arXiv:2303.14754v1 [math.CT] 26 Mar 2023

带依赖箭头的范畴

Iosif Petrakis 维罗纳大学计算机科学系
iosif.petrakis@univr.it

摘要

我们以一种基础性的方式，并独立于 Sigma 构造，给出依赖函数的抽象范畴论表述。为此，我们首先定义带族箭头的范畴（简称族范畴）的概念。 (fam Σ)-范畴是带有 Sigma 对象的族范畴；而带终对象的 (fam Σ)-范畴恰好是 Pitts 的类型范畴，或 Cartmell 的带属性的范畴。我们引入带依赖箭头的范畴（简称依赖范畴），并证明每个 (fam Σ)-范畴都以典范方式成为依赖范畴。依赖范畴中的 Sigma 对象这一概念会受到依赖箭头存在性的影响；我们证明每个 (fam Σ)-范畴都以典范方式成为 (dep Σ)-范畴。

关键词：范畴论、依赖类型论、带属性的范畴

1 引言

策梅洛-弗兰克尔集合论 (ZF)与范畴论(CaT)之间一个重要的基础性区别在于：在后者中，（广义）函数，即箭头的概念是基本的；而在前者中，它被归约为集合的概念。从这个意义上说，CaT 与马丁-洛夫类型论 (MLTT)（见 [18, 19, 20]）以及 Bishop 集合论 (BST) （见 [27, 30]）更为接近，因为它们都是关于类型（集合）和 函数的理论。Bishop 集合论的这一特点体现在 Myhill 于 [22], 提出的构造性集合论 CST 形式系统中，但 Aczel 在其构造性策梅洛-弗兰克尔集合论 (CZF) 系统中并未延续这一特点（见 [1]）。CaT 与 MLTT 或 BST 在基础方面的这种相似性，与 CaT 在类型论语义中得到广泛应用相一致（例如，见 [16]）。

MLTT（最初是为 Bishop 的著作 [5], 创立的一种形式系统）和 BST 的一个主要特征，是将依赖函数或依赖赋值程序（见 [27]）用作基本对象。也可以说，即使是 MLTT 中的类型族，或 BST 中以集合为指标的集合族这一概念，也或多或少是基本的。正如 Palmgren 在 [23], 第 35 页指出的，在 ZF 以及其构造性版本 CZF 中，集合族由函数λ: $B \to I$的纤维 $\lambda_i := \{b \in B \mid \lambda(b) = i\}$ 表示；对于每个 $i \in I$， λ的纤维都表示该族中的集合。因此，集合族的概念被归约为集合的概念。由于这种归约依赖于替代公理模式，因此在 MLTT 和 BST 中都无法进行这种归约。我们可以说，MLTT 的基本构件是这些概念

类型、函数、类型族、依赖函数,

而 BST 的构建基块是以下概念:

sets, functions, families of sets, dependent functions.

CaT 的基本构成要素是这些概念

对象、态射,

借助范畴论概念，例如**函子**这一概念，可以将集合族描述为范畴之间的函子。人们还提出了关于族这一概念的更抽象方法，例如指标范畴的概念（例如参见 [15]），在这种范畴中，每个范畴对象都对应着一个特定的族范畴。

依赖的范畴论解释由来已久（参见 Cartmell [8, 9],Seely [34], Ehrard [11], Curien [7], Dybjer [10], Jacobs [14], Hofmann [12], Pitts [31], 和 Palmgren [24]的工作）。依赖函数或 Π 型（Π 集）在范畴论中可以解释为一个对象，或一个全局截面，即一个箭头，甚至可以解释为对象上的一个抽象族，正如 Pitts [31]的类型范畴框架中那样。在后一种情形下，它取决于对 Sigma 类型的范畴论解释。

这里我们试图回答以下关键问题：集合族和依赖函数的根本性范畴论推广是什么？为了回答这个问题，我们将集合族和依赖函数的概念以恰当的抽象形式纳入范畴的定义中。具体而言，我们引入带族箭头的范畴，简称 fam-范畴，以及带依赖箭头的 *fam*-范畴，简称 dep-范畴的概念，使得后者的基本概念

对象、态射、族箭头、依赖箭头。

这类范畴的依赖箭头结构，其公理化方式与箭头结构和族结构完全相同。尽管依赖关系可以通过多种方式在范畴论中刻画，我们在此提出将其作为一种原始概念来刻画，并使其独立于 Sigma 类型（集合），这与直觉主义类型论和 BST 中的做法完全一致。

以一种与 $\mathcal{C}$ 的整体族结构相容的方式，为族范畴 $\mathcal{C}$ 添加 Σ 结构，便得到 (fam Σ)-范畴这一概念。带有终对象的 (fam Σ)-范畴恰好就是 Pitts 在 [31], 第 110–111 页引入的类型范畴。Pitts 的类型范畴沿用了 Cartmell 的带属性范畴，后者于 [8] 年引入。许多 (fam Σ)-范畴并不带有终对象（见例 2.3 和 3.6）。Pitts 要求存在终对象，因为他在 [31] 中给出的类型范畴主要例子是依赖类型代数理论的分类范畴，它具有所有有限积（见 [31], 第 70 页）。请注意，在 Pitts 对类型范畴的定义中，族箭头和 Sigma 对象的概念是同时给出的，而这里将二者分开。我们还定义了带 Sigma 对象的依赖范畴。依赖范畴除了具有箭头结构和族结构外，还具有依赖箭头结构，因此其中 Sigma 对象的定义也必须考虑依赖箭头结构。

本文结构如下:

- 在第2节中，我们介绍带族箭的范畴，并给出这类范畴的若干例子。在这类范畴中，每个对象 a 都 $\mathcal{C}$ 对应一个族态射集 fHom(a)。

- 在第3节中，我们介绍带 Sigma 对象的 fam-范畴，或称 (fam Σ)-范畴，并给出这类范畴的若干例子。Sigma 对象是直觉主义类型论 (BST) 中 Sigma 类型（集合）的抽象范畴版本。我们证明，在具有终对象 1 的 (fam Σ)-范畴 $\mathcal{C}$ 中，如果对象 a 属于 $\mathcal{C}$，且其两个全局元素 i、j 相等，那么可以恢复见证 Sigma 对象在 1 上相等的传输态射，以及族箭头 $\lambda(i)$ 和 $\lambda(j)$（命题 3.7）。

- 在第4节中，我们介绍带依赖箭头的范畴（即依赖范畴），并给出这类范畴的许多例子。对于每个 $a \in \mathcal{C}$ 和 $\lambda \in$ 族态射集 fHom(a)，都对应一个依赖态射集 dHom(a, λ)，其中包含位于 λ之上的依赖箭头。我们证明，带族箭的范畴可以一种典范的方式成为依赖范畴（定理 4.6）。

- 在第5节中，我们介绍带 Σ 对象的依赖范畴，或称 (依赖 Σ)-范畴。与 MLTT (BST) 中完全相同，我们将族箭头的第二个投影依赖箭头 λ 用作适当的依赖箭头。我们证明，每个 (族 Σ)-范畴都以一种

典范的方式成为一个 依赖-范畴（定理 5.4）。此外，我们证明，如果 $\mathcal{C}$ 是一个带终端对象的（依赖 Σ)-范畴，那么两个投影箭头确定相应的 Σ 对象（命题 5.6）。

对于此处未加解释或证明而使用的所有范畴论概念和结果，请参阅 [17, 2, 32]。 C_0 表示范畴 $\mathcal{C}$ 的对象， C_1 表示 $\mathcal{C}$的态射。Cat 是小范畴构成的范畴。

2 带族箭头的范畴

范畴 $\mathcal{C}$ 中的箭头 $f\colon a \to b$ 是函数 $f\colon A \to B$的抽象范畴论版本，而关于箭头复合的标准范畴公理，则是函数复合基本性质的推广。首先，我们将范畴的箭头结构扩展为某个集合所指标化的集合族的抽象范畴论版本。为保持一般性， $\mathcal{C}$ 中位于对象 $a \in \mathcal{C}$ 上的抽象族没有特定的陪域，并且它与陪域为 a 的 $\mathcal{C}$ 的态射以一种协调的方式复合。

定义 2.1. 若范畴 $\mathcal{C}$ 满足以下条件，则称其为带族箭头的范畴，或称为fam-范畴：
(i) 对于 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 a ，都有一个族箭头集族态射集(a)，或族态射集$(a, \cdot)$。我们用希腊字母 λ, μ等表示族态射集(a) 中的元素。若 $\lambda \in$ 族态射集(a)，我们用一支从 a出发的蓝色箭头来表示 λ

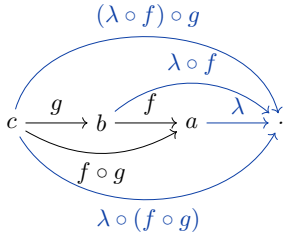
$$a \xrightarrow{\lambda} \cdot$$

$C_2 := \bigcup_{a \in C_0} \mathtt{fHom}(a)$ 是 $\mathcal{C}$的族箭头集。

(ii) 对于每个 a， $b \in \mathcal{C}$都存在一个复合运算 $\circ$： $\mathtt{fHom}(a) \times \mathrm{Hom}(b, a) \to \mathtt{fHom}(b)$, $(\lambda, f) \mapsto \lambda \circ f$，使其满足以下与 $\mathcal{C}$ 箭头结构相容的条件：(族$_1$) $\lambda \circ 1_a = \lambda$

$$a \xrightarrow{1_a} a \xrightarrow{\lambda} \cdot \qquad a \xrightarrow{\lambda} \cdot$$

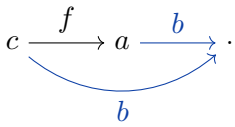
(族$_2$) $\lambda \circ (f \circ g) = (\lambda \circ f) \circ g$



若 C_2 是集合，则称 $\mathcal{C}$ 的族结构是小的；若对每个 $a \in \mathcal{C}$，$\mathtt{fHom}(a)$ 是集合，则称其是局部小的。若 C_2 是真类，则称其是大的。

例 2.2 （集合与类型的族）。 在集合与函数构成的范畴 Set 中，若 I 是集合，则以 I 为指标的集合族是一个赋值规则，或函子， $\lambda\colon I \to \mathrm{Set}$；此时 I 配备了平凡的范畴结构（例如，见 [21], 第 18 页）。在 BST 中谓词集合范畴**BishSet**里，集合 I 上的集合族是一个适当的非依赖赋值规则 $\lambda_0\colon I \rightsquigarrow \mathrm{V}_0$（见 [27]）。在 MLTT 的宇宙 $\mathcal{U}$中类型构成的范畴$\mathbf{Type}(\mathcal{U})$ 里，类型 A 上的族 $\mathcal{U}$: 是一个类型为 $A \to \mathcal{U}$的项 P。族箭头与箭头的复合，在每种情况下都以类似的显然方式定义。

例2.3 （常值族）。 若对每个 $a \in C_0$ 和 $b \circ f = b$ 定义 $\mathrm{fHom}(a) := C_0$，并对每个 $b \in C_0$ 和 $f \in \mathrm{Hom}(c, a)$ 定义相应结构，则范畴 $\mathcal{C}$ 可转化为族范畴。



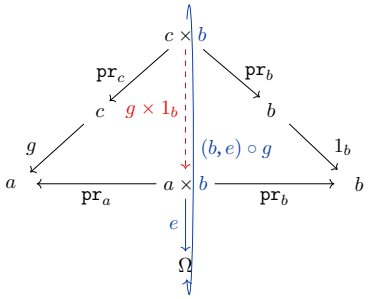
例2.4（余切片中的族箭头）。若对每个 $a \in C_0$ 定义 $\mathsf{fHom}(a) := a/\mathcal{C},$，其中 $a/\mathcal{C}$ 表示 $\mathcal{C}$ 在 a 上的余切片，且复合继承自 $\mathcal{C}$，则范畴 $\mathcal{C}$ 可转化为族范畴。

例 2.5（范畴上的族）。若 $\mathcal{C}$ 属于 Cat，则可定义 $\mathsf{Fam}(\mathcal{C}) := \mathsf{Fun}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathsf{Set})$，即 $\mathcal{C}$ 上所有预层的集合。

例 2.6（拓扑斯中的族（Pitts））。若 $\mathcal{C}$ 是一个托pos，且具有子对象分类器 $(\top, \Omega)$，那么，若$a \in \mathcal{C}$，定义 a 上的一个族为一对 $\lambda := (b, e)$，其中 $e\colon a \times b \to \Omega$ 属于 $\mathcal{C}$，即，

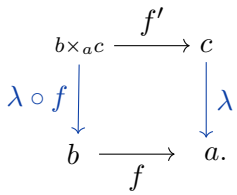
$$\mathtt{fHom}(a) := \bigsqcup_{b \in C_0} \mathrm{Hom}(a \times b, \Omega).$$

若 $g\colon c \to a$，令 $(b, e) \circ g := \big(b, e \circ (g \times 1_b)\big)$

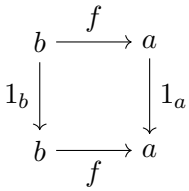


在族范畴的弱化版本中，“严格”条件 (fam_1) 和 (fam_2) 在同构意义下成立。接下来我们给出一个具有弱族态射的范畴的基本示例，或者说是一个 wfam-范畴。

例 2.7（切片中的弱族箭头）。带有拉回的范畴 $\mathcal{C}$ 可转化为一个弱族范畴，方法是对每个 $a \in C_0$定义 $\mathsf{wfHom}(a) := \mathcal{C}/a,$，其中 $\mathcal{C}/a$ 表示 $\mathcal{C}$ 在 a上的切片。若 $f\colon b \to a$ 且 $\lambda\colon c \to a$，则 $\mathcal{C}/b$ 中的复合 $\lambda \circ f$定义为下列拉回中的箭头 $\lambda \circ f\colon b \times_a c \to b$[2]



由于下列交换方块是一个拉回



[1]关于严格条件与弱条件之间的取舍，存在争论。Ehrhard 沿袭 Bénabou [4], 的观点，在 [11], 中主张采用弱概念，认为这种方法更一般，也更具范畴性，因为同构是比相等更“具范畴性”的概念。在 [31], 第 113 页，Pitts 从依赖类型论的建模角度为严格方法辩护。我们的框架也表明，族范畴显然对应于范畴，而弱 fam-范畴对应于弱范畴。[2]正因这个例子，Pitts 在 [31], 第 110–111 页称类型范畴中的运算 $\lambda \circ f$为“沿 a对 λ 作拉回”。另请参见他在第 113 页关于如何利用这种弱族结构，在拓扑斯中解释依赖类型的讨论；这种解释以拓扑斯的局部笛卡尔闭结构及 Seely [34]的范式为基础。

态射 $\lambda \circ 1_a$: $b \times_a a \to b$ 和 1_b 在 $\mathcal{C}/b$中同构。 (fam_2) 的弱版本也可用类似的方式说明。

若 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是 fam-范畴，则族-函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个规则 $F = (F_0, F_1, F_2)$，其中 (F_0, F_1)是一个函子，且 $F_2(\lambda) \in$族态射集$(F(a))$，对每个 $a \in \mathcal{C}$和 $\lambda \in$族态射集(a)，以及 $F_2(\lambda \circ f) = F_2(\lambda) \circ F_1(f)$，其中 $f \in \mathrm{Hom}(b, a)$

$$\begin{array}{ccccc} F(b) & \xrightarrow{F(f)} & F(a) & \xrightarrow{F(\lambda)} & \cdot \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & F(\lambda \circ f) & & \end{array}$$

若 $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是族函子，则族-自然变换 $\eta\colon F \Rightarrow G$是一个自然变换，使得对于每个 $a \in \mathcal{C}$ 和 $\lambda \in$ 族态射集(a)，以下三角形交换

$$\begin{array}{ccc} F(a) & \xrightarrow{\eta_a} & G(a) \\ & {\scriptstyle F(\lambda)} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle G(\lambda)} & \\ & \cdot & \end{array}$$

族函子和族自然变换在复合下封闭，常值族函子也按预期方式定义。许多标准构造，例如带有作为族函子的投影的 fam-范畴的积、切片族范畴和余切片族范畴，都很容易构造。

接下来，我们为具有局部小族结构的族范畴 $\mathcal{C}$ 定义 fHom函子。这个预层的行为类似于范畴中的标准函子 $\mathrm{Hom}(-, a)$ 。利用相应的元素范畴，定义 $\mathcal{C}$ 的族箭头范畴 $\mathrm{fHom}(\mathcal{C})$ 。

定义*2.8.* 若 $\mathcal{C}$ 是具有局部小族结构的族范畴，令 $fHom\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to$ 集合，并且$a \mapsto fHom(a)$，以及 $(f\colon b \to a) \mapsto fHom(f)\colon fHom(a) \to fHom(b)$，其中 $[fHom(f)](\lambda) := \lambda \circ f$.。 $\mathcal{C}$ 的族箭头范畴 $fHom(\mathcal{C})$，或记作 $\mathcal{C}_2$，是范畴[3] $\Sigma(\mathcal{C}$，即 $fHom)$，它是预层 $fHom$ 上的元素范畴；也就是说，$fHom(\mathcal{C})$ 的对象是形如 (a, λ) 的对象对，其中 $a \in C_0$ 且 $\lambda \in fHom(a)$。一个态射 $f\colon (b, \mu) \to (a, \lambda)$ 是 C_1 中的态射 $f\colon b \to a$，满足 $\mu = [fHom(f)](\lambda) := \lambda \circ f$

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{f} & a \\ & {\scriptstyle \mu} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \lambda} & \\ & \cdot & \end{array}$$

复合 $f\colon (b, \mu) \to (a, \lambda)$ 和 $g\colon (c, \nu) \to (b, \mu)$ 为 $f \circ g$和$1_{(a,\ \lambda)} := 1_a$.

3 带族箭的范畴与 Sigma 对象

接下来，我们为族范畴 $\mathcal{C}$ 的每个对象 a 以及每个 $\lambda \in$ 族态射集(a) 指定一个 Sigma 对象 $\sum_a \lambda$ 及其第一投影箭头 $\mathrm{pr}_1^{a\ \lambda}$，: $\sum_a \lambda \to a$ 于 $\mathcal{C}$ 中。

定义 3.1. </style}一个**fam**-范畴 $\mathcal{C}$ 具有 *Sigma* 对象，或者说是一个 $(\mathtt{fam}\ \Sigma)$-范畴，若*(i)* </style}对于每个 $a \in \mathcal{C}$，都存在运算

$$\sum_a \colon \mathtt{fHom}(a) \to C_0, \qquad \sum_a(\lambda) := \sum_a \lambda \in C_0,$$

[3]这里我们沿用 Palmgren 在 [25] 中提出的 Grothendieck 范畴记法。Grothendieck 构造与直觉主义类型论的 Σ-类型之间的联系，充分证明了 Palmgren 这一记法的合理性。

$$\mathtt{pr}_1^a\colon \mathtt{fHom}(a) \to C_1, \quad \mathtt{pr}_1^a(\lambda) := \mathtt{pr}_1^{a,\lambda}\colon \sum_a \lambda \to a,$$

其中 $\sum_a \lambda$ 是 λ的 *Sigma* 对象，而$\mathtt{pr}_1^{a\ \lambda}$ *,</style}*是 $\mathcal{C}$ 中与 λ的 *Sigma* 对象相关联的第一投影箭头。

(ii) 对于每个 $b \in \mathcal{C}$ 和 $f \in \mathrm{Hom}(b,\ a)$ 都有一个运算

$$\Sigma f\colon \mathtt{fHom}(a) \to C_1, \quad \lambda \mapsto (\Sigma f)(\lambda) =: \Sigma_\lambda f$$

在 $\mathrm{Hom}\big(\sum_b(\lambda \circ f),\ \sum_a \lambda\big)$ 中，使得下面的交换方块

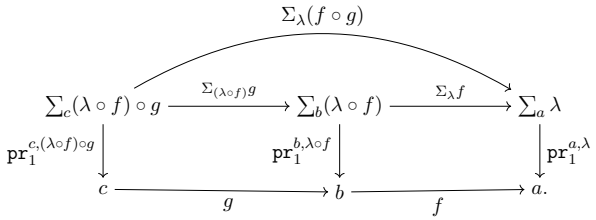
$$\begin{array}{ccc} \sum_b(\lambda \circ f) & \xrightarrow{\Sigma_\lambda f} & \sum_a \lambda \\ {\scriptstyle \mathtt{pr}_1^{b,\lambda\circ f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathtt{pr}_1^{a,\lambda}} \\ b & \xrightarrow[f]{} & a \end{array}$$

是一个拉回，并且满足以下严格性条件:
$(\mathtt{s}_1)\ \ \Sigma_\lambda 1_a = 1_{\sum_a \lambda}$.$(\mathtt{s}_2)\ \ \Sigma_\lambda(f \circ g) = \big(\Sigma_\lambda f\big) \circ \Sigma_{(\lambda\circ f)} g$，对于每个 $f \in \mathrm{Hom}(b,$ $a)$ 以及 $g \in \mathrm{Hom}(c,\ b)$。

利用条件 (fam_1) 和 (fam_2)，条件 $(\mathtt{s}_1)$和 $(\mathtt{s}_2)$ 是良定义的，因为下面的矩形显然是一个拉回

$$\begin{array}{ccc} \sum_a(\lambda \circ 1_a) & \xrightarrow{\Sigma_\lambda 1_a} & \sum_a \lambda \\ {\scriptstyle \mathtt{pr}_1^{a,\lambda\circ 1_a}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathtt{pr}_1^{a,\lambda}} \\ a & \xrightarrow[1_a]{} & a \end{array}$$

根据拉回引理，下面的外矩形也是一个拉回



例 3.2 （平凡 Sigma 对象）。 每个族范畴 $\mathcal{C}$ 都会变成一个 (族 Σ)-范畴。若$\lambda \in$ 族态射集(a)，令 $\sum_a \lambda := a$，$\mathtt{pr}_1^{a\ \lambda}$ $:= 1_a$，以及 $\Sigma_\lambda f = f$。该交换方块

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{f} & a \\ {\scriptstyle 1_b}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1_a} \\ b & \xrightarrow[f]{} & a \end{array}$$

是一个拉回，且条件 $(\mathtt{s}_1), (\mathtt{s}_2)$ 显然成立。

例 3.3 （Sigma 集和 Sigma 类型）。 在 Set 中， I 和 $\lambda\colon I \to$ Set 的 Sigma 集是外并

$$\bigsqcup_{i\in I} \lambda(i) := \Big\{(i, x) \in I \times \bigcup_{i\in I} \lambda(i) \mid x \in \lambda(i)\Big\},$$

并配备了到 I 的相应投影函数。在 BST 中集合的范畴 **BishSet** 里，Sigma 集是外并 $\sum_{i\in I}\lambda_0(i)$，其成员资格及相等关系定义如下

$$w \in \sum_{i\in I}\lambda_0(i) :\Leftrightarrow \exists_{i\in I}\exists_{x\in\lambda_0(i)}\big(w := (i,x)\big),$$

$$(i,x) =_{\sum_{i\in I}\lambda_0(i)} (j,y) :\Leftrightarrow i =_I j \;\&\; \lambda_{ij}(x) =_{\lambda_0(j)} y,$$

其中 $\lambda_{ij}\colon \lambda_0(i) \to \lambda_0(j)$ 和 $\lambda_{ji}\colon \lambda_0(j) \to \lambda_0(i)$ 是 传输映射，用于证明 $\lambda_0(i)$ 和 $\lambda_0(j)$ 在 V_0 中相等（见 [27], 第 37 页）。赋值规则 $\mathrm{pr}_1^{I\,\lambda}$,: $\sum_{i\in I}\lambda_0(i) \rightsquigarrow I$，其中对每个 $(i,x)\in\sum_{i\in I}\lambda_0(i)$, $\mathrm{pr}_1^{I\,\lambda}(i,,x) := i$，都是一个函数。若 $f\colon J \to I$，令

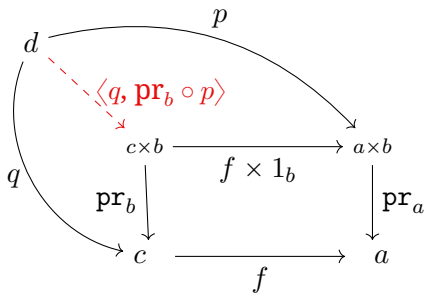
$$\Sigma_\lambda f\colon \sum_{j\in J}\lambda_0(f(j)) \rightsquigarrow \sum_{i\in I}\lambda_0(i), \qquad (j,x)\mapsto (f(j),x).$$

那么 $\Sigma_\lambda f$ 是一个函数，相应的交换方块是一个拉回，并且条件 $(\mathrm{s}_1),(\mathrm{s}_2)$ 均成立。对于范畴 $\mathbf{Type}(\mathcal{U})$，我们采用类似的方法。

例 3.4（常值族的 Sigma 对象）。若 $\mathcal{C}$ 有二元积，则可按如下方式将其转化为一个(族范畴：若 $b\in \mathrm{fHom}(a)$，如例2.3所示，我们定义

$$\sum_a b := a\times b \;\;\&\;\; \mathrm{pr}_1^{a,b} := \mathrm{pr}_a\colon a\times b \to a.$$

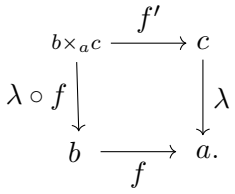
若 $f\in\mathrm{Hom}(c,a)$，且若 $\Sigma_b f := \langle f\circ \mathrm{pr}_c, \mathrm{pr}_b\rangle =: f\times 1_b$，则下列矩形是一个拉回



并且条件 $(\mathrm{s}_1),(\mathrm{s}_2)$ 成立。

若 $\mathcal{C}$ 有二元积，则按照前一个例子中的做法，我们可以定义 $\mathcal{C}$ 中元素及其余切片上的 Sigma 对象（见例 2.4）。显然，例 2.5 中的族结构对应于 Grothendieck 构造。对于例 2.6 中托pos的族结构，Pitts 在 [31], 第 113 页给出了 Sigma 对象的一种典范构造。类比于例 3.5 中具有弱族箭头的范畴，可以定义弱版本的 Sigma 对象。

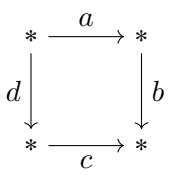
例 3.5（切片中的弱西格玛对象）。若 $\mathcal{C}$ 是一个具有拉回的范畴，且 $\mathrm{wfHom}(a) :=\mathcal{C}/a$, 如例 3.5 所示，则对每个 $\lambda\colon c\to a\in\mathcal{C}/a$，我们定义 Sigma 对象 $\sum_a\lambda := c, \mathrm{pr}_1^{a\,\lambda}$,:= λ；若 $f\colon b\to a$，令 $\Sigma_\lambda f := f'$，按定义这是一个拉回



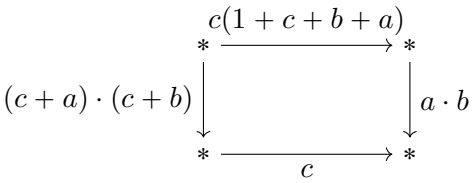
严格性条 件 $(\mathrm{s}_1),(\mathrm{s}_2)$ 不满足，因为条件 $(\mathrm{fam}_1),(\mathrm{fam}_2)$ 不满足 d.

正如我们所证明的 接下来，有大量非平凡的 (fam Σ)-范畴没有终对象 .

例 3.6（交换环）。若 $(R,+,0,\cdot,1)$ 是一个交换环，而 $\mathcal{C}(R,+,0)$ 是其加法群结构所构成的范畴，其对象为单元素集合 $\{*\}$，态射为 R的元素，那么不难证明每个交换方块



是一个拉回。若 $\mathsf{Fam}(*) := R \times R$ 且 $(a,b)\circ c := (c+a, c+b)$，那么对于每个 $a,b,c \in R$，我们赋予 $\mathcal{C}(R,+,0)$ 一个族态射结构。若定义 $\sum_*(a,b) := *$、$\mathrm{pr}_1^{*\ (a\ b)}$、$, := a\cdot b$ 以及 $\Sigma_{(a,\ b)}c := c(1+c+b+a)$，

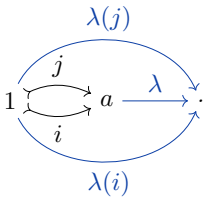


我们将 $\mathcal{C}(R,+,0)$ 构成一个 (fam Σ)-范畴，它通常没有终对象。

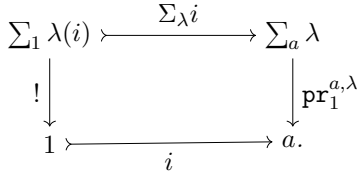
可以按预期方式定义 (fam Σ)-函子 的概念，并且可以证明，两个交换环之间的环同态会在相应的(fam Σ)-范畴之间诱导出一个 (fam Σ)-函子。

若 $\mathcal{C}$ 是一个带有终对象 1 的 (fam Σ)-范畴，我们可以在 $\mathcal{C}$ 中从 BST 里集合的 I-族的定义恢复传输映射λ_{ij}: $\lambda_0(i) \to \lambda_0(j)$，其中 $i =_I j$（另见例 3.3）。显然，$\lambda_0(i)$ 和 $\sum_{k\in 1}\mu_0(k)$ 相等于 V_0 中，其中 $\mu_0(0) := \lambda_0(i)$。

命题 3.7. 如果 $\mathcal{C}$ 是一个带有终对象 1 的 (fam Σ)-范畴，$a \in \mathcal{C}$ 且 $i,j \in a$，则有以下结论:

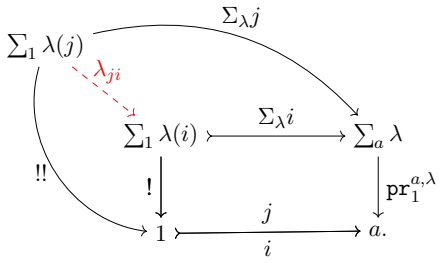


(i) $\sum_1 \lambda(i)$ 是 $\sum_a \lambda$ 的子对象，而 $\mathrm{pr}_1^{1\ \lambda(i)} =_!$ 是从 $\sum_1 \lambda(i) \to 1$ 出发的唯一箭头

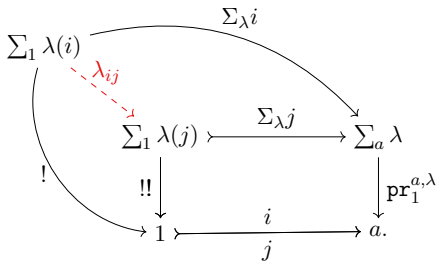


(ii) 如果 $i = j$，则存在传输态射 λ_{ij}: $\sum_1 \lambda(i) \to \sum_1 \lambda(j)$ 和 λ_{ji}: $\sum_1 \lambda(j) \to \sum_1 \lambda(i)$，它们构成一个同构。

证明。**(i)** 由拉回的基本性质可知，由于 i 是单态射，因此 $\Sigma_\lambda i$也是单态射。**(ii)** 由于下方交换方块是一个拉回，且外层图表可交换，基于完全相同的理由，存在唯一的箭头 λ_{ji}，使得 $\Sigma_\lambda i \circ \lambda_{ji} = \Sigma_\lambda j$ 且 $! \circ \lambda_{ji} =!!$。



下方的对偶拉回确定了箭头 λ_{ij}，使得 $\Sigma_\lambda j \circ \lambda_{ij} = \Sigma_\lambda i$ 且 $!! \circ \lambda_{ij} = !$。



根据等式 $\Sigma_\lambda i \circ 1_{\sum_1 \lambda(i)} = \Sigma_\lambda i = \Sigma_\lambda j \circ \lambda_{ij} = \left(\Sigma_\lambda i \circ \lambda_{ji}\right) \circ \lambda_{ij} = \Sigma_\lambda i \circ \left(\lambda_{ji} \circ \lambda_{ij}\right)$，并且由于 $\Sigma_\lambda i$是单态射，我们得到 $1_{\sum_1 \lambda(i)} = \lambda_{ji} \circ \lambda_{ij}$。类似地，我们得到 $1_{\sum_1 \lambda(j)} = \lambda_{ij} \circ \lambda_{ji}$。 □

4 带依赖箭头的范畴

接下来，我们用依赖函数的抽象范畴版本扩展族范畴的箭头结构和族结构。对于每个 $a \in \mathcal{C}$ 和 $\lambda \in \mathrm{fHom}(a)$，都有一个依赖态射集 $\mathrm{dHom}(a, \lambda)$，其元素是 a 和 λ上的依赖箭头。在依赖范畴 $\mathcal{C}$中存在依赖箭头时，其标准箭头也可称为 $\mathcal{C}$的非依赖箭头。依赖范畴的公理确保依赖箭头结构与给定族范畴的（非依赖）箭头结构和族结构相容。

定义 4.1。若一个族范畴 $\mathcal{C}$ 具有依赖箭头，或称为依赖范畴，则

（i）对于 $\mathcal{C}$ 中的每个对象 a 和每个 $\lambda \in$ 族态射集(a)，都有一个依赖箭头的集合 依赖态射集(a, λ) 其上的依赖箭头为 (a, λ)。我们用大写希腊字母 Φ，Ψ 等表示 依赖态射集(a, λ) 中的元素。令 $C_3 :=\bigcup_{a \in C_0}$ $_{,\lambda \in \text{族态射集}(a)}$ 依赖态射集(a, λ) 为 $\mathcal{C}$ 的所有依赖箭头的集合。

（ii）对于每个 $\Phi \in$依赖态射集(a, λ)以及每个 $f \in \mathrm{Hom}(b, a)$，都存在一个依赖箭头 $\Phi(f) \in$依赖态射集$(b, \lambda \circ f)$，称为 Φ 对 f 的应用[4]，并且它满足以下与 $\mathcal{C}$ 的族结构相容的条件：

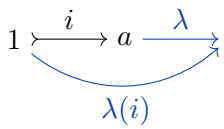
(依赖$_1$) $\Phi(1_a) = \Phi$。

(依赖$_2$) $\Phi(f \circ g) = [\Phi(f)](g)$，其中 $f \in \mathrm{Hom}(b, a)$ 以及 $g \in \mathrm{Hom}(c, b)$。

如果 C_3 是集合，我们称 $\mathcal{C}$ 的依赖箭头结构是小的；如果对于每个 $a \in C_0$ 和 $\lambda \in$ 族态射集(a)，依赖态射集(a, λ) 都是集合，则称其是局部小的。如果 C_3 是真类，我们称 C_3 是大的。

在条件 (fam_1) 和 (fam_2) 下，我们有 (dep_1) 和 (dep_2) 是定义良好的，因为 $\Phi(1_a) \in \mathrm{fHom}(a, \lambda \circ 1_a)$, $\Phi(f \circ g) \in \mathrm{dHom}(c, \lambda \circ (f \circ g))$以及 $[\Phi(f)](g) \in \mathrm{dHom}(c, (\lambda \circ f) \circ g)$。依赖箭头的概念是 MLTT 或 BST 中依赖函数概念的范畴化推广，正如箭头的概念是函数概念的范畴化推广一样。依赖函数 Φ相对于类型（集合）I上的类型（集合）族 $(\lambda(i))_{i \in I}$，其最根本的特征是：如果 $i : I$ $(i \in I)$，那么 $\Phi(i) : \lambda(i)$ $(\Phi(i) \in \lambda(i))$。如果 $\mathcal{C}$是一个具有终对象 1 的依赖范畴，那么

[4]我们可以称之为复合 $\Phi \circ f$，而不是将 Φ 应用于 f，但有些依赖范畴中，依赖箭头与非依赖箭头之间已经有了复合的概念。例如，参见定理 4.6 中的全局截面或依赖对象。



如果 $i \in a$ 和 $\Phi \in \mathtt{dHom}(a, \lambda)$，那么 $\Phi(i) \in \mathtt{dHom}(1, \lambda(i))$。

例 4.2 （平凡依赖箭头）。 每个族范畴 $\mathcal{C}$ 都可转化为一个 (dep)-范畴。对于每个 $a \in \mathcal{C}$ 和 $\lambda \in$ 族态射集(a)，令依赖态射集$(a, \lambda) := \{*\}$。那么条件 (dep_1) 和 (dep_2) 显然成立。

例4.3 （集合与类型中的依赖箭头）。 在集合范畴 Set 中，若 $\lambda\colon I \to \mathrm{Set}$ 是 I上的一个集合族，则其依赖箭头是乘积集合中的元素

$$\mathtt{dHom}(I, \lambda) := \prod_{i \in I} \lambda(i) :=$$

$$\left\{ x\colon I \to \bigcup_{i \in I} \lambda(i) \mid \forall_{i \in I} \big(x_i := x(i) \in \lambda(i) \big) \right\}$$

$$I \xrightarrow{x} \textstyle\bigcup_{i \in I} \lambda(i) \xrightarrow{\mathtt{pr}_i} I.$$
$$\mathrm{id}_X$$

若 $f\colon J \to I$ 且 $x \in \prod_{i \in I} \lambda(i)$，令

$$x \circ f\colon J \to \bigcup_{j \in J} \lambda(f(j)), \quad (x \circ f)_j := x_{f(j)}, \quad j \in J.$$

显然，条件 (dep_1) 和 (dep_2) 均成立。类型范畴$\mathbf{Type}(\mathcal{U})$ 中的 Π 型以及范畴$\mathbf{BishSet}$中的 Π 集行为类似（参见 [27], 第 47 页）。

例4.4 （$\mathbf{BishSet}$中的另一种依赖箭头）。 对于集合 I，可以将赋值规则 $\lambda_0\colon I \rightsquigarrow \mathrm{V}_0$ 作为族箭头，而不使用传输映射；对于 I 和 λ_0 上的依赖箭头，则可以考虑（基本的）依赖赋值程序，它们对每个给定的 $i \in I$ 都只输出 $\lambda_0(i)$ 的一个元素（参见 [27], 第 15–16 页）。

例4.5 （常值族的依赖箭头）。 如果定义 $\mathtt{fHom}(a) := C_0$，如例2.3所示，那么任意范畴 $\mathcal{C}$ 都可转化为依赖范畴，且

$$\mathtt{dHom}(a, b) := \mathrm{Hom}(a, b) \quad \&$$

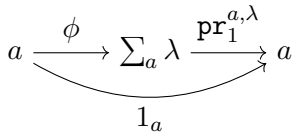
$$f(g) := f \circ g \in \mathtt{dHom}(c, b \circ g) := \mathtt{dHom}(c, b) := \mathrm{Hom}(c, b),$$

对于每个 $f \in \mathrm{Hom}(a, b)$ 以及 $g \in \mathrm{Hom}(c, a)$。

接下来，我们将证明，任意 (fam Σ)-范畴（因而任意类型范畴）都能以一种规范的方式转化为依赖范畴。为此，我们考察 Pitts 在 [31], 第114页所称的全局截面，或 Hofmann 和 Streicher 在 [13], 第91–92页所称的依赖对象 。在 [29] 中用他们的范畴表示 Pi-范畴，是定理 4.6 的一个特例。Pitts 注意到了接下来定义的箭头 $\phi(f)$，但在此我们强调它在下面证明中的特殊作用。

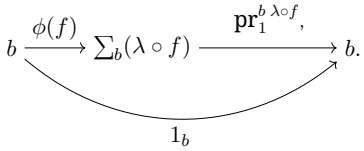
定理 4.6。 若 $\mathcal{C}$ 是一个 (族 Σ)-范畴，则对每个 $a \in \mathcal{C}$ 和 $\lambda \in$ 依赖态射集(a)

$$\mathcal{D}_a\lambda := \left\{ \phi \in \mathrm{Hom}\left(a, \sum_a \lambda \right) \mid \mathtt{pr}_1^{a,\lambda} \circ \phi = 1_a \right\}$$

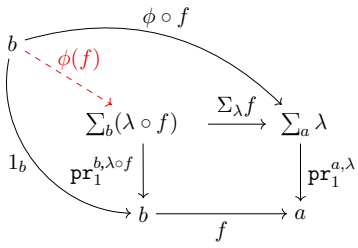


是 λ 的依赖对象集合。赋予依赖结构 依赖态射集$(a,\ \lambda) :=\mathcal{D}_a\lambda$ 后，(族 Σ)-范畴 $\mathcal{C}$ 成为一个依赖-范畴。

证明。 如果 $\phi \in \mathcal{D}_a\lambda$和 $f \in \mathrm{Hom}(b,a)$ 我们定义一个全局截面 $\phi(f) \in \mathcal{D}_b(\lambda \circ f)$ 如下



由于 $\mathrm{pr}_1^{a\ \lambda} \circ (\phi \circ f) = (,\ \mathrm{pr}_1^{a\ \lambda} \circ \phi) = 1_a \circ f = f = f \circ 1_b,$ ，



上面的外层图表可交换，并且由于上面的交换方块是一个拉回，令 $\phi(f)$ 为 $\mathrm{Hom}\big(b, \sum_b(\lambda \circ f)\big)$ 中唯一的箭头，使得上面的三角形可交换，即，

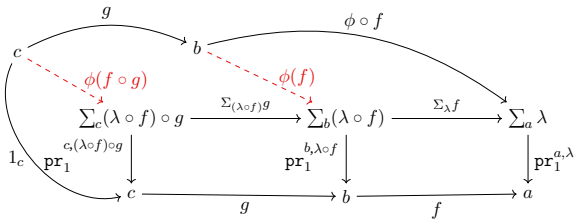
$$\phi \circ f = \big(\Sigma_\lambda f\big) \circ \phi(f), \tag{1}$$

$$\mathrm{pr}_1^{b,\lambda\circ f} \circ \phi(f) = 1_b. \tag{2}$$

条件 (dep_1)由 (1) 和条件 (s_1) 得出，因为

$$\phi = \phi \circ 1_a = \big(\Sigma_\lambda 1_a\big) \circ \phi(1_a) = 1_{\Sigma_a\lambda} \circ \phi(1_a) = \phi(1_a).$$

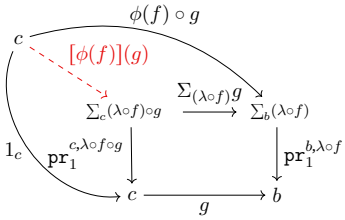
If $g \in \mathrm{Hom}(c,b)$, 则 $\phi(f \circ g)$ 是 $\mathrm{Hom}\big(c, \sum_c(\lambda \circ f \circ g)\big)$ 中唯一的箭头，使得



$$\phi \circ f \circ g = \big(\Sigma_\lambda(f \circ g)\big) \circ \phi(f \circ g), \tag{3}$$

$$\mathrm{pr}_1^{c,\lambda\circ f\circ g} \circ \phi(f \circ g) = 1_c. \tag{4}$$

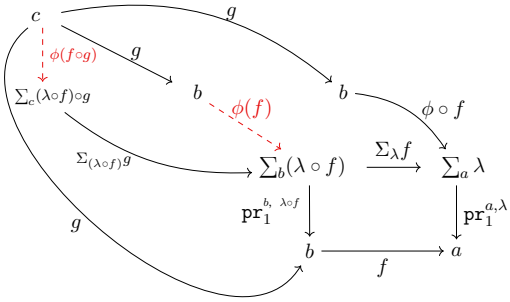
此外，$[\phi(f)](g)$ 是 $\mathrm{Hom}\big(c, \sum_c(\lambda \circ f \circ g)\big)$ 中的唯一箭头，使得



$$\phi(f) \circ g = \Sigma_{(\lambda \circ f)} g \circ [\phi(f)](g), \tag{5}$$

$$\mathtt{pr}_1^{c,\lambda\circ f\circ g} \circ [\phi(f)](g) = 1_c. \tag{6}$$

为了证明条件 (dep_2)，只需证明 $\phi(f \circ g)$ 满足最后两个等式。根据 (4)，我们有 $\phi(f \circ g)$ 满足 (6)。为了证明它也满足 (5)，即证明由上图中的两条红色箭头组成的矩形可交换，我们利用以下矩形



根据定义 3.1，这是一个拉回；由前面的交换关系可知，从 c 到 $\sum_b(\lambda \circ f)$ 的这两个箭头分别使相应的左上图和右上图交换，因此它们相等。

□

例4.7 (常值族的依赖对象)。 如果 $\mathcal{C}$ 有积，那么根据例3.4 $\mathcal{C}$ 是一个 $(\mathsf{fam}\ \Sigma)$-范畴；如果 $b \in \mathsf{dHom}(a)$，其依赖对象的集合为

$$\mathcal{D}_a b := \{\phi \in \mathrm{Hom}(a, a \times b) \mid \mathtt{pr}_a \circ \phi = 1_a\}.$$

根据例4.5， $\mathcal{C}$ 上的典范依赖结构由等式 $\mathsf{dHom}(a,b) := \mathrm{Hom}(a,b)$确定。两个依赖结构可以等同，因为存在一个双射

$$e\colon \mathrm{Hom}(a,b) \to \mathcal{D}_a b, \quad e(f) := \langle 1_a, f\rangle,$$

$$j\colon \mathcal{D}_a b \to \mathrm{Hom}(a,b), \quad j(\phi) := \mathtt{pr}_b \circ \phi.$$

定义 4.8。 如果 $\mathcal{C}$ 是一个具有局部小依赖结构的 依赖-范畴，令

$$\mathtt{dHom}\colon \mathtt{fHom}(\mathcal{C})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}, \quad (a,\lambda) \mapsto \mathtt{dHom}(a,\lambda),$$

$$[f\colon (b,\mu) \to (a,\lambda)] \mapsto \mathtt{dHom}(f)\colon \mathtt{dHom}(a,\lambda) \to \mathtt{dHom}(b,\mu),$$

$$[\mathtt{dHom}(f)](\Phi) := \Phi(f).$$

$\mathcal{C}$ 的依赖箭头范畴 $\mathit{dHom}(\mathcal{C})$（或 $\mathcal{C}_3$）是范畴 $\Sigma(\mathit{fHom}(\mathcal{C}), \mathit{dHom})$，由预层 dHom 上 $\mathit{fHom}(\mathcal{C})$ 的元素构成；也就是说，$\mathit{dHom}(\mathcal{C})$ 的对象是满足 $a \in C_0$, $\lambda \in \mathit{fHom}(a)$ 且 $\Phi \in \mathit{dHom}(a,\lambda)$ 的二元组 $((a,\lambda),\Phi)$。一个态射 $f\colon ((b,\mu),\Psi) \to ((a,\lambda),\Phi)$ 是 $\mathit{fHom}(\mathcal{C})$ 中的态射 $f\colon (b,\mu) \to (a,\lambda)$，并满足 $\Psi = [\mathit{dHom}(f)](\Phi) := \Phi(f)$。

5 带有依赖箭头和 Sigma 对象的范畴

接下来，我们为 dep-category $\mathcal{C}$ 中的每个 a 以及每个 $\lambda \in \mathsf{dHom}(a)$，指定一个 Sigma 对象 $\sum_a \lambda$、其第一投影箭头 $\mathrm{pr}_1^{a\ \lambda}$，: $\sum_a \lambda \to a$ in C_1，以及其第二投影依赖箭头 $\mathrm{pr}_2^{a\ \lambda} \in$, $\mathsf{dHom}(\sum_a \lambda, \lambda \circ \mathrm{pr}_1^{a\ \lambda})$, in C_3。

定义5.1。 如果一个依-范畴 $\mathcal{C}$ 具有 *Sigma* 对象，或者说是一个 (依 Σ)-范畴，那么(i) 对于每个 a 和 $f\colon\ b \to a$ 属于 $\mathcal{C}$，都有相应的运算

$$\sum_a\colon \mathtt{fHom}(a) \to C_0, \quad \sum_a(\lambda) := \sum_a \lambda \in C_0,$$

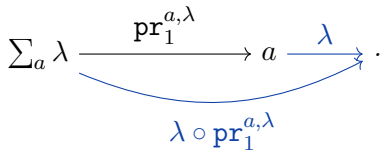
$$\mathtt{pr}_1^a\colon \mathtt{fHom}(a) \to C_1, \qquad \mathtt{pr}_1^a(\lambda) := \mathtt{pr}_1^{a,\lambda}\colon \sum_a \lambda \to a,$$

$$\Sigma f\colon \mathtt{fHom}(a) \to C_1, \qquad \lambda \mapsto (\Sigma f)(\lambda) =: \Sigma_\lambda f$$

借助这些运算， $\mathcal{C}$ 成为一个族 Σ)-范畴。

(ii) 若 $a \in \mathcal{C}$，则存在一个运算 $\mathtt{pr}_2^a$: 族态射集$(a) \to C_3$

$$\mathtt{pr}_2^a(\lambda) := \mathtt{pr}_2^{a,\lambda} \in \mathtt{dHom}\Big(\sum_a \lambda, \lambda \circ \mathtt{pr}_1^{a,\lambda}\Big),$$



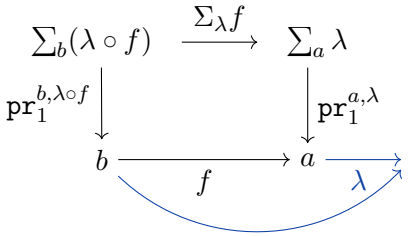
其中 $\mathtt{pr}_2^{a\ \lambda}$,称为 λ 的第二投影依赖箭头，使得对于每个 $b \in \mathcal{C}$ 和 $f \in \mathrm{Hom}(b, a)$ ，以下条件成立

$$\mathtt{pr}_2^{b,\lambda\circ f} = \mathtt{pr}_2^{a,\lambda}\big(\Sigma_\lambda f\big).$$

注意，上述条件 (ii) 中的等式是良定义的，因为根据定义，我们有 $\mathtt{pr}_2^{b\ \lambda\circ f}$, 属于

$$\mathtt{dHom}\Big(\sum_b (\lambda \circ f), (\lambda \circ f) \circ \mathtt{pr}_1^{b,\lambda\circ f}\Big) =$$

$$\mathtt{dHom}\Big(\sum_b (\lambda \circ f), \lambda \circ (\mathtt{pr}_1^{a,\lambda} \circ \Sigma_\lambda f)\Big)$$



并且根据定义 4.8，我们有

$$\mathtt{pr}_2^{a,\lambda}\big(\Sigma_\lambda f\big) \in \mathtt{dHom}\Big(\sum_b (\lambda \circ f), (\lambda \circ \mathtt{pr}_1^{a,\lambda}) \circ \Sigma_\lambda f\Big).$$

例 5.2 （平凡投影箭头）. 一个族范畴 $\mathcal{C}$ 可转化为一个 (dep Σ)-范畴。使用例 4.2 中的依赖结构，令 $\mathtt{pr}_2^{a\ \lambda}$,:= $*$。

显然， $\mathbf{Type}(\mathcal{U})$ 和 **BishSet** 都是 (dep Σ)-范畴，其中第二投影箭头在每种情形下都以显然的方式定义。

例 5.3 （常值族的 Sigma 对象）。 若 $\mathcal{C}$ 有二元积，则可按如下方式将其转化为(dep Σ)-范畴：根据例 3.4 $\mathcal{C}$ 是一个 (fam Σ)-范畴，而若

$$\mathtt{pr}_2^{a,b} := \mathtt{pr}_b \in \mathtt{dHom}(a \times b, b \circ \mathtt{pr}_a) :=$$

$$\mathtt{dHom}(a \times b, b) := \mathrm{Hom}(a \times b, b),$$

那么根据 $f \times 1_b$ 的定义，我们得到

$$\mathtt{pr}_2^{a,b}\big(\Sigma_b f\big) := \mathtt{pr}_2\big(\Sigma_b f\big) := \mathtt{pr}_b \circ (f \times 1_b) =$$

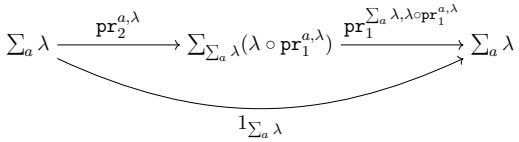
$$\mathtt{pr}_b =: \mathtt{pr}_2^{a,b} = \mathtt{pr}_2^{a,b\circ f}.$$

将定理 4.6 推广后，我们得到：(fam Σ)-范畴以一种典范的方式成为 (dep Σ)-范畴。

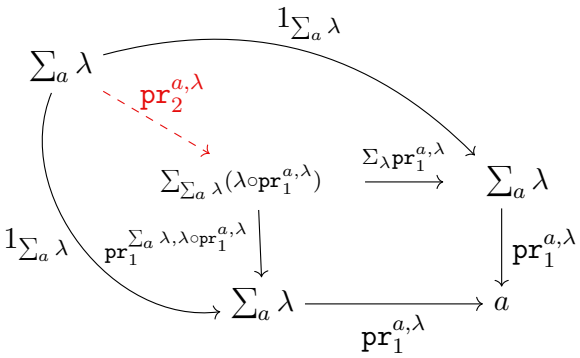
定理 5.4。 若 $\mathcal{C}$ 是一个 (fam Σ)-范畴，则对每个 $a \in \mathcal{C}$ 和 $\lambda \in$ 依赖态射集(a)，依赖箭头 w

$$\mathrm{pr}_2^{a,\lambda} \in \mathcal{D}_{\sum_a \lambda}\left(\lambda \circ \mathrm{pr}_1^{a,\lambda}\right) =$$

$$\left\{\phi \in \mathrm{Hom}\left(\textstyle\sum_a \lambda, \sum_{\sum_a \lambda}(\lambda \circ \mathrm{pr}_1^{a,\lambda})\right) \mid \mathrm{pr}_1^{\sum_a \lambda, \lambda \circ \mathrm{pr}_1^{a,\lambda}} \circ \mathrm{pr}_2^{a,\lambda} = 1_{\sum_a \lambda}\right\}$$

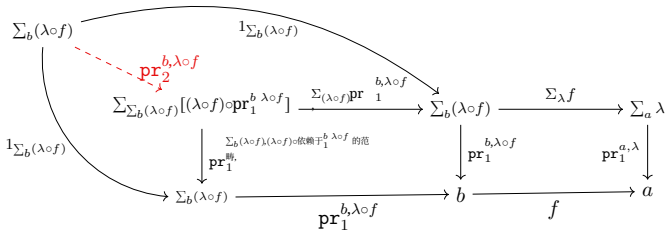


定义为由下述拉回唯一确定的箭头

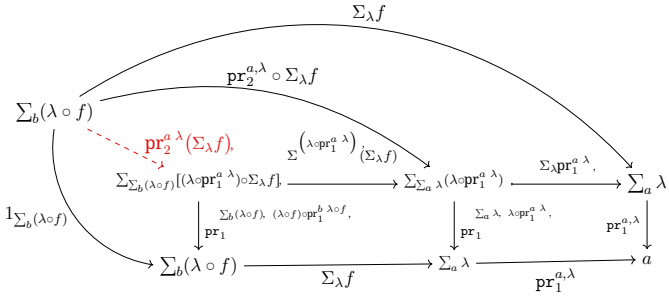


则 $\mathcal{C}$ 成为一个 (依赖 Σ)-范畴。

证明。 由定理 4.6 可知， $\mathcal{C}$ 是一个依赖范畴。由左上三角形的交换性可知，$\mathrm{pr}_2^{a\ \lambda}$,属于 $\mathcal{D}_{\sum_a \lambda}(\lambda \circ \mathrm{pr}_1^{a\ \lambda})$,。因此，只需证明上文定义的依赖箭头 $\mathrm{pr}_2^{a\ \lambda}$,满足定义5.1中条件 (ii) 的等式。若 $f \in \mathrm{Hom}(b, a)$, 则根据定义，第二投影依赖箭头 $\mathrm{pr}_2^{b\ \lambda \circ f}$,由下述左拉回唯一确定



并且根据定理 4.6 的证明中 $\phi(f)$ 的定义，箭头 $\mathrm{pr}_2^{a\ \lambda}(\Sigma_\lambda f)$，由下面的左拉回唯一确定



根据上方第一个图表中右侧矩形的交换性，我们有 th at

$$\sum_{\Sigma_b(\lambda\circ f)} \left[(\lambda\circ f)\circ \mathrm{pr}_1^{b,\lambda\circ f}\right] = \sum_{\Sigma_b(\lambda\circ f)} \left[(\lambda\circ \mathrm{pr}_1^{a,\lambda})\circ \Sigma_\lambda f\right]$$

并且，上方两个大图表中下方外层态射的复合相等。根据条件(s_2)，我们可知，上方两个大图表中上方外层态射的复合相等，因为

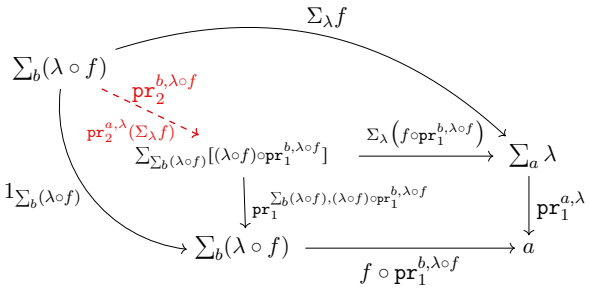
$$\left(\Sigma_\lambda f\right)\circ \Sigma_{(\lambda\circ f)}\mathrm{pr}_1^{b,\lambda\circ f} = \Sigma_\lambda\left(f\circ \mathrm{pr}_1^{b,\lambda\circ f}\right)$$

and

$$\left(\Sigma_\lambda \mathrm{pr}_1^{a,\lambda}\right)\circ \Sigma_{\left(\lambda\circ \mathrm{pr}_1^{a,\lambda}\right)}\left(\Sigma_\lambda f\right) =$$

$$\Sigma_\lambda\left(\mathrm{pr}_1^{a,\lambda}\circ \Sigma_\lambda f\right) = \Sigma_\lambda\left(f\circ \mathrm{pr}_1^{b,\lambda\circ f}\right).$$

因此，两个态射 $\mathrm{pr}_2^{b\ \lambda\circ f}$，和 $\mathrm{pr}_2^{a\ \lambda}\left(\Sigma_\lambda f\right)$，相等，因为根据拉回引理，上方相等的外层图表也是拉回；又根据 $\mathrm{pr}_2^{a\ \lambda}$，的定义，我们有

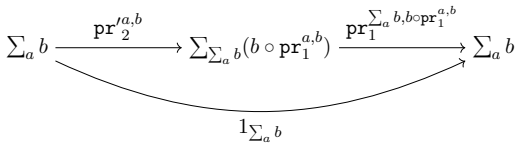


$$\Sigma_\lambda \mathrm{pr}_1^{a,\lambda}\circ \mathrm{pr}_2^{a,\lambda}\circ \Sigma_\lambda f = 1_{\sum_a \lambda}\circ \Sigma_\lambda f = \Sigma_\lambda f,$$

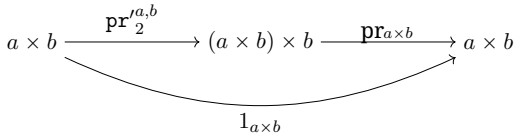
根据最后一个拉回的唯一性，我们得到所需的等式。 □

如果 $\mathcal{C}$ 是 (dep Σ)-范畴，就可以将前一定理根据其 (fam Σ)-结构生成的第二投影箭头与给定的第二投影箭头联系起来。

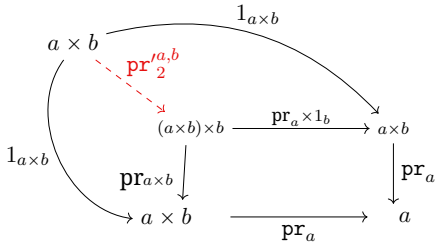
例 5.5（常值族的依赖对象）。 如果 $\mathcal{C}$ 有二元积，那么在例 5.3 中它被赋予一个 (dep Σ)-范畴结构。由于根据例 3.4 $\mathcal{C}$ 是一个 (fam Σ)-范畴，由定理 5.4 诱导的第二投影依赖箭头满足



即，

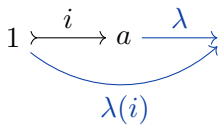


它定义为由以下拉回唯一确定的箭头



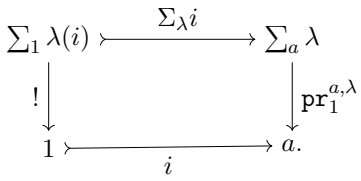
由于可以证明 $\mathrm{pr}'^{a,}{}_{2}{}^{b} = 1_{a\times b} \times \mathrm{pr}_b$，因此可以将 $\mathrm{pr}'^{a,}{}_{2}{}^{b}$ 与例 5.3 中的依赖箭头 $\mathrm{pr}_2^{a\ b} = , \mathrm{pr}_b$ 等同起来。

在一个带有终对象 1 的 (dep Σ)-范畴 $\mathcal{C}$ 中，我们可以恢复标准等式 $z = (\mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z))$，其中 z 是直觉主义类型论 (BST) 中 Sigma 类型（集合）的一个元素。若 $i \in a$, $\lambda \in \mathrm{fHom}(a)$ 和 $\Phi \in \mathrm{dHom}(a, \lambda)$，则 $\Phi(i) \in \mathrm{dHom}(1, \lambda(i))$

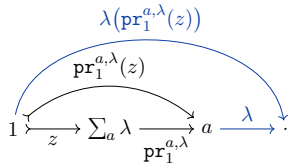


根据定义 4.8，我们有

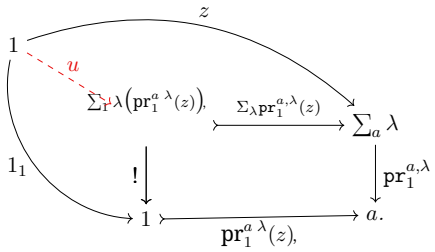
$$\mathrm{pr}_2^{a,\lambda}(\Sigma_\lambda i) = \mathrm{pr}_2^{1,\lambda(i)} \tag{7}$$



命题 5.6。设 $\mathcal{C}$ 是一个带有终对象 1 的 (依赖 Σ)-范畴，且 $w, z \in \sum_a \lambda$，因此$\mathrm{pr}_2^{a\ \lambda}(z) \in$,依赖态射集$\big(1, (\lambda \circ \mathrm{pr}_1^{a\ \lambda})(z)\big)$,



(i) 若 $u \in \sum_1 \lambda\big(\mathrm{pr}_1^{a\ \lambda}(z)\big)$, 是由以下拉回确定的 $\sum_1 \lambda\big(\mathrm{pr}_1^{a\ \lambda}(z)\big)$, 的唯一整体元素



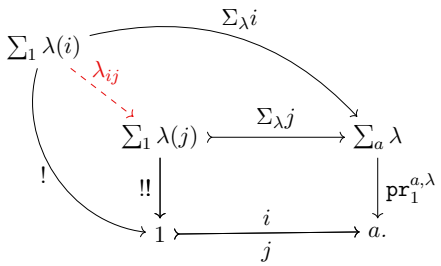
以下等式成立：

$$! \circ u = 1_1, \tag{8}$$

$$z = \big(\Sigma_\lambda \mathrm{pr}_1^{a,\lambda}(z)\big) \circ u, \tag{9}$$

$$\mathrm{pr}_2^{a,\lambda}(z) = \mathrm{pr}_2^{1,\lambda\left(\mathrm{pr}_1^{a,\lambda}(z)\right)}(u) \tag{10}$$

(ii) 若 $u' \in \sum_1 \lambda\big(\mathrm{pr}_1^{a\ \lambda}(w)\big)$,是由 w 的相应拉回所确定的 $\sum_1 \lambda\big(\mathrm{pr}_1^{a\ \lambda}(w)\big)$, 的唯一整体元素，且 λ_{ij} 是相应的传输箭头，



其中 $i := \mathtt{pr}_1^{a\,\lambda}(z)$,, 且 $j := \mathtt{pr}_1^{a\,\lambda}(w)$,, 则

$$z = w \Leftrightarrow \mathtt{pr}_1^{a,\lambda}(z) = \mathtt{pr}_1^{a,\lambda}(w) \;\&\; u' = \lambda_{ij} \circ u, \tag{11}$$

$$z = w \Rightarrow \mathtt{pr}_2^{a,\lambda}(z) = \mathtt{pr}_2^{a,\lambda}(w). \tag{12}$$

证明。 (i) 等式 (8) 和 (9) 对应于上述图表中的交换三角形。由等式 (8) 可得

$$\begin{aligned}
\mathtt{pr}_2^{a,\lambda}(z) &= \mathtt{pr}_2^{a,\lambda}\Big(\big(\Sigma_\lambda \mathtt{pr}_1^{a,\lambda}(z)\big) \circ u\Big) \\
&= \Big[\mathtt{pr}_2^{a,\lambda}\big(\Sigma_\lambda \mathtt{pr}_1^{a,\lambda}(z)\big)\Big](u) \\
&\overset{(7)}{=} \mathtt{pr}_2^{1,\lambda\left(\mathtt{pr}_1^{a,\lambda}(z)\right)}(u).
\end{aligned}$$

(ii) 若 $z = w$, 则等式 $\mathtt{pr}_1^{a\,\lambda}(z) =, \mathtt{pr}_1^{a\,\lambda}(w)$,立即成立。由等式 (10) 可得

$$\big(\Sigma_\lambda j \circ \lambda_{ij}\big) \circ u = \big(\Sigma_\lambda i\big) \circ u = z = w = \Sigma_\lambda j \circ u',$$

and 又由于 $\Sigma_\lambda j$ 是单态射，可得 $\lambda_{ij} \circ u = u'$。对于逆向蕴含，我们有[5]

$$w = \Sigma_\lambda j \circ u' = \Sigma_\lambda j \circ \lambda_{ij} \circ u = \Sigma_\lambda i \circ u = z.$$

此外，我们有

$$\begin{aligned}
\mathtt{pr}_2^{a,\lambda}(w) &\overset{(10)}{=} \mathtt{pr}_2^{1,\lambda(j)}(u') \\
&\overset{(11)}{=} \mathtt{pr}_2^{1,\lambda(j)}(\lambda_{ij} \circ u) \\
&= \big[\mathtt{pr}_2^{1,\lambda(j)}(\lambda_{ij})\big](u) \\
&\overset{(7)}{=} \big[\big[\mathtt{pr}_2^{a,\lambda}\big(\Sigma_\lambda j\big)\big](\lambda_{ij})\big](u) \\
&= \big[\mathtt{pr}_2^{a,\lambda}\big(\Sigma_\lambda j \circ \lambda_{ij}\big)\big](u) \\
&= \big[\mathtt{pr}_2^{a,\lambda}\big(\Sigma_\lambda i\big)\big](u) \\
&\overset{(7)}{=} \mathtt{pr}_2^{1,\lambda(i)}(u) \\
&\overset{(10)}{=} \mathtt{pr}_2^{a,\lambda}(z).
\end{aligned}$$

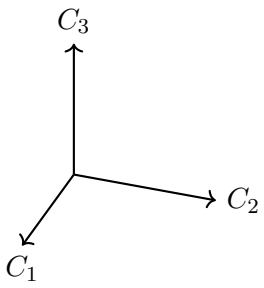
□

等式 (9) 和 (10) 是等式 $z = \big(\mathtt{pr}_1(z), \mathtt{pr}_2(z)\big)$ 的范畴论版本，而等价关系 (11) 则是 BST 中 Sigma 集上典范等式的范畴论版本，见例 3.3。

6 结语

在带属性的范畴或类型范畴的定义中，已经隐式地为范畴 $\mathcal{C}$ 的箭头结构 C_1 添加了族结构 C_2。人们在 C_1 和 C_2 的“二维世界”中研究了 Sigma 对象，并针对每个对象 a、每个 $\lambda \in \mathsf{fHom}(a)$ 和每个 $\mu \in \mathsf{fHom}(\sum_a \lambda)$，将依赖定义为适当的族 $\prod_\lambda \mu \in \mathsf{fHom}(a)$（见 [31], 第 120–121 页）。在这里，我们增加了依赖箭头的第三个（独立）维度 C_3

[5]等式 $z = w$ 仅依赖于等式 $u' = \lambda_{ij} \circ u$。



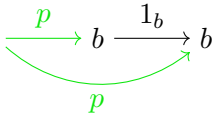
这使我们能够仅通过第三个“维度” C_3 表达依赖，而不依赖于 Sigma 对象。事实上，在 C_1、C_2 和 C_3 的“三维世界”中，Sigma 对象的定义纳入了第二投影依赖箭头，从而与 MLTT (BST) 中对 Sigma 类型（集合）的研究更加相似。依赖的范畴论表述是依赖范畴中的基础，而在类型范畴中，它与 Sigma 对象的关系则十分复杂且相互依赖。

依赖范畴的重要性还在于，我们可以拥有并非如定理 4.6 所述由 Sigma 对象（作为依赖对象或全局截面）生成的依赖箭头。在 Sigma 构造出现“之前”，我们就已经有了依赖箭头，而且它们独立于 Sigma 构造；例 4.2 和 4.4 中的范畴便是如此。这些范畴体现了依赖箭头的根本特性。

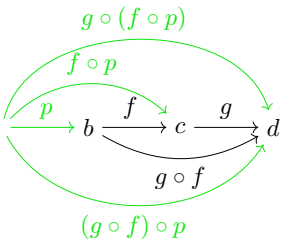
正如 [3], 第 331 页 [3], 所指出的，“构造纤维化的一种方法是采用 Grothendieck 构造.....它是幺半群半直积构造的一种推广”。Grothendieck 构造的这一功能是 Sigma 对象一般功能的一个特例。在 (fam Σ)-范畴或 (dep Σ)-范畴的框架下，可以定义各种 Sigma 对象范畴，在这些范畴中，第一投影成为分裂纤维化。这进一步印证了在格罗滕迪克范畴中采用 Sigma 记号的选择，同时也解释了为什么 (fam Σ)-范畴或 (dep Σ)-范畴理论可以视为格罗滕迪克范畴理论的推广。我们还需要探讨更多与纤维化的关系和联系，因为格罗滕迪克纤维化的分裂裂解定义条款显然与严格性条件 (s_1) and (s_2)非常相似。

正如引言中所述，集合族可以用纤维化来描述，而不必采用逐点索引。族箭头将逐点索引的集合族推广开来，而余族箭头则将由纤维化确定的集合族推广开来。与族箭头对偶，余族箭头 具有固定的陪域 b，并且与定义域为 b的 $\mathcal{C}$ 的箭头以协调的方式复合：

($\mathtt{cofam}_1$) $1_b \circ p = p$



($\mathtt{cofam}_2$) $(g \circ f) \circ p = g \circ (f \circ p)$



因此，这里提出的所有概念都有一个对偶概念。研究余Σ对象 和余依赖箭头，是对这里刚刚起步的依赖范畴论 发展的必要补充。

致谢
我想感谢 Benno van den Berg，在本项工作早期的一次讨论中，他向我指出了 [31] 。

参考资料

[1] P. Aczel, M. Rathjen：《构造性集合论》，书稿，2010 年。[2] S. Awodey：《范畴论》，牛津大学出版社，2010 年。[3] M. Barr, C. Wells：《计算机科学范畴论》，《范畴论理论与应用重印丛书》，数学研究中心，蒙特利尔大学，2012 年。[4] J. Bénabou：纤维范畴与朴素范畴论基础，《符号逻辑杂志》第 50 卷第 1 期，1985 年，10–37 页。[5] E. Bishop：《构造分析基础》，麦格劳-希尔，1967 年。[6] E. Bishop 和 D. S. Bridges：《构造分析》，数学科学基础丛书 279，施普林格出版社，海德堡—柏林—纽约，1985 年。[7] P.-L. Curien：同构意义下的替换，《信息学基础》19，1993 年，51–85 页。[8] J. Cartmell：《广义代数理论与上下文范畴》，哲学博士论文，牛津，1978 年。[9] J. Cartmell：广义代数理论与上下文范畴，《纯粹与应用逻辑年刊》32，1986 年，209–243 页。[10] P. Dybjer：内在类型理论，载于 S. Berardi、M. Coppo（编）《证明与程序的类型》，计算机科学讲义，第 1158 卷，1996 年，120–134 页。[11] T. Ehrhard：构造的范畴语义，逻辑、语言与计算机科学研讨会 1988，IEEE计算机学会出版社，1988 年，264–273 页。[12] M. Hofmann：依赖类型的句法与语义，载于 A. Pitts、P. Dybjer（编）《计算的语义与逻辑》，剑桥大学出版社，1997 年，79–130 页。[13] M. Hofmann, T. Streicher：类型论的群胚解释，载于 [33], 1998, 83–111。[14] B. Jacobs：《范畴逻辑与类型论》，爱思唯尔，1999 年。[15] P. T. Johnstone, R. Paré（编）：《指标范畴及其应用》，施普林格出版社，1978 年。[16] J. Lambek, P. J. Scott：《高阶范畴逻辑导论》，剑桥大学出版社，1986 年。[17] S. Mac Lane, I. Moerdijk：《几何与逻辑中的层》，施普林格出版社，1992 年。[18] P. Martin-Löf：直觉主义类型理论：预测部分，载于 H. E. Rose 和 J. C. Shep-herdson（编）《逻辑学术研讨会’73》，第 73–118 页，北荷兰出版社，1975 年。[19] P. Martin-Löf：《直觉主义类型论：Giovanni Sambin 关于 1980 年 6 月在帕多瓦系列讲座的笔记》，那不勒斯：Bibliopolis，1984 年。[20] P. Martin-Löf：直觉主义类型理论，载于 [33], 127–172。[21] R. Mines, F. Richman, W. Ruitenburg：《构造代数课程》，施普林格，1988 年。[22] J. Myhill：构造性集合论，《符号逻辑杂志》40，1975 年，347–382 页。

[23] E. Palmgren：集合胚族的证明相关性与类型论中的恒等，《数学逻辑文档》51，2012 年，35–47 页。[24] E. Palmgren：建构主义与结构主义基础：Bishop 与 Lawvere 的集合论，《纯粹与应用逻辑年刊》163，2012 年，1384–1399 页。[25] E. Palmgren：Grothendieck 构造与依赖类型模型，预印本，2016 年。[26] I. Petrakis：Bishop 集合论中的依赖和与依赖积，载于 P. Dybjer 等（编）TYPES 2018，LIPIcs，第 130 卷，文章编号 3，2019 年。[27] I. Petrakis：《Bishop 集合论中的集合族》，特许任教资格论文，慕尼黑路德维希-马克西米利安大学，2020 年。[28] I. Petrakis：从 Sigma 类型到 Grothendieck 构造，arXiv:2109.04239v1，2021 年。[29] I. Petrakis：依赖对象范畴在 Groethendieck 范畴上的分配性，载于 Coquand 等（编）《几何逻辑、建构化与自动定理证明》，Dagstuhl 研讨会 21472，达格施图尔城堡，莱布尼茨信息学中心，2022 年，第 166 页，DOI: 10.4230/DagRep.11.10.151[30] I. Petrakis：Bishop 风格构造数学中的证明相关性，《计算机科学中的数学结构》第 32 卷第 1 期，1–43 页。[31] A. M. Pitts：范畴逻辑，载于 S. Abramsky、D. M. Gabbay、T. S. E. Maibaum（编）《计算机科学逻辑手册》第 5 卷，克拉伦登出版社，牛津，2000 年，39–128 页。[32] E. Riehl：《语境中的范畴论》，多佛出版社，2016 年。[33] G. Sambin, J. M. Smith（编）：《构造类型论的二十五年》，牛津大学出版社，1998 年。[34] R. A. G. Seely：局部笛卡尔闭范畴与类型论，《剑桥哲学学会数学学报》95，1984 年，33–48 页。