arXiv:2303.14759v1 [math.DG] 26 Mar 2023

紧致半单李群上的闭椭圆结构

Max Reinhold Jahnke *
jahnkem@mathematik.uni-marburg.de

菲利普斯马尔堡大学数学与信息学系，
马尔堡，黑森州，德国。

2023年3月28日

摘要

本文证明，在满足某个拓扑条件时，紧致半单李群上左不变椭圆结构所关联的上同调，可以仅利用左不变形式计算。这将分析问题简化为一个纯代数问题，同时也将 Chevalley 和 Eilenberg [CE48]关于紧致李群 de Rham上同调的经典工作，以及 Pittie [Pit88] 关于紧致半单李群 Dolbeault 上同调的工作，推广到了椭圆结构的情形。我们以谱序列为主要工具，从而构造出左不变微分复形与通常的微分复形之间的同构。

数学主题分类：35Nxx, 58J10, 17B56, 22E30。关键词：可积结构、微分复形、谱序列、紧李群。

1 引言

偏微分方程理论中的一个基本问题是确定向量场线性系统的可解性。对合结构理论为我们提供了一种途径，将此类可解性问题转化为计算与微分算子复形相关的上同调空间。这种方法使我们能够以统一的方式处理许多有趣且重要的微分复形实例，例如 de Rham 复形、Dolbeault 复形和切向柯西-黎曼复形。它还强调底流形的几何与拓扑性质，从而有助于应用其他数学领域的工具，例如代数拓扑和泛函分析。

当底流形是紧李群时，可以将与某些左不变向量场族的可解性相关的分析问题，与该流形的李代数的代数性质联系起来。借助这一方法，我们可以将计算上同调空间的分析问题转化为简单的线性代数问题。这种方法已用于若干情形，例如紧致李群上的 de Rham [CE48], 左不变复结构 [Pit88], Levi平坦CR结构 [JJ21] 以及满足特定拓扑和代数条件的椭圆结构 [Jah21]。尤其是，左不变

*我谨感谢 S¨onke Rollenske 和 Oliver Goertsches 分别就谱序列和齐性空间与我进行了有益的讨论。本研究得到德国研究联合会（DFG）项目资助，项目编号 JA 3453/1-1。

可积结构日益受到关注，近期 Charbonnel 和 Ounaïes-Khalgui [CK04], 、Korman [Kor 14], 、Araújo [Ara19], 以及 Bor 和 Jacobowitz [BJ21]的研究成果便体现了这一点。

以下定理是本文的主要结果。通过调整拓扑条件并去除代数条件，它显著改进了 [Jah21] 的主要结果。此外，该定理根据相应李代数的性质，确保能够全面理解与左不变椭圆结构相关的上同调类。

定理 1.1. 设 G 是一个连通、紧且半单的李群，并设 $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 为一个左不变椭圆结构。令 $G_{\mathbb{C}}$ 为 G的泛复化。若$V = \exp^{G_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{v}) \subset G_{\mathbb{C}}$ 是闭的，则 $H^{p,\,q}(G;\mathfrak{v})$ 中的每个上同调类都有一个左不变代表元。此外，左不变复形到通常复形的包含映射在上同调上诱导出一个同构：

$$\varphi : H^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}};\mathfrak{v}) \to H^{p,q}(G;\mathfrak{v}). \tag{1.1}$$

在第 2 节中，我们建立记号并简要概述对合结构理论。若需全面介绍，我们建议参阅 [BCH08，第 I、VII 章] 以及 [Tre92，第 I、III 章]。在第 2.1 节中，我们描述左不变对合结构与李代数之间的联系，并给出映射 φ的精确定义。

在我们的语境中，李群的紧致性是必要的，因为我们需要上同调空间 $H^{p,\,q}(G;\mathfrak{v})$ 是有限维的。如果李群不是紧的，这些上同调空间可能不是有限维的。半单性条件之所以必要，是因为它使我们能够应用 Bott 的一项结果；该结果要求某个齐性流形是单连通且紧的。这项结果在我们的分析中发挥着重要作用，并且要求李群及其李代数具有一定的结构。最后，假设 V 是 $G_{\mathbb{C}}$ 的闭子集，我们便能充分利用 Bott 定理及其对我们分析的意义。

定理 1.1 涵盖 $\mathfrak{v} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的情形，以及 $\mathfrak{v}$ 在 G [Pit88] 上定义左不变复结构的情形。以下这类例子展示了一族满足定理 1.1 假设的椭圆结构的存在性。

例 1.2. 设 G 是一个连通、紧且半单的李群，并设 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ 是一个极大阿贝尔子代数。我们用 Δ 表示 $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ 在 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 中的根集，并用 Δ_+ 表示 Δ 的一个极大正根子集。对于每个 $\alpha \in \Delta$，令 $\mathfrak{g}_\alpha$ 为相应的特征子空间。容易证明，$\mathfrak{v} = \mathfrak{t}_{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} \mathfrak{g}_\alpha$ 是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的一个椭圆子代数。我们考虑 G 的泛复化 $G_{\mathbb{C}}$，并注意到 $V \doteq \exp^{G_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{v}) \subset G_{\mathbb{C}}$ 是闭的 *[FH91，断言 23.45，命题 26.4]*。

请注意，上面的例子很容易推广到一族抛物李代数。

定理 1.1 的证明分为四个步骤。证明的第一步在第 2 节完成，我们简要回顾左不变对合结构的基本概念，并将定理 1.1 的证明归结为一个同态的满射性问题。

接下来的步骤是建立李代数上同调与谱序列之间的联系。在第 3 节中，我们简要概述李代数上同调，并说明它与左不变对合结构所关联的上同调空间 $H^{p,\,q}(G;\mathfrak{v})$ 之间的关系。我们旨在为使用霍赫希尔德-塞尔谱序列做好准备，该谱序列使我们能够计算由 $\mathfrak{v}$诱导的李代数上同调所关联的谱序列的第二页。

然后，通过使用 $\mathfrak{v}$ 的一个本质实子代数，我们构造一个辅助李群和一个齐性空间。这在第 4 节中完成，我们将在其中解释 Leray 谱

序列——这是代数拓扑中的一种强大工具——如何将与椭圆结构相关的微分复形的上同调，与辅助群的上同调以及齐性空间的上同调联系起来。

最后，证明的第四步也是最后一步在第5节完成，我们将在此展示如何利用 Chevalley-Eilenberg [CE48] 和 Bott [Bot57]的结果，将 Hochschild-Serre 谱序列与 Leray 谱序列结合起来。基本思路是构造两个谱序列第二页之间的同构，并据此得出它们的极限项之间存在同构。

本文最后在第6节讨论由我们的工作引出的一些开放问题，并为未来研究提出方向。特别是，我们指出了若干结果的自然推广方向，包括研究与椭圆和非椭圆李子代数相关的上同调类，以及研究齐性流形上的左不变结构。

2 对合结构

本节概述有关可积结构、其微分复形及相应上同调空间的基本思想。这既有助于说明本文通篇使用的记号，也能提升文章的可读性。本节主要参考 Berhanu、Cordaro 和 Hounie 所著《可积结构导论》的第一章和第七章 [BCH08]。

设 Ω 是一个维数为 $N \geq 2$ 的光滑、定向且连通的流形。Ω 上的对合结构是 $T_{\mathbb{C}}\Omega$ 的一个光滑子丛 $\mathcal{V}$，满足弗罗贝尼乌斯条件：$[\mathcal{V},\mathcal{V}] \subset \mathcal{V}$。考虑 Ω 上的一个有限维向量丛 E，以及 Ω 的一个开集 $U \subset$。U 上 E 的光滑截面组成的集合记作 $C^{\infty}(U; E)$。

每个对合结构 $\mathcal{V}$ 都对应一个自然的微分复形。为方便读者，我们简要回顾这类复形的构造。对每个$p, q \in \mathbb{Z}_{+}$，我们将由 $u_j \in (T^{*}_{\mathbb{C}}\Omega)_x$（其中 $j = 1, \ldots, p+q$，且至少有 p 个因子属于 T'_x）的外积 $u_1 \wedge \ldots \wedge u_{p+q}$ 的线性组合所构成的 $(\Lambda^{p+q}T^{*}_{\mathbb{C}}\Omega)_x$ 子空间记为 $T^{p,}{}_{x}{}^{q}$。注意，$T^{p+1,}{}_{x}{}^{q-1} \subset T^{p,}{}_{x}{}^{q}$，因此我们可以定义 $\Lambda^{p,}{}_{x}{}^{q} \doteq T^{p,}{}_{x}{}^{q}/T^{p+1,}{}_{x}{}^{q-1}$ 和 $\Lambda^{p,q} = \bigcup_{x\in\Omega}\Lambda^{p,}{}_{x}{}^{q}$ 是 Ω 上的一个光滑向量丛。

由于 $\mathcal{V}$ 是对合的，我们可以证明外微分将 $T^{p,q}$的光滑截面映射为 $T^{p,q+1}$的光滑截面。因此，存在唯一的算子 $\mathrm{d}'_{p,q}$，使下图交换：

$$\begin{array}{ccc} C^{\infty}(\Omega; T^{p,q}) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & C^{\infty}(\Omega; T^{p,q+1}) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ C^{\infty}(\Omega; \Lambda^{p,q}) & \xrightarrow[\mathrm{d}'_{p,q}]{} & C^{\infty}(\Omega; \Lambda^{p,q+1}). \end{array}$$

为简化记号，我们用 d' 表示算子 $\mathrm{d}'_{p,q}$；必要时，也用 $\mathrm{d}'_{\mathcal{V}}$ 来强调相关的对合结构。注意，算子 d' 将 $\Lambda^{p,q}$ 的光滑截面映射为 $\Lambda^{p,q+1}$的光滑截面，并且 $\mathrm{d}' \circ \mathrm{d}' = 0$也成立。因此，对每个 $p \in \{0, \ldots, m\}$，算子 d'定义了一个由 $\mathbb{C}$-线性映射组成的复形

$$(\mathcal{C}^{\infty}(\Omega; \Lambda^{p,*}), \mathrm{d}') \tag{2.1}$$

以及记作

$$H^{p,*}(\Omega; \mathcal{V}). \tag{2.2}$$

2.1 左不变结构

本节中，我们将考察李群上一类特殊的可积结构。关于李群的基本概念，我们参考 Hilgert 和 Neeb 所著的《李群的结构与几何》 [HN12]。

设 G 是一个李群，其李代数为 $\mathfrak{g}$，并令 $L_x\colon G\to G$ 表示由 x 对 G 的左乘。回忆一下，若向量丛 $\mathcal{V}\subset\mathbb{C}TG$ 满足 $(L_x)_*X_g\in\mathcal{V}_{xg}, X_g\in\mathcal{V}_g$，则称其为左不变。

若 $\mathcal{V}$ 是一个左不变对合向量丛，则存在相应的李代数 $\mathfrak{v}\subset\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，它由将 $\mathcal{V}$ 限制在 G 的单位元处定义。注意，这是一一对应关系，即给定一个李子代数 $\mathfrak{v}\subset\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，我们通过左平移定义一个对合向量丛 $\mathcal{V}\subset T_{\mathbb{C}}G$。本文中，我们始终用相应的李代数表示左不变对合结构。注意，向量丛 $\mathcal{V}$ 的秩就是李代数 $\mathfrak{v}$ 的维数，并且交换子括号与李代数括号一致。

我们关注空间 $H^{p,\,q}(G;\mathfrak{v})$ 的代数性质。该空间的性质既受到李代数 $\mathfrak{v}$ 嵌入代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的影响，也取决于 $\mathfrak{v}$ 的内在代数性质，以及紧李群 G 的拓扑性质。为突出 G 上局部可积结构的代数性质，我们运用李代数的语言来刻画与本文相关的重要可积结构类：

定义 2.1. 若李子代数 $\mathfrak{v}\subset\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 满足以下条件，则称其定义了：椭圆结构（若 $\mathfrak{v}+\bar{\mathfrak{v}}=\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$），此时称 $\mathfrak{v}$ 为椭圆代数；复结构（若 $\mathfrak{v}\oplus\bar{\mathfrak{v}}=\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$），此时称 $\mathfrak{v}$ 为复代数；本质实结构（若 $\mathfrak{v}=\bar{\mathfrak{v}}$），此时称 $\mathfrak{v}$ 为本质实代数。

例如，如果 $\mathfrak{v}=\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，则（2.1）中的复形变为德拉姆复形。在这种情况下，我们得到一个椭圆结构，它同时也是本质实结构，而算子 d' 就是通常的外微分 d。现在，如果 $\mathfrak{v}\oplus\overline{\mathfrak{v}}=\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$，我们得到一个复结构 $\bar{}$，它也是椭圆的。在这种情况下，算子 d' 就是算子 ∂，而（2.1）中的复形则称为 Dolbeault复形。

由于左不变微分形式的外微分仍是左不变的，算子 d' 也将 $\Lambda^{p,q}$ 的左不变截面映射到 $\Lambda^{p,\,q+1}$ 的左不变截面。因此，对于每个$p\in\{0,1,\dots,m\}$，我们都有另一个复形

$$(\mathcal{C}^\infty_L(G;\Lambda^{p,*}),\mathrm{d}') \tag{2.3}$$

其上同调空间记为 $H^q_L(G;\mathfrak{v})$。下一节将简要回顾李代数上同调的基本定义和结果，这些内容对于仅利用李代数 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 和 $\mathfrak{v}$. 构造上同调空间 $H^q_L(G;\mathfrak{v})$ 至关重要

注意 t hat，由于对于所有 p,q，$\mathcal{C}^\infty_L(G;\,\Lambda^{p,q})\subset\mathcal{C}^\infty(G;\,\Lambda^{p,q})$，我们有一个自然同态

$$\varphi: H^{p,q}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}};\mathfrak{v})\to H^{p,q}(G;\mathfrak{v}).$$

假设 G 是紧的，可以使用平均化技巧来证明同态 φ 的单射性。关于这一事实的详细证明可见 [Jah21，引理 5.2]。

令 $G_{\mathbb{C}}$ 为 G 的泛复化。我们当前的目标是证明以下命题：

命题 2.2. 设 G 是一个连通、单连通且紧的李群。假设 $\mathfrak{v}$是 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 的一个椭圆子代数，并且集合 $\exp^{G_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{v})$ 在 $G_{\mathbb{C}}$中是闭的。那么，同态 (1.1) 是满射。

前一个命题推出了 G为连通、单连通且紧的李群时的定理 1.1。一般情形则可立即得出，因为左不变上同调在取有限覆盖时保持不变。关于最后这一论断的细节，读者可参阅 [Jah21, 命题 4.10 和注记 4.11]。

3 李代数上同调

本节简要概述李代数上同调的基本定义和结果。若要全面了解李代数上同调，感兴趣的读者可参阅 [HN12，第 7 章5]。

设 $\mathfrak{g}$ 是任意李代数， M 是一个 $\mathfrak{g}$-模，即配备了李代数同态 $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(M)$ 的向量空间。对于 $X \in \mathfrak{g}$ 和 $x \in M$，我们将 $\rho(X)x$ 记为$X \cdot x$。我们定义 $M^{\mathfrak{g}}$为 M的子空间，由所有满足以下条件的 $x \in M$构成：对所有$X \in \mathfrak{g}$，均有 $X \cdot x = 0$。令 $C^p(\mathfrak{g};\, M)$ 表示所有取值于 M 的定义在 $\mathfrak{g}$ 上的交错多重线性 p- 形式的集合，并令 $C^*(\mathfrak{g};\, M) = \bigoplus_{p\geq 0} C^p(\mathfrak{g};\, M)$ 为所有 $C^p(\mathfrak{g};\, M)$ 的直和。我们将 $C^0(\mathfrak{g};\, M)$ 与 M 等同，并注意到每个 $C^p(\mathfrak{g};\, M)$ 都是一个向量空间。

对于任意非负整数 p，令 u 为 $\mathfrak{g}$ 上取值于 M 的交替 p-线性形式，并令 X_1、……、X_{p+1} 为 $\mathfrak{g}$ 中的元素。我们按以下公式定义算子 d：$C^p(\mathfrak{g};\, M) \to C^{p+1}(\mathfrak{g};\, M)$：

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(X_1,\dots,X_{p+1}) = &\sum_{j=1}^{p+1}(-1)^{j+1}X_j \cdot u(X_1,\dots,\hat{X}j,\dots,X_{p+1}) \\ &+ \sum_{j<k}(-1)^{j+k+1}u([X_j,X_k],X_1,\dots,\hat{X}_j,\dots,\hat{X}_k,\dots,X_p), \end{aligned} \tag{3.1}$$

ˆ其中 X_j 表示省略 X_j。

可以证明算子 d 满足 $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$，因此我们得到一个上链复形 $(C^*(\mathfrak{g};\, M), \mathrm{d})$。该复形的上同调空间记为 $H^*(\mathfrak{g};\, M)$。

如果 $\mathfrak{v}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想（包括 $\mathfrak{v} = \mathfrak{g}$ 的情形），我们可以在空间 $C^p(\mathfrak{v};\, M)$ 上定义一个 $\mathfrak{g}$-模结构。事实上，$C^0(\mathfrak{v};\, M) = M$ 已经具有一个 $\mathfrak{g}$-模。对于 $p > 0$, $u \in C^p(\mathfrak{v};\, M)$,$X \in \mathfrak{g}$ 和 Y_1、……、$Y_p \in \mathfrak{v}$, 我们定义 $\mathfrak{g}$ 在 u 上的作用如下：

$$(\mathcal{L}_X u)(Y_1,\dots,Y_p) = X \cdot u(Y_1,\dots,Y_p) - \sum_{i=1}^{p} u(Y_1,\dots,[X,Y_i],\dots,Y_p).$$

对于所有 $u \in C^p(\mathfrak{v};\, M)$，我们有 $\mathcal{L}_Y u \in C^p(\mathfrak{v};\, M)$，并且 $\mathcal{L}$ 线性依赖于 Y和 u。

3.1 子代数诱导的上同调

本节回顾由子代数诱导的李代数上同调的一些基本概念。需要指出的是，关于子代数的李代数上同调存在不同的定义。本文将采用两种不同的概念。首先，我们介绍与左不变对合结构相关的上同调的代数版本相对应的概念。

设 $\mathfrak{v}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数。为定义由 $\mathfrak{v}$ 诱导的上同调，对于 $q \geq 0$，我们定义$N^{0,\,\mathfrak{v}\,q}(\mathfrak{g};\, M) = C^q(\mathfrak{g};\, M)$; 对于 $p \geq 0$，我们定义 $N^{p,\,\mathfrak{v}\,q}(\mathfrak{g};\, M)$ 为所有满足在 $\mathfrak{v}$ 的 $q+1$ 个元素上取值时为零的 $u \in C^{p+q}(\mathfrak{g};\, M)$ 的集合。按照约定，若 $q < 0$，则令 $N^{p,\,\mathfrak{v}\,q}(\mathfrak{g};\, M) = 0$。

给定包含关系

$$N_{\mathfrak{v}}^{p,q}(\mathfrak{g};M) \subset N_{\mathfrak{v}}^{p+1,q-1}(\mathfrak{g};M), \tag{3.2}$$

我们可以定义商空间 $C^{p,q}(\mathfrak{g};\ M) \doteq N^{p,q}(\mathfrak{g};\ M)/N^{p+1,q-1}(\mathfrak{g};\ M)$。此外，我们有

$$\mathrm{d}N_{\mathfrak{v}}^{p,q}(\mathfrak{g};M) \subset N_{\mathfrak{v}}^{p,q+1}(\mathfrak{g};M), \tag{3.3}$$

算子 d 诱导出算子

$$\mathrm{d}'_{\mathfrak{v}} : C_{\mathfrak{v}}^{p,q}(\mathfrak{g};M) \to C_{\mathfrak{v}}^{p,q+1}(\mathfrak{g};M).$$

因此，对于每个 p，我们得到一个上链复形 $(C^{p,q}(\mathfrak{g};\ M), \mathrm{d}')$，其上同调空间记为 $H^{p,*}(\mathfrak{g};\ M)$。

3.2 相对于子代数的上同调

除了与左不变对合结构相关的上同调外，我们还引入第二种上同调概念。这一概念对于应用霍赫希尔德–塞尔雷谱序列至关重要。

设 $\mathfrak{v}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数。我们定义 $C^p(\mathfrak{g},\mathfrak{v};\ M) \doteq N^{0,q}(\mathfrak{g};\ M)$，并注意到由 (3.3) 和 (3.2) 可得 $\mathrm{d}C^p(\mathfrak{g},\mathfrak{v};\ M) \subset C^{p+1}(\mathfrak{g},\mathfrak{v};\ M)$。由此我们定义另一个复形 $(C^*(\mathfrak{g},\mathfrak{v};\ M)\ d)$，其上同调空间记为 $H^*(\mathfrak{g},\mathfrak{v};\ M)$，称为 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{v}$ 、取值于 M 的上同调。

我们将空间 $C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{v};\ M)$ 定义为向量空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{v}$ 上取值于 M的交错多重线性 p-形式的集合。该空间具有 $\mathfrak{v}$-模的结构。事实上，若$X \bmod \mathfrak{v} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{v}$ 且 $Y \in \mathfrak{v}$，则括号 $[X \bmod \mathfrak{v}, Y] = [X,Y] \bmod \mathfrak{v}$ 有良好定义，因此，对于$X \in \mathfrak{v}$ 和 $Y_1 \bmod \mathfrak{v}$，……，$Y_p \bmod \mathfrak{v} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{v}$，我们定义

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X u)(Y_1 \bmod \mathfrak{v}, \ldots, Y_p \bmod \mathfrak{v}) &= X \cdot u(Y_1 \bmod \mathfrak{v}, \ldots, Y_p \bmod \mathfrak{v}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} u(Y_1 \bmod \mathfrak{v}, \ldots, [X,Y_i] \bmod \mathfrak{v}, \ldots, Y_p \bmod \mathfrak{v}).\end{aligned}$$

本文后文将用到以下定理。证明见 [HS53]。

定理 3.1。复形 $(C^{p,q}(\mathfrak{g};\ M), \mathrm{d}_{\mathfrak{v}})$ 和 $(C^q(\mathfrak{v};\ C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{v};\ M)), \mathrm{d})$ 同构，并且有

$$H_{\mathfrak{v}}^{p,q}(\mathfrak{g};M) = H^q(\mathfrak{v};C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{v};M)).$$

3.3 霍赫希尔德-塞尔谱序列的一个应用

为了确立上同调空间的某些代数性质，我们将使用谱序列。本文不打算回顾谱序列。我们推荐感兴趣的读者参阅 [BT82] ，那里对这一主题作了出色的介绍。下文将详细说明如何利用谱序列得到本文所述的结果。

设 $0 \le q \le \text{维}_{\mathbb{C}}\,\mathfrak{g}$且 $0 \le p \le q+1$。设 $F^pC^q(\mathfrak{g};\ M) = N^{p,\ q-p}(\mathfrak{g};\ M)$。我们有$F^pC^*(\mathfrak{g};\ M)$ 是 $C^*(\mathfrak{g};\ M)$ 的分次子空间，并且有一个递降空间序列

$$C^q(\mathfrak{g};M) = F^0C^q(\mathfrak{g};M) \supset \cdots \supset F^{q+1}C^q(\mathfrak{g};M) = 0.$$

由此滤过，我们得到一个谱序列 $(E^{*,\ *}_{\ r}, \mathrm{d}_r)$，其极限项与$H^*(\mathfrak{g};\ M)$相关。

现在考虑这样的情形： $\mathfrak{g}$ 是紧李群的李代数。设 $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是一个椭圆子代数，并设 $\mathfrak{k} = \mathfrak{v} \cap \overline{\mathfrak{v}}$。

由于 $\mathfrak{g}$ 是紧李群的李代数，它带有一个伴随不变内积 $\langle , \rangle$。我们可以将此内积扩展为 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$上的厄米内积，此时它满足以下关系：

$$\langle [X,Y],Z\rangle = -\langle Y,[\overline{X},Z]\rangle, \quad \forall X,Y,Z \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}. \tag{3.4}$$

注意，这个扩张不是 ad-不变的。

引理 3.2。 $\mathfrak{k}$ 在 $\mathfrak{v}$ 中的伴随表示是完全约化的，也就是说， $\mathfrak{v}$的每个 $\mathfrak{k}$-不变子空间都有一个 $\mathfrak{k}$-不变补空间。

证明。为了证明 $\mathfrak{v}$是一个完全约化的 $\mathfrak{k}$-模，我们需要证明 $\mathfrak{v}$ 的每个 $\mathfrak{k}$-子模 M 都有一个 $\mathfrak{k}$-不变补空间。设 $M \subset \mathfrak{v}$ 是 $\mathfrak{k}$- $\mathfrak{v}$ 的子模，并设 $M^{\perp}$是关于厄米内积 (3.4) 的 M 的正交补，即 $M^{\perp} = \{Z \in \mathfrak{v};$ 对所有 $X \in K\}.$，有 $\langle Z, X\rangle = 0$

根据构造， $\mathfrak{v}$ 可以写成向量空间 $\mathfrak{v} = M \oplus M^{\perp}$的直和。现在我们需要证明 $M^{\perp}$是 $\mathfrak{k}$-不变的。设 $X \in \mathfrak{k}$和 $Z \in M^{\perp}$。注意，我们可以假设 X 是一个实向量场，因此有 $\overline{X} = X$。于是我们有$\langle [X,Z], Y\rangle = -\langle Z, [X,Y]\rangle = 0$，因为 $[X,Y] \in \mathfrak{k}$，从而得到 $[X,Z] \in M^{\perp}$。 □

现在，考虑复形 $(C^p, {}_{\mathfrak{v}}{}^*(\mathfrak{g}), \mathrm{d}')$，它与复形 $(C^*(\mathfrak{v}; C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{v})), \mathrm{d})$ 同构。通过考虑滤过 $F^*C^*(\mathfrak{v}; C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{v}; \mathbb{C}))$，我们得到一个谱序列 $(E^*, {}_r{}^*, \mathrm{d}_r)$，根据 [HS53]，的定理 11，它具有如下 E_2 项

$$E_2^{j,k} \cong H^j(\mathfrak{k}; \mathbb{C}) \oplus H^k(\mathfrak{v}, \mathfrak{k}, C^p(\mathfrak{g}/\mathfrak{v}; \mathbb{C})). \tag{3.5}$$

4 Leray谱序列

本节通过引入与李群 G 相关的齐性空间，为应用 Leray谱序列奠定必要的基础。这个齐性空间有两种用途。首先，我们展示齐性空间的自然复结构和子群的微分结构如何帮助我们理解 G 上椭圆结构的局部结构，这对于理解 Leray 谱序列中出现的某些层的上同调十分重要。接着，我们计算 Leray谱序列的第二页，并将其与霍赫希尔德-塞尔谱序列联系起来。

设 G 是一个紧致连通李群， $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是一个椭圆李代数。我们考虑 G 的泛复化 $G_{\mathbb{C}}$，并定义群 $H = \exp G_{\mathbb{C}}(\mathfrak{v})$，假设它是 $G_{\mathbb{C}}$ 的闭子群。然后，我们构造商空间 $\Omega = G_{\mathbb{C}}/H$，其典范投影映射为 $\pi: G_{\mathbb{C}} \to \Omega$。由于 G 是紧的，我们可以将 G 视为其泛复化 $G_{\mathbb{C}}$ 的一个紧子群。注意，我们可以取 $K \doteq H \cap G$，并且 K 是 G 的闭子群，其李代数为 $\mathfrak{k} = \mathfrak{v} \cap \mathfrak{g}$。

接下来，我们证明 Ω 也可以表示为 G/K。为此，我们考虑齐性空间 $\Omega' = G/K$，它配备了投影映射 $\varphi: G \to \Omega'$。只需证明 Ω' 与 Ω 微分同胚即可。

我们将映射 $F: \Omega' \to \Omega$ 定义为 $gK \mapsto gH$。映射 F 显然定义良好，且是一个单射浸入。由 Ω 是紧的可知， $F(\Omega')$ 是一个嵌入流形。要证明该映射是满射，只需证明 Ω' 与 Ω 的维数相等。由于 $\mathfrak{v}$ 是椭圆的，我们有 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{v} + \overline{\mathfrak{v}}$，这意味着

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} + 2\dim \mathfrak{v}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$$

and

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{v} = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} - \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{v}/\mathfrak{k}_{\mathbb{C}},$$

由此我们很容易得出 $\dim \Omega = \dim \Omega'$.

因此， $F(\Omega')$ 是开集。由于 Ω 连通，且 F 是单射光滑映射，我们得出 $F(\Omega') = \Omega$，且 F是一个微分同胚。因此，我们可以通过 F 将 Ω' 与 Ω 等同起来。这意味着 G 在 Ω' 上的作用可以提升为 Ω 上的传递作用，而 Ω 现在有两种等价的描述:

$$\Omega = G_{\mathbb{C}}/H = G/K. \tag{4.1}$$

注 4.1. 注意，如果我们进一步假设 G 是单连通的，那么 $G_{\mathbb{C}}$ 也连通且单连通。由于 H 是 $G_{\mathbb{C}}$的连通子群，商空间$G_{\mathbb{C}}/H$ 也连通。事实上，由同伦群长正合序列可得$\pi_1(G_{\mathbb{C}}/H) \cong \pi_1(\Omega) \cong 0$，这意味着 Ω 是单连通的。

考虑由预层 $U \mapsto \mathcal{S}^p(U) = \{f \in C^\infty(U;\ \Lambda^{p,0});\ \mathrm{d}' f = 0\}$（其中 $U \subset G$ 为开集）得到的层 $\mathcal{S}^p$。由于椭圆结构局部可解，我们有层上同调$H^q(G;\mathcal{S}^p)$ 与通常的上同调空间 $H^q(G;\ \mathfrak{v})$ 同构。因此，我们使用层上同调来研究空间 $H^q(G;\mathfrak{v})$。现在的思路是利用 Leray谱序列作为工具，根据 $\Omega = G/K$的上同调推断 $H^q(G;\mathfrak{v})$ 的性质；其中 Ω 带有由商映射 $\varphi:\ G \to \Omega = G/K$诱导的自然复上同调，而 $K \subset G$ 的上同调则采用通常的 de Rham上同调。

考虑由预层得到的带有 $\mathcal{H}^k$ 的层 $\mathcal{H} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^k$

$$V \mapsto H^k(\varphi^{-1}(V); \mathcal{S}^p|_{\varphi^{-1}(V)}). \tag{4.2}$$

Leray谱序列是一个满足 E_r 的谱序列

$$E_2^{r,s} = H^r(\Omega; \mathcal{H}^s) \tag{4.3}$$

其极限项与 $H^*(G;\mathcal{S}^p)$ 相关。在接下来的章节中，我们将明确描述 $E^r,{}_2{}^s = H^r(\Omega;\mathcal{H}^s)$。

4.1 椭圆结构的局部结构

为了根据 K 和 Ω 明确描述上同调群 $E^r,{}_2{}^s = H^r(\Omega;\mathcal{H}^s)$，我们首先需要理解 G 相对于椭圆结构 $\mathfrak{v}$ 的几何结构。具体而言，我们证明，对于所有 $x \in \Omega$，都存在一个定义在 x 的某个邻域内、属于 φ 的局部截面 σ，它与 Ω 和 G 的复结构都相容。具体来说，当 Ω 配备由 $\pi_*(\mathfrak{v})$ 给出的复结构 $\mathcal{W}$ 时，局部截面 σ 满足 $\sigma_*(W) \subset \mathfrak{v}$。

引理 4.2. 设 M 和 N 是连通光滑流形。假设 M 具有椭圆结构 $\mathcal{V}$，且 N 具有复结构 $\mathcal{W}$。考虑映射 $f:\ M \to N$，使得对所有 $x \in M$，$f_*(\mathcal{V}_x) = \mathcal{W}_{f(x)}$。那么，对于每个 $y \in N$，存在 y 的一个开邻域 U以及映射 $\sigma:\ U \to M$，使得对所有 $x \in U$，$f \circ \sigma(x) = x$，并且对所有$x \in U$，$\sigma_*(\mathcal{W}_x) \subset \mathcal{V}_{\sigma(x)}$。

证明。通过应用反函数定理可得到局部截面。为了将其明确写出，我们需要适当的坐标 [BCH08，第 28] 页。令 ν 为 N的复维数，$m = \nu + n$为 M的实维数。注意，假设蕴含 $n > \nu$。令 $y \in N$、$x \in f^{-1}(y)$ 和 $V \subset M$为 x的一个开邻域。我们赋予 V

坐标 $\varphi=(z_1,\dots,z_\nu,t_1,\dots,t_{n-\nu})$: $V\to V'\times V''\subset\mathbb{C}^\nu\times\mathbb{R}^{n-\nu}$，其中 $V'\subset\mathbb{C}^\nu$ 且 $V''\subset\mathbb{R}^{n-\nu}$，使得在 V 上，对合结构 $\mathcal{V}$ 由以下向量场生成

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}_1},\dots,\frac{\partial}{\partial\overline{z}_\nu},\frac{\partial}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial}{\partial t_{n-\nu}}.$$

令 $U\subset N$为 y的一个邻域，其坐标为 $\psi=(w_1,\dots,w_\nu)$: $U\to U'\subset\mathbb{C}^\nu$，使得在 U 上，对合结构 $\mathcal{W}$ 由以下向量场生成

$$\frac{\partial}{\partial\overline{w}_1},\dots,\frac{\partial}{\partial\overline{w}\nu}.$$

˜现在，利用这些坐标，我们将 f的局部表示写为 f: $V'\times V''\to U'$，即 $\tilde{f}=\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$。注意，关于 f的推前的假设意味着

$$\tilde{f}_*(\partial/\partial t_j)\in\operatorname{span}_{C^\infty(U')}\{\partial/\partial\overline{w}_1,\dots,\partial/\partial\overline{w}_\nu\}$$

˜并注意，由于 f 和 $\partial/\partial t_l$ 均为实数，我们有

$$\tilde{f}_*(\partial/\partial t_j)=\overline{\tilde{f}_*(\partial/\partial t_j)}\in\overline{\operatorname{span}_{C^\infty(U')}\{\partial/\partial\overline{w}_1,\dots,\partial/\partial\overline{w}_\nu\}}$$

˜ ˜因此，对所有 j，都有 $f_*(\partial/\partial t_j)=0$，也就是说，$f$ 不依赖于变量 t'_js。

˜ ˜ ˜令 $Jf(z)$ 表示 f的雅可比矩阵。由于 f_*是满射，必要时通过缩小开集 V、V'、V''、U和 U'，并重新排列指标，我们可以假设 f的雅可比矩阵的前˜ $l\times l$块可逆。我们记 $z'=(z_1,\dots,z_l)$，且由于 f不依赖于 t，我们定义函数 $F(z',z'')=(f(z',z'',t_0)\ z'')$。由反函数定理，存在 F^{-1}，且该函数是全纯的。令 $F'(z,t)=(F(z)\ t)$，并注意该函数可逆。我们定义 $\varphi'=F'\circ\varphi$，并以 φ'作为 V上的新坐标，则 f 的局部表示是到 z'上的投影。因此，我们可以通过定义 $\sigma'(z',z'',t)=(z',z''_0,t_0)$，再定义 σ: $U\to M$为$\sigma=\varphi^{-1}\circ\tilde{\sigma}\circ\varphi$，为 f定义一个全纯截面。于是，我们有 $f\circ\sigma=\mathrm{Id}_U$；根据构造，由于 $\tilde{\sigma}$、φ 和 ψ 与结构 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$相容，对所有 $w\in W_x$，都有 $\sigma_*(w)\in V_{\sigma(x)}$。□

命题 4.3. 设 G 是一个赋有左不变椭圆结构$\mathfrak{v}$的紧李群，令 $\mathfrak{k}=\mathfrak{v}\cap\mathfrak{g}$ 为其可积为群 $K=\exp_G(\mathfrak{k})$ 的实部。我们假设 K是闭的，并定义 $\Omega=G/K$，再赋予 Ω 由 $\pi_*(\mathfrak{v})$ 定义、记作 $\mathcal{W}$的复结构。令 $\Omega\times K$ 赋有由 $\mathcal{W}\oplus\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$给出的椭圆结构。则存在 Ω 的一个有限覆盖 $\mathfrak{U}$ 以及 π 在 $U\in\mathfrak{U}$ 上定义的局部截面 $\sigma=\sigma_U$，使得

$$\Phi:(u,k)\in U\times K\mapsto\sigma(u)k\in\sigma(U)K=\pi^{-1}(U)\tag{4.4}$$

满足 $(\Phi_*)_{(u,k)}(X\oplus Y)\in\mathfrak{v}_{\sigma(u)k}$。

证明。由 [HN12] 的命题 15.2.4 和引理 4.2，取 $M=G$ 和 $N=\Omega(=G/K)$，对于每个小开集 $U\subset\Omega$ 以及任意 $k\in K$，存在一个微分同胚

$$\Phi:(u,k)\in U\times K\mapsto\sigma(u)k\in\sigma(U)K=\pi^{-1}(U).\tag{4.5}$$

现在我们必须证明所构造的微分同胚满足

$$(\Phi_*)_{(u,t)}(X\oplus Y)\in\mathfrak{v}_{\sigma(u)k}$$

对所有 $X\oplus Y\in\pi_*(\mathfrak{v})|_u\oplus\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}|_k$。令 $\Psi=\Phi^{-1}$。注意，Ψ: $\pi^{-1}(U)\to U\times K$由 $\Psi(g)=(\pi(g)\ \psi(g))$ 给出，其中 ψ: $\pi^{-1}(U)\to K$是一个光滑函数，其微分在每一点处都是满射。我们有 $\Psi_*(\mathfrak{v})=(\pi_*(\mathfrak{v})\ \varphi_*(\mathfrak{v}))\subset\pi_*(\mathfrak{h})\oplus\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$。由于 Ψ 是一个微分同胚，且 $\mathfrak{v}$ 的秩与 $\pi_*(\mathfrak{v})\oplus\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$的秩相同，因此有 $\Psi_*(\mathfrak{v})=\pi_*(\mathfrak{v})\oplus\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$。□

现在，我们终于可以计算与我们的问题相关联的 Leray谱序列的 E_2 。下文中，Ω 配备由 $\pi_*(\mathfrak{v})$ 诱导的复结构，且 $\mathcal{O}^p$ 表示 Ω 上全纯 p- 形式的层。

命题 4.4. 设 G 是一个连通、紧且半单的李群， $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$是一个椭圆代数。设 $G_{\mathbb{C}}$ 是 G的泛复化。若 $V = \exp^{G_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{v}) \subset G_{\mathbb{C}}$是闭的，则我们考虑 $\Omega = G_{\mathbb{C}}/V = G/K$的两种描述。考虑与商映射 $\varphi\colon G \to \Omega$ 相关联的 Leray谱序列。于是，极限项 4.3 为

$$H^r(\Omega;\mathcal{H}^s) \cong \sum_{r+s=q} H^r(\Omega;\mathcal{O}^p) \otimes H^s(K;\mathcal{S}_{\mathfrak{v}}). \tag{4.6}$$

证明. 根据命题 4.3，存在 Ω 的一个有限开覆盖 $\mathfrak{U}$ ，使得对于每个$U \in \mathfrak{U}$，商映射 $\varphi\colon G \to \Omega$ 都有一个光滑截面 σ ，满足下列映射

$$(u,k) \in U \times K \xmapsto{\Phi} \sigma(u)k \in \sigma(U)K$$

是一个保持可积结构的微分同胚，映到 G的一个开子集上。因此，利用 K¨unneth 公式，我们有

$$H^q(\varphi^{-1}(U);\mathcal{S}^p|_{\varphi^{-1}(U)}) = \sum_{r+s=q} H^r(U,\mathcal{O}^p) \otimes H^s(K,\mathcal{S}_{\mathfrak{v}}).$$

因此，

$$H^r(\Omega;\mathcal{H}^s) \cong \sum_{r+s=q} H^r(\Omega;\mathcal{O}^p) \otimes H^s(K;\mathcal{S}_{\mathfrak{v}}). \tag{4.7}$$

□

5 定理 1.1 的证明

为证明定理 1.1，只需证明命题 2.2。通过证明霍赫希尔德-塞尔谱序列的第 E_2 页（3.5）与 Leray谱序列的第 E_2 页（4.7）之间存在同构，即可证明后者。由于这样的同构存在，因此这两个谱序列的后续页也同构 [Spa95，第 9 章第 1 节，定理 1], ，从而极限项也同构。由维数关系可知，这意味着同态（1.1）既是单射也是满射。

现在，我们构造 Hochschild-Serre 谱序列的第 E_2 页与 Leray谱序列的第 E_2 页之间的同构。由 [CE48], 的定理 2.2 和 2.4 可知 $H^s(K,\mathcal{S}_{\mathfrak{v}}) \cong H^s(\mathfrak{k})$；由 [Bot57], 的定理 II 可知 $H^r(\Omega\ \mathcal{O}^p) = H^r(\mathfrak{v},\mathfrak{k},C^p(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{v})^*)$，其中 v通过伴随作用作用于 $C^p(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{v})^*$。证明最后通过考察这些同构的乘积与和得出结论。

6 开放问题

为推动这一领域的进一步研究，我们列出一些由本文工作自然引出的开放问题。这些问题包括研究与椭圆和非椭圆李子代数相关的上同调类，以及研究齐性流形上的左不变结构。

1. 是否可以对所有满足相关李群$V = \exp^{G_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{v})$为闭的椭圆李代数 $\mathfrak{v}$进行分类?

2. 请注意，定理 1.1 对赋有闭椭圆结构的连通紧致半单李群成立。若将 G 换成环面，则无需假设相关的 V 为闭的，同样的结果仍然成立（参见 [Jah21，命题 5.11]）。利用 K¨unneth 公式，对于连通紧致李群，只要椭圆结构是椭圆结构的乘积，也可以得到类似的结果。能否在不对 $\mathfrak{v}$施加进一步代数限制的情况下，将主要结果推广到连通紧致李群上的一般闭椭圆结构?

3. 对于一般情形，即 G 是连通的紧李群、 $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 是椭圆代数，且不施加任何拓扑条件时，$H^{p,q}(G;\mathfrak{v})$ 中的每个上同调类是否都有一个左不变代表元，这个问题仍未解决。

4. 在我们的工作中，Bott 定理是一项重要工具。该定理为特定紧致齐性流形上的 Dolbeault 上同调提供了代数描述。然而，我们的研究引出了两个问题。首先，我们能否通过放宽对流形施加的某些拓扑约束来改进 Bott 的结果？其次，是否可以推广 Bott 定理，使其涵盖具有左不变椭圆结构的紧致齐性流形?

回答这些问题需要进一步研究，并可能为理解紧李群和齐性流形上拓扑、解析与代数结构之间的相互作用带来有价值的见解。

参考文献

[Ara19] G. Ara´ujo. 紧致李群上左不变微分系统的整体正则性与可解性。Ann. Global Anal. Geom., 56(4):631–665, 2019.[BCH08] S. Berhanu、P. D. Cordaro 和 J. Hounie。《对合结构导论》，New Mathematical Monographs 第 6 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2008.[BJ21] G. Bor 和 H. Jacobowitz。三维李群上的左不变 CR 结构。Complex Anal. Synerg., 7(3):Paper No. 23, 18, 2021.[Bot57] R. Bott。齐性向量丛。Ann. of Math. (2), 66:203–248, 1957.[BT82] R. Bott 和 L. W. Tu。《代数拓扑中的微分形式》，Graduate Texts in Mathematics 第 82 卷。施普林格出版社，纽约–柏林，1982.[CE48] C. Chevalley 和 S. Eilenberg。李群与李代数的上同调理论。Trans. Amer. Math. Soc., 63:85–124, 1948.[CK04] J-Y. Charbonnel 和 H. O. Khalgui。紧致李群不变 CR 结构的分类。J. Lie Theory, 14(1):165–198, 2004.[FH91] W. Fulton 和 J. Harris。《表示论》，Graduate Texts in Mathematics 第 129 卷。施普林格出版社，纽约，1991。入门课程，Mathematics 读物系列。[HN12] J. Hilgert 和 K-H. Neeb。《李群的结构与几何》。Springer Monographs in Mathematics。Springer，纽约，2012。

[HS53] G. Hochschild 和 J.-P. Serre。李代数上同调。Ann. of Math. (2), 57:591–603, 1953.[Jah21] M. R. Jahnke。紧致李群上的椭圆型对合结构。即将发表于 Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 理学部，2021 年。[JJ21] H. Jacobowitz 和 M. R. Jahnke。紧致李群上的 Levi平坦CR结构。arXiv 预印本 arXiv:2106.09182，2021。已提交发表。手稿可在 arXiv:2106.09182 查阅。[Kor14] E. O. Korman。椭圆型对合结构与广义 Higgs代数丛。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2014。博士论文——宾夕法尼亚大学。[Pit88] H. V. Pittie。紧致偶维李群的 Dolbeault上同调环。《印度科学院数学科学学报》，98(2-3):117–152, 1988.[Spa95] E. H. Spanier。《代数拓扑》。施普林格出版社，纽约，[1995]。1966 年原版的校订重印本。[Tre92] F. Treves。《亚解析结构》，普林斯顿数学丛书第 40 卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1992。局部理论。