arXiv:2303.14799v1 [math.RA] 26 Mar 2023

半环的减性空间

by

阿马蒂亚·戈斯瓦米

摘要。——本文利用定义半环 S 的减性理想的闭包算子，在该算子所诱导的 S 全体理想集合上引入一种拓扑。我们证明，相应的减性空间是 T_0，且每个非空不可约闭集都有唯一的泛点，而减性理想所构成的受限子空间是 T_1。借助半环同态，我们得到相应减性空间之间的连续映射。

1. 引言与预备知识

自半环于[5], 中被引入以来，将环中的结果与半环进行比较并加以推广便顺理成章。人们或许会认为半环总能扩张为环，但 [6] 给出了无法嵌入环中的半环实例。此外，半环中缺少“减法”，使得理想的性质与环中的理想大不相同。为缩小这一差距，‘k-理想’（在 [1]中也称为减性理想）的概念已于[2]中引入。定义减性理想存在一个自然的闭包算子。本文旨在利用该闭包算子，在半环的全体理想集合上引入一种拓扑，并研究这些空间的一些拓扑性质。

（交换）半环是一个系统 $(S,+,0,\cdot,1)$，满足 $(S,+,0)$ 是交换幺半群，$(S,\cdot,1)$ 是交换幺半群，$0\cdot x = 0 = x\cdot 0$ 对所有 $x \in S$均成立，且 $\cdot$ 对 $+$具有分配性。我们将 xy 记作 $x\cdot y.$。半环同态 $\phi\colon S \to S'$ 是一个映射，满足 $\phi(x+y) =\phi(x)+\phi(y)$、$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$，且 $\phi(1) = 1$ 对所有 x均成立。 $y \in S.$ 半环 S 的一个理想 I 是 S 的一个加法子幺半群，满足 $rx \in I$ 对所有 $x \in I$ 均成立，且 $r \in S.$。如果理想 I 满足$I \neq S.$，则称其为真理想。我们还用符号 0 表示 S的零理想。

回顾 [1]，减性理想 I 是 S 的一个理想，满足：若 x， $x+y \in I$，则 $y \in I$。等价地，若理想 I 满足： $x+y \in I$ 蕴含 x， $y \in I$ 或 x， $y \notin I.$，则称其为 S 的 k-理想。当然，零理想是减性的，并且包含于 S的每个 k-理想中。我们分别用 $\mathcal{J}dl(S)$ 和 $\mathcal{J}dl_{\text{sub}}(S)$ 表示 S 的所有理想和所有减性理想构成的集合。减性理想的概念

2020 数学主题分类. — 16Y60.关键词和短语. — 半环，减性理想，泛点。

也可以用定义在 $\mathcal{I}dl(S)$上的闭包算子来刻画。设 $I \in \mathcal{I}dl(S)$。一个减法闭包（也称为 k-闭包，参见[4, 引理 22]）算子 $\mathcal{C}_{\text{sub}}$ 定义如下：

$$\mathcal{C}_{\text{sub}}(I) = \{r \in S \mid r + x \in I \text{ for some } x \in I\}. \tag{1.1}$$

引理 ***1.1***。——设 I、$\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 和 J 是半环 S 的理想。那么 $\mathcal{C}_{\text{sub}}$ 具有以下性质。

(1) $I \subseteq \mathcal{C}_{\text{sub}}(I)$.(2) $\mathcal{C}_{\text{sub}}(0) = 0$.(3) $\mathcal{C}_{\text{sub}}(S) = S$.(4) $\mathcal{C}_{\text{sub}}(\mathcal{C}_{\text{sub}}(I)) = \mathcal{C}_{\text{sub}}(I)$.(5) $I \subseteq J$ 蕴含 $\mathcal{C}_{\text{sub}}(I) \subseteq \mathcal{C}_{\text{sub}}(J)$.
(6) $\mathcal{C}_{\text{sub}}(I \cup J) \supseteq \mathcal{C}_{\text{sub}}(I) \cup \mathcal{C}_{\text{sub}}(J)$.(7) $\mathcal{C}_{\text{sub}}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{C}_{\text{sub}}(I_\lambda)$.(8) $\mathcal{C}_{\text{sub}}(I)$ 是包含 I 的最小减性理想。(9) I 是减性的，当且仅当 $I = \mathcal{C}_{\text{sub}}(I)$.

证明。——（1）至（7）的证明很直接。对于（8），参见 [3, 命题 3。1], 而对于（9），请参见 [4, 引理 2。2]。 □

由引理 1.1(5) 显然可知 $\mathcal{C}_{\text{sub}}(I) \subseteq \mathcal{C}_{\text{sub}}(\sqrt{I})$ 对所有 $I \in \mathcal{I}dl(S)$. 注意，我们可以用引理 1.1(9) 作为半环的减性理想的另一种定义。由 (8) 可知，$\mathcal{C}_{\text{sub}}$ 确实是一个映射

$$\mathcal{C}_{\text{sub}} : \mathcal{I}dl(S) \to \mathcal{I}dl_{\text{sub}}(S)$$

由 (1.1) 定义。考虑包含映射 $\iota : \mathcal{I}dl_{\text{sub}}(S) \to \mathcal{I}dl(S)$，容易看出如下结论。

命题 ***1.2***。— 有序对 $(\mathcal{C}_{\text{sub}}, \iota)$ 构成一个伽罗瓦连接。

引理 ***1.3***。— 若 I 和 J 是半环 S的两个减性理想，则它们的乘积 IJ 也是 R的减性理想，且 $IJ \subseteq I \cap J$.

证明。— 设 $x, x + y \in IJ$。则 $x = ij$ 和 $x + y = i'j'$，其中某些 $i, i' \in I$ 以及 $j, j' \in J$.。由于 I 是一个理想，故 $ij, i'j' \in I$，也就是说，$x, x + y \in I$。由于 I 也是一个减性理想，因此这意味着$y \in I$. 。类似地，我们可以证明 $y \in J$. 。因此，$y \in IJ$，这就证明了 IJ 是一个减性理想。

设 $r \in IJ$。那么存在一个 $x \in IJ$，使得 $r + x \in IJ$. 。由于 I 和 J 是 S 的理想，我们必然有 $IJ \subseteq I \cap J$，这意味着 $r + x$、$x \in I \cap J$。由于 I 和 J 也是减性理想，我们必有 $r \in I \cap J$，证毕。 □

若 $\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一族减性理想，则它们的交集 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ 也是减性理想。注意，半环中两个减性理想的和不一定是减性理想。回顾 [1, 例 6.19]，2N 和 3N 是半环 N 的减性理想；然而，2N + 3N = N \ {1} 不是 N 的减性理想，不过它在格序半环中是减性理想（参见 [1, 推论 21. 22]）。环的全体理想构成的格是模格，而半环的情形则并非如此。尽管如此，我们仍有如下结果，该结果已在 [2]中宣布。证明见 [1,命题 6.38]。

命题 ***1.4***。—— 设 S 为一个半环。则 $\mathcal{I}dl_{\text{sub}}(S)$ 是一个模格。

2. 减性空间

由引理 1.1(1)–(5)可知，闭包算子 $\mathcal{C}_{\text{sub}}$ 满足代数闭包算子的公理。然而，一般而言， $\mathcal{C}_{\text{sub}}$ 并不对有限并封闭，因此它不是 Kuratowski 闭包算子。尽管如此，将 S 的子集 $\{\mathcal{C}_{\text{sub}}(I)\}_{I\in\mathcal{I}dl(S)}$ 视为子基闭集，仍可在 $\mathcal{I}\text{dl}(S)$上诱导出一种拓扑，我们称之为减性拓扑，并记为 τ_S。对于半环 S，赋予减性拓扑的集合 $\mathcal{I}\text{dl}(S)$ 称为减性空间；并且我们也用 $\mathcal{I}\text{dl}(S)$表示空间，而不使用 $(\mathcal{I}\text{dl}(S),\tau_s)$。

引理 ***2.1***. — 减性空间 $\mathcal{I}dl(S)$ 的子基闭集是 S的减性理想 .

证明。——证明由引理 1.1 的（8）和（9）可得。 □

若 $I, I' \in \mathcal{I}dl(S)$ 和 $I \neq I'$，则显然有 $\mathcal{C}_{\text{sub}}(I) \neq \mathcal{C}_{\text{sub}}(I')$，因此我们得到

引理 ***2.2***。——每个减性空间都是 T_0.

回顾一下，拓扑空间的非空闭子集 D 若满足：对于 D 的任意两个真闭子集 D_1 和 D_2，都有 $D \neq D_1 \cup D_2$，则称其为不可约。闭子集 D 中的点 x 若满足 $D = \{x\}.$，则称其为 D 的泛点

命题 ***2.3***。——减性空间的每个非空次基闭集都是不可约的。

证明。——我们证明 $\mathcal{C}_{\text{sub}}(I) = \{I\}$对所有 $I \in \mathcal{I}dl(S)$. 由于 $\{I\}$是包含I的最小闭集，由引理 1.1（1）可得 $\mathcal{C}_{\text{sub}}(I) \supseteq \{I\}$。为证明另一个包含关系，先考虑平凡情形 $\{I\} = \mathcal{I}dl(S)$. 对此我们有

$$\mathcal{I}dl(S) = \overline{\{I\}} \subseteq \mathcal{C}_{\text{sub}}(I) \subseteq \mathcal{I}dl(S),$$

因此 $\mathcal{C}_{\text{sub}}(I) \subseteq \{I\}$.现在假设

$$\overline{\{I\}} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigcup_{i=1}^{n_\lambda} \mathcal{C}_{\text{sub}}(I_{i\lambda})\right).$$

这意味着，对于某个 i，以及每个 $\lambda \in \Lambda$，都有 $I \subseteq \mathcal{C}_{\text{sub}}(I_{i\lambda})$。但这意味着

$$\mathcal{C}_{\text{sub}}(I) \subseteq \mathcal{C}_{\text{sub}}\left(\mathcal{C}_{\text{sub}}(I_{\lambda i})\right) = \mathcal{C}_{\text{sub}}(I_{\lambda i}) \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigcup_{i=1}^{n_\lambda} \mathcal{C}_{\text{sub}}(I_{i\lambda})\right),$$

因此，我们得到了所需的包含关系。 □

推论***2.4***. — $\mathcal{I}dl_{\text{sub}}(S)$ 是减性空间 $\mathcal{I}dl(S)$的最大 T_1-子空间。

证明. — 如果 $I \in \mathcal{I}dl_{\text{sub}}(S)$，那么根据命题2.3，我们有 $I = \mathcal{C}_{\text{sub}}(I) = \{I\}.$ □

定理 ***2.5***. — 减性空间的每个非空不可约闭子集都有唯一的泛点。

证明. — 设 D 是减性空间 $\mathcal{I}dl(S)$ 的一个非空不可约闭子集。那么$D = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{E}_\lambda$，其中每个 $\mathcal{E}_\lambda$ 都是 τ_s. 的有限个子基闭集的并。由于 D 不可约，对于每个 $\lambda \in \Lambda$，都存在一个 $I_\lambda \in \mathcal{I}dl(S)$，使得

$$D \subseteq \mathcal{C}_{\text{sub}}(I_\lambda) \subseteq \mathcal{E}_\lambda,$$

这意味着

$$D = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{C}_{\text{sub}}(I_\lambda) = \mathcal{C}_{\text{sub}}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) = \overline{\left\{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right\}},$$

其中，最后一个等式由命题2.3得出。这证明了泛点的存在性，而其唯一性则由引理2.2得出。□

本节旨在利用半环同态构造相应减性空间之间的连续映射，并研究这些映射的一些性质。与扎里斯基拓扑相比，主要区别在于，我们必须使用次基闭集的表述来研究这些映射。

引理 ***2.6***。— 若 $\phi\colon S \to S'$ 是一个半环同态，且 $J \in \mathcal{I}dl_{\text{sub}}(S')$，则有以下结论。

(1) $\phi^{-1}(J)$ 是 S的减性理想。特别地， $\ker\phi$ 是 S的减性理想。(2) $\phi^{-1}(J) = \mathcal{C}_{\text{sub}}(\phi^{-1}(J))$.

证明。——对于 (1) 的第一部分，众所周知， $\phi^{-1}(J) \in \mathcal{I}\text{dl}(S)$. 假设 $x, x+y \in \phi^{-1}(J)$.那么 $\phi(x)$, $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) \in J$。由于 $J \in \mathcal{I}\text{dl}_{\text{sub}}(S')$，我们必有 $\phi(y) \in J$，因此$y \in \phi^{-1}(J)$. 对于 (1) 的第二部分，令 $x, x+y \in \ker\phi$. 这意味着 $\phi(y) = \phi(x) + \phi(y) =\phi(x+y) = 0$，因此 $y \in \ker\phi$. (2) 的证明由 (1) 立即得出。□

命题 ***2.7***。——假设 $\phi\colon S \to S'$ 是一个半环同态。

(1) 映射 ϕ 诱导出一个连续映射 $\phi_!\colon \mathcal{I}dl(S') \to \mathcal{I}dl(S)$，其定义为 $\phi_!(J) = \phi^{-1}(J)$，其中 $J \in \mathcal{I}dl(S')$.(2) 若 ϕ 是满射，则减性空间 $\mathcal{I}dl_{\text{sub}}(S')$ 和 $\mathcal{I}dl_{\text{sub}}(S)$ 同胚。

证明。——为证明（1），令 $\mathcal{C}_{\text{sub}}(I)$ 为减性空间 $\mathcal{I}dl(S)$的一个次基闭集。对我们而言，只需证明 $\phi(\mathcal{C}_{\text{sub}}(I)) \subseteq \mathcal{C}_{\text{sub}}(\langle\phi(I)\rangle)$. 令 $s' \in \phi(\mathcal{C}_{\text{sub}}(I))$. 这意味着 $\phi^{-1}(s') \in\mathcal{C}_{\text{sub}}(I)$，因此

$$\phi\phi^{-1}(s') + \phi(i) \in \phi(I) \subseteq \langle\phi(I)\rangle,$$

对某个 $i \in I$. 由此我们得出 $s' \in \phi\phi^{-1}(s') \in \mathcal{C}_{\text{sub}}(\langle\phi(I)\rangle)$.

对于（2），容易看出映射$\phi_!$是单射。由于根据假设$\phi_!$是满射，且由（1），$\phi_!$是连续的，接下来只需证明$\phi_!$是闭映射。注意，若 $\mathcal{C}_{\text{sub}}(I)$是$\mathcal{I}dl_{\text{sub}}(S')$的子基闭子集，则由引理2.6（2），$\phi_!(\mathcal{C}_{\text{sub}}(I))$也是$\mathcal{I}dl_{\text{sub}}(S')$. 的子基闭集。现在，若 K 是 $\mathcal{I}dl_{\text{sub}}(S')$的闭子集，则存在一个 $\{I_{j\lambda} \mid \lambda \in \Lambda, 1 \leqslant j \leqslant m_\lambda\}$ 由.....组成的集合

使得 S' 的减性理想

$$\begin{aligned}\phi_!(K) &= \phi_!\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigcup_{j=1}^{m_\lambda}\mathcal{C}_{\text{sub}}(I_{j\lambda})\right)\right)\\ &= \phi_!\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\left(\bigcup_{j=1}^{m_\lambda} I_{j\lambda}\right)\right)\\ &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\bigcup_{j=1}^{m_\lambda}\phi^{-1}(I_{j\lambda}),\end{aligned}$$

$\mathcal{I}\mathrm{dl}dl_{\text{sub}}(S)$.的闭子集 □

参考文献

[1] J. S. Golan, 半环及其应用, 施普林格, 1999.[2] M. Henriksen, 关于加法交换的半环中的理想, 《美国数学会通报》, 6(3) 31 (1958), 321.[3] J. Jun, S. Ray, and J. Tolliver, 格、谱空间以及幂等半环上的闭包算子, 《代数杂志》, 594 (2022), 313–363.[4] M. K. Sen and M. R. Adhikari, 关于半环的 k-理想, 《国际数学与数学科学杂志》, 15(2) (1992), 347–350.[5] H. S. Vandiver, 关于一种加法消去律不成立的简单代数类型的注记, 《美国数学会会报》, 40(12) (1934), 914–920.[6] H. S. Vandiver, 关于几种简单类型的半环, 《美国数学月刊》, 46(1) (1939), 22–26.

阿马蒂亚·戈斯瓦米， [1] 约翰内斯堡大学数学与应用数学系，邮政信箱 524，奥克兰公园 2006，南非。 [2] 国家理论与计算科学研究所（NITheCS），南非。 • 电子邮箱：agoswami@uj.ac.za