Ind($\mathcal{C}$)$_A$ 中的核是有限生成的。

证明. “若”部分显然。反过来，证明如下：假设态射 f 在 mod$_{\mathcal{C}}(A)$ 中有一个核，记为 $k: K \to M$。设 $g: X \to M$ 是 Ind($\mathcal{C}$)$_A$ 中的一个态射，满足 $f \circ g = 0$。由于右 A-模 X 的底层对象是 $\mathcal{C}$ 中对象的归纳极限，我们可以将 X 写成 X 的有限生成子对象的归纳极限，即 $X = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$。对每个$\lambda$，记典范态射为 $i_\lambda: X_\lambda \to X$。根据核的泛性质，存在唯一的右 A-模态射 $\phi_\lambda: X_\lambda \to K$，使得 $g\circ i_\lambda = k\circ\phi_\lambda$。存在一个右 A-模态射 $\phi: X \to K$，使得对所有 $\lambda \in \Lambda$，都有 $\phi\circ i_\lambda = \phi_\lambda$。态射 ϕ 满足 $k\circ\phi = g$，且此等式唯一确定 ϕ。证明完毕。□

[EGNO15] 中幺半范畴 $\mathcal{M}$的 Drinfeld 中心，记作 $\mathcal{Z}(\mathcal{M})$，是一个辫编幺半范畴，其对象是由一个对象 $M \in \mathcal{M}$ 和一个自然同构 $\sigma_{M,\ X}: M \otimes X \to X \otimes M$ ($X \in \mathcal{M}$) 构成的对 (M, σ_M)，该自然同构满足类似于编织公理的条件。现在设 (A, σ_A) 是 $\mathcal{Z}$(Ind($\mathcal{C}$)) 中的一个交换代数。那么，右 A-模通过自然同构 σ 成为一个 A-双模。此外，Ind($\mathcal{C}$)$_A$ 关于张量积 $\otimes_A$ over A 构成一个幺半范畴。由此可得:

引理 5.7. 全子范畴 mod$_{\mathcal{C}}(A)$ 关于 $\otimes_A$ 封闭。

证明。设 M 和 N 是 Ind($\mathcal{C}$)$_A$ 中的有限生成对象。由引理 5.5，M 和 N 分别是形如 $F_A(X)$ 和 $F_A(Y)$ 的对象的商对象，其中 X 和 Y 是 $\mathcal{C}$ 中的某些对象。由 $\otimes_A$ 的右正合性，张量积$M \otimes_A N$ 是右 A-模 $F_A(X)\otimes_A F_A(Y)$ 的商对象，而该模同构于 $F_A(X \otimes Y)$。因此，由引理 5.5，$M \otimes_A N$ 是有限生成的。证明完毕。□

设 $\mathcal{C}$ 是一个张量范畴，$\mathcal{B}$ 是一个编织张量范畴。对于从 $\mathcal{B}$ 到 $\mathcal{C}$ 的中心嵌入函子，它是一个全忠实张量函子 $\iota: \mathcal{B} \to \mathcal{C}$，并且

配有一个张量函子 $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{Z}(\mathcal{C})$，使得 F 保持编织，且等式 $U \circ F = \iota$ 成立，其中 $U\colon \mathcal{Z}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ 是遗忘函子。我们指出：

引理 5.8. 设 $\mathcal{C}$ 是一个张量范畴，$\mathcal{B}$ 是一个编织张量范畴。那么，任意编织张量函子 $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 都可扩张为一个从 Ind($\mathcal{B}$) 到 $\mathcal{Z}$(Ind($\mathcal{C}$)) 的「编织张量函子」。

这里，尽管 Ind($\mathcal{B}$) 和 $\mathcal{Z}$(Ind($\mathcal{C}$)) 不是张量范畴，我们仍用「编织张量函子」一词来表示一个从 Ind($\mathcal{B}$) 到 $\mathcal{Z}$(Ind($\mathcal{C}$)) 的线性函子，它保持张量积和编织。

证明. 给定一个对象 $V \in \mathcal{B}$，我们将 $F(V) \in \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ 写作 $F(V) = (f(V), \sigma_{f(V)})$。设 X 和 M 分别是 Ind($\mathcal{B}$) 和 Ind($\mathcal{C}$) 中的对象，并将它们表示为有限对象的滤过余极限，如 $X = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 和 $M = \varinjlim_{\gamma\in\Gamma} M_\gamma$。我们令 $\tilde{f}(X) = \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} f(X_\lambda)$，并令 $\tilde{\sigma}_{X,M}\colon \tilde{f}(X) \otimes M \to M \otimes \tilde{f}(X)$ 为 Ind($\mathcal{C}$) 中由以下族诱导的态射

$$\sigma_{f(X_\lambda),M_\gamma} : f(X_\lambda) \otimes M_\gamma \to M_\gamma \otimes f(X_\lambda) \quad (\lambda \in \Lambda, \gamma \in \Gamma)$$

$\tilde{\mathcal{C}}$中的态射。可以验证，赋值 $X \mapsto (\tilde{f}(X), \tilde{\sigma}_X)$ 导出了一个从 Ind($\mathcal{B}$) 到 $\mathcal{Z}$(Ind($\mathcal{C}$)) 的“辫化张量函子”，如所需。□

设 G 是由 $\mathcal{O}(G)$ 表示的仿射群概形。众所周知，Rep(G) := $\mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}^{\mathcal{O}(G)}$ 是一个对称张量范畴，而代数 $\mathcal{O}(G)$ 以自然方式成为 Ind(Rep(G)) 中的交换代数。现在设 $\mathcal{C}$ 是一个带有中心嵌入函子 ι : Rep(G) $\to \mathcal{C}$ 的张量范畴。引理 5.8 允许我们将 $\mathcal{O}(G)$ 视为 $\mathcal{Z}$(Ind($\mathcal{C}$)) 中的交换代数。因此，幺半范畴 Ind($\mathcal{C}$)$^{\mathcal{O}(G)}$ 有定义。

定理 5.9. 设 G、$\mathcal{C}$ 和 ι: Rep(G) $\to \mathcal{C}$ 如上。假设 Ind($\mathcal{C}$)$^{\mathcal{O}(G)}$ 中由有限生成对象构成的全子范畴 $\mathcal{D}$:=mod$_{\mathcal{C}}$($\mathcal{O}(G)$) 关于 $\otimes_{\mathcal{O}(G)}$ 是一个张量范畴。则有以下结论：

(1) $\mathcal{D}$ 与 Ind($\mathcal{C}$)$^{\mathcal{O}(G)}$ 中有限表示对象的全子范畴相同。(2) 存在线性幺半范畴的等价 Ind($\mathcal{C}$)$^{\mathcal{O}(G)} \approx$Ind($\mathcal{D}$)。(3) 存在张量范畴的正合列 Rep($G$) $\to \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 。(4) 张量范畴 $\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯的，当且仅当 Hopf 代数 $\mathcal{O}(G)$ 是余 Frobenius 的，且张量范畴 $\mathcal{D}$ 是弗罗贝尼乌斯的。

鉴于 G 为有限群的情形已得到充分研究，至少当 $\mathcal{D}$ 满足本定理的假设时，我们可以称 $\mathcal{D}$ 为 $\mathcal{C}$ 关于 G 的去等变化。诚然，一般而言，检验 $\mathcal{D}$ 是否为张量范畴并不容易。正如 [Neg21，第 6]，节所讨论的，当 $\mathcal{C}$ 是某个 Hopf 代数 H上的余模范畴时，$\mathcal{D}$ 的刚性与 H 关于某个霍普夫子代数的忠实平坦性密切相关。

遗憾的是，目前我们还不知道有任何重要例子能够通过定理 5.9 证明张量范畴的 Frobenius 性质。尽管如此，鉴于该定理未来的应用，我们认为它值得关注。作为佐证，我们指出，利用仿射代数群概形进行去等变化的思想，已被用于构造与对数共形场论相关的新类模张量范畴，见 [GLO18, Neg21]。

定理 5.9 的证明。我们记 $A = \mathcal{O}(G)$。

(1) 我们回顾一下，张量范畴按定义是局部有限阿贝尔范畴。由引理 5.6 以及 $\mathcal{D}$ 是张量范畴这一假设可知，$\mathrm{Ind}(\mathcal{C})_A$ 的子范畴 $\mathcal{D}$ 对核封闭。因此，$\mathcal{D}$ 与 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})_A$ 中有限表示对象构成的全子范畴重合。

(2) 由于 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})_A$ 是 Grothendieck 范畴，且 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})_A$ 中的每个对象都是有限表示对象的滤过余极限，由 [KS06, 推论 6.3.5] 可知，存在范畴等价 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})_A \approx \mathrm{Ind}(\mathcal{D})$。容易看出，这是线性幺半范畴之间的等价。

(3) 由引理 5.5 可知，自由右模函子 (5.1) 限制后给出一个从 $\mathcal{C}$ 到 $\mathcal{D}$ 的张量函子，记为 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$。引理 5.5 还蕴含 F 是占优的。

我们证明，$\mathrm{Ker}(F)$ 与 $\mathrm{Rep}(G)$ 一致，其中 $\mathrm{Rep}(G)$ 通过 ι 被视为 $\mathcal{C}$ 的全子范畴。Hopf 模基本定理 [Mon93] 蕴含 $\mathrm{Rep}(G)$ 包含于 $\mathrm{Ker}(F)$。现在设对象 $X \in \mathcal{C}$ 属于 $\mathrm{Ker}(F)$。那么对某个非负整数 n，有 $X \otimes A = F(A) \cong A^{\oplus n}$，因此 X 是 $A^{\oplus n} \in \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 的子对象。这意味着 X 属于 $\mathrm{Rep}(G)$。由此我们证明了 $\mathrm{Ker}(F) = \mathrm{Rep}(G)$。

为完成第 (3) 部分的证明，我们将验证 F 的正规性。根据第 (1) 部分，我们将 $\mathrm{Ind}(\mathcal{D})$ 与 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})_A$ 视为相同，并令 $U : \mathrm{Ind}(\mathcal{D}) \to \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 为遗忘 A-模结构的函子。容易看出，U 是 F 的 ind-伴随。$\mathcal{D}$ 的单位对象是 A，它经函子 U 映射到 $A \in \mathrm{Ind}(\mathrm{Rep}(G))$。因此，根据引理 4.2，$F$ 是正规的。

(4) 函子 U 显然是正合的。因此，根据定理 4.5，张量范畴$\mathcal{C}$ 是弗罗贝尼乌斯范畴，当且仅当 $\mathrm{Rep}(G)$ 和 $\mathcal{D}$也是如此。注意到 $\mathrm{Rep}(G)$ 是弗罗贝尼乌斯范畴，当且仅当 $\mathcal{O}(G)$ 是余 Frobenius 的，即可完成该定理的证明。□

例 5.10. 设 H 是一个具有双射反粒子的 Hopf 代数，且设 K 是 H [AGP14, 定义 3.1], 中的一个编织中心 Hopf 子代数，也就是说，它是一个 Hopf 子代数 $K \subset H$，并带有一个双线性映射 $r : H \times K \to \Bbbk$，满足与普适 R-形式的公理类似的某些公理。于是 K 是交换的，因此我们可以假设，对于某个仿射群概形 G，有 $K = \mathcal{O}(G)$。令 $\mathcal{C} = {}^H\mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}$。根据 [AGP14], 中的论证，我们有一个由 r 诱导的中心嵌入函子 $\mathrm{Rep}(G^{\mathrm{op}}) \to \mathcal{C}$（此处将函子的源设为 $\mathrm{Rep}(G^{\mathrm{op}})$，并将其识别为 ${}^{\mathcal{O}(G)}\mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}$，以与 [AGP14] 中的设定及我们的记号保持一致）。

现在我们假设存在一个卷积可逆的 $\mathcal{O}(G)$-线性映射 $\pi : H \to \mathcal{O}(G)$，它保持单位和余单位。我们考虑商余代数 $Q := H/\mathcal{O}(G)^+H$，其中 $\mathcal{O}(G)^+$ 是 $\mathcal{O}(G)$ 的余单位的核。[AGP14] 的主要结果表明，Q 具有一个余拟双代数结构，该结构可由 r 和 π显式给出；并且，作为线性幺半范畴，范畴 ${}^Q\mathfrak{M}$ 等价于 $\mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 中 $\mathcal{O}(G)$-模的范畴。定理 5.9 得出以下推论：假设幺半范畴 ${}^Q\mathfrak{M}_{\mathtt{fd}}$ 是刚性的。那么，Q 是 QcF 余代数，当且仅当 $\mathcal{O}(G)$ 和 H 都是余 Frobenius 的。

Appendix A. The fundamental theorem for comodules

设 $\mathcal{V}$ 是域 $\Bbbk$ 上的张量范畴，$\mathbf{C}$ 是 $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ 中的余代数，其底层对象为 $C \in \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$，余乘法为 Δ_C，余单位为 ε_C。如第5.1小节所述，我们用 $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})^{\mathbf{C}}$ 和 $\mathcal{V}^{\mathbf{C}}$ 表示 $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ 中右 $\mathbf{C}$-余模构成的范畴，以及由底层对象属于 $\mathcal{V}$ 的对象组成的全子范畴。本附录旨在证明以下定理：

定理 A.1. $\mathrm{Ind}(\mathcal{V}^{\mathbf{C}}) \approx \mathrm{Ind}(\mathcal{V})^{\mathbf{C}}$。

当 $\mathcal{V}$ 是 $\Bbbk$ 上有限维向量空间的范畴时，该定理可由余模基本定理推出。一般情形由 Lyubashenko 在 [Lyu99, 第2节3] 中研究。严格来说，在[Lyu99], 中，定理 A.1 是在 Lyubashenko 所称的平方余代数这一一般框架下证明的。鉴于将 [Lyu99] 中给出的证明应用到我们的情形可能颇为困难，我们为方便读者，给出定理 A.1 的直接证明。

我们首先注意到以下简单的观察：

引理 A.2. 设 X 和 Y 是 $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ 的对象，且 V 是 $X \otimes Y$ 的一个有限长度子对象。那么存在有限长度的子对象 $X' \subset X$ 和 $Y' \subset Y$，使得 $V \subset X' \otimes Y'$。

证明。我们将 X 和 Y 写成有限长度子对象之和，即 $X = \sum_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 和 $Y = \sum_{\mu \in \mathrm{M}} Y_\mu$。由于 $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ 的张量积是余连续的，我们有 $X \otimes Y = \sum_{\lambda \in \Lambda,\ \mu \in \mathrm{M}} X_\lambda \otimes Y_\mu$。由 V 的有限性可知，存在有限多个元素 λ_1、$\cdots$、$\lambda_r \in \Lambda$ 以及 μ_1、$\cdots$、$\mu_s \in \mathrm{M}$，使得 $V \subset \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} X_{\lambda_i} \otimes Y_{\mu_j}$。现在令 $X' = \sum_{i=1}^{r} X_{\lambda_i}$ 和 $Y' = \sum_{j=1}^{s} Y_{\mu_j}$。于是 $V \subset X' \otimes Y'$，如所求。□

对于对象 X、$Y \in \in \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ 和 $D \in \mathcal{V}$，存在如下双射

$$(-)^\sharp : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{V})}(X, Y \otimes D) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{V})}(X \otimes {}^\vee D, Y),$$
$$f \mapsto f^\sharp := (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{ev}'_D)(f \otimes \mathrm{id}_{{}^\vee D}),$$

其中 $\mathrm{ev}'_D : D \otimes {}^\vee D \to \mathbf{1}$ 是求值态射。

引理 A.3. 对于 $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ 中的态射 $f : X \to Y \otimes D$，有

$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(f^\sharp) \otimes D, \quad \mathrm{Ker}(f) \otimes {}^\vee D \subset \mathrm{Ker}(f^\sharp).$$

证明. 设 $\pi : Y \to \mathrm{Coker}(f^\sharp)$ 是 $f^\sharp$ 的余核。则有

$$(\pi \otimes \mathrm{id}_D) f = (\pi \otimes \mathrm{id}_D)(f^\sharp \otimes \mathrm{id}_D)(\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{coev}'_D) = 0,$$

其中 $\mathrm{coev}'_D : \mathbf{1} \to {}^\vee D \otimes D$ 是余单位。因此，

$$\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(\pi \otimes \mathrm{id}_D) = \mathrm{Ker}(\pi) \otimes D = \mathrm{Im}(f^\sharp) \otimes D,$$

其中我们用到了 $\otimes$ 的正合性。$\mathrm{Ker}(f) \otimes {}^\vee D \subset \mathrm{Ker}(f^\sharp)$ 可由对偶论证证明。□

给定 $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ 中的一个态射 $f : X \to Y$ 以及一个子对象 $V \subset X$，我们将 $f(V)$ 定义为将 f 限制到子对象 $V \subset X$ 上所得的像。现在我们证明余模基本定理的以下类比：

引理 A.4. 设 M 是 $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})$ 中的一个右 $\mathbf{C}$-余模，其底层对象为 $M \in \mathrm{Ind}(\mathcal{V})$，余作用为 $\delta_M : M \to M \otimes C$，并设 V 是 M 的一个有限长度子对象。那么存在 M 的一个有限长度子对象 N，使得 $V \subset N$ 且 $\delta_M(N) \subset N \otimes C$。

证明。由引理 A.2，存在一个有限长度子对象 $D_1 \subset C$，使得$\delta_M(V) \subset M \otimes D_1$。令 $\delta\colon V \to M \otimes D_1$ 为由 $\delta_M\colon M \to M \otimes C$诱导的态射，并令 $N = \mathrm{Im}(\delta^\sharp\colon V \otimes {}^\vee D_1 \to M)$。由于 N是有限长度对象的像，因此它是 M的有限长度子对象。此外，我们有

$$\delta(V) \subset \mathrm{Im}(\delta^\sharp) \otimes D_1 = N \otimes D_1$$

根据引理 A.3。因此，从现在起，我们将 δ 视为从 V到 $N \otimes D_1$的态射。注意，根据余单位公理和引理 A.3，我们有

$$V = (\mathrm{id}_M \otimes \varepsilon_C|_{D_1})\delta(V) \subset (\mathrm{id}_M \otimes \varepsilon_C|_{D_1})(\mathrm{Im}(\delta^\sharp) \otimes D_1) = \mathrm{Im}(\delta^\sharp) = N.$$

为了完成证明，我们证明 $\delta_M(N) \subset N \otimes C$。根据引理 A.2，存在一个有限长度的子对象 $D_2 \subset C$，使得 $\Delta_C(D_1) \subset C \otimes D_2$。将这些对象在 $\varepsilon_C \otimes \mathrm{id}_C$下取像，得到 $D_1 \subset D_2$。现在令 $\Delta\colon D_1 \to C \otimes D_2$为由余乘法 $\Delta_C\colon C \to C \otimes C$诱导的态射，并令 $i\colon N \to M$和 $j\colon D_1 \to D_2$ 为包含态射。于是我们有

$$(\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{id}_C \otimes j)(\delta_M i \otimes \mathrm{id}_{D_1})\delta = (i \otimes \Delta)\delta$$

由余作用的余结合律可得。应用算子

$$(-)^\sharp : \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{V})}(V, M \otimes C \otimes D_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ind}(\mathcal{V})}(V \otimes {}^\vee D_2, M \otimes C)$$

到两边，并将 $\delta^\sharp$ 视为从 $M \otimes {}^\vee D_1$ 到 N的态射，我们得到

$$\delta_M i \delta^\sharp(\mathrm{id}_V \otimes {}^\vee j) = (\mathrm{id}_M \otimes \mathrm{ev}'_{D_2})(i \otimes \mathrm{id}_C \otimes \Delta \otimes \mathrm{id}_{{}^\vee D_2})(\delta \otimes \mathrm{id}_{{}^\vee D_2}).$$

态射 ${}^\vee j$ 是满态射，因为它是单态射 j的对偶。由于$\delta^\sharp(\mathrm{id}_V \otimes {}^\vee j)\colon V \otimes {}^\vee D_2 \to N$是满态射，左侧的像为$\delta_M(N)$。显然，右侧的像包含于 $N \otimes C$。因此 $\delta_M(N) \subset N \otimes C$。证明完毕。□

定理 A.1 的证明。由引理 A.4 可知，$\mathcal{V}^{\mathbf{C}}$的对象类、$\mathrm{Ind}(\mathcal{V})^{\mathbf{C}}$ 的有限生成对象类以及 $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})^{\mathbf{C}}$ 的有限表示对象类相同。此外，$\mathrm{Ind}(\mathcal{V})^{\mathbf{C}}$ 的每个对象都是 $\mathcal{V}^{\mathbf{C}}$中对象的滤过余极限。因此，根据 [KS06，推论 6.3。5]，存在范畴的等价 $\mathrm{Ind}(\mathcal{V})^{\mathbf{C}} \approx \mathrm{Ind}(\mathcal{V}^{\mathbf{C}})$。□

References

[AC13] N. Andruskiewitsch 和 J. Cuadra。《关于（余 Frobenius）Hopf 代数的结构》。*J. Noncommut. Geom.*，7(1):83–104，2013年。[ACE15] N. Andruskiewitsch、J. Cuadra 和 P. Etingof。《关于具有非零积分的 Hopf 代数的两个有限性条件》。*Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*，14(2):401– 440，2015年。[AGP14] Iv´an Angiono、C´esar Galindo 和 Mariana Pereira。《Hopf 代数的去等变化》。*Algebr. Represent. Theory*，17(1):161–180，2014年。[BN11] A. Brugui`eres 和 Sonia Natale。《张量范畴的正合列》。*Int. Math. Res. Not. IMRN* 24 5644 5705, 2011 , ( ): – 。[BN14] A. Brugui`eres 和 Sonia Natale。《张量范畴的中心正合列、等变化及应用》。*J. Math. Soc. Japan*，66(1):257–287，2014年。[DGNO10] V. Drinfeld、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik。《关于编织融合范畴》第一部分。*Selecta Math. (N.S.)*，16(1):1–119，2010年。[DNR01] S. Dăscălescu、C. Năstăsescu 和 S. Raianu。《*Hopf algebras* 235 *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*》，第 卷，。Marcel Dekker, Inc.，纽约，2001年。《导论》。

[EGNO15] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik。《 *Tensor categories*》，*Mathematical Surveys and Monographs*第205卷。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2015年。[FSS20] J. Fuchs、G. Schaumann 和 C. Schweigert。《有限范畴的 Eilenberg-Watts演算与双模 Radford S^4 定理》。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，373 40，2020 1 1( ): – 。[GLO18] A. M. Gainutdinov、S. Lentner 和 T. Ohrmann。《小量子群的模化》。 arXiv:1809.02116。[Iov14] M. C. Iovanov。《广义 Frobenius代数和 Hopf 代数》。 *Canad. J. Math.*，66 1 205( ): –240，2014年。[KS06] M. Kashiwara 和 P. Schapira。《 *Categories and sheaves* 332 *Grundlehren der*》，第 卷，。*Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]* 施普林格出版社，柏林，2006年。[Lyu99] V. V. Lyubashenko。《平方 Hopf 代数》。 *Mem. Amer. Math. Soc.*，142(677):x+180，1999年。[Mas05] A. Masuoka。《超仿射群与超形式群中的基本对应》。 *J. Pure Appl. Algebra*，202(1-3):284–312，2005年。[ML98] S. Mac Lane。《 *Categories for the working mathematician* 5 *Graduate Texts*》，第 卷，。*in Mathematics* 施普林格出版社，纽约，第二版，。[Mon93] S. Montgomery。《 1998 *Hopf algebras and their actions on rings* 82 *CBMS Regional*》，第 卷，。*Conference Series in Mathematics* 由数学科学会议委员会出版，华盛顿特区；美国数学会发行，罗德岛州普罗维登斯，1993年。[MSS22] A. Masuoka、T. Shibata 和 Y. Shimada。《带积分的仿射代数超群》。*Comm. Algebra*，50(2):615–634，2022年。[Nat21] S. Natale。《正合列的概念：从 Hopf 代数到张量范畴》。载于 *Hopf algebras tensor categories and related topics*，第771卷， *Contemp. Math.*，第225–254页。美国数学会，2021年。[Neg21] C. Negron。《偶数次单位根处的对数模量子群与量子 Frobenius I》。 *Comm. Math. Phys.*，382(2):773–814，2021年。[SS23] T. Shibata 和 K. Shimizu。《余代数的 Nakayama函子及其在弗罗贝尼乌斯张量范畴中的应用》。 *Adv. Math.*，419，2023年。 arXiv:2110.08739.[Ste75] B. Stenstr¨om。《 *Rings of quotients*》。数学科学基础丛书第217卷。施普林格出版社，纽约—海德堡，1975年。《环论方法导论》。[Sul72] J. B. Sullivan。《带积分的仿射群概形》。 *J. Algebra*，22:546–558，1972年。[Tak77] M. Takeuchi。《余模范畴的 Morita定理》。 *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* , ( ): – 。[*Sect. IA Math.* 24 3 629 644, 1977 Ven16] S. Venkatesh。《正特征下对称张量范畴中的希尔伯特基定理与不变量的有限生成性》。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(16):5106– 5133，2016年。[Ven19] S. Venkatesh。《正特征下 Verlinde 范畴中的 Harish-Chandra对》。arXiv:1909.11240。[Ven22] S. Venkatesh。《Verlinde 范畴中的一般线性群的表示》。arXiv:2203.03158。

(T. SHIBATA) Department of Applied Mathematics Okayama University of Science 1-1 , , , „ Ridai-cho Kita-ku Okayama-shi Okayama 700-0005 Japan.
Email address: shibata@ous.ac.jp

(K. SHIMIZU) Department of Mathematical Sciences, Shibaura Institute of Technology, 307 Fukasaku, Minuma-ku, Saitama-shi, Saitama 337-8570, Japan.
Email address: kshimizu@shibaura-it.ac.jp