arXiv:2303.14712v1 [math.CV] 26 Mar 2023

星形函数与凸函数的对数系数托普利茨行列式

Surya Giri[1] 和 S. Sivaprasad Kumar*

摘要

本文研究某些托普利茨行列式的最佳界，其元素为解析单叶函数的对数系数 f，这些函数满足量 $zf'(z)/f(z)$在右半平面内的某个特定区域取值。所得结果给出了星形函数类和凸函数类以及它们的各种子类的界。

关键词：单叶函数；星形函数；凸函数；对数系数；托普利兹行列式。

AMS学科分类：30C45，30C50。

1 引言

设 $\mathcal{A}$ 为定义在开单位圆盘 $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 上的一类解析函数 f，其泰勒级数展开如下:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n. \tag{1.1}$$

由 $\mathcal{A}$ 中所有单叶函数组成的子类记为 $\mathcal{S}$。对于每个函数 $f \in \mathcal{S}$，考虑

$$F_f(z) = \log \frac{f(z)}{z} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(f) z^n, \quad z \in \mathbb{D}, \quad \log 1 = 0. \tag{1.2}$$

对于每个 $n = 1$、2、3、$\cdots$，数值 $\gamma_n := \gamma_n(f)$ 称为 f 的对数系数。Kayumov [13] 利用对数系数的思想证明了保形映射的 Brennan猜想。此外，对数系数在 Milin猜想（[8, 第 155], [18] 页）中也发挥着重要作用。与 $f \in \mathcal{S}$ 的系数不同，关于 $\log(f(z)/z)$ 的系数在 $f \in \mathcal{S}$ 时，我们所知的精确结果很少。Koebe函数引出了关于类 $\mathcal{S}$ 的自然猜想 $|\gamma_n| \leq 1/n, n \geq 1$。然而，这个猜想是错误的，甚至在数量级上也是如此（见 [8, 第 8.1] 节）。对于 $f \in \mathcal{S}$，目前已知的界仅有

$$|\gamma_1| \leq 1 \text{ and } |\gamma_2| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{e^2}.$$

求类 $\mathcal{S}$ 中 $\mathcal{S}$ 的 $|\gamma_n|$ 估计值（$n \geq 3$）的问题仍未解决。过去几年里，许多作者考察了 $\mathcal{S}$ 子类中函数的 $|\gamma_n|$ 界，而非整个类的情形（参见 [5, 1, 6, 23, 24]及其中引用的文献）。

在几何函数论中，凸函数和星形函数类是 $\mathcal{S}$ 中最受关注的子类。若 $f(\mathbb{D})$ 是凸的，则称函数 $f \in \mathcal{S}$ 为凸函数。令 $\mathcal{C}$ 表示凸函数类。众所周知，$f \in \mathcal{C}$ 当且仅当 $\mathrm{Re}((1 + zf''(z))/f'(z)) > 0$，对于$z \in \mathbb{D}$. 若 $f(\mathbb{D})$ 关于原点是星形的，则称函数 $f \in \mathcal{S}$ 为星形函数。令 $\mathcal{S}^*$ 表示星形函数类。从解析角度看，$f \in \mathcal{S}^*$ 当且仅当 $\mathrm{Re}(zf'(z)/f(z)) > 0$，对于 $z \in \mathbb{D}$.。令 Ω 表示所有施瓦茨函数构成的类，并令 $\mathcal{P}$ 表示解析函数 p 的类：$\mathbb{D} \to \mathbb{C}$，满足 $p(0) = 1$ 且对所有 $z \in \mathbb{D}$，$\mathrm{Re}\, p(z) > 0$。若解析函数 f 从属于解析函数 g,

则存在施瓦茨函数 ω，使得对所有 $z \in \mathbb{D}$, $f(z) = g(\omega(z))$。记作 $f \prec g$。Ma 和 Minda [17] 统一了星形函数和凸函数的各种子类。他们定义了

$$\mathcal{S}^*(\varphi) = \left\{ f \in \mathcal{S} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi(z) \right\}$$

and

$$\mathcal{C}(\varphi) = \left\{ f \in \mathcal{S} : 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \varphi(z) \right\},$$

其中, $\varphi(z)$ 是在 $\mathbb{D}$ 中实部为正的解析单叶函数, $\varphi(\mathbb{D})$ 关于实轴对称，且关于 $\varphi(0)$ 星形 $= 1$，并且 $\varphi'(0) > 0$。设，对于 $z \in \mathbb{D}$, φ 具有如下级数展开

$$\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \cdots, \quad B_1 > 0.$$

由于 $\varphi(\mathbb{D})$ 关于实轴对称，且 $\varphi(0) = 1$，因此所有 B_i 均为实数。此外, φ 是一个 Carath´eodory 函数，由此可得 $|B_n| \leq 2$, $n \in \mathbb{N}$ [8, 页-41]。

若取 $\varphi(z) = (1 + Az)/(1 + Bz)$，则 $-1 \leq B < A \leq 1$、$\mathcal{S}^*(\varphi)$ 和 $\mathcal{C}(\varphi)$ 分别化为 Janowski 星形函数类和凸函数类，分别记为 $\mathcal{S}^*[A, B]$ 和 $\mathcal{C}[A, B]$ （见 [11]）。对于 $B = -1$ 和$A = 1 - 2\alpha$, $(0 \leq \alpha < 1)$, 类 $\mathcal{S}^*(\alpha) = \mathcal{S}^*[1 - 2\alpha, -1]$ 和 $\mathcal{C}(\alpha) = \mathcal{C}[1 - 2\alpha, -1]$ 是众所周知的阶为 α $(0 \leq \alpha < 1)$ 的星形函数类和凸函数类（见 [8]）。

托普利茨矩阵和托普利兹行列式出现在纯数学和应用数学领域 [25]。它们广泛应用于分析学、积分方程、图像处理、信号处理、量子力学等领域。关于更多应用，请参阅综述文章 [27]。托普利茨矩阵的各条对角线上的元素均为常数。对于 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}$，托普利兹行列式定义为

$$T_{m,n}(f) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+m-1} \\ a_{n+1} & a_n & \cdots & a_{n+m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+m-1} & a_{n+m-2} & \cdots & a_n \end{vmatrix}, \tag{1.3}$$

其中 $m, n \in \mathbb{N}$。对于类 $\mathcal{S}^*$ 和 $\mathcal{C}$, $|T_{2,n}(f)|$, $|T_{3,1}(f)|$ 和 $|T_{3,2}(f)|$ 的界由 Ali 等人 [3] 于 2017 年进行了研究。受这项工作的启发，过去几年里，许多作者研究了 m 和 n较小时，各种 $\mathcal{S}$ 子类中 $|T_{m,n}(f)|$ 的界 [2, 7, 10, 16, 20]。

Hankel矩阵与托普利茨矩阵彼此密切相关。Hankel矩阵的反对角线上的元素为常数。Ye 和 Lim [27] 证明，任意 $\mathbb{C}$ 上的 $n \times n$ 矩阵通常都可以表示为若干托普利茨矩阵或Hankel矩阵的乘积。最近，Kowalczyk 和 Lecko [14] 引入了Hankel行列式，其元素为 $\mathcal{A}$中函数的对数系数。他们研究了属于$\mathcal{S}^*$ 和 $\mathcal{C}$ 的函数的二阶对数系数Hankel行列式的最佳估计；同一作者在 [15]中进一步将其推广到 $\mathcal{S}^*(\alpha)$和 $\mathcal{C}(\alpha)$这两个类。Mundalia 和 Kumar [19] 也研究了近凸函数某些子类的同一问题。

受这些研究的启发，并考虑到托普利茨行列式和对数系数的重要性，我们定义

$$T_{m,n}(\gamma_f) = \begin{vmatrix} \gamma_n & \gamma_{n+1} & \cdots & \gamma_{n+m-1} \\ \gamma_{n+1} & \gamma_n & \cdots & \gamma_{n+m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{n+m-1} & \gamma_{n+m-2} & \cdots & \gamma_n \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

因此，我们得到

$$T_{2,1}(\gamma_f) = \gamma_1^2 - \gamma_2^2 \quad \text{and} \quad T_{2,2}(\gamma_f) = \gamma_2^2 - \gamma_3^2.$$

比较 (1.2) 中 z 的相同幂次可得

$$\gamma_1 = \frac{a_2}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{4}(2a_3 - a_2^2) \text{ and } \gamma_3 = \frac{1}{2}\left(a_4 - a_2 a_3 + \frac{1}{3}a_2^3\right). \tag{1.5}$$

本文为类 $\mathcal{S}^*(\varphi)$ 和 $\mathcal{C}(\varphi)$ 推导了 $|T_{2,1}(\gamma_f)|$、$|T_{2,2}(\gamma_f)|$ 以及 $|T_{3,2}(f)|$ 的最佳估计。所得界限在适当选取 φ 时，导出了关于星形函数和凸函数的不同子类的一系列新结果和已有结果。

证明主要结果需要以下引理。

引理 1.1. *[21]* 若 $\omega(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in \Omega$ 且 $(\mu, \nu) \in \cup_{i=1}^{3} D_i$，则

$$|c_3 + \mu c_1 c_2 + \nu c_1^3| \leq |\nu|,$$

其中

$$D_1 = \left\{(\mu,\nu) : |\mu| \leq 2,\ \nu \geq 1\right\},\ \ D_2 = \left\{(\mu,\nu) : 2 \leq |\mu| \leq 4,\ \nu \geq \frac{1}{12}(\mu^2+8)\right\},$$

and

$$D_3 = \left\{(\mu,\nu) : |\mu| \geq 4,\ \nu \geq \frac{2}{3}(|\mu|-1)\right\}.$$

引理 1.2. *[9, 定理 1]* 设 $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \in \mathcal{P}$ 且 $\mu \in \mathbb{C}$。则

$$|p_n - \mu p_k p_{n-k}| \leq 2\max\{1, |2\mu - 1|\}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

当 $|2\mu - 1| \geq 1$ 时，函数 $p(z) = (1+z)/(1-z)$ 或其旋转使该不等式取等号。当$|2\mu - 1| < 1$ 时，$p(z) = (1+z^n)/(1-z^n)$ 或其旋转使该不等式取等号。

2 主要结果

我们首先给出类 $\mathcal{S}^*(\varphi)$ 和 $\mathcal{C}(\varphi)$ 中 $|T_{2,1}(\gamma_f)|$ 和 $|T_{2,2}(\gamma_f)|$ 的界。

定理 2.1. 设 $\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \cdots$ 和 $f \in \mathcal{S}^*(\varphi)$。若 $|B_2| \geq B_1$，则

$$|\gamma_1^2 - \gamma_2^2| \leq \frac{B_1^2}{4} + \frac{B_2^2}{16}.$$

该估计是最佳的。

证明. 设 $f \in \mathcal{S}^*(\varphi)$ 具有形式 (1.1)。那么存在一个施瓦茨函数，记作 $\omega(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$，使得

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \varphi(\omega(z)), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{2.1}$$

由 f 和 φ的泰勒级数展开，我们得到

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + a_2 z + (-a_2^2 + 2a_3)z^2 + (a_2^3 - 3a_2 a_3 + 3a_4)z^3 + \cdots \tag{2.2}$$

and

$$\varphi(\omega(z)) = 1 + B_1 c_1 z + (B_2 c_1^2 + B_1 c_2)z^2 + (B_3 c_1^3 + 2B_2 c_1 c_2 + B_1 c_3)z^3 + \cdots. \tag{2.3}$$

通过比较 s 利用（2.2）和（2.3）中的相同幂，系数 a_2、a_3 和 a_4 可表示为 s

$$a_2 = B_1 c_1,\ \ a_3 = \frac{1}{2}(B_1^2 c_1^2 + B_2 c_1^2 + B_1 c_2) \tag{2.4}$$

and

$$a_4 = \frac{1}{48}((8B_1^3 + 24B_1 B_2 + 16B_3)c_1^3 + (24B_1^2 + 32B_2)c_1 c_2 + 16B_1 c_3). \tag{2.5}$$

进一步，应用 $|c_n| \leq 1$，我们得到

$$|a_2| \leq B_1. \tag{2.6}$$

Ali 等人 [4, 定理 1] 给出了 $p-$ 价函数的 Fekete-Szeg¨o 泛函的界，对于$p=1$，有

$$|a_3-\lambda a_2^2|\leq\begin{cases}\dfrac{1}{2}(B_1^2+B_2-2\lambda B_1^2), & \text{if } 2\lambda B_1^2\leq B_1^2+B_2-B_1;\\ \dfrac{1}{2}B_1, & \text{if } B_1^2+B_2-B_1\leq 2\lambda B_1^2\leq B_1^2+B_2+B_1;\\ \dfrac{1}{2}(-B_1^2-B_2+2\lambda B_1^2), & \text{if } 2\lambda B_1^2\geq B_1^2+B_2+B_1.\end{cases}$$

由于 $|B_2|\geq B_1$，因此上述不等式直接推出

$$|a_3-\frac{1}{2}a_2^2|\leq\frac{|B_2|}{2}. \tag{2.7}$$

由 (1.5) 可得

$$|\gamma_1^2-\gamma_2^2|=\left|\frac{1}{4}\left(a_2^2-\left(a_3-\frac{a_2^2}{2}\right)^2\right)\right|\leq\frac{1}{4}\left(|a_2|^2+\left|a_3-\frac{a_2^2}{2}\right|^2\right). \tag{2.8}$$

利用 (2.6) 和 (2.7) 中 $|a_2|$ 和 $|a_3-(a_2^2)/2|$ 的界，由 (2.8) 即可得到所需的界。

To 为说明该界是尖锐的，考虑解析函数 $k_\varphi:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$，其定义如下:

$$k_\varphi(z)=z\exp\int_0^z\frac{\varphi(it)-1}{t}dt=z+iB_1z^2-\frac{1}{2}(B_1^2+B_2)z^3+\cdots. \tag{2.9}$$

显然，$k_\varphi\in\mathcal{S}^*(\varphi)$，对该函数进行简单计算可得

$$|\gamma_1^2-\gamma_2^2|=\frac{4B_1^2+B_2^2}{16},$$

这说明该界是尖锐的。

定理 2.2. 设 $\varphi(z)=1+B_1z+B_2z^2+B_3z^3+\cdots$和 $f\in\mathcal{C}(\varphi)$。若 $|B_2+\frac{1}{4}B_1^2|\geq B_1$，则

$$|\gamma_1^2-\gamma_2^2|\leq\frac{B_1^2}{16}+\frac{1}{144}\left(B_2+\frac{B_1^2}{4}\right)^2. \tag{2.10}$$

该估计是锐利的。

证明。设 $f\in\mathcal{C}(\varphi)$ 具有形式 (1.1)。则存在一个施瓦茨函数 $\omega(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_nz^n$，使得

$$1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}=\varphi(\omega(z)),\quad z\in\mathbb{D}.$$

将上式中相同幂次 z 的系数与 f的泰勒级数展开进行比较后，φ 和 ω 中的系数 a_2 和 a_3 可表示为

$$a_2=\frac{B_1c_1}{2},\quad a_3=\frac{1}{6}(B_1^2c_1^2+B_2c_1^2+B_1c_2) \tag{2.11}$$

and

$$a_4=\frac{1}{12}((4B_1^3+3B_1B_2+B_3)c_1^3+(3B_1^2+2B_2)c_1c_2+B_1c_3). \tag{2.12}$$

应用界限 $|c_n|\leq1$，我们得到

$$|a_2|\leq\frac{B_1}{2}. \tag{2.13}$$

对于 $f \in \mathcal{C}(\varphi)$，Ma 和 Minda [17, 定理 3] 建立了以下界限

$$|a_3-\lambda a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{1}{6}(B_2-\frac{3}{2}\lambda B_1^2+B_1^2), & \text{if } 3\lambda B_1^2 \leq 2(B_1^2+B_2-B_1); \\ \frac{1}{6}B_1, & \text{if } 2(B_1^2+B_2-B_1) \leq 3\lambda B_1^2 \leq 2(B_1^2+B_2+B_1); \\ \frac{1}{6}(-B_2+\frac{3}{2}\lambda B_1^2-B_1^2), & \text{if } 2(B_1^2+B_2+B_1) \leq 3\lambda B_1^2. \end{cases}$$

由于$|B_2+\frac{1}{4}B_1^2| \geq B_1$ 成立，上述不等式可直接得出

$$|a_3-\frac{1}{2}a_2^2| \leq \frac{1}{6}|B_2+\frac{1}{4}B_1^2|. \tag{2.14}$$

分别利用式 (2.13) 和 (2.14) 中给出的 $f \in \mathcal{C}(\varphi)$ 的 $|a_2|$ 和 $|a_3-(a_2^2)/2|$ 的界，我们得到

$$|\gamma_1^2-\gamma_2^2| \leq \frac{1}{4}\left(|a_2|^2+\left|a_3-\frac{a_2^2}{2}\right|^2\right) \leq \frac{B_1^2}{16}+\frac{1}{144}\left(B_2+\frac{B_1^2}{4}\right)^2.$$

式 (2.10) 的等号情形对应于由下式给出的函数 h_φ

$$1+\frac{zh_\varphi''(z)}{h_\varphi'(z)}=\varphi(iz). \tag{2.15}$$

显然， $h_\varphi \in \mathcal{C}(\varphi)$，且对于此函数，我们有

$$\gamma_1=\frac{iB_1}{4} \text{ and } \gamma_2=-\frac{1}{12}(B_2+\frac{B_1^2}{4}),$$

这表明式 (2.10) 中的界是尖锐的。

定理 2.3. 设 $\varphi(z)=1+B_1z+B_2z^2+B_3z^3+\cdots$ 且 $f \in \mathcal{S}^*(\varphi)$。若 $|B_2| \geq B_1$ 和 $(\mu_1,\nu_1) \in \cup_{i=1}^3 D_i$成立，则

$$|\gamma_2^2-\gamma_3^2| \leq \frac{1}{144}(9B_2^2+4B_3^2),$$

其中 $\mu_1=2B_2/B_1$ 和 $\nu_1=B_3/B_1$。该界是锐的。

证明。设 $f \in \mathcal{S}^*(\varphi)$ 具有形式 (1.1)。则由 (1.5)，可得

$$\begin{aligned} |\gamma_2^2-\gamma_3^2| &= \frac{1}{4}\left|\left(a_3-\frac{a_2^2}{2}\right)^2-\left(\frac{a_2^3}{3}-a_2a_3+a_4\right)^2\right| \\ &\leq \frac{1}{4}\left(\left|a_3-\frac{a_2^2}{2}\right|^2+\left|\frac{a_2^3}{3}-a_2a_3+a_4\right|^2\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

由 (2.4) 和 (2.5)，对于 $f \in \mathcal{S}^*(\varphi)$，利用 a_2、 a_3 和 a_4 的值，可得

$$\left|\frac{a_2^3}{3}-a_2a_3+a_4\right|=\frac{B_1}{3}|c_3+\mu_1c_1c_2+\nu_1c_1^3|,$$

其中 $\mu_1=2B_2/B_1$ 和 $\nu_1=B_3/B_1$。由于 $|B_2| \geq B_1$ 成立，因此 (μ_1,ν_1) 属于 D_1、D_2 或 D_3之一。于是，由引理 1.1，可得

$$\left|\frac{a_2^3}{3}-a_2a_3+a_4\right| \leq \frac{|B_3|}{3}. \tag{2.17}$$

将 (2.7) 和 (2.17) 中的界代入不等式 (2.16)，即可得到所需的界。

由 (2.9) 给出的函数 k_φ 可看出该界是锐的。对于此函数，我们有$\gamma_2=-B_2/4$、 $\gamma_3=-iB_3/6$ 以及

$$\gamma_2^2-\gamma_3^2=\frac{1}{144}(9B_2^2+4B_3^2),$$

这证明了该界是尖锐的。

定理 2.4 $\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \cdots$ $f \in \mathcal{C}(\varphi)$ $|B_2 + \frac{1}{4}B_1^2| \geq B_1$ μ_2 ν_2 $\in \cup_{i=1}^{3} D_i$. 设 (.) 和 (.)。若且 (.) 成立，则

$$|\gamma_2^2 - \gamma_3^2| \leq \frac{B_1^4 + 8B_1^2 B_2 + 16B_2^2 + B_1^2 B_2^2 + 4B_1 B_2 B_3 + 4B_3^2}{2304},$$

其中 $\mu_2 = (B_1^2 + 4B_2)/(2B_1)$ 和 $\nu_2 = (B_1 B_2 + 2B_3)/(2B_1)$。此界是锐的。

证明. 根据关于 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{C}(\varphi)$ 的方程 (2.11) 和 (2.12)，我们有

$$\left| \frac{a_2^3}{3} - a_2 a_3 + a_4 \right| = \frac{B_1}{12} \left| c_3 + \mu_2 c_1 c_2 + \nu_2 c_1^3 \right|.$$

由于假设 $|B_2 + \frac{1}{4}B_1^2| \geq B_1$ 成立，因此 (μ_2, ν_2) 属于 D_1、D_2 或 D_3。由引理 1.1 可得

$$\left| \frac{a_2^3}{3} - a_2 a_3 + a_4 \right| \leq \frac{|B_1 B_2 + 2B_3|}{24}. \tag{2.18}$$

将 (2.14) 和 (2.18) 中的界代入不等式 (2.16)，得到

$$|\gamma_2^2 - \gamma_3^2| \leq \frac{B_1^4 + 8B_1^2 B_2 + 16B_2^2 + B_1^2 B_2^2 + 4B_1 B_2 B_3 + 4B_3^2}{2304}.$$

这是一个简单的练习 练习验证，对于由 (2.15 定义的函数 $h_\varphi \in \mathcal{C}(\varphi)$，等号情形成立】【。).

2.1 一些特殊情形

由于类 $\mathcal{S}^*(\varphi)$ 和 $\mathcal{C}(\varphi)$ 推广了星形函数与凸函数的各种子类，因此，对于适当选取的 φ，只要 φ 的泰勒级数系数满足定理 2.1- 2.4 中的条件，我们就能得到相应类中 $|T_{2,\ 1}(\gamma_f)|$ 和 $|T_{2,\ 2}(\gamma_f)|$ 的最佳界。

对于 $\varphi(z) = (1 + Az)/(1 + Bz)$ $(-1 \leq B < A \leq 1)$ 的情形，我们有 $\mathcal{S}^*[A, B] = \mathcal{S}^*((1 + Az)/(1 + Bz))$ 和 $\mathcal{C}[A, B] = \mathcal{C}((1 + Az)/(1 + Bz))$。$(1 + Az)/(1 + Bz)$ 的级数展开表明，$B_1 = (A - B)$、$B_2 = B^2 - AB$ 和 $B_3 = AB^2 - B^3$。因此，定理 2.1-2.4 得出如下结果：

推论 2.5. 设 $f \in \mathcal{S}^*[A, B]$ 具有形式 (1.1)，其中 $-1 \leq B < A \leq 1$。

(i) 若 $|B^2 - AB| \geq A - B$，则

$$|\gamma_1^2 - \gamma_2^2| \leq \frac{(A - B)^2(4 + B^2)}{16}.$$

(ii) 若 $|B^2 - AB| \geq A - B$，且 $(\mu_1, \nu_1) \in \cup_{i=1}^{3} D_i$，则

$$|\gamma_2^2 - \gamma_3^2| \leq \frac{(A - B)^2 B^2 (4B^2 + 9)}{144},$$

其中 $\mu_1 = -2B$ 且 $\nu_1 = B^2$.

推论 2.6. 设 $f \in \mathcal{C}[A, B]$ 具有形式 (1.1)，其中 $-1 \leq B < A \leq 1$。

(i) 若 $|A^2 - 6AB + 5B^2| \geq 4(A - B)$，则

$$|\gamma_1^2 - \gamma_2^2| \leq \frac{(A - B)^2(A^2 + 25B^2 - 10AB + 144)}{2304}.$$

(ii) 若 $|A^2 - 6AB + 5B^2| \geq 4(A - B)$ 且 $(\mu_2, \nu_2) \in \cup_{i=1}^{3} D_i$，则

$$|\gamma_2^2 - \gamma_3^2| \leq \frac{(A - B)^2(A^2(B^2 + 1) + B^2(9B^2 + 25) - 2AB(3B^2 + 5))}{2304},$$

其中 $\mu_2 = (A - 5B)/2$ 和 $\nu_2 = (B(3B - A))/2$.

取 $A = 1-2\alpha$、 $0 \le \alpha < 1$ 和 $B = -1$, 即可由推论 2.5 和推论 2.6 得到以下结果。

推论 2.7. 若 $f \in \mathcal{S}^*(\alpha)$, $0 \le \alpha < 1$, 则

$$|\gamma_1^2 - \gamma_2^2| \le \frac{5}{16}(2-2\alpha)^2 \ \ and \ \ |\gamma_2^2 - \gamma_3^2| \le \frac{13}{144}(2-2\alpha)^2.$$

推论 2.8. 若 $f \in \mathcal{C}(\alpha)$, $0 \le \alpha < 1$, 则

$$|\gamma_1^2 - \gamma_2^2| \le \frac{(\alpha-1)^2(\alpha^2-6\alpha+45)}{144} \ \ and \ \ |\gamma_2^2 - \gamma_3^2| \le \frac{(\alpha-1)^2(2\alpha^2-10\alpha+13)}{144}.$$

特别地, 对于 $\alpha = 0$, 推论 2.7 和推论 2.8 分别给出了类 $\mathcal{S}^*$ 和 $\mathcal{C}$的界。

推论 2.9. 若 $f \in \mathcal{S}^*$, 则

$$|\gamma_1^2 - \gamma_2^2| \le \frac{5}{4} \ \ and \ \ |\gamma_2^2 - \gamma_3^2| \le \frac{13}{36}.$$

推论 2.10. 若 $f \in \mathcal{C}$, 则

$$|\gamma_1^2 - \gamma_2^2| \le \frac{5}{16} \ \ and \quad |\gamma_2^2 - \gamma_3^2| \le \frac{13}{144}.$$

3 $|\det T_{3,2}(f)|$ 的界

Ali 等人 [4, 定理 1] 为属于 $\mathcal{S}^*(\varphi)$的 p–价函数推导出了 Fekete-Szeg¨o 泛函的最佳估计, 这立即给出 $p=1$ $|a_4|$ 的以下估计。

引理 3.1。 *[4, 定理 1]* 设 $\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \cdots$, 且

$$q_1 = \frac{3B_1^2 + 4B_2}{2B_1}, \quad q_2 = \frac{B_1^3 + 3B_1B_2 + 2B_3}{2B_1}.$$

若 $f \in \mathcal{S}^*(\varphi)$ 具有形式 (1.1), 且 $(q_1, q_2) \in \cup_{i=1}^3 D_i$, 则

$$|a_4| \le \frac{B_1^3 + 3B_1B_2 + 2B_3}{6}.$$

该界是最佳的。

定理 3.1。设 $\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \cdots$ 使得

$$6B_1^2 \le B_1(3B_1^2 + 2B_2) \le B_1^2 + 2B_1^4 + 3B_1^2B_2 + 3B_2^2 - 2B_1B_3,$$

and

$$q_1 = \frac{3B_1^2 + 4B_2}{2B_1}, \quad q_2 = \frac{B_1^3 + 3B_1B_2 + 2B_3}{2B_1}.$$

若 $f \in \mathcal{S}^*(\varphi)$ 且 $(q_1, q_2) \in \cup_{i=1}^3 D_i$, 则

$$|T_{3,2}(f)| \le \left(B_1 + \frac{B_1^3 + 3B_1B_2 + 2B_3}{6}\right)\left(B_1^2 + \frac{B_1^4}{3} + \frac{B_1^2B_2}{2} + \frac{B_2^2}{2} - \frac{B_1B_3}{3}\right).$$

该界是精确的。

证明。设 $f \in \mathcal{S}^*(\varphi)$ 具有形式 (1.1)。由 (2.1) 可得

$$zf'(z) = f(z)\varphi(\omega(z)), \quad z \in \mathbb{D}.$$

对于施瓦茨函数 ω，存在 $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \in \mathcal{P}$，使得 $w(z) = (p(z) - 1)/(p(z) + 1)$。利用 f、φ 和 p 的幂级数展开，对 z 的相同幂次进行比较，可得

$$a_2 = \frac{B_1 p_1}{2},\ a_3 = \frac{1}{8}(B_1^2 - B_1 + B_2)p_1^2 + 2B_1 p_2)$$

and

$$a_4 = \frac{1}{48}\bigg((B_1^3 - 3B_1^2 + 2B_1 - 4B_2 + 3B_1B_2 + 2B_3)p_1^3 + (6B_1^2 - 8B_1 + 8B_2)p_1p_2 + 8B_1p_3\bigg).$$

将 a_2、a_3 和 a_4 关于 p_1、p_2 和 p_3 的这些值代入，可得

$$\begin{aligned}|a_2^2 - 2a_3^2 + a_2a_4| = \bigg|&\frac{B_1^2p_1^2}{4} - \frac{(B_1^2 - 3B_1^3 + 2B_1^4 - 2B_1B_2 + 3B_1^2B_2 + 3B_2^2 - 2B_1B_3)p_1^4}{96}\\ &- \frac{B_1(3B_1^2 - 2B_1 + 2B_2)p_1^2p_2}{48} - \frac{B_1^2}{8}p_2^2 + \frac{B_1^2}{12}p_1p_3\bigg|.\end{aligned}$$

记住 $B_1^2 + 2B_1^4 + 3B_1^2B_2 + 3B_2^2 - 2B_1B_3 - B_1(3B_1^2 + 2B_2) \geq 0$，并应用界 $|p_n| \leq 2$、$n \in \mathbb{N}$（见 [8, 第 41] 页），可得

$$\begin{aligned}|a_2^2 - 2a_3^2 + a_2a_4| \leq \frac{3B_1^2}{2} &+ \frac{(B_1^2 - 3B_1^3 + 2B_1^4 - 2B_1B_2 + 3B_1^2B_2 + 3B_2^2 - 2B_1B_3)}{6}\\ &+ \frac{B_1^2}{6}\bigg|p_3 - \bigg(\frac{3B_1^2 - 2B_1 + 2B_2}{4B_1}\bigg)p_1p_2\bigg|.\end{aligned}$$

由于 $3B_1^2 + 6B_2 \geq 6B_1$，因此由引理 1.2 可得

$$|a_2^2 - 2a_3^2 + a_2a_4| \leq B_1^2 + \frac{B_1^4}{3} + \frac{B_1^2B_2}{2} + \frac{B_2^2}{2} - \frac{B_1B_3}{3}. \tag{3.1}$$

此外，我们有 $|a_2 - a_4| \leq |a_2| + |a_4|$。分别利用 (2.6) 和引理 3.1 中 $|a_2|$ 和 $|a_4|$ 的界，可得

$$|a_2 - a_4| \leq B_1 + \frac{B_1^3 + 3B_1B_2 + 2B_3}{6}.$$

由（1.3）可得，经过简单计算可知

$$|T_{3,2}(f)| = |(a_2 - a_4)(a_2^2 - 2a_3^2 + a_2a_4)|. \tag{3.2}$$

T所需的估计可通过将（3.1）和（3.2）中给出的界代入上述方程得到。由（2.9）定义的函数 k_φ 起到极值函数的作用。对于该函数，我们有

$$a_2 = iB_1, \quad a_3 = -\frac{1}{2}(B_1^2 + B_2), \quad a_4 = -\frac{i}{6}(B_1^3 + 3B_1B_2 + 2B_3)$$

and

$$|T_{3,2}(k_\phi)| = \bigg(B_1 + \frac{B_1^3 + 3B_1B_2 + 2B_3}{6}\bigg)\bigg(B_1^2 + \frac{B_1^4}{3} + \frac{B_1^2B_2}{2} + \frac{B_2^2}{2} - \frac{B_1B_3}{3}\bigg)$$

证明其尖锐性。

定理 3.2. 设 $\varphi(z) = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \cdots$ 满足

$$16B_1^2 - 4B_1B_2 \le 7B_1^3 \le 5B_1^4 + 2B_1^2 - 4B_1B_2 + 7B_1^2B_2 + 8B_2^2 - 6B_1B_3, \tag{3.3}$$

and

$$q_1 = \frac{3B_1^2 + 4B_2}{2B_1}, \quad q_2 = \frac{B_1^3 + 3B_1B_2 + 2B_3}{2B_1}.$$

如果 $f \in \mathcal{C}(\varphi)$ 且 $(q_1, q_2) \in \cup_{i=1}^{3} D_i$，那么

$$|T_{3,2}(f)| \le \frac{1}{144}\left(\frac{B_1}{2} + \frac{B_1^3 + 3B_1B_2 + 2B_3}{24}\right)(5B_1^4 + 36B_1^2 + 7B_1^2B_2 + 8B_2^2 - 6B_1B_3).$$

这个界是紧的。

证明。设 $f \in \mathcal{C}(\varphi)$ 具有形式 (1.1)，则有

$$f'(z) + zf''(z) = f'(z)\varphi(\omega(z)).$$

对应于施瓦茨函数 $\omega(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$，存在 $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \in \mathcal{P}$ 使得 $w(z) = (p(z) - 1)/(p(z) + 1)$。将上述方程展开成级数后，对 z 的相同次幂进行比较，可得

$$a_2 = \frac{B_1 p_1}{4}, \quad a_3 = \frac{1}{24}((B_1^2 - B_1 + B_2)p_1^2 + 2B_1p_2)$$

and

$$a_4 = \frac{1}{192}\left((B_1^3 - 3B_1^2 + 2B_1 - 4B_2 + 3B_1B_2 + 2B_3)p_1^3 + (6B_1^2 + 8B_2 - 8B_1)p_1p_2 + 8B_1p_3\right). \tag{3.4}$$

利用系数 p_1、p_2 和 p_3 表示的 a_2、a_3 和 a_4，经过简单计算可得

$$\begin{aligned}|a_2^2 - 2a_3^2 + a_2a_4| = \Bigg|\frac{1}{2304}\Bigg((2B_1^2 - 7B_1^3 + 5B_1^4 - 4B_1B_2 + 7B_1^2B_2 + 8B_2^2 - 6B_1B_3)p_1^4 \\ + 32B_1^2p_2^2 - 144B_1^2p_1^2 - 24B_1^2p_1\left(p_3 - \frac{(14B_1^3 - 8B_1^2 + 8B_1B_2)}{24B_1^2}p_1p_2\right)\Bigg)\Bigg|.\end{aligned}$$

根据假设 $2B_1^2 + 5B_1^4 - 4B_1B_2 + 7B_1^2B_2 + 8B_2^2 - 6B_1B_3 \ge 7B_1^3$ 并应用界 $|p_n| \le 2$ $(n \in \mathbb{N})$，可得

$$\begin{aligned}|a_2^2 - 2a_3^2 + a_2a_4| \le \frac{1}{2304}\Bigg(16(2B_1^2 - 7B_1^3 + 5B_1^4 - 4B_1B_2 + 7B_1^2B_2 + 8B_2^2 - 6B_1B_3) \\ + 128B_1^2 + 576B_1^2 + 48B_1^2\left(\left|p_3 - \frac{(14B_1^3 - 8B_1^2 + 8B_1B_2)}{24B_1^2}p_1p_2\right|\right)\Bigg).\end{aligned}$$

由于 $7B_1^2 + 4B_2 \ge 16B_1$ 成立，因此由引理 3.1 可得

$$|a_2^2 - 2a_3^2 + a_2a_4| \le \frac{1}{144}(36B_1^2 + 5B_1^4 + 7B_1^2B_2 + 8B_2^2 - 6B_1B_3). \tag{3.5}$$

现在，我们只需对 $f \in \mathcal{C}(\varphi)$ 求 $|a_2 - a_4|$ 的最大值。根据类 $\mathcal{P}$ 与施瓦茨函数类之间的一一对应关系，式 (3.4) 中的系数 a_4 可表示为

$$a_4 = \frac{1}{12}B_1(c_3 + q_1c_1c_2 + q_2c_1^3),$$

其中 $q_1 = (3B_1^2 + 4B_2)/(2B_1)$ 和 $q_2 = (B_1^3 + 3B_1B_2 + 2B_3)/(2B_1)$。由于根据假设 $(q_1, q_2) \in \cup_{i=1}^{3} D_i$，由引理 1.1 可得

$$|a_4| \le \frac{B_1^3 + 3B_1B_2 + 2B_3}{24}. \tag{3.6}$$

分别利用式 (2.13) 和 (3.6) 中 $|a_2|$ 和 $|a_4|$ 的界，可得

$$|a_2 - a_4| \leq |a_2| + |a_4| \leq \frac{B_1}{2} + \frac{B_1^3 + 3B_1B_2 + 2B_3}{24}. \tag{3.7}$$

因此，分别将 (3.5) 和 (3.7) 中 $|a_2^2 - 2a_3^2 + a_2a_4|$ 和 $|a_2 - a_4|$ 的界代入 (3.2)，即可得到所需结果。

对于在 (2.15) 中定义的函数 h_φ，该结果是锐的。对于此函数，我们有 $a_2 = iB_1/2$,$a_3 = -(B_1^2 + B_2)/6$, $a_4 = -i(B_1^3 + 3B_1B_2 + 2B_3)/24$ 和

$$|T_{3,2}(f)| = \frac{1}{144}\left(\frac{B_1}{2} + \frac{B_1^3 + 3B_1B_2 + 2B_3}{24}\right)(5B_1^4 + 36B_1^2 + 7B_1^2B_2 + 8B_2^2 - 6B_1B_3)$$

这证明了该界是锐的。

3.1 特殊情形

对于类 $\mathcal{S}^*[A, B]$ 和 $C[A, B]$，有 $\varphi(z) = (1 + Az)/(1 + Bz)$，级数展开给出$B_1 = A - B$, $B_2 = B^2 - AB$ 和 $B_3 = AB^2 - B^3$。因此，我们可直接由定理 3.1 和定理 3.2 得到以下结果。

推论 3.3. 对于 $-1 \leq B < A \leq 1$，令

$$6(A - B)^2 \leq (3A - 5B)(A - B)^2 \leq (A - B)^2(2A^2 - 7AB + 6B^2 + 1),$$

and

$$q_1 = \frac{3A - 7B}{2}, \quad q_2 = \frac{A^2 - 5AB + 6B^2}{2}.$$

若 $f \in \mathcal{S}^*[A, B]$ 且 $(q_1, q_2) \in \cup_{i=1}^3 D_i$，则

$$|T_{3,2}(f)| \leq \frac{1}{36}(A - B)^2(2A^2 - 7AB + 6B^2 + 6)(A^3 + 6A - 6B - 6A^2B + 11AB^2 - 6B^3).$$

这些估计是精确的。

推论 3.4. 对于 $-1 \leq B < A \leq 1$，令

$$4(A - B)^2(4 + B) \leq 7(A - B)^3 \leq (A - B)^2(2 + 5A^2 + 4B - 17AB + 14B^2)$$

and

$$q_1 = \frac{3A - 7B}{2}, \quad q_2 = \frac{A^2 - 5AB + 6B^2}{2}.$$

若 $f \in \mathcal{C}[A, B]$ 且 $(q_1, q_2) \in \cup_{i=1}^3 D_i$，则

$$|T_{3,2}(f)| \leq \frac{1}{3456}(A - B)^2(5A^2 - 17AB + 14B^2 + 36)(A^3 + 12A - 12B - 6A^2B + 11AB^2 - 6B^3).$$

这些估计是精确的。

当 $A = 1 - 2\alpha$ 和 $B = -1$时，推论 3.3 和 3.4 中的条件成立，且 $(q_1, q_2) \in D_3$ 对于$\alpha \in [0, 1/7]$。因此，我们得到类 $\mathcal{S}^*(\alpha)$ 和 $\mathcal{C}(\alpha)$ 的以下界。

推论 3.5. 若 $f \in \mathcal{S}^*(\alpha)$，则

$$|T_{3,2}(f)| \leq \frac{4}{9}(1 - \alpha)^3(16\alpha^4 - 100\alpha^3 + 268\alpha^2 - 345\alpha + 189)$$

对于 $\alpha \in [0, 1/7]$。该界是精确的。

推论 3.6. 若 $f \in \mathcal{C}(\alpha)$，则

$$|T_{3,2}(f)| \leq \frac{1}{108}(1-\alpha)^3(20\alpha^4 - 124\alpha^3 + 381\alpha^2 - 576\alpha + 432)$$

对于 $\alpha \in [0, 1/7]$。该界是精确的。

注 3.1。特别地，当 $\alpha = 0$ 时，类 $\mathcal{S}^*$ 和 $\mathcal{C}$ 的以下界可作为在 [3] 中证明的特例得到。

(i) 若 $f \in \mathcal{S}^*$，则 $|T_{3,2}(f)| \leq 84$ [3, 定理 2.3]。
(ii) 若 $f \in \mathcal{C}$，则 $|T_{3,2}(f)| \leq 4$ [3, 定理 2.11]。

当 $\varphi(z) = ((1+z)/(1-z))^\beta$, $0 < \beta \leq 1$ 时，类 $\mathcal{S}^*(\varphi)$ 和 $\mathcal{C}(\varphi)$ 分别化为阶为 β 的强星形函数类和阶为 β 的强凸函数类，记作 $\mathcal{SS}^*(\beta)$ 和 $\mathcal{CC}(\beta)$（参见 [8]）。

推论 3.7。若 $f \in \mathcal{SS}^*(\beta)$，则

$$|T_{3,2}(f)| \leq \frac{4}{81}\beta^3(160 + 742\beta^2 + 799\beta^4)$$

对于 $\beta \in [3/4, 1]$。这个界是尖锐的。

推论 3.8。如果 $f \in \mathcal{CC}(\beta)$，则

$$|T_{3,2}(f)| \leq \frac{1}{324}\beta^3(323 + 650\beta^2 + 323\beta^4)$$

对于 $\beta \in [8/9, 1]$。这个界是尖锐的。

对于 $-1/2 < \lambda \leq 1$ 和 $f \in \mathcal{A}$，使得 f 是局部单叶函数，Robertson [22] 考虑了如下类

$$\mathcal{F}(\lambda) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \frac{1}{2} - \lambda \right\}.$$

显然，当 $1/2 \leq \lambda \leq 1$时，$\mathcal{F}(\lambda)$ 中的函数是近凸函数 [12]。对于 $-1/2 < \lambda \leq 1/2$，$\mathcal{F}(\lambda)$ 中的函数是凸函数。Vasudevarao 等人 [26] 推导出了 $|T_{3,\ 2}(f)|$ 在 $1/2 \leq \lambda \leq 1$ 时关于 $f \in \mathcal{F}(\lambda)$ 的尖锐界，也就是 Ozaki 近凸函数类。考虑

$$\varphi_\lambda(z) = \frac{1 + 2\lambda z}{1 - z}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

当 $-1/2 < \lambda \leq 1/2$ 使得 $\mathrm{Re}\,\varphi_\lambda > (1/2 - \lambda)$ 时，函数 φ_λ 将单位圆盘映射到右半平面。显然，当 $\lambda \in (-1/2, 1]$ 和 $\mathcal{C}(\varphi_\lambda) = \mathcal{F}(\lambda)$ 时，$\mathcal{C}(\varphi_\lambda) \subset \mathcal{F}(\lambda)$。$\varphi_\lambda$ 的泰勒级数展开给出 $B_1 = B_2 = B_3 = (1 + 2\lambda)$，它满足 $\lambda \in [5/14, 1/2]$ 的条件 (3.3)。因此，由定理 3.2 可得，当 $5/14 \leq \lambda \leq 1/2$时，类 $\mathcal{F}(\lambda)$ 的 $|T_{3,\ 2}(f)|$ 的以下尖锐界。

推论 3.9. 若 $f \in \mathcal{F}(\lambda)$、$5/14 \leq \lambda \leq 1/2$，则

$$|T_{3,2}(f)| \leq \frac{1}{864}(1 + 2\alpha)^3(9 + 5\alpha + 2\alpha^2)(25 + 17\alpha + 10\alpha^2).$$

注记 3.2. Vasudevarao 等人 [26, 定理 4.3] 证明了与推论 3.9 中给出的相同界限，适用于$1/2 \leq \lambda \leq 1$。因此，推论 3.9 表明该结果对 $5/14 \leq \lambda \leq 1/2$ 也成立。

声明

经费资助

Surya Giri 的研究工作得到了印度新德里大学拨款委员会的支持，UGC 参考编号为 1112/(CSIR-UGC NET 2019年6月)。

利益冲突

作者声明，他们不存在利益冲突。

作者贡献

每位作者对本研究及稿件的撰写均作出了同等贡献。

数据可用性

不适用。

参考文献

[1] E. A. Adegani, N. E. Cho 和 M. Jafari，《由从属关系定义的单叶函数的对数系数》，Mathematics 7，第5期（2019），408.[2] O. P. Ahuja、K. Khatter 和 V. Ravichandran，《与星形函数和凸函数的 Ma-Minda 类相关的托普利茨行列式》，Iran. J. Sci. Technol. Trans. A Sci. 45（2021），第6期，2021–2027.[3] M. F. Ali、D. K. Thomas 和 A. Vasudevarao，《其元素为解析单叶函数系数的托普利茨行列式》，Bull. Aust. Math. Soc. 97（2018），第2期，253–264.[4] R. M. Ali、V. Ravichandran 和 N. Seenivasagan，《 p 价函数的系数界》，Applied Mathematics and Computation 187.1 （ 2007 ）: 35-46.[5] M. F. Ali 和 A. Vasudevarao，《关于某些近凸函数的对数系数》，Proc. Amer. Math. Soc. 146（2018），第3期，1131–1142.[6] N. E. Cho、B. Kowalczyk、O. S. Kwon、A. Lecko 和 Y. J. Sim，《关于某些近凸函数子类的第三对数系数》，Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat. RACSAM 114（2020），第2期，论文第52号，共14页.[7] K. Cudna、O. S. Kwon、A. Lecko、Y. J. Sim 和 B. ´Smiarowska，《星形函数和凸函数的二阶和三阶厄米托普利兹行列式》，Bol. Soc. Mat. Mex. (3) 26（2020），第2期，361–375.[8] P. L. Duren，《单叶函数》，Grundlehren der mathematischen Wissenschaften，第259卷，Springer，纽约，1983.[9] I. Efraimidis，《正实部函数的 Livingston系数不等式推广》，J. Math. Anal. Appl. 435（2016），第1期，369–379.[10] S. Giri 和 S. S. Kumar，《某些单叶函数的厄米托普利兹行列式》，Anal. Math. Phys.（已接收）.[11] W. Janowski，《某些解析函数族的若干极值问题 I》，Ann. Polon. Math. 28（1973），297–326.[12] W. Kaplan，《近凸单叶函数》，Michigan Math. J. 1（1952），169–185（1953）.[13] I. R. Kayumov，《关于一类特殊函数的Brennan猜想》，Math. Notes 78（2005），第3–4期，498–502；译自 Mat. Zametki 78（2005），第4期，537–541.[14] B. Kowalczykand A. Lecko，《凸函数和星形函数的对数系数的第二汉克尔行列式》，Bull. Aust. Math. Soc. 105（2022），第3期，458–467.

[15] B. Kowalczyk 和 A. Lecko，《阶为 alpha 的凸函数和星形函数的对数系数的第二汉克尔行列式》，Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 45（2022），第2期，727–740.[16] A. Lecko、Y. J. Sim 和 B. ´Smiarowska，《凸函数的四阶厄米特托普利茨行列式》，Anal. Math. Phys. 10（2020），第3期，论文第39号，共11页.[17] W. Ma 和 D. Minda，《对单叶函数若干特殊类的统一处理》，《复分析会议论文集》，1992年。国际出版社，1992年.[18] I. M. Milin，《单叶函数与正交归一系》，科学出版社，莫斯科（1971年）（俄文）；英文译本，美国数学学会，普罗维登斯（1977年）.[19] M. Mundalia 和 S. S. Kumar，《某些近凸函数的系数问题》，伊朗数学学会公报 49（2023），第1期，论文第5号.[20] M. Obradovi´c 和 N. Tuneski，《单叶函数类的厄米特托普利茨行列式》，亚美尼亚数学杂志，13(4)，1–10（2021）.[21] D. V. Prokhorov 和 J. Szynal，《(α, β)-凸函数的逆系数》，Ann. Univ. Mariae Curie-Sk lodowska Sect. A 35（1981），125–143（1984）.[22] M. S. Robertson，《关于单叶函数理论》，数学年刊（第二辑）37（1936），第2期，374–408.[23] D. K. Thomas，《具有对数增长的 Bazilevi˘c 函数的系数》，印度数学杂志 57（2015），第3期，403–418.[24] D. K. Thomas、N. Tuneski、A. Vasudevarao，《单叶函数：入门》，Walter de Gruyter GmbH，柏林（2018）.[25] O. Toeplitz，《关于无穷多个变量的双线性形式族的变换》，Mathematischphysikalis- che, Klasse, Nachr. der Kgl. Gessellschaft derWissenschaften zu G¨ottingen，第110–115页（1907）.[26] A. Vasudevarao、A. Lecko 和 D. K. Thomas，《某些近凸函数的汉克尔、托普利茨及厄米托普利兹行列式》，Mediterr. J. Math. 19（2022），第1期，论文第22号，共17页.[27] K. Ye 和 L.-H. Lim，《每个矩阵都是托普利茨矩阵的乘积》，计算数学基础 16（2016），第3期，577–598.

[1]Department of Applied Mathematics, Delhi Technological University, Delhi–110042, India
E-mail address: suryagiri456@gmail.com

*Department of Applied Mathematics, Delhi Technological University, Delhi–110042, India
E-mail address: spkumar@dtu.ac.in