Baer定理的一种变体

PASHA ZUSMANOVICH

摘要。我们给出 Baer定理的一种变体，该定理涉及除环上向量空间的自同态环之间的同构，其中完整的自同态环被某些有限秩映射的子环所取代。

arXiv:2303.14749v1 [math.RA] 26 Mar 2023

这里所说的 Baer定理，是指如下结果：该结果首次作为定理 1 表述于 [Baer 的第五章第 §4] 节：若 V 和 W 分别是除环 D 和 F 上的两个（例如右）向量空间，则它们的自同态环 $\mathrm{End}_D(V)$ 和 $\mathrm{End}_F(W)$ 同构，意味着 V 和 W 半线性同构。Baer 最初的证明利用了自同态环中幂等元的性质；关于简洁而现代的论述，参见 [KTT，定理 4.1]。[W 的定理 8.1]（Baer 指导下的博士论文）则运用了雅各布森稠密性定理，给出了另一种证明。在 [R] 和 [Bal] 中，Baer定理分别推广到了超除环或分次除环上的超向量空间和分次向量空间。后来，Baer定理也推广到了大量阿贝尔群类上的模（即所谓的 Baer–Kaplansky 定理）；综述请参见 [KTT] 及其中的参考文献。

若 V 是 D 上的无限维向量空间，则环 $\mathrm{End}_D(V)$ 非常庞大，因此人们或许会想，在 Baer定理的表述中能否用某个更小的对象取而代之。虽然这说法略显时代错置，但早在 Baer 之前的20世纪40年代，Dieudonn´e、Jacobson 等人的著作中就已作出这种替换，只是具体形式略有不同，参见 [J2，第四章，§11] or [J1，第九章，§11，定理 7]：条件涉及有限秩线性映射环的同构，证明则再次用到了雅各布森稠密性定理。这些研究的源头似乎是更早在解析背景中确立的类似结果，研究对象包括 Banach 空间或希尔伯特空间上的有界算子环，以及赋范空间上的连续算子环；相关历史文献参见 [J2，第 94] 页。

在此，我们对这一主题提出另一种变体。我们仍在一个相对狭窄的背景下讨论除环上的向量空间，并且——与 Jacobson 等人的做法类似——不考虑整个自同态环，而是考察其中由有限秩线性映射构成的子环。然而，在无限维情形下，我们所考虑的环相当“小”，甚至显著小于所有有限秩映射构成的环，因此可以将此视为对原始 Baer定理的一项重要推广。此外，我们的环通常并不稠密，因此，以幂等元或环论中的其他结构性工具为考察对象，或基于雅各布森稠密性定理的 Baer定理及其变体的所有既有证明方法，都无法奏效。我们转而采用一种初等的线性代数技巧，将施加于张量积上线性映射的条件进行“分解”，并考察迹。

本文假设所有环都是结合的。关于（非交换）除环上的标准线性代数，请参阅 [Baer] 或 [J1]。部分记号和术语也借自 [CO]（其中内容是在李代数背景下讨论的）。

设 D 是带单位元 1 的除环，V 是 D 上的右向量空间；则对偶空间 V^* 是 D 上的左向量空间。若线性映射的核具有有限余维（或者等价地，其像具有有限维数），则称该映射为有限型映射。有限型映射有迹，其定义方式与通常相同。所有有限型线性映射构成自同态环 $\mathrm{End}_D(V)$ 的子环 $\mathrm{FEnd}_D(V)$，并由无穷小错切变换 $t_{v,f}\colon V \to V$ 张成，其中 $t_{v,f}(u) = v\,f(u)$，这里 $v, u \in V$ 且 $f \in V^*$（无穷小错切变换恰好是像为一维的线性映射）。无穷小错切变换的迹由公式 $\mathrm{Tr}(t_{v,f}) = f(v)$ 确定。

环 $\mathrm{FEnd}_D(V)$ 同构于环 $V \otimes_D V^*$，其乘法定义为

$$(v \otimes f) \cdot (u \otimes g) = v f(u) \otimes g, \tag{1}$$

其中 v、$u \in V$，f、$g \in V^*$。该同构将无穷小错切变换 $t_{v,f}$ 映射为可分解张量 $v \otimes f$。

现在设 Π 是 V^* 的一个 D-子空间。那么 $V \otimes_D \Pi$ 仍然关于乘法 (1) 封闭，因此构成 $V \otimes_D V^*$ 的一个子环。回到 $\mathrm{End}_D(V)$ 及其子环，环 $V \otimes_D \Pi$ 同构

日期：首次撰写于2022年9月15日；最后一次小幅修订于2023年3月26日。
2020年数学主题分类。16S50。关键词和短语。Baer定理；自同态环；有限型线性映射。《Rocky Mountain J. Math.》，即将发表。

于 $\mathrm{FEnd}_D(V\ \Pi)$ 的子环 $\mathrm{FEnd}_D(V)$，后者由所有无穷小对合 $t_{v,\ f}$生成，其中 $v \in V$ 且 $f \in \Pi$。

注意，所有刚才提到的环 $\mathrm{End}_D(V)$、$\mathrm{FEnd}_D(V)$ 和 $\mathrm{FEnd}_D(V\ \Pi)$ 也是 D 上的右向量空间，因此具有右 D-代数的结构。

定理。设 V、W 是除环 D 上的右向量空间，ΠV 的一个非零有限维子空间*，ΓW 的一个有限维子空间*，且 $\Phi\colon \mathrm{FEnd}_D(V\ \Pi) \to \mathrm{FEnd}_D(W\ \Gamma)$ 是一个 D-代数同构。则存在一个 D-向量空间同构 $\alpha\colon V \to W$，使得

$$\Phi(f) = \alpha \circ f \circ \alpha^{-1} \tag{2}$$

对任意 $f \in \mathrm{FEnd}_D(V\ \Pi)$。

证明。将环 $\mathrm{FEnd}_D(V\ \Pi)$ 和 $\mathrm{FEnd}_D(W\ \Gamma)$ 按照上文写成同构形式的张量积 $V \otimes_D \Pi$和 $W \otimes_D \Gamma$，并且为行文方便，仍用同一符号 Φ 表示 D-代数同构 $\Phi\colon V \otimes_D \Pi \to W \otimes_D \Gamma$。由于 Π 是有限维的，我们有如下 D 上的向量空间同构：

$$\mathrm{Hom}_D(V \otimes_D \Pi, W \otimes_D \Gamma) \simeq \mathrm{Hom}_D(V, W) \otimes_D \mathrm{Hom}_D(\Pi, \Gamma),$$

因此，我们可以将 Φ 写成以下形式

$$\Phi(v \otimes f) = \sum_{i \in I} \alpha_i(v) \otimes \beta_i(f), \tag{3}$$

其中，$\alpha_i\colon V \to W$ 和 $\beta_i\colon \Pi \to \Gamma$ 是两个由有限集 I 索引的 D-线性映射线性无关族。对于一对可分解张量 $v \otimes f$ 和 $u \otimes g$（其中 $v、u \in V$，$f、g \in \Pi$），Φ 是同态这一条件等价于

$$\sum_{i \in I} \Big(\alpha_i(v) f(u) - \sum_{j \in I} \alpha_j(v) \beta_j(f)(\alpha_i(u)) \Big) \otimes \beta_i(g) = 0.$$

由于族 $\{\beta_i\}_{i \in I}$ 在 D 上线性无关，外直和中的每个第一个张量因子都为零，即

$$\alpha_i(v) f(u) - \sum_{j \in I} \alpha_j(v) \beta_j(f)(\alpha_i(u)) = 0$$

对于任意 $i \in I$、$v、u \in V$ 以及 $f \in \Pi$，均成立。此式可改写为

$$\alpha_i(v) \Big(f(u) - \beta_i(f)(\alpha_i(u)) \Big) - \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} \alpha_j(v) \beta_j(f)(\alpha_i(u)) = 0.$$

由于族 $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ 在 D 上线性无关，最后一个求和中的每个 D 系数都为零；特别是

$$\beta_i(f)(\alpha_i(u)) = f(u) \tag{4}$$

对于任意 $u \in V$、$f \in \Pi$ 以及 $i \in I$，均成立。

这意味着

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\Big(\Phi(u \otimes f)\Big) = \mathrm{Tr}\Big(\sum_{i \in I} \alpha_i(u) \otimes \beta_i(f)\Big) &= \sum_{i \in I} \mathrm{Tr}\Big(\alpha_i(u) \otimes \beta_i(f)\Big) \\ &= \sum_{i \in I} \beta_i(f)(\alpha_i(u)) = \sum_{i \in I} f(u) = |I| f(u) = |I| \,\mathrm{Tr}(u \otimes f). \end{aligned}$$

由于环 $V \otimes_D \Pi$ 由可分解张量线性张成，我们有

$$\mathrm{Tr}(\Phi(\xi)) = |I| \,\mathrm{Tr}(\xi) \tag{5}$$

对任意 $\xi \in V \otimes_D \Pi$，均有。

现在考虑逆同构 $\Phi^{-1}\colon W \otimes_D \Gamma \to V \otimes_D \Pi$，其分解类似于 (3)，指标集为 J。根据与 Φ 情形相同的推理，我们有

$$\mathrm{Tr}(\Phi^{-1}(\eta)) = |J| \,\mathrm{Tr}(\eta) \tag{6}$$

对于任意 $\eta \in W \otimes_D \Gamma$。结合 (5) 和 (6)，我们得到

$$\mathrm{Tr}(\xi) = |I||J| \,\mathrm{Tr}(\xi) \tag{7}$$

对于任意 $\xi \in V \otimes_D \Pi$。

由于对任意非零的 $f \in V^*$，都存在 $v \in V$ 使得 $f(v) \neq 0$（实际上，我们可以令 $f(v)$ 等于 1），$\mathrm{FEnd}_D(V\ \Pi)$ 总是包含迹非零的元素†。取 (7) 中的这样一个元素 ξ，我们有 $|\mathrm{I}| = |\mathrm{J}| = 1$，即 Φ 保持迹不变，并且可表示为可分解线性映射：$\Phi = \alpha \otimes \beta$ 对于某个 $\alpha: V \to W$ 和 $\beta: \Pi \to \Gamma$。等式组 (4) 化简为单个等式

$$\beta(f) \circ \alpha = f \tag{8}$$

对任意 $f \in \Pi$。由于 Φ 可逆，α 和 β 也可逆，且 $\Phi^{-1} = \alpha^{-1} \otimes \beta^{-1}$，因此 (8) 可改写为 $\beta(f) = f \circ \alpha^{-1}$，从而 $\Phi(v \otimes f) = \alpha(v) \otimes (f \circ \alpha^{-1})$。将最后一个等式改写为关于 $\mathrm{FEnd}_D(V\ \Pi)$ 中无穷小错切变换 $t_{v,\ f}$ 的形式，并利用线性展开，可得 (2)。□

关于该定理可能的推广，最后补充几点说明：

(i) 为确保所有 D-模都是自由的，我们要求基环 D 是一个除环。我们也可以只要求定理表述中出现的所有模，即 V、W、 Π、 Γ，以及证明过程中出现的所有模都是自由的，而不对 D 施加任何条件；但这样只会使表述变得繁琐，并不会改变实质。(ii) 该定理可以很容易地推广到分次情形（从而为 [R] 和 [Bal] 的结果提供一个“有限型”类比），证明实质上相同，只需分别跟踪每个分次分量上的映射即可。此事留作读者练习。

谨此感谢匿名审稿人指出了稿件前一版本中的一处错误表述。

参考文献

[Baer] R. Baer，《线性代数与射影几何》，Acad. Press，1952。[Bal] I.N. Balaba，分次向量空间上线性变换分次环的同构，Chebyshevskii Sbornik 6 (2005)，第4期，7–24（俄文）。[CO] H. Cuypers, M. Oostendorp，有限型特殊线性李代数与酉李代数的几何刻画，arXiv:2105.11967。[J1] N. Jacobson，《抽象代数讲义》II：线性代数，Von Nostrand，1953；Springer-Verlag 于1975年再版。[J2] ———，《环的结构》，第2版，AMS，1964。[KTT] P.A. Krylov, A.A. Tuganbaev, A.V. Tsarev，关于 Baer–Kaplansky定理，J. Math. Sci. 256 (2021)，第3期，278–298。[R] M.L. Racine，带超对合的本原超代数，J. Algebra 206 (1998)，第2期，588–614。[W] K.G. Wolfson，全体线性变换环的理想论刻画，Amer. J. Math. 75 (1953)，第2期，358–386。

俄斯特拉发大学，捷克共和国 电子邮箱：
pasha.zusmanovich@osu.cz

†这是我们推理中一个显而易见却至关重要的要点。请与 [J1 第 IX 章 §11 定理 7], 中所谓全性的条件相比较。用我们的记号来说，它在某种意义上相当于一个对偶的说法：对于任意非零的 $v \in V$，都存在 $f \in \Pi$ 使得 $f(v) \neq 0$。后一条件等价于所考虑的环的稠密性，并使我们得以使用雅各布森稠密性定理。