arXiv:2303.14775v2 [math.GT] 1 Feb 2024

关于亨佩尔对与 Turaev–Viro 不变量

刘毅

Abstract. 由周期映射类产生的曲面丛，其基本群有时并不同构，却在仿有限意义下同构。Hempel 发现了这类配对。本文给出了一些非平凡亨佩尔对的示例：其中，映射环面可由某些 Turaev–Viro 不变量区分；另一些则无法由任何 Turaev–Viro 不变量区分。

1. 引言

设 S 为连通闭可定向曲面。记 Mod(S) 为 S的映射类群，其元素是 S的保定向自同胚的同伦类。

我们所说的亨佩尔对，是指一对阶相同的周期映射类 $[f_A], [f_B] \in$Mod(S)，其阶为 $d \geq 1$，且对某个与 d互素的整数 k，有 $[f_B] = [f_A^k]$ 成立。因此，对d模 k 的任一同余逆元 k^* （即 $k^*k \equiv 1$模 d），都有 $[f_A] = [f_B^{k^*}]$ 成立。Hempel 在其论文 [Hem14], 中研究了这类配对，并发现其映射环面 M_A 和 M_B 的基本群总是具有相同的有限商群（同构类型）集合。这等价于说， $\pi_1(M_A)$与 $\pi_1(M_B)$的仿有限完备化是同构群。Hempel 发现了基本群不同构的此类配对示例。这等价于说， M_A 和 M_B 并非同胚的三维流形。

我们称 $[f_A]$ 和 $[f_B]$ 为非平凡的亨佩尔对，若 M_A 和 M_B 不同胚。当 S 是球面或环面时，不存在非平凡的亨佩尔对，因为该条件迫使 $d = 1$ 或 $d \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$，进而有 $k = \pm 1$。当 S 的亏格为 2 时，可以得到一个阶为 5 的非平凡亨佩尔对。非平凡的亨佩尔对为构造不同的三维流形对提供了途径，而这些流形对无法通过其形有限基本群加以区分。近年来，在三维流形领域，关于哪些拓扑不变量由形有限基本群决定这一问题引发了大量富有成果的研究。有关这一快速发展的课题的早期综述，参见 [Rei18] 和 [LiuS22，第 9] 节。

Turaev–Viro 不变量是闭三维流形的拓扑不变量，最初是利用量子 6j 符号构造的 [TurV92]。显然，它们通常不是形有限不变量，因为它们在所有透镜空间上的显式取值已表明这一点 [Sok97]。与此同时，圆上的环面丛有许多彼此不同胚的例子，其单值化是 Anosov 的，并且在 Mod(T^2) $\cong \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ 的每个同余商中都互为共轭或逆共轭。这些环面丛具有同构的

Date: 2024年2月2日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号57K31；次要分类号57K16。*Key words and phrases.* 仿有限完备化、映射类群、Turaev–Viro不变量。部分受国家自然科学基金项目11925101和国家重点研发计划2020YFA0712800资助。

形有限基本群。Funar 证明，没有任何 Turaev–Viro 不变量（关联于任意球面融合范畴）能够区分这些环面丛 [Fun13，命题 1。1]。

本文探讨 Turaev–Viro 不变量能否区分非平凡的 Hempel 对。我们仅讨论最常被提及的 SU(2) 和 SO(3) Turaev–Viro 不变量。对于任意整数 $r \geq 3$ 以及与 r 互素的任意整数 s，SU(2) 系列可完整列为 $\mathrm{TV}_{r,s}$；对于任意奇整数 $r \geq 3$ 以及与 r 互素的任意偶数 s，SO(3) 系列可完整列为 $\mathrm{TV}'_{r,s}$。更简洁地说，只需关注 TV_r，1（r 为偶数）和 $\mathrm{TV}'_{r,r-1}$（r 为奇数），以及仅取决于 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上同调环的 $\mathrm{TV}_{3,1}$ 和 $\mathrm{TV}_{3,2}$，。这些不变量可以确定其余所有不变量。记号及更多背景介绍见第 3 节。

我们的结论可概括如下。

定理 1.1。

(1) 对任意不等于 6 的整数 $d \geq 5$，都存在一个阶为 d 的非平凡亨佩尔对，使得其映射环面可由某个 SU(2) Turaev–Viro不变量区分；若 d 为奇数，也可由某个 SO(3) Turaev–Viro不变量区分。(2) 对任意素数 $p \geq 5$，都存在一个阶为 p 的非平凡亨佩尔对，使得其映射环面无法由任何 SU(2) 或 SO(3) Turaev–Viro 不变量区分。

定理1.1 在第5 节通过展示具体的示例族得以证明。我们最简单的可区分亨佩尔对，其阶为 d，亏格为 $d-2 \geq 3$。我们最简单的不可区分非平凡亨佩尔对，其素数阶为 p，亏格为 $(p-1)/2 \geq 2$。

本文的技术核心是以下计算。

定理 1.2. 设 $a \geq 3$ 为一个整数，b_1、$\cdots$、b_n 为与 a 互素的整数。设 M 为一个塞弗特纤维空间，其轨形基底和塞弗特纤维化均可定向，且其符号为 $(g; (a, b_1) \cdots, (a, b_n))$. 假设 $g \geq 0$，且 $a > n \geq 0$，且 $b_1 + \cdots + b_n = 0$。

(1) 若存在某个与 a 互素的整数 b^*，且 ν_1、$\cdots$、$\nu_n \in \{\pm 1\}$ 满足 $b^* b_j \equiv \nu_j \bmod a$，对所有 $j \in \{1, \cdots, n\}$ 均成立，则对任意与 a 互素的 s，

$$\mathrm{TV}_{a,s}(M) = \frac{a^{n+2g-2}}{2^{2n+2g-4}} \cdot \frac{1}{\sin^{2n+4g-4}(\pi b^* s/a)},$$

此外，若 a 为奇数且 s 为偶数，

$$\mathrm{TV}'_{a,s}(M) = \frac{a^{n+2g-2}}{2^{2n+4g-4}} \cdot \frac{1}{\sin^{2n+4g-4}(\pi b^* s/a)}.$$

(2) 否则，对于任意可被 a 整除的整数 $r \geq 3$，以及任意与 r 互素的整数 s，

$$\mathrm{TV}_{r,s}(M) = 0,$$

此外，如果 r 为奇数且 s为偶数，

$$\mathrm{TV}'_{r,s}(M) = 0.$$

参见第 2 节，了解关于塞弗特纤维空间及其符号标准记号的综述。

定理 1.2 在第 4 节中得到证明，证明方法是应用一个计算可定向闭塞弗特纤维空间的 Witten–Reshetikhin–Turaev 不变量的通用公式 τ_r 。我们所采用的精确公式归功于 Hansen [Han01], ，而类似的特殊情形计算或采用相同策略的计算也见于许多其他文献，例如参见 [And13、LawR99、Roz96、Tan07]。

定理 1.2 最初是通过（在计算机上）测试塞弗特纤维空间的样本，并观察有趣的现象而提出的。幸运的是，我们发现了定理 1.2中的假设，它们极大地简化了问题情形和答案。

在附录中，我们证明一个分裂公式

$$\mathrm{TV}_{r,s}(M) = \mathrm{TV}_{3,1}(M) \cdot \mathrm{TV}'_{r,r-s}(M)$$

适用于 r 奇数和 s 奇数。这补充了一个早先的公式

$$\mathrm{TV}_{r,s}(M) = \mathrm{TV}_{3,2}(M) \cdot \mathrm{TV}'_{r,s}(M)$$

适用于 r 奇数和 s 偶数的公式，该公式由 Detcherry、Kalfagianni 和 Yang [DetKY18，定理 29]证明。我们在附录中的证明自动涵盖了不可定向情形，不过对于我们的应用而言，可定向情形已足够。

本文结构如下。第2节回顾关于周期映射环面作为有理欧拉数为零的塞弗特纤维空间的初步描述。第3节回顾 Turaev–Viro 不变量。第4节证明定理1.2。第5节证明定理1.1。附录A给出一个初等证明，证明上述关于奇数 r 和奇数 s下的 SU(2) Turaev–Viro 不变量分裂公式。

致谢。作者感谢 Yuxuan Yang 对本文初稿提出的宝贵意见。

2. 周期映射环面

设 S 是一个连通可定向闭曲面。映射类群 Mod(S)由S的所有保定向自同胚的同伦类组成。对于任意映射类 $[f] \in$ Mod(S)，记其映射环面为 M_f

$$M_f = \frac{S \times \mathbb{R}}{(f(x), r) \sim (x, r+1)},$$

它自然地以定向圆 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 为底纤维化，纤维类型为 S，且（逆向）单值化类型为 $[f]$。映射环面 M_f 是一个连通、可定向的闭 3 维流形，其同胚类型仅取决于 $[f]$。

一个 周期映射类 是指有限阶的映射类。在这种情况下，其映射环面是一个塞弗特纤维空间。塞弗特纤维化在可定向轨形基底上是可定向的，且有理欧拉数为零。此外，任意周期映射环面上的塞弗特纤维化在同伦意义下是唯一的。反过来，任何具有可定向轨形基底和有理欧拉数为零的可定向塞弗特纤维化的闭塞弗特纤维空间，都可表示为某个周期映射类的映射环面。此外，曲面的亏格以及周期映射类在取逆之前的共轭类都唯一。由此，周期映射类也可以等价地通过其映射环面作为塞弗特纤维空间的符号来描述。（参见 [AscFW15，第 1]章。）

最一般的符号描述了具有所有特征的任意（连通、紧致）塞弗特纤维空间，允许轨形基底不可定向、塞弗特纤维化不可定向以及边界非空。讨论周期映射类时，我们只需考虑具有可定向轨形基底和可定向塞弗特纤维化的闭塞弗特纤维空间，其（可能未规范化的）符号记作

$$(g;(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)) \tag{2.1}$$

其中 $g \geq 0$ 为整数， $a_j \geq 1$ 为整数，且 b_j 为与 a_j互素的整数，对所有 $j \in \{1,\cdots,n\}$均成立。此符号表示一个塞弗特纤维空间（带标准定向），其构造如下。

取一个乘积三维流形 $\Sigma \times S^1$，它是亏格为 g的连通闭可定向曲面 Σ 与一个定向圆 S^1的乘积；取 n 个互不相交的嵌入圆盘 D_1、$\cdots$、$D_n \subset \Sigma$；从 $\Sigma \times S^1$中移除实心环面 $D_j \times S^1$，再以其他方式填入实心环面，使得 $\partial D_j \times S^1$ 上的斜率 $a_j[\partial D_j]+b_j[S^1]$ 围成新实心环面中的圆盘。

此塞弗特纤维空间的底空间是一个亏格为 g、带有 n 个阶为 a_1、$\cdots$、a_n的锥点（当 $a_j = 1$时为普通且可忽略）的连通闭可定向二维轨形。其轨形欧拉示性数等于 $2-2g-\sum_j(1-1/a_j)$。塞弗特纤维化的有理欧拉数等于 $-\sum_j b_j/a_j$，其中负号源于我们对 ∂D_j定向所采用的约定（该定向由D_j的定向诱导，而非由 $S \setminus (D_1 \cup \cdots \cup D_n)$ 诱导）。

以下对符号进行的操作不会改变所得塞弗特纤维空间的同胚类型：重新排列所有的 (a_j,b_j)；插入或删除一项 $(1,0)$；同时将一个 (a_j,b_j) 替换为 (a_j,b_j+a_j)，并将另一个 $(a_{j'},b_{j'})$ 替换为 $(a_{j'},b_{j'}-a_{j'})$；或者同时将所有 (a_j,b_j) 替换为 $(a_j,-b_j)$。注意，只有最后一种操作会改变所得塞弗特纤维空间在保定向同胚下的同胚类型。

同胚的周期映射环面的符号都可以通过有限次上述操作相互转化。这是塞弗特纤维空间分类的一个特例（参见 [Orl72，定理 1。10]或 [Hem76，第 12]章）。

以下引理 2.1 和 2.2实际上以等价形式见于 [Hem14] 。为供读者参考，我们在此给出简短（且略有不同）的证明。

引理 2.1. 设 M 是一个闭塞弗特纤维空间，其轨形基底和塞弗特纤维化均可定向，且符号为 $(g;(a_1,b_1)\ \cdots,(a_n,b_n))$。若该塞弗特纤维化的有理欧拉示性数为零，则 M 同胚于周期映射类 $[f] \in \mathrm{Mod}(S)$ 的映射环面 M_f。此外， $[f]$的阶为 $d = \mathrm{lcm}(a_1,\cdots,a_n)$，且 S 的亏格为 $1+(g-1)d+\sum_j(1-1/a_j)d/2$。

证明。底空间 $\mathcal{O}$ 的轨形基本群具有如下表示：生成元为 $x_1,y_1,\cdots,x_g,y_g,s_1,\cdots,s_n$，关系为 $[x_1,y_1]\cdots[x_g,y_g]=s_1\cdots s_n$ 和 $s_1^{a_1}=\cdots=s_n^{a_n}=1$。在有理欧拉数为零的假设下，赋值 $x_i \mapsto 0$ 模 d、 $y_i \mapsto 0$模 d 以及 $s_j \mapsto -b_j d/a_j$ 模 d 定义了一个良定义的满同态 $\pi_1(\mathcal{O}) \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$，其中 $d=$为 $\mathrm{lcm}(a_1,\cdots,a_n)$。该同态的核对应于一个次数为 d 的循环轨形覆盖 $S \to \mathcal{O}$，其没有奇异锥点。生成元 $1 \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ 对应于一个甲板变换，表示一个阶为 d 的周期映射类 $[f] \in \mathrm{Mod}(S)$。容易验证， M_f 与 M同胚。欧拉

曲面 S 的示性数等于 $\mathcal{O}$的有理欧拉数的 d 倍，这意味着 S的亏格正如所述。□

引理 2.2. 设 S 是一个连通、闭的可定向曲面，且 $[f] \in \mathrm{Mod}(S)$ 是一个阶为 d 的周期映射类。若映射环面 M_f 的符号为 $(g; (a_1, b_1) \cdots, (a_n, b_n))$，那么对任意与 d 互素的整数 k，迭代映射 $[f^k] \in \mathrm{Mod}(S)$ 的映射环面 M_{f^k} 的符号为 $(g; (a_1, b_1k^*) \cdots, (a_n, b_nk^*))$，其中$k^*$ 是满足 $kk^* \equiv 1 \mod d$ 的任意整数。

证明. 映射环面 M_{f^k} 自然地以 k 次覆盖 M_f 。由于f 的阶为 k，我们还可得 M_f 以 k^* 次覆盖 M_{f^k} 。考虑覆盖 $M_f \to M_{f^k}$。 M_{f^k} 上塞弗特纤维化的拉回，是 M_f 上的塞弗特纤维化。若 M_f 的符号为 $(g; (a_1, b_1) \cdots, (a_n, b_n))$，根据定义，$(\Sigma \setminus (D_1 \cup \cdots \cup D_n)) \times S^1 \subset M_{f^k}$ 的原像也是一个乘积 $(\Sigma \setminus (D_1 \cup \cdots \cup D_n)) \times S^1 \subset M_f$；而 M_f 中的普通纤维（即 $* \times S^1$）以 k^* 次覆盖 M_{f^k} 中的普通纤维。由于$\partial D_j \times S^1$ 上的斜率 $a_j[D_j] + b_j[S^1]$ 在 M_f 中同伦平凡， $\partial D_j \times S^1$ 上的斜率 $a_j[D_j] + b_jk^*[S^1]$ 在 M_k 中也同伦平凡。因此，$(g; (a_1, b_1k^*) \cdots, (a_n, b_nk^*))$ 是 M_{f^k} 的一个符号。□

3. Turaev–Viro invariants

Turaev–Viro 不变量是闭三维流形的拓扑不变量，源自单位根处量子群的表示论。在本文中，我们只讨论与最基本的量子群 $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}_2)$有关的 Turaev–Viro 不变量。在这种情形下，基本上有两个系列，即适用于所有整数 $r \geq 3$ 的 SU(2) Turaev–Viro 不变量 TV_r ，以及适用于所有奇整数 $r \geq 3$ 的 SO(3) Turaev–Viro 不变量 TV'_r 。

本文中的闭流形仅指边界为空的紧流形，可以是不连通的，也可以是不可定向的。

3.1. 抽象版本。设 $q^{1/2}$ 是单位根 $q \neq \pm 1$ 的一个平方根。用 $r \geq 3$ 表示 q 的阶。注意，当 r 为偶数时， $q^{1/2}$ 的阶必须为 $2r$ ；但当 r 为奇数时，其阶可以为 $2r$ 或 r 。我们用 $\mathbb{Q}(q^{1/2})$ 表示由 $q^{1/2}$ 生成的抽象分圆域。

对于任意闭三维流形 M，Turaev–Viro 不变量 $\mathrm{TV}(M; q^{1/2})$ 可在 $q^{1/2}$ 处定义；若 r 为奇数，则精化图拉耶夫–维罗不变量 $\mathrm{TV}'(M; q^{1/2})$ 可在阶为 r 的 $q^{1/2}$ 处定义。$\mathrm{TV}(M; q^{1/2})$ 和 $\mathrm{TV}'(M; q^{1/2})$ 都是 M 的拓扑不变量，其取值完全实，且属于 $\mathbb{Q}(q^{1/2})$。我们分别称 TV 和 TV′ 为 $q^{1/2}$ （或层级$r-2$）处的抽象 SU(2) 和抽象 SO(3) Turaev–Viro 不变量。

除附录外，后文不需要了解这些不变量实际构造的太多细节。为清晰起见，我们在下面记录这些细节。

设 $\mathscr{T} = (V, E, F, T)$ 为任意有限单纯 3-复形，其中这些项分别表示顶点、边、面和四面体的集合。记 $I_r = \{0, 1, \cdots, r-2\}$。若三元组 $(i, j, k) \in I_r \times I_r \times I_r$ 中的数值 $(i+j+k)/2$、$(i+j-k)/2$、$(j+k-i)/2$、$(k+i-j)/2$ 均属于 I_r，则称其为容许三元组。$(M, \mathscr{T})$ 的可容许着色（层级为 $r-2$）是指映射 c: $E \to I_r$，使得在任意一个面上，各边的颜色（即 c 的取值）构成一个容许三元组。

用 $\mathcal{A}_r = \mathcal{A}_r(M, \mathscr{T})$ 表示所有层级为 $r-2$ 的可容许着色构成的集合。若 r 为奇数，则用 $I'_r = \{0, 2, \cdots, r-3\}$ 表示 I_r 中偶数元素构成的子集。用 $\mathcal{A}'_r = \mathcal{A}'_r(M, \mathscr{T})$ 表示 $\mathcal{A}_r$ 中取值属于 I'_r 的可容许着色构成的子集。

设 M 是一个（可能不连通、可能不可定向的）闭三维流形。取 M 的一个三角剖分 $\mathscr{T} = (V, E, F, T)$。则 M 在 $q^{1/2}$ 处的 TV 和 TV′ 不变量可用 $\mathscr{T}$ 表示如下:

$$\mathrm{TV}\left(M; q^{1/2}\right) = \left(\frac{(q^{1/2} - q^{-1/2})^2}{-2r}\right)^{|V|} \cdot \sum_{c \in \mathcal{A}_r} |\mathscr{T}|_c ; \tag{3.1}$$

若 r 为奇数且 $q^{1/2}$ 的阶为 r,

$$\mathrm{TV}'\left(M; q^{1/2}\right) = \left(\frac{(q^{1/2} - q^{-1/2})^2}{-r}\right)^{|V|} \cdot \sum_{c \in \mathcal{A}'_r} |\mathscr{T}|_c , \tag{3.2}$$

其中 $|V|$ 表示 $\mathscr{T}$ 中顶点的数量，而 $|\mathscr{T}|_c$ 的解释见下文记号 3.1 。请注意，我们采用了 [DetKY18，附录 A], 中的重新表述，其中 $|e|_c$、$|f|_c$和 $|t|_c$ 中的因子分组方式与 [TurV92], 略有不同，以避免不必要的平方根。

事实证明，上述表达式在 $\mathbb{Q}(q^{1/2})$ 中的取值与辅助选择的三角剖分 $\mathscr{T}$ [TurV92]无关。因此，TV(M; $q^{1/2}$) 和 TV′(M; $q^{1/2}$) 确实是 M的拓扑不变量。

记号 3.1。

(1) 记

$$[n]! = \begin{cases} [1] \cdot [2] \cdot \cdots \cdot [n] & n = 1, 2, \cdots, r-1 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

其中

$$[n] = \frac{q^{n/2} - q^{-n/2}}{q^{1/2} - q^{-1/2}}.$$

注意，量子整数 $[1], [2], \cdots, [r-1]$ 在 $\mathbb{Q}(q^{1/2})$ 中取全实的非零值，因为 q 是一个本原 r 次单位根（$r \geq 3$）。

(2) 对任意 $e \in E$ 和 $c \in \mathcal{A}_r$,

$$|e|_c = (-1)^i \cdot [i+1]$$

其中 i 是 e 在 c 下的颜色。

(3) 对于任意 $f \in F$和 $c \in \mathcal{A}_r$,

$$|f|_c = (-1)^{-S} \cdot \frac{[S-i]! \cdot [S-j]! \cdot [S-k]!}{[S+1]!}$$

其中 i、j、k是 f在 c下的边颜色，且 $S = (i+j+k)/2$。(4) 对于任意 $t \in T$和 $c \in \mathcal{A}_r$, 记

$$|t|_c = \sum_z \frac{(-1)^z \, [z+1]!}{\prod_a [z - T_a]! \cdot \prod_b [Q_b - z]!}$$

其中，(i, j, k)、(i, m, n)、(j, l, n)、(k, l, m) 是 t 在 c 下各面的边颜色；并且 $T_1 = (i+j+k)/2$、$T_2 = (i+m+n)/2$、$T_3 = (j+l+n)/2$、$T_4 = (k+l+m)/2$、$Q_1 = (i+j+l+m)/2$、$Q_2 = (i+k+l+n)/2$,

$Q_3 = (j+k+m+n)/2$。指标 a 取值于 $\{1,2,3,4\}$，b 取值于 $\{1,2,3\}$，而 z 从 $\max_a T_a$ 到 $\min_b Q_b$。

(5) 对任意 $c \in \mathcal{A}_r$，记

$$|\mathscr{T}|_c = \prod_{e\in E} |e|_c \cdot \prod_{f\in F} |f|_c \cdot \prod_{t\in T} |t|_c.$$

3.2. 特化版本。在文献中，SU(2) 和 SO(3) Turaev–Viro 不变量通常指在常见的复单位根处对抽象版本进行特化所得的结果。确切地说，它们指下文的数值 TV_r and TV'_r。

记号 3.2. 设 $r \geq 3$ 为一个整数，且 s 为与 r 互素的整数。以下表达式均通过对 $\mathbb{Q}(q^{1/2}) \to \mathbb{C}$ 进行特化来求值。

(1) 记

$$\mathrm{TV}_{r,s}(M) = \mathrm{TV}\left(M; q^{1/2} = e^{\sqrt{-1}\cdot\pi s/r}\right),$$

(2) 若 r 为奇数且 s 为偶数，记

$$\mathrm{TV}'_{r,s}(M) = \mathrm{TV}'\left(M; q^{1/2} = e^{\sqrt{-1}\cdot\pi s/r}\right).$$

（3）在非正式讨论中，我们常写作 TV_r 和 TV'_r，并默认 s 已固定。

引理 3.3. 设 M、N 为任意闭三维流形。

（1）$\mathrm{TV}_{r,\,s}(M) \in \mathbb{R}$。（2）$\mathrm{TV}_{r,\,s}(M \sqcup N) = \mathrm{TV}_{r,\,s}(M) \cdot \mathrm{TV}_{r,\,s}(N)$。（3）$\mathrm{TV}_{r,\,s}(S^2 \times S^1) = 1$.

若 r 为奇数且 s 为偶数，则将 $\mathrm{TV}_{r,\,s}$ 替换为 $\mathrm{TV}'_{r,\,s}$ 后，相同的结论仍然成立。

第一个结论可直接由以下观察得出：TV 和 TV′可以写成 $\mathbb{Q}$ 上的有理函数，变量为 $[1]$，$\cdots$，$[r-1]$ 以及 $(q^{1/2} - q^{-1/2})^2$；参见（ 3 1 3 2 3 1 $[n] = \pi sn/r / \pi s/r$ $q^{1/2} -$ 。）、$q^{-1/2\ 2} = -4^{\ 2}\ \pi s/r$ $q^{1/2} = e^{\sqrt{-1}\cdot\pi s/r}$（。）以及记号 。。注意，在 [TurV92第 8.1.B 节]。

引理 3.4. 设 M 为任意闭三维流形。

(1) $\mathrm{TV}_{r,s}(M) = \mathrm{TV}_{r,-s}(M) = \mathrm{TV}_{r,s+2r}(M)$。若 r 为奇数且 s 为偶数，则以 TV′ 代替 TV 时，同样的恒等式仍成立。(2) 若 s 为奇数，则 $\mathrm{TV}_{r,s}(M)$ 与 $\mathrm{TV}_{r,1}(M)$ 伽罗瓦共轭；若 s 为偶数（因此 r 为奇数），则 $\mathrm{TV}_{r,s}(M)$ 与 $\mathrm{TV}_{r,r-1}(M)$ 伽罗瓦共轭。若 r 为奇数且 s 为偶数，则以 $\mathrm{TV}'_{r,s}$ 代替 $\mathrm{TV}_{r,s}$ 时，同样的结论仍成立。(3) 若 r 为奇数，

$$\mathrm{TV}_{r,s}(M) = \begin{cases} \mathrm{TV}_{3,2}(M) \cdot \mathrm{TV}'_{r,s}(M) & s\ even \\ \mathrm{TV}_{3,1}(M) \cdot \mathrm{TV}'_{r,r-s}(M) & s\ odd \end{cases}$$

(4) 记 β_i 为 $H_i(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上的维数，并记 $w_1 \in H^1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 为 M 的第一 Stiefel–Whitney 类。

$$\mathrm{TV}_{3,2}(M) = 2^{-\beta_0(M)+\beta_2(M)},$$

and

$$\mathrm{TV}_{3,1}(M) = 2^{-\beta_0(M)} \cdot \sum_t (-1)^{\langle t^3 + w_1^2 t, [M]\rangle}$$

其中指标 t 取遍 $H^1(M;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$。

第一条和第二条显然都是由定义表达式直接得出的性质。

第三条结论在 s 为偶数时由 Detcherry、Kalfagianni 和 Yang [DetKY18 的定理 2 证明。9], 当 s 为奇数且假设 M 可定向时，则可由众所周知的事实轻易推出（参见引理3.6 和3.7）。附录 A 节给出了一个不要求可定向性的证明A。

第四条结论中 $\mathrm{TV}_{3、s}$ 的公式出自图拉耶夫和维罗[TurV92，第 9.3.A 节]。

3.3. 与 Witten–Reshetikhin–Turaev 不变量的关系。 对于连通、可定向的闭三维流形，Witten–Reshetikhin–Turaev 不变量在保向同胚下保持不变。这些不变量由 Witten 提出[Wit89], ，而第一个严格的数学构造则由 Reshetikhin 和 Turaev 完成 [ResT91]。

沿用 Kirby 和 Melvin [KirM91], 的记号，我们用 τ_r 表示对任意整数 $r \geq 3$ 定义的 SU(2) Witten–Reshetikhin–Turaev 不变量，用 τ'_r 表示对任意奇整数 $r \geq 3$定义的 SO(3) Witten–Reshetikhin–Turaev 不变量。注意， τ_r 是 Reshetikhin 和 Turaev [ResT91], 最初构造的轻微修改，两者相差一个绝对值为 1 的因子（取决于第一贝蒂数）；而 τ'_r 由 Kirby 和 Melvin [KirM91，第 8]节引入。按定义，不变量 τ_r 对应于第 $4r$个本原复单位根 $q^{1/4} = e^{\sqrt{-1}\cdot 2\pi/4r}$；而当 r 为奇数时， τ'_r 通过修改 τ_r的定义表达式得到。在适当的解释下，τ'_r 似乎对应于第 $2r$个本原复单位根 $q^{1/4} = e^{\sqrt{-1}\cdot\pi(r-1)/4r}$（参见 [BlaHMV92，定理 B]）。 τ_r 和 τ'_r 的取值均在 $\mathbb{C}$中。

以下性质刻画了 τ_r 和 τ'_r的规范化。

引理 3.5. 设 M, N 是任意连通可定向闭三维流形。

(1) $\tau_r(M) = \overline{\tau_r(-M)}$.
(2) $\tau_r(M\#N) = \tau_r(M)\cdot\tau_r(N)$.
(3) $\tau_r(S^2\times S^1) = \sqrt{r/2}\,/\sin(\pi/r)$. *Hence,* $\tau_r(S^3) = 1$.

若 r 为奇数，则将 τ_r替换为 τ'_r 、将$\sqrt{r/2}$替换为 $\sqrt{r/4}$ ，相同的陈述仍成立。

参见 [KirM91，第 1 节及 (5.11)] 以及 [BlaHMV92，命题 6。10]。

引理 3.6. 设 M 为任意连通可定向闭三维流形。若 r 为奇数，

$$\tau_r(M) = \begin{cases} \tau_3(M)\cdot\tau'_r(M) & r \equiv 3 \bmod 4 \\ \overline{\tau_3(M)}\cdot\tau'_r(M) & r \equiv 1 \bmod 4 \end{cases}$$

参见[KirM91，推论 8.9 及定理 8。10]。另参见 [KirM91，定理 6。11]关于以经典拓扑不变量刻画 $\tau_3(M)$ 的内容。

Turaev–Viro 不变量 TV_r 和 TV'_r 本质上是 Witten–Reshetikhin–Turaev 不变量的绝对值平方，具体而言如下所示。

引理 3.7. 设 M 是一个连通闭三维流形。设 $r \geq 3$ 是任意整数。

(1) 若 M 是可定向的,

$$\frac{\mathrm{TV}_{r,1}(M)}{\mathrm{TV}_{r,1}(S^3)} = |\tau_r(M)|^2,$$

且若 r 为奇数,

$$\frac{\mathrm{TV}'_{r,r-1}(M)}{\mathrm{TV}'_{r,r-1}(S^3)} = |\tau'_r(M)|^2.$$

(2) 若 M 不可定向,

$$\frac{\mathrm{TV}_{r,1}(M)}{\mathrm{TV}_{r,1}(S^3)} = \tau_r(W),$$

且若 r 为奇数,

$$\frac{\mathrm{TV}'_{r,r-1}(M)}{\mathrm{TV}'_{r,r-1}(S^3)} = \tau'_r(W),$$

其中， W 表示 M的可定向连通双覆盖。注意，W 可以规范地构造，并带有规范定向和一个保定向的甲板变换。

(3)

$$\mathrm{TV}_{r,1}(S^3) = \frac{2}{r}\cdot \sin^2(\pi/r),$$

且若 r 为奇数,

$$\mathrm{TV}'_{r,r-1}(S^3) = \frac{4}{r}\cdot \sin^2(\pi/r).$$

参见 [Tur94，定理 4.1.1 和 4.4。1]其中系统地证明了有关 TV_r公式的结果；另请参见 [Rob95]，其中给出了可定向情形下有关 TV 的优雅证明$_r$。有关 TV'_r 的公式可利用引理3.6 和 3.4，从 $\mathrm{TV}_{r,\,1}(S^3)$ 和 $\mathrm{TV}'_{r,\,r-1}(S^3)$ 的公式轻易推导得出。取 $M = S^2 \times S^1$ 并应用引理 3.3 和 3.6，即可立即得到 $\mathrm{TV}_{r,\,1}(S^3)$ 和 $\mathrm{TV}'_{r,\,r-1}(S^3$的值。

3.4. TQFT 视角。 Turaev–Viro 不变量属于（2+1）维拓扑量子场论（TQFT）的一般框架 [Ati89]。下面我们将重点描述 SU(2) Turaev–Viro 不变量。关于 SO(3) 图拉耶夫–维罗不变量的讨论完全类似。

Turaev 和 Viro 构造了一个函子 $\mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}$，它将（2+1）维协边范畴映到抽象分圆域 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(q^{1/2})$ 上的厄米向量空间（及线性同态）范畴，其中的对合 $*$ 作用于 $\mathbb{K}$，由伽罗瓦变换 $q^{1/2} \mapsto q^{-1/2}$ 给出。对于任意可定向闭曲面 S，都有一个有限维向量空间 $\mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(S)$，并配备一个非退化厄米配对

$$\langle _, _ \rangle \colon \mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(S) \times \mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(S) \to \mathbb{K}.$$

（厄米意味着 $\mathbb{K}$–半双线性且 $*$–对称。）对于任意从 S_0 到 S_1 的协边 M（即一个带有二分边界$\partial M = \partial_- M \sqcup \partial_+ M = (-S_0) \sqcup S_1$ 的可定向紧三维流形 M，模去固定边界的同胚），都有一个线性同态

$$\mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(M) \colon \mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(S_0) \to \mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(S_1).$$

该赋值 $\mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}$ 是函子性的，并满足阿蒂亚的厄米 TQFT 公理[Ati89，第 2]： $\mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(-S) = \mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(S)^*$； $\mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(-M) = \mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(M)^*$； $\mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(S' \sqcup S'') =$

$\mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(S') \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(S'')$；且 $\mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(\emptyset) = \mathbb{K}$，（$\emptyset$ 表示空曲面，按惯例具有唯一的定向）。

图拉耶夫和维罗证明，TV 来自上述函子 $\mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}$，即满足恒等式

$$\mathrm{TV}\left(M; q^{1/2}\right) = \mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(M)$$

对任意闭三维流形都成立 M。这里，M 被视为空曲面之间的协边，而 $\mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(\emptyset, \emptyset) = \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K})$ 被识别为 $\mathbb{K}$。参见 [TurV92，第 2 节。3]。

作为拓扑量子场论函子，$\mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}$ 自然诱导出一个 $\mathbb{K}$–线性表示

$$\mathrm{Mod}(S) \to \mathrm{GL}\left(\mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}(S)\right)$$

对任意可定向闭曲面S的映射类群 Mod(S [TurV92，第 2 节。4]。按照记号 $q^{1/2}$ 3.2 中的做法，将 特化为复单位根后，我们得到一个复线性表示，记作

$$\rho^{\mathrm{TV}}_{r,s} : \mathrm{Mod}(S) \to \mathrm{GL}\left(\mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}_{r,s}(S)\right) \tag{3.3}$$

对每个整数 $r \geq 3$ 以及任意与 r 互素的整数 s，这些表示保持特化后的厄米配对 $\langle , \rangle_{r,s}$，其符号取决于 r 和 s，但不一定是（希尔伯特）酉的。我们将这些表示称为 Mod(S) 的 SU(2) 图拉耶夫–维罗拓扑量子场论表示（层级为 $r-2$）。

下面的公式是拓扑量子场论公理的一个有用推论 [Ati89，第 2]节。

引理 3.8. 设 $r \geq 3$ 是任意整数，s 是任意与 r互素的整数。对于任意可定向闭曲面 Σ，以及任意映射类 $[f] \in$ Mod(S)，

$$\mathrm{TV}_{r,s}(M_f) = \mathrm{tr}_{\mathbb{C}}\left(\rho^{\mathrm{TV}}_{r,s}([f])\right),$$

其中 M_f 表示 f的映射环面。

若 S 连通，则表示 $\rho^{\mathrm{TV}}_{r\,s}$ 的复维数仅取决于 r 以及 g 的亏格 S。这一事实可通过考察 $f = \mathrm{id}_S$的映射环面，由引理 3.8 和3.4 推导得出。关于这些维数的 Verlinde 型公式可由引理 3.7以及 Witten–Reshetikhin–Turaev 不变量的已知公式推导得出 [BlaHMV95，推论 1。16]然而，Witten–Reshetikhin–Turaev 不变量仅来自广义拓扑量子场论，它需要额外结构来消除框架异常 [BlaHMV95]。因此，它们自然导出的仅是曲面映射类群的射影线性表示。

4. Calculation

本节旨在证明定理1.2。

重述一下我们要解决的问题：考虑一个闭的塞弗特纤维空间 M，其轨形基底和纤维化均可定向，且符号为（g；（a_1，b_1）$\cdots$，（a_n，b_n））， 满足

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a,$$

and

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = 0.$$

此外，我们假设 $a \geq 3$ 和 $a > n \geq 0$。我们计算 M 在$r = a$下的 TV$_r$ 和 TV$'_r$，并且一旦它们为零，就证明对于任何可被 a整除的 r，它们也必为零。

我们采用以下显式公式来计算塞弗特纤维空间的 Witten–Reshetikhin–Turaev 不变量 τ_r。回顾 $\tau_r(S^1\times S^2)=\sqrt{r/2}/\sin(\pi/r)$（引理 3.5）。

引理 4.1. 设 M 是一个闭塞弗特纤维空间，其轨形基底和纤维化均可定向，符号为 $(g;(a_1,b_1)\ \cdots,(a_n,b_n))$，其中 $g,n\geq 0$ 是整数，且对于 $j=1,\cdots,n$，$a_j\geq 0$ 和 b_j 是整数互素数对。通过为基底和纤维定向来确定 M 的定向，使得塞弗特纤维化的有理欧拉数为

$$E=-\sum_j b_j/a_j.$$

于是，

$$\frac{\tau_r(M)}{\tau_r(S^2\times S^1)}=\frac{r^{g-1}\cdot U_r\cdot Z_r}{2^{n+g-1}\sqrt{\prod_j a_j}}$$

其中

$$Z_r=\sum_{(\gamma,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{m})}\left\{\frac{e^{\sqrt{-1}\cdot\frac{\pi\gamma^2E}{2r}}}{\sin^{n+2g-2}(\pi\gamma/r)}\cdot\prod_j\mu_j e^{\sqrt{-1}\cdot\left(\frac{-\pi(2rm_j+\mu_j)\gamma}{a_jr}+\frac{-2\pi(rm_j^2+\mu_jm_j)b_j^*}{a_j}\right)}\right\}$$

and

$$U_r=(-1)^n\cdot e^{\sqrt{-1}\cdot\left(\frac{3\pi}{2r}-\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\mathrm{sgn}(E)}\cdot e^{\sqrt{-1}\cdot\frac{\pi\left(E+12\cdot\sum_j s(b_j,a_j)\right)}{2r}}$$

这里，任意 j 遍历 $\{1,\cdots,n\}$，而 $(\gamma,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{m})=(\gamma,(m_1,\cdots,m_n),(\mu_1,\cdots,\mu_n))$ 遍历 $\{1,2,\cdots,r-1\}\times\{\pm1\}^n\times\mathbb{Z}/a_1\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z}/a_n\mathbb{Z}$。记号 b_j^* 表示 b_j 模 a_j 的任意同余逆元，即 $b_jb_j^*\equiv 1 \bmod a_j$；$\mathrm{sgn}(E)$ 表示 E 的符号，取值为 ±1 或 0；$s(b_j,a_j)$ 表示戴德金和 $(4a_j)^{-1}\cdot\sum_{l\in\{1,2,\cdots,a_j-1\}}\cot(\pi l/a_j)\cot(\pi lb_j/a_j)$。

参见 [Han01，定理 8。4]关于这一公式；另请参见下文的注4.2 ，其中澄清了不同记号和归一化之间的区别。Hansen 实际上得到了适用于任意可定向闭塞弗特纤维空间的最一般公式，包括轨形基底不可定向的情形。这里我们只陈述了轨形基底可定向的情形。Rozansky 先前给出了这一情形的等价公式[Roz96]。

注 4.2。我们的记号 τ_r 与 Kirby–Melvin [KirM91], 一致，但与 Hansen 的记号相差因子 $1/\tau_r(S^2\times S^1)$。在 [Han01, Section 8], 中，Hansen 的 $\tau_r(M)$ 定义为其中的 $\tau_{(\mathcal{V}_t,\mathcal{D})}(M)$；正如 [Han01, 附录 A],所指出的，Kirby–Melvin 的 $\tau_r(M)$ 等于 $\tau_A(M)=\mathcal{D}\cdot\tau_{(\mathcal{V}_t,\mathcal{D})}(M)$，其中 $\mathcal{D}$ 在其中的方程 (38) 中规定为 $\sqrt{r/2}/\sin(\pi/r)$。更直接地，可以通过在最简单的情形 $r=3$下，对 [Han01, 定理 8.4] 中的公式进行如下取值来验证：S^3（令 $g=0$、$b=1$ 和 $n=0$），以及 $S^2\times S^1$（令 $g=0$、$b=0$ 和 $n=0$）。

引理 4.3。在定理 *1.2*的假设下，并假设 r 可被a整除，则项 $Z_r=Z_r(M)$ 如引理 *4.1* 所示变为

$$Z_r=\sum_{(\gamma,\boldsymbol{\mu})}\left\{\frac{e^{\sqrt{-1}\cdot\frac{-\pi\gamma\sum_j\mu_j}{ar}}\cdot\prod_j\mu_j}{\sin^{n+2g-2}(\pi\gamma/r)}\cdot\prod_j\sum_{m_j}e^{\sqrt{-1}\cdot\frac{-2\pi(\gamma+b_j^*\mu_j)m_j}{a}}\right\}$$

其中 $(\gamma,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{m})$ 遍历 $\{1,\cdots,r-1\}\times\{\pm1\}^n\times(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z})^n$。

证明。 在 Z_r 的引理 4.1的表达式中，若任何 a_j 整除 r，我们可以忽略 rm_j^2 在 j 次乘积因子的指数中的项；若 $E=0$，我们可以忽略指数中涉及 γ^2 的因子。因此，在这些条件下， Z_r 的表达式可以重写为

$$\begin{aligned} Z_r(M) &= \sum_{(\gamma,\boldsymbol{\mu})} \left\{ \frac{\prod_j \mu_j e^{\sqrt{-1}\cdot\frac{-\pi\gamma\mu_j}{a_j r}}}{\sin^{n+2g-2}(\pi\gamma/r)} \cdot \sum_{\boldsymbol{m}} e^{\sqrt{-1}\cdot\sum_j \left(\frac{-2\pi\gamma m_j}{a_j}+\frac{-2\pi b_j^* \mu_j m_j}{a_j}\right)} \right\} \\ &= \sum_{(\gamma,\boldsymbol{\mu})} \left\{ \frac{e^{\sqrt{-1}\cdot\sum_j \frac{-\pi\gamma\mu_j}{a_j r}} \cdot \prod_j \mu_j}{\sin^{n+2g-2}(\pi\gamma/r)} \cdot \sum_{\boldsymbol{m}} e^{\sqrt{-1}\cdot\sum_j \frac{-2\pi(\gamma+b_j^*\mu_j)m_j}{a_j}} \right\} \\ &= \sum_{(\gamma,\boldsymbol{\mu})} \left\{ \frac{e^{\sqrt{-1}\cdot\sum_j \frac{-\pi\gamma\mu_j}{a_j r}} \cdot \prod_j \mu_j}{\sin^{n+2g-2}(\pi\gamma/r)} \cdot \prod_j \sum_{m_j} e^{\sqrt{-1}\cdot\frac{-2\pi(\gamma+b_j^*\mu_j)m_j}{a_j}} \right\} \end{aligned}$$

其中，$(\gamma,\boldsymbol{\mu})$ 遍历 $\{1,2,\cdots,r-1\}\times\{\pm1\}^n$，且 j 属于 $\{1,\cdots,n\}$， m_j 属于 $\mathbb{Z}/a_j\mathbb{Z}$。特别地，由于我们假设 $a_1=a_2=\cdots=a_n=a$，且 $b_1+b_2+\cdots+b_n=0$，并且 r 可被 a 整除，因此可以进行上述简化。□

引理 4.4. 在定理 *1.2* 的假设下，并假设 r 可被a 整除，若不存在任何 $\boldsymbol{\mu}\in\{\pm1\}^n$ 满足这些同余方程

$$b_1^*\mu_1 \equiv b_2^*\mu_2 \equiv \cdots \equiv b_n^*\mu_n \mod a,$$

then

$$Z_r = 0$$

其中 Z_r 是引理 *4.1* 中的项。

证明。对任意固定的 $(\gamma,\boldsymbol{\mu})$，我们注意到

$$\sum_{m_j\in\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}} e^{\sqrt{-1}\cdot\frac{-2\pi(\gamma+b_j^*\mu_j)m_j}{a}} = \begin{cases} a & \text{if } \gamma+b_j^*\mu_j\equiv 0 \bmod a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

因此，在引理 Z_r 的简化表达式中，如引理 4.3 所示，与 $(\gamma,\ \boldsymbol{\mu})$ 对应的加数非零，当且仅当 $\gamma+b_j^*\mu_j\equiv 0$ 模 a 对所有 $j\in\{1,\cdots,n\}$ 均成立。要使和 Z_r 非零，必须存在某个 $\gamma\in\{1,2,\cdots,r-1\}$，使得对某个 $\boldsymbol{\mu}\in\{\pm1\}^n$ 满足上述条件；于是必须存在某个$\boldsymbol{\mu}$ 满足 $b_1^*\mu_1\equiv b_2^*\mu_2\equiv\cdots\equiv b_n^*\mu_n$ 模 a。 □

引理 4.5。 在定理 *1.2*的假设下，若存在某个整数b^* 与 a互素，且存在某个 $\boldsymbol{\nu}\in\{\pm1\}^n$，使得 $b^*\equiv b_j^*\nu_j$ 模 a 对所有$j\in\{1,\cdots,n\}$均成立，则

$$Z_a = \frac{2\cdot a^n\cdot\prod_j\nu_j}{\sin^{n+2g-2}(\pi b^*/a)}$$

其中 Z_a 是引理 *4.1* 中的项，其中 $r=a$。

证明。必要时对 $\{1,\cdots,n\}$ 进行置换后，我们可以假设 $\nu_j=1$ for $j=1,\cdots,m$and $\nu_j=-1$ for $j=m+1,\cdots,n$。我们还可以假设 $b^*\in\{1,2,\cdots,a-1\}$，且不改变其模 a 的剩余类。

对于 $r = a \geq 3$， Z_r 中只有两个非零加项，它们对应于 $(\gamma, \boldsymbol{\mu})$，分别为

$$(\gamma, \boldsymbol{\mu}) = (a - b^*, (\underbrace{1, \cdots, 1}_{m}, \underbrace{-1, \cdots, -1}_{n-m}))$$

and

$$(\gamma, \boldsymbol{\mu}) = (b^*, (\underbrace{-1, \cdots, -1}_{n}, \underbrace{1, \cdots, 1}_{n-m})).$$

根据我们的假设 $\sum_j b_j = 0$ 在定理 1.2中，$(2m-n)b \equiv mb + (n-m)(-b) \equiv \sum_j b_j = 0$ 模 a，因此 $n - 2m$ 可被 a整除。根据我们的假设 $a > n \geq 0$ 在定理 1.2 中，我们必有 $|n - 2m| < a$，因此 $n - 2m = 0$。于是我们得到

$$(-1)^{n-m} = (-1)^m,$$

这在下文中很有用。

我们计算

$$\begin{aligned} Z_a(M) &= \frac{(-1)^{n-m} \cdot e^{\sqrt{-1} \cdot \frac{-\pi(2m-n)(a-b^*)}{a^2}}}{\sin^{n+2g-2}(\pi(a-b^*)/a)} \cdot a^n + \frac{(-1)^m \cdot e^{\sqrt{-1} \cdot \frac{-\pi(n-2m)b^*}{a^2}}}{\sin^{n+2g-2}(\pi b^*/a)} \cdot a^n \\ &= \frac{2 \cdot a^n \cdot (-1)^{n-m}}{\sin^{n+2g-2}(\pi b^*/a)} \\ &= \frac{2 \cdot a^n \cdot \prod_j \nu_j}{\sin^{n+2g-2}(\pi b^*/a)}, \end{aligned}$$

如所需。 □

引理 4.6. 设 M 是一个闭的塞弗特纤维空间，其轨形基底和纤维化均可定向，且符号为 $(g; (a_1, b_1) \cdots, (a_n, b_n))$，其中 $g, n \geq 0$ 是整数，且 $a_j \geq 1$ 和 b_j 是整数互素数对，对于 $j = 1, \cdots, n$，并满足 $b_1/a_1 + \cdots + b_n/a_n = 0$。若 $a_1, \cdots, a_n$ 均为奇数，

$$\mathrm{TV}_{3,1}(M) = \mathrm{TV}_{3,2}(M) = 2^{2g}.$$

证明。记

$$\mathrm{lcm}(a_1, \cdots, a_n) = d.$$

若 a_1、$\cdots$、a_n 均为奇数，则 d 也为奇数。

M 的基本群有如下生成元表示

$$x_1, y_1, \cdots, x_g, y_g, s_1, \cdots, s_n, f$$

以及以下关系

$$\begin{cases} s_1 \cdots s_n = [x_1, y_1] \cdots [x_g, y_g] & \\ x_i f = f x_i & i = 1, \cdots, g \\ y_i f = f y_i & i = 1, \cdots, g \\ s_j f = f s_j & j = 1, \cdots, n \\ s_j^{a_j} f^{b_j} = 1 & j = 1, \cdots, n \end{cases}$$

取 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 系数后，我们可以利用关系 $a_j[s_j] + b_j[f] = 0$ 消去任意 $[s_j]$，因为 a_j 是奇数。于是，第一个关系等价于在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上有 $-(b_1 d/a_1 + \cdots + b_n d/a_n)[f] = 0$；根据假设 $b_1/a_1 + \cdots + b_n/a_n = 0$，它不起作用。因此， $H_1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 在 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 上由 $[x_1]$、$[y_1]$、$\cdots$、$[x_g]$、$[y_g]$、$[f]$ 自由生成。

由 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 系数的庞加莱对偶性可知， M 的 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 贝蒂数为 $\beta_0=\beta_3=1$ 和 $\beta_2=\beta_1=2g+1$。因此，我们得到

$$\mathrm{TV}_{3,2}(M)=2^{2g},$$

由引理3.4。

由于 M 同胚于一个由阶为 d 的周期曲面自同构构成的映射环面，因此存在一个次数为 d 的循环覆盖 $M\to M$，且 M 是一个闭可定向曲面与圆的乘积。由于 d 为奇数，诱导同态 $H^*(M;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\to H^*(M;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 是单射（这是因为具有 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 系数的庞加莱对偶配对，以及顶维上的同构）。然而， $H^1(\tilde{M};\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 不含立方非平凡的元素（根据决定 M 上同调环的 Künneth 定理，其中系数取自 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$）。因此，对于任意 $t\in H^1(M;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，$t^3=0\in H^3(M;\,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ 成立。此外， w_1 M 的第一斯蒂费尔–惠特尼类为零，因为 M 是可定向的。因此，我们得到

$$\mathrm{TV}_{3,1}(M)=2^{2g},$$

根据引理3.4。 □

在定理1.2的假设下，我们按如下方式计算定理1.2 中的 Turaev–Viro 不变量。

假设对于某个与 a 互素的整数 b^* 以及某个$\nu_j\in\{\pm1\}$，有 $b^*b_j\equiv\nu_j \bmod a$ 成立，并且对所有 $j\in\{1,\cdots,n\}$均成立。那么，

$$\begin{aligned}\mathrm{TV}_{a,1}(M) &= \mathrm{TV}_{a,1}(S^3)\cdot|\tau_a(M)|^2\\ &= |\tau_a(M)/\tau_a(S^2\times S^1)|^2\\ &= \left|\frac{a^{g-1}}{2^{n+g-1}a^{n/2}}\cdot\frac{2\cdot a^n}{\sin^{n+2g-2}(\pi b^*/a)}\right|^2\\ &= \frac{a^{n+2g-2}}{2^{2n+2g-4}}\cdot\frac{1}{\sin^{2n+4g-4}(\pi b^*/a)}\end{aligned}$$

根据引理4.1、4.5和3.7。

当 a 为偶数时，对于任意与 a互素的 s，我们应用伽罗瓦共轭（变换 $e^{\sqrt{-1}\cdot\pi/a}\mapsto e^{\sqrt{-1}\cdot\pi s/a}$），得到

$$\mathrm{TV}_{a,s}(M)=\frac{a^{n+2g-2}}{2^{2n+2g-4}}\cdot\frac{1}{\sin^{2n+4g-4}(\pi b^*s/a)},$$

根据引理3.4。

当 a 为奇数时，我们应用引理3.4 和4.6，得到

$$\mathrm{TV}_{a,a-1}(M)=\mathrm{TV}_{3,2}(M)\cdot\mathrm{TV}'_{a,a-1}(M)=\frac{\mathrm{TV}_{3,2}(M)}{\mathrm{TV}_{3,1}(M)}\cdot\mathrm{TV}_{a,1}(M)=\mathrm{TV}_{a,1}(M)$$

and

$$\mathrm{TV}'_{a,a-1}(M)=\frac{\mathrm{TV}_{a,1}(M)}{\mathrm{TV}_{3,1}(M)}=\frac{1}{2^{2g}}\cdot\mathrm{TV}_{a,1}(M).$$

再次，我们应用伽罗瓦共轭（根据奇偶性变换 $e^{\sqrt{-1}\cdot\pi/a}\mapsto e^{\sqrt{-1}\cdot\pi s/a}$ $e^{\sqrt{-1}\cdot\pi(a-1)/a}\mapsto$ or），从而得到对任意互素于 s a $e^{\sqrt{-1}\cdot\pi s/a}$ s

$$\mathrm{TV}_{a,s}(M)=\frac{a^{n+2g-2}}{2^{2n+2g-4}}\cdot\frac{1}{\sin^{2n+4g-4}(\pi b^*s/a)},$$

并且如果 s 是偶数,

$$\mathrm{TV}'_{a,s}(M) = \frac{a^{n+2g-2}}{2^{2n+4g-4}} \cdot \frac{1}{\sin^{2n+4g-4}(\pi b^* s/a)},$$

由引理 3.4。这就完成了定理 1.2 中非零取值的计算。

假设属于另一种情况。那么，对于所有能被 a 整除的 $r \geq 3$，我们得到

$$\mathrm{TV}_{r,1}(M) = 0,$$

由引理 4.1、4.4 和 3.7。类似地，在这种情况下，利用引理 3.4 和 4.6，我们得到 $\mathrm{TV}_{r,\,r-1}(M) = \mathrm{TV}'_{r,\,r-1}(M) = 0$。最后，根据伽罗瓦共轭（引理 3.4），我们得知，对于任意适用的 s，$\mathrm{TV}_{r,\,s}(M) = 0$ 以及 $\mathrm{TV}'_{r,\,s}(M) = 0$。

定理1.2的证明至此完成。

5. Examples

在本节中，我们通过展示一些非平凡的 Hempel 对来证明定理 1.1： 这些 Hempel 对有的可以通过 Turaev–Viro 不变量区分，有的则不能。可区分的例子见示例 5.2，不可区分的例子见示例 5.3 。

验证这些例子时，我们需要以下引理。对于我们的应用而言，只要得到有理性结论就足够了，不过这里的整性对于专家而言也是众所周知的。

引理 5.1. 设 S 为亏格 $g \geq 0$的连通可定向闭曲面，且$[f] \in \mathrm{Mod}(S)$ 是一个阶为 $d \geq 1$ 的周期映射类。那么，对于任意与 d互素的整数$r \geq 3$，以及与 r互素的整数 s，

$$\mathrm{TV}_{r,s}(M_f) \in \mathbb{Z},$$

并且若 r 为奇数而 s 为偶数,

$$\mathrm{TV}'_{r,s}(M_f) \in \mathbb{Z},$$

其中 M_f 表示 f的映射环面。

证明。由引理 3.8，$\mathrm{TV}_{r,s}(M_f) \in \mathbb{C}$ 等于 Turaev–Viro 拓扑量子场论表示 $\rho^{\mathrm{TV}}_{r\,s}([f]) \in \mathrm{GL}(\mathcal{Z}^{\mathrm{TV}}_{r\,s}(S))$ 的迹。若 $[f] \in \mathrm{Mod}(S)$ 是阶为 d 的周期映射类，则 $\rho^{\mathrm{TV}}_{r\,s}([f])$ 的特征值全是阶可被 d整除的复单位根。特别地，$\mathrm{TV}_{r,s}(M_f)$ 是代数整数。

另一方面，$\rho^{\mathrm{TV}}_{r\,s}([f])$ 的元素属于 $\mathbb{C}$ 的分圆子域 $\mathbb{Q}(e^{\sqrt{-1}\cdot\pi s/r})$。对于任意阶分别为互素的 m、$n \geq 1$ 的单位根 ζ_m、$\zeta_n \in \mathbb{C}$，根据一个初等事实，$\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap \mathbb{Q}(\zeta_n)$ 等于 $\mathbb{Q}$ [Was97，第 2 章，命题 2.4]。应用于 $m|d$ 和 $n = r$（取 $\zeta_n = e^{\sqrt{-1}\cdot\pi s/r}$；或者若 r 为奇数且 s 为偶数，则取 $\zeta_n = e^{\sqrt{-1}\cdot\pi(r-s)/r}$），我们得到 $\mathrm{TV}_{r,\,s}(M_f) \in \mathbb{Q}$。结合代数整数性，我们得到 $\mathrm{TV}_{r,\,s}(M_f) \in \mathbb{Z}$。

根据引理3.4 和4.6，可以由 $\mathrm{TV}'_{r,\,s}(M_f) \in \mathbb{Q}$ 推导出 $\mathrm{TV}_{r,\,s}(M_f) \in \mathbb{Z}$。要得到 $\mathrm{TV}'_{r,\,s}(M_f) \in \mathbb{Z}$，可以借助一个与引理3.8 类似的引理，并使用与 TV′相关联的拓扑量子场论函子。事实上，Detcherry 和 Kalfagianni 已经证明了这一情形。关于这一情形的证明，请参见 [DetK19，推论 6。1] 。□

示例 5.2（可区分对）。设 $g \geq 0$ 和 $d = 5$ 或 $d \geq 7$ 为整数，且 k 为与 d互素的整数。设 M_A 和 M_B 为具有可定向轨形基底和可定向塞弗特纤维化的闭塞弗特纤维空间。将它们的符号记为

$$\begin{aligned} M_A &: (g; (d,1), (d,1), (d,-1), (d,-1)) \\ M_B &: (g; (d,k^*), (d,k^*), (d,-k^*), (d,-k^*)) \end{aligned}$$

其中 k^* 是满足以下条件的整数 $k^*k \equiv 1$ 模 p。三维流形 M_A 同胚于某个阶为 $[f_A] \in$Mod(S 的周期映射类的映射环面d，其中 S是亏格为 $dg+d-2$的连通可定向闭曲面（引理 2.1）。三维流形 M_B 同胚于迭代映射类的映射环面 $[f_B] = [f_A^k]$（引理 2.2）。

根据定理1.2，我们计算得

$$\begin{aligned} \mathrm{TV}_{d,1}(M_A) &= \frac{d^{2g+2}}{2^{2g+4}} \cdot \frac{1}{\sin^{4g+4}(\pi/d)} \\ \mathrm{TV}_{d,1}(M_B) &= \frac{d^{2g+2}}{2^{2g+4}} \cdot \frac{1}{\sin^{4g+4}(\pi k/d)} \end{aligned}$$

当且仅当 $k \equiv \pm 1$模 d 时，这些值相等，即 $[f_B] = [f_A]$ 或 $[f_B] = [f_A^{-1}]$。对于除这些值以外的 k ，还可以验证：对于任意与 d互素的整数 s ，$\mathrm{TV}_{d,s}(M_A) \neq \mathrm{TV}_{d,s}(M_B)$；若 d 为奇数，则对于任意与 d互素的偶数整数 s ，$\mathrm{TV}'_{d,s}(M_A) \neq \mathrm{TV}'_{d,s}(M_B)$。根据我们对 d的假设，这样的 k 确实存在，因此 M_A 和 M_B 构成一个非平凡的亨佩尔对。

示例 5.3（不可区分对）。设 $g \geq 0$ 为任意整数， $p \geq 5$ 为素数，且 k 为与 p互素的整数。设 M_A 和 M_B 为轨形基底可定向且塞弗特纤维化可定向的闭塞弗特纤维空间。将它们的符号记为

$$\begin{aligned} M_A &: (g; (p,1), (p,1), (p,-2)) \\ M_B &: (g; (p,k^*), (p,k^*), (p,-2k^*)) \end{aligned}$$

其中 k^* 是满足 $k^*k \equiv 1$模 p条件的整数。取亏格为 S 的连通可定向闭曲面 $pg+(p-1)/2$，以及阶为 $[f_B] = [f_A^k]$的周期映射类 p，方法与前一个示例（引理 2.1 和 2.2）类似。

同样， $[f_A]$ 和 $[f_B]$ 恰好在 $k \neq \pm 1$模 p时构成非平凡的亨佩尔对；在关于 p的假设下，这样的对存在。

若 $r \geq 3$ 可被 p整除，应用定理1.2 和引理 5.1，可知对任意与 r互素的 s ，均有 $\mathrm{TV}_{r,s}(M_A) = \mathrm{TV}_{r,s}(M_B) = 0$ 成立；此外，若 r 为奇数且 s 为偶数，则 $\mathrm{TV}'_{r,s}(M_A) = \mathrm{TV}'_{r,s}(M_B) = 0$ 也成立。

如果 $r \geq 3$ 不能被 p 整除，那么它与 p 互素。根据引理 5.1，$\mathrm{TV}_{r,s}(M_A)$ 和 $\mathrm{TV}_{r,s}(M_B)$ 都是有理数。由于 $\mathrm{TV}_{r,s}(M_A)$ 和 $\mathrm{TV}_{r,s}(M_B)$ 分别是周期映射类 $[f_A]$ 和 $[f_B] = [f_A^k]$ 的 Turaev–Viro 拓扑量子场论表示 ρ_{rs}^{TV} 的迹， $[f_A]$ 的特征值是阶整除 d 的单位根，而 $[f_B]$ 的特征值则是它们在变换 $e^{\sqrt{-1}\cdot 2\pi/d} \mapsto e^{\sqrt{-1}\cdot 2\pi k/d}$ 下的伽罗瓦共轭。因此，由有理性可得，对于任意与 r 互素的 s ，$\mathrm{TV}_{r,s}(M_A) = \mathrm{TV}_{r,s}(M_B)$。此外，如果 r 是奇数且 s 是偶数，我们应用引理 3.4 和 4.6，推得 $\mathrm{TV}'_{r,s}(M_A) = \mathrm{TV}'_{r,s}(M_B)$。

Appendix A. Splitting of Turaev–Viro invariants at odd levels

在本附录部分中，我们证明引理 3.4 中关于 $\mathrm{TV}_{r,\ s}$ 的公式，其中r 和 s 均为奇数。我们将这部分内容重述为一个独立定理，并对先前的结果作几点评论。

定理 A.1。 设 M 是任意闭 3维流形。设 $r \geq 3$ 为奇整数，且s 为与 r互素的整数。采用记号 *3.2*。

若 s 为奇数，则以下公式成立。

$$\mathrm{TV}_{r,s}(M) = \mathrm{TV}_{3,1}(M) \cdot \mathrm{TV}'_{r,r-s}(M).$$

注记 A.2。

(1) Sokolov 得到了 $\mathrm{TV}_{r,s}$ 的一个规范分解，将其写成三个精化不变量 [Sok96] 之和。当 r 为奇数且 s 为奇数时，可以将这三个精化不变量（即 Sokolov 的定义中的第零个、第一个和第二个）分别认作 $\mathrm{TV}'_{r,r-s}$、$(\mathrm{TV}_{r,s} - \mathrm{TV}_{r,r-s})/2$，以及 $(\mathrm{TV}_{r,s} + \mathrm{TV}_{r,r-s})/2 - \mathrm{TV}'_{r,r-s}$。在这种情况下，$\mathrm{TV}_{r,s}$ 的分解与 $\mathrm{TV}_{3,1}$ 的分解成比例。同样，当 r 为奇数且 s 为偶数时，$\mathrm{TV}_{r,s}$ 的分解与 $\mathrm{TV}_{3,2}$ 的分解成比例。参见 [BlaHMV95, 定理 1.5]。(2) 在同一篇论文中，Sokolov 简要指出了下文的引理 A.6，并假设可定向性。参见 [Sok96, 引理 2 的证明中的公式 (1)2]。

本节余下部分将用于证明定理 A.1。

我们的策略是从 Detcherry、Kalfagianni 和 Yang 对 r 为奇数且 s 为偶数的情形的证明中推导所需的要素 [DetKY18，附录 A]。我们逐项统计其情形下定义状态和表达式中符号的变化，并验证总体而言，因子 $\mathrm{TV}_{3,1}$ 和 $\mathrm{TV}_{r,\ s}$ 是其情形中的因子按比例变化后的结果。

我们将 $\mathrm{ev}_{r,\ s}$: $\mathbb{Q}(q^{1/2}) \to \mathbb{C}$ 记作如下求值：将抽象单位根 $q^{1/2}$ 映射为 $e^{\sqrt{-1}\cdot\pi s/r}$。

对于任意奇整数 $r \geq 3$，回想一下， $I_r = \{0, 1, \cdots, r-2\}$ 表示该层级上的颜色集合。它包含偶数颜色子集 $I'_r = \{0, 2, \cdots, r-3\}$，还包含 $I_3 = \{0, 1\}$。对于任意有限单纯 3-复形 $\mathscr{T} = (V, E, F, T)$。对于任意着色 c: $E \to I_r$，我们按如下方式得到一对着色 c_3: $E \to I_3$和 c': $E \to I'_r$: 对于任意 $e \in E$，若 $c(e)$ 为偶数，则令 $c_3(e) = 0$ 且 $c'(e) = c(e)$；若 $c(e)$ 为奇数，则令$c_3(e) = 1$ 且 $c'(e) = r - 2 - c(e)$。显然，这一操作保持可容许着色，并在 $\mathcal{A}_r$与 $\mathcal{A}_3 \times \mathcal{A}'_r$之间建立双射对应。

引理 A.3. 设 $\mathscr{T} = (V,\ E,\ F,\ T)$ 是任意有限单纯 3–复形。设 $r \geq 3$是奇整数，且 s 是与 r互素的整数。采用记号 *3.1*。令$\mathcal{A}_r = \mathcal{A}_3 \times \mathcal{A}'_r$。若 s是偶数，那么，对任意 $x \in E \sqcup F \sqcup T$以及任意 $c = (c_3,\ c') \in \mathcal{A}_r$,

$$\mathrm{ev}_{r,s}\left(|x|_c\right) = \mathrm{ev}_{3,2}\left(|x|_{c_3}\right) \cdot \mathrm{ev}_{r,s}\left(|x|_{c'}\right),$$

因此,

$$\mathrm{ev}_{r,s}\left(|\mathscr{T}|_c\right) = \mathrm{ev}_{3,2}\left(|\mathscr{T}|_{c_3}\right) \cdot \mathrm{ev}_{r,s}\left(|\mathscr{T}|_{c'}\right).$$

引理 A.3 中的恒等式是 Detcherry、Kalfagianni 和 Yang 证明 s 偶数情形 [DetKY18定理 29]的关键。我们参照 [DetKY18引理

A.4] 的证明的关键。请注意，其中的恒等式 (A.1) 本质上依赖于 s 的奇偶性假设。

为了证明 s 奇数情形，接下来的几个引理将考察 $\mathrm{ev}_{r,s}(|x|_c)$ 与 $\mathrm{ev}_{r,r-s}(|x|_c)$ 之间，以及 $\mathrm{ev}_{r,s}(|\mathscr{T}|_c)$ 与 $\mathrm{ev}_{r,r-s}(|\mathscr{T}|_c)$ 之间的符号差异。

引理 A.4. 设 $\mathscr{T}=(V,E,F,T)$ 是任意有限的单纯 3–复形。设 $r\geq 3$为一个整数，且 s 为一个与 r互素的整数。采用记号 3.1。那么，对于任意$x\in E\sqcup F\sqcup T$ 以及任意 $c\in\mathcal{A}_r$,

$$\mathrm{ev}_{r,s}\left(|x|_c\right)=(-1)^{\delta(x,c)}\cdot\mathrm{ev}_{r,r-s}\left(|x|_c\right),$$

其中 $\delta(x,c)\in\mathbb{Z}$ 按如下方式赋值。

(1) 对于 $x\in E$，在 c 下具有颜色 i，

$$\delta(x,c)=i.$$

(2) 对于 $x\in F$，在 c 下具有边颜色 (i,j,k)，

$$\delta(x,c)=\frac{i^2+j^2+k^2}{2}.$$

(3) 对于 $x\in T$，在 c 下，每个面上的边颜色分别为 (i,j,k)、(i,m,n)、(j,m,n)、(k,l,n)，

$$\delta(x,c)=i+j+k+l+m+n+\frac{il+jm+kn}{2}.$$

证明。我们对 $x\in T$ 进行证明。关于 $x\in E$ 和 $x\in F$ 的公式可用类似的方法证明，而且更简单。设四面体 x 的边颜色 i、j、k、l、m、n 由 c 给出。注意，量子整数的值只会改变一个符号，该符号由其奇偶性决定

$$\mathrm{ev}_{r,s}([w])=(-1)^{w-1}\cdot\mathrm{ev}_{r,r-s}([w]).$$

对于任意固定的 z，被加项的总符号变化为 -1 的以下次幂

$$\begin{aligned}&\frac{(z+1)z}{2}+\sum_a\frac{(z-T_a)(z-T_a-1)}{2}+\sum_b\frac{(Q_b-z)(Q_b-z-1)}{2}\\ =\;&4z^2-2zW+\frac{1}{2}\cdot\left(\sum_a T_a^2+\sum_b Q_b^2\right)\end{aligned}$$

其中 $W=i+j+k+l+m+n=\sum_a T_a=\sum_b Q_b$ 是一个整数。前两项是偶数，对总符号变化没有影响；最后一项则与 z 无关。因此，我们得到

$$\mathrm{ev}_{r,s}(|x|_c)=(-1)^{\delta(x,c)}\cdot\mathrm{ev}_{r,r-s}(|x|_c).$$

其中

$$\delta(x,c)\equiv\frac{1}{2}\cdot\left(\sum T_a^2+\sum_b Q_b^2\right)\mod 2.$$

表达式 $\sum_a T_a^2+\sum_b Q_b^2$ 等于 i、j、k、l、m、n 中所有二次单项式之和，即 $i^2+ij+\cdots+in+j^2+jk+\cdots+mn$。我们重新排列

$$\sum_a T_a^2+\sum_b Q_b^2=X^2+Y^2+Z^2+XY+XZ+YZ-il-jm-kn$$

其中 $X=i+l$、$Y=j+m$ 和 $Z=k+n$。注意，(X,Y,Z) 的奇偶模式只能是 (0, 0, 0) 或 (1, 1, 1)，分量的排列顺序除外。

事实上，由于可容许着色，$(i_3+l_3, j_3+m_3, k_3+n_3)$ 可能的模式只有 (0, 0, 0)、(1, 1, 1) 和 (0, 2, 2)，分量的排列顺序除外。因此，当 $(X, Y, Z) \equiv (0, 0, 0) \bmod 2$ 时，部分 $X^2+Y^2+Z^2+XY+XZ+YZ = (X+Y)(X+Z) + Y^2+Z^2$ 可被 4 整除；当 $(X, Y, Z) \equiv (1, 1, 1) \bmod 2$ 时，该部分模 4 同余于 2。两种情况下，我们都可见 $(X^2+Y^2+Z^2+XY+XZ+YZ)/2 \equiv X+Y+Z \bmod 2$。由此得到 $\delta(x, c) \equiv X+Y+Z-(il+jm+kn)/2 \equiv i+j+k+l+m+n+(il+jm+kn)/2 \bmod 2$，证毕。□

引理 A.5。设 $\mathscr{T} = (V, E, F, T)$ 为任意有限单纯 3复形。设 $r \geq 3$为奇整数，且 s 为与 r 互素的整数。采用记号 *3.1*。令$\mathcal{A}_r = \mathcal{A}_3 \times \mathcal{A}'_r$。设 $\delta\colon (E \sqcup F \sqcup T) \times \mathcal{A}_r \to \mathbb{Z}$如引理 *A.4* 中所示。

(1) 对任意 $x \in E \sqcup F$ 及任意 $c = (c_3, c') \in \mathcal{A}_r$,

$$\delta(x, c) \equiv \delta(x, c_3) \mod 2,$$

将 $\mathcal{A}_3$ 视为 $\mathcal{A}_r$ 的子集。

(2) 对于 $x \in T$，在 c 下每个面上的边颜色为 (i, j, k)、(i, m, n)、(j, m, n)、(k, l, n),

$$\delta(x, c) \equiv \delta(x, c_3) + \lambda(x, c) \mod 2,$$

其中

$$\lambda(x, c) = \frac{i_3 l' + l_3 i' + j_3 m' + m_3 j' + k_3 n' + n_3 k'}{2}$$

.

证明。对任意 $e \in E$，我们利用关系 $c(e) = c_3(e) \cdot (r-2-c'(e)) + (1-c_3(e)) \cdot c'(e) = (r-2) \cdot c_3(e) - c'(e) - 2 \cdot c_3(e) \cdot c'(e)$。由于 r 是奇数，而 i'、l' 是偶数，我们得到

$$\begin{aligned} il &= ((r-2)i_3 - i' - 2i_3 i') \cdot ((r-2)l_3 - l' - 2l_3 l') \\ &\equiv (r-2)^2 i_3 l_3 - (r-2) \cdot (i_3 l' + l_3 i') \\ &\equiv i_3 l_3 + (i_3 l' + l_3 i') \mod 4 \end{aligned}$$

类似地，我们对 jk 和 kn 进行处理。求和后得到

$$il + jm + kn \equiv i_3 l_3 + j_3 m_3 + k_3 n_3 + 2 \cdot \lambda(x, c) \mod 4.$$

此外，我们注意到

$$i+j+k+l+m+n \equiv i_3 + j_3 + k_3 + l_3 + m_3 + n_3 \mod 2.$$

根据引理 A.4，上述同余等式推出 $\delta(x, c) \equiv \delta(x, c_3) + \lambda(x, c)$ 模 2，证毕。□

对于任意 $c_3 \in \mathcal{A}_3$，存在一个典范子曲面 $\mathcal{S}(c_3) \subset M$，它相对于 $\mathscr{T}$ 处于正规位置，使得 $c_3(e)$ 表示任意边 $e \in E$ 与 $\mathcal{S}(c_3)$ 的交点数。子曲面 $\mathcal{S}(c_3)$ 的构造方法是：在每个颜色非零的四面体中取一个正规圆盘，然后将这些圆盘沿边匹配后取并。每个四面体的四种三角形类型和三种四边形类型中，正规圆盘的类型由可容许着色 c_3 唯一确定。子曲面 $\mathcal{S}(c_3)$ 是闭的，因为 M 没有边界。

引理 A.6. 设 $(M,\mathscr{T})$ 是任意一个三角剖分的闭3流形。设 $r\geq 3$ 为奇整数，且 s 为与 r互素的整数。采用记号 3.1。将$\mathcal{A}_r=\mathcal{A}_3\times\mathcal{A}'_r$认同。于是，对于任意 $c=(c_3,c')\in\mathcal{A}_r$,

$$\mathrm{ev}_{r,s}\left(|\mathscr{T}|_c\right)=(-1)^{\chi(\mathcal{S}(c_3))}\cdot\mathrm{ev}_{r,r-s}\left(|\mathscr{T}|_c\right),$$

其中，$\chi(\mathcal{S}(c_3))$ 表示正规子曲面 $\mathcal{S}(c_3)\subset M$ 的欧拉示性数由 c_3 确定。

证明。对于所有 $x\in E\sqcup F\sqcup T$，非空交集 $x\cap\mathcal{S}(c_3)$ 构成 $\mathcal{S}(c_3)$ 的多边形胞腔分解。分别用 ν_0、ν_1、$\nu_{2,\triangle}$、$\nu_{2,\square}$ 表示 $\mathcal{S}(c_3)$ 中的顶点、边、三角形正规圆盘和四边形正规圆盘的数目。

令 $\delta\colon (E\sqcup F\sqcup T)\times\mathcal{A}_r\to\mathbb{Z}$ 如引理 A.4 中所述。对于任意 $x\in E\sqcup F\sqcup T$，直接可验证，$\delta(x,c_3)=1$ 当且仅当 $x\cap\mathcal{S}(c_3)$ 是 $\mathcal{S}(c_3)$ 的一个顶点、一条边或一个四边形正规圆盘；否则，$\delta(x,c_3)=0$，将 $\mathcal{A}_3$ 视为 $\mathcal{A}_r$ 的子集。这意味着 $\nu_0=\sum_{x\in E}\delta(x,c_3)$、$\nu_1=\sum_{x\in F}\delta(x,c_3)$ 以及 $\nu_{2,\square}=\sum_{x\in T}\delta(x,c_3)$。此外，关系 $3\cdot\nu_{2,\triangle}+4\cdot\nu_{2,\square}=2\cdot\nu_1$ 蕴含 $\nu_{2,\square}$、$\nu_{2,\triangle}$ 是偶数，因为 $\mathcal{S}(c_3)$ 是闭的。根据引理 A.5，我们得到

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{S}(c_3)) &= \nu_0-\nu_1+\nu_{2,\triangle}+\nu_{2,\square}\\ &\equiv \sum_{x\in E\sqcup F\sqcup T}\delta(x,c_3)\\ &\equiv \sum_{x\in E\sqcup F\sqcup T}\delta(x,c)+\sum_{x\in T}\lambda(x,c)\mod 2.\end{aligned}$$

因此，为了推导所断言的公式 $\mathrm{ev}_{r,s}(|\mathscr{T}|_c)=(-1)^{\chi(\mathcal{S}(c_3))}\cdot\mathrm{ev}_{r,r-s}(|\mathscr{T}|_c)$，根据引理 A.4，还需证明

$$\sum_{x\in T}\lambda(x,c)\equiv 0\mod 2.$$

为此，我们注意到 $\sum_{x\in T}\lambda(x,c)$ 是 $c'(e)/2$ 的总和，其中 e 遍历 x 的边，这些边在 x 中的对边与 $\mathcal{S}(c_3)$ 相交。对于任意一条边 $e^*\in E$，e^* 的链指的是所有包含 e^* 的四面体 $t_1,\cdots,t_h\in T$ 中所有对边 $e_1,\cdots,e_h$ 的并，记作 $\mathrm{lk}(e^*)\subset M$。链 $\mathrm{lk}(e^*)$ 是 M 中的一个可缩环路（它围成一个横截于 e^* 的圆盘）。另一方面，任意一条边要么不与 $\mathcal{S}(c_3)$ 相交，要么恰好在一点处与 $\mathcal{S}(c_3)$ 相交。因此，$\mathrm{lk}(e^*)$ 中与 $\mathcal{S}(c_3)$ 相交的边数必为偶数，而整数 $c'(e^*)/2$ 在 $\sum_{x\in T}\lambda(x,c)$ 中恰好计入这个偶数次。由于 $\sum_{x\in T}\lambda(x,c)$ 是各条边 $e^*\in E$ 所贡献之和，我们得出 $\sum_{x\in T}\lambda(x,c)\equiv 0\mod 2$，证毕。□

引理 A.7. 设 $(M,\mathscr{T})$ 是任意一个三角剖分的闭 3维流形。设 $r\geq 3$ 是一个奇整数，且 s 是一个与 r互素的整数。采用记号 3.1。将$\mathcal{A}_r=\mathcal{A}_3\times\mathcal{A}'_r$视为同一对象。若 s 为奇数，则，

$$\mathrm{ev}_{r,s}\left(|\mathscr{T}|_c\right)=\mathrm{ev}_{3,1}\left(|\mathscr{T}|_{c_3}\right)\cdot\mathrm{ev}_{r,r-s}\left(|\mathscr{T}|_{c'}\right).$$

证明。由引理 A.6，得到 $\mathrm{ev}_{r,s}(|\mathscr{T}|_c)=(-1)^{\chi(\mathcal{S}(c_3))}\cdot\mathrm{ev}_{r,r-s}(|\mathscr{T}|_c)$，以及 $\mathrm{ev}_{3,1}(|\mathscr{T}|_{c_3})=(-1)^{\chi(\mathcal{S}(c_3))}\cdot\mathrm{ev}_{3,2}(|\mathscr{T}|_c)$。于是，所述恒等式由偶数情形（引理 A.3）得出。□

为完成定理A.1的证明，我们注意到

$$\mathrm{ev}_{r,s}\left(Y_r\right)=\begin{cases}\mathrm{ev}_{3,2}\left(Y_3\right)\cdot\mathrm{ev}_{r,s}\left(Y_r'\right) & s \text{ even}\\ \mathrm{ev}_{3,1}\left(Y_3\right)\cdot\mathrm{ev}_{r,r-s}\left(Y_r'\right) & s \text{ odd}\end{cases} \tag{A.1}$$

其中 $Y_r=-(q^{1/2}-q^{-1/2})^2/2r$ 和 $Y_r'=-(q^{1/2}-q^{-1/2})^2/r$，（事实上，偶$r$，$s(q^{1/2}-q^{-1/2})=-\sqrt{-1}\cdot 2$正弦$(\pi s/r)$）。

设 M 是任意闭三维流形。若 r 是奇数且 s 是偶数，则我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{TV}_{r,s}(M) &= \mathrm{ev}_{r,s}\left(Y_r\cdot\sum_{c\in\mathcal{A}_r}|\mathscr{T}|_c\right)\\ &= \mathrm{ev}_{r,s}(Y_r)\cdot\sum_{c\in\mathcal{A}_r}\mathrm{ev}_{r,s}(|\mathscr{T}|_c)\\ &= \mathrm{ev}_{3,1}(Y_3)\cdot\mathrm{ev}_{r,r-s}(Y_r')\cdot\sum_{c_3\in\mathcal{A}_3}\sum_{c'\in\mathcal{A}_r'}\mathrm{ev}_{3,1}(|\mathscr{T}|_c)\cdot\mathrm{ev}_{r,r-s}(|\mathscr{T}|_{c'})\\ &= \mathrm{ev}_{3,1}\left(Y_3\cdot\sum_{c_3\in\mathcal{A}_3}|\mathscr{T}|_c\right)\cdot\mathrm{ev}_{r,r-s}\left(Y_r'\cdot\sum_{c'\in\mathcal{A}_r'}|\mathscr{T}|_{c'}\right)\\ &= \mathrm{TV}_{3,1}(M)\cdot\mathrm{TV}'_{r,r-s}(M)\end{aligned}$$

根据（3.1）、（3.2）、（A.1）以及引理 A.7。定理 A.1的证明至此完成。

References

[And13] J. E. Andersen, *The Witten–Reshetikhin–Turaev invariants of finite order mapping tori, I* **681** 2013 1 38 。《纯粹与应用数学杂志》（），–。[AscFW15] M. Aschenbrenner、S. Friedl、H. Wilton。*3-Manifold Groups*，EMS 数学讲座系列，2015年。[Ati89] M. Atiyah, *Topological quantum field theories*。《高等科学研究所数学出版物》68（1989），175–186。[BlaHMV 92] *Three-manifold invariants derived* C. *from the Kauffman bracket* **31** 1992 685 699 Blanchet、N. Habegger、G. Masbaum、P. Vogel，。《拓扑学》（），–。[BlaHMV 95] *Topological quantum field theories* C. Blanchet、N. *derived from the Kauffman bracket* **34** 1995 883 927 Habegger、G. Masbaum、P. Vogel，。《拓扑学》（），–。[DetK 19] *Quantum representations and monodromies of fibered* R. Detcherry 和 *links* **351** 2019 676 701 E. Kalfagianni，。《Adv. Math.》（），–。[DetKY 18] *colored Jones poly-* R. Detcherry、E. *nomials and volume* **9** 2018 775 813 Kalfagianni、T. Yang, *Turaev–Viro invariants*，，。《量子拓扑学》（），–。[Fun13] L. Funar, *Torus bundles not distinguished by TQFT invariants*，《几何与拓扑》17（2013），2289–2344。[Han 01] *Reshetikhin–Turaev invariants of Seifert 3-manifolds and a rational* S. K. Hansen，。*surgery formula* **1** 2001 627 686 《代数几何与拓扑》（），–。[Hem76] J. Hempel, *3-Manifolds*。1976年原版重印。美国数学会 Chelsea 出版社，普罗维登斯，罗得岛州，2004年。[Hem14] J. Hempel, *Some 3-manifold groups with the same finite quotients*, 2014年预印本，共10页：[91] https://arxiv.org/abs/1409.3089v2 KirM R. Kirby 和 P. Melvin, *The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin–Turaev* sl(;)。《Invent. *for* 2 $\mathbb{C}$ **105** 1991 473 545 Math.》（），–。[LawR99] R. Lawrence、L. Rozansky, *Witten–Reshetikhin–Turaev invariants of Seifert manifolds*，《Comm. Math. Phys.》205（1999），第2期，287–314。[LiuS22] Y. Liu 和 H. Sun，“三维流形拓扑中的虚拟特化及其后续”。载于：*Surveys in Differential Geometry 2020*，第215–252页，国际出版社，波士顿，马萨诸塞州，2022年。[Orl72] P. Orlik, *Seifert Manifolds*。《数学讲义》第291卷。Springer-Verlag，柏林—纽约，1972年。

[Rei 18] *Proceedings of the International Congress of Mathematicians— Rio de Janeiro 2018. Vol. II. Invited lectures* A. Reid, “副有限刚性”。载于：，第1193–1216页，World Sci. Publ.，哈肯萨克，新泽西州，2018年。[ResT 91] *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups* N. Reshetikhin 和 V. G. Turaev，。《Invent. Math.》（），–，**103** 1991 547 597。[Rob95] J. Roberts, *Skein theory and Turaev–Viro invariants*。《Topol.》34（1995），771–787。[Roz 96] *Residue formulas for the large k asymptotics of Witten's invariants of Seifert manifolds. The case of* L. Rozansky, SU( )。《Comm. Math. Phys.》（），–，2 **178** 1996 27 60。[Sok96] M. V. Sokolov, *The Turaev-Viro invariant for 3-manifolds is a sum of three invariants*。《Canad. Math. Bull.》39（1996），468–475。[Sok97] M. V. Sokolov, *Which lens spaces are distinguished by Turaev-Viro invariants?*（俄文）《Mat. Zametki》61（1997），468–470；译文见《Math. Notes》61（1997），384–387。[Tan 07] *The Turaev–Viro invariants of all orientable closed Seifert fibered manifolds* T. Taniguchi，。《Tokyo J. Math.》（），–，**30** 2007 497 522。[Tur94] V. G. Turaev, *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*。De Gruyter 数学研究丛书第18卷，Walter de Gruyter & Co.，柏林，1994年。[TurV 92] *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols* V. G. Turaev 和 O. Ya. Viro，。《Topol.》（），–，**31** 1992 865 902。[Was97] L. C. Washington, *Introduction to Cyclotomic Fields*。第二版。《数学研究生教材》第83卷。Springer-Verlag，纽约，1997年。[Wit89] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*。《Comm. Math. Phys.》121（1989），351–399。

Beijing International Center for Mathematical Research, Peking University, Beijing 100871, China P.R.
Email address: liuyi@bicmr.pku.edu.cn