平稳高斯过程零点过度拥挤与欠拥挤概率的尖锐转变

NAOMI DVORA FELDHEIM、OHAD NOY FELDHEIM 和 LAKSHMI PRIYA M.E.

Abstract. 我们研究实值平稳高斯过程在 $[0,T]$ 中至少有 ηT 个零点（过度拥挤），或至多有这么多个零点（拥挤不足）的概率。我们证明，若该过程的谱测度支撑于 $\pm[B,A]$，则过度拥挤概率在 $\eta=\frac{A}{\pi}$ 处从指数衰减转变为高斯衰减，而拥挤不足概率则在 $\eta=\frac{B}{\pi}$ 处发生相反的转变。

arXiv:2303.14808v3 [math.PR] 9 Jul 2023

1. Introduction

令 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 为一个连续的中心化平稳高斯过程（平稳高斯过程），即一个平移不变的随机函数，其有限维边缘分布为均值为零的多元正态分布。此类过程由其协方差核刻画，$k(t)=\mathbb{E}[F(0)F(t)]$, 或者，等价地，由其谱测度 μ 刻画；谱测度是对 k 作逆傅里叶变换得到的有限、非负、对称测度，因此，

$$k(t)=\mathcal{F}[\mu](t)=\int_{\mathbb{R}}e^{-i\lambda t}d\mu(\lambda).$$

全文中我们均假设 $k(0)=1$，因此 μ 被归一化为概率测度。与 F 相关的零点过程的计数测度由下式生成：

$$N_F(T)=N(T)=\#\{t\in[0,T]:\ f(t)=0\}.$$

平稳高斯函数的零点构成了一类研究充分的随机点过程，具有众多应用[1, 7, 12, 24]。根据Kac-Rice公式，$N_F(T)$ 的期望为 [23, 33],

$$\mathbb{E}[N_F(T)]=\frac{\gamma}{\pi}T,\quad \text{where}\quad \gamma^2=-k''(0)=\int_{\mathbb{R}}\lambda^2 d\mu(\lambda).$$

人们也研究了 $N(T)$ 的方差和高阶矩 [4, 37],，以及有关聚集和极限定理的结果 [2, 25]。然而，涉及此类过程的罕见事件通常尚未得到充分理解（参见 [8] 和 [38, Q. 7]中的讨论）。

本文研究当 T趋于无穷时 $N_F(T)$ 的线性偏差。这些偏差包括 η-过度拥挤事件，表示为 $\{N_F(T)\geq\eta T\}$，其中 $\eta>\mathbb{E}[N_F(1)],$；以及 η-拥挤不足事件，表示为$\{N_F(T)\leq\eta T\}$，其中 $\eta<\mathbb{E}[N_F(1)]$。

Basu、Dembo、Zeitouni 和第一作者在 [8] 中证明，对于性质良好的平稳高斯过程以及任意 $\eta>\mathbb{E}[N_F(1)],$， η-过度拥挤的概率至多以指数速度随 T衰减。相比之下，第三作者在 [32] 中证明，当谱测度具有紧支撑时

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：60F10、60G10、60G15；次要分类：30D15。*Key words and phrases.* 平稳高斯过程、零点计数、过度拥挤。N.F. 和 O.F. 感谢 ISF 项目（编号 1327/19）提供的支持。L.P.M.E. 感谢 ERC 高级项目（编号 692616）、ERC 巩固者项目（编号 101001124，UniversalMap）以及 ISF 项目（编号 1294/19）提供的支持。

且 η 充分大时， η-过度拥挤概率以高斯方式或更快的速度衰减。本文确定了这两种衰减轮廓之间的一个尖锐相变，该相变发生在 $\eta = \frac{A}{\pi}$，其中 A 是谱的支撑集的上确界。

定理 1. 假设 μ 是紧支撑的，且 $\mu_{\mathrm{ac}} \not\equiv 0$。令 A 为满足 $\mathrm{sprt}(\mu) \subseteq [-A, A]$的最小正数。那么：

(1) 存在 c、d_1、$d_2 > 0$，使得对每个 $T \geq e^8$和 $\varepsilon \in \left[d_1 \log \frac{T}{\sqrt{T}}、\ d_2\right]$，都有

$$\mathbb{P}\left(N_F(T) \geq \frac{A}{\pi}T + \varepsilon T\right) \leq \exp\left(-c(\varepsilon/\log\varepsilon)^4 T^2\right).$$

(2) 对每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $c > 0$，使得对所有 $T \geq 1$，都有

$$\mathbb{P}\left(N_F(T) \geq \frac{A}{\pi}T - \varepsilon T\right) \geq \exp(-cT).$$

当 μ 具有谱隙时，也可为拥挤不足建立类似的相变。

定理 2. 假设 μ 是紧支撑的，且 $\mu_{\mathrm{ac}} \not\equiv 0$。令 B 和 A分别为满足 $\mathrm{sprt}(\mu) \subseteq [-A, -B] \cup [B, A]$的最大和最小非负数。那么：

(1) 存在 $c, d_1, d_2 > 0$，使得对于每个 $T \geq e^8$ 和 $\varepsilon \in \left[d_1 \text{对数} \frac{T}{\sqrt{T}}, d_2\right]$，我们有

$$\mathbb{P}\left(N_F(T) \leq \frac{B}{\pi}T - \varepsilon T\right) \leq \exp(-c(\varepsilon/\log\varepsilon)^4 T^2).$$

(2) 对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $c > 0$，使得对于所有 $T \geq 1$，我们有

$$\mathbb{P}\left(N_F(T) \leq \frac{B}{\pi}T + \varepsilon T\right) \geq \exp(-cT).$$

本文余下部分的结构安排如下。在第 1.1 节和1.2 节中，我们分别介绍下界和上界证明的主要步骤。在第 1.3 节中，我们讨论结果的紧性。在第 1.5 节中，我们探讨这些结果在平稳高斯过程零点研究这一更广泛背景中的作用。在第 1.4 节中，我们介绍启发了该证明的确定性类比。第 1.6 节专门讨论开放问题和未来研究。第 2 节是预备章节，介绍整函数和高斯过程的若干有用结果。在第 3 节中，我们证明一个结果（下文的命题 1.1 ），它蕴含了两个定理中的下界。第 4节包含定理 1上界的证明，而第 5 节则将定理 2 的上界归约为定理 1的上界。

1.1. 证明的主要步骤：下界。两个定理中的下界都可直接由以下命题推出，该命题旨在对 $\frac{N(T)}{T}$ 进行严格控制，或许也具有独立的研究价值。

命题 1.1. 假设对于某个 $X \in (0, \infty)$ 和 $\varepsilon > 0$，有 $\int \lambda^2 \log^2 \lambda \, d\mu(\lambda) < \infty$ 且 $\mu([X-\varepsilon, X+\varepsilon]) > 0$。那么存在 $c > 0$ 使得

$$\mathbb{P}\left(\frac{N(T)}{T} \in \left[\frac{X-2\varepsilon}{\pi}, \frac{X+2\varepsilon}{\pi}\right]\right) \geq \exp(-cT), \quad \text{for sufficiently large } T. \tag{1}$$

此外，如果 $\limsup_{\delta \to 0} \frac{\mu([X-\delta, X+\delta])}{2\delta} = \infty$，那么对于任意 1的取值， $c > 0$。

这是通过估计 F 与纯波近似的概率得到的。随后分别通过选择 1 和2 ，得到定理 $X = A$ 和 $X = B$ 中的下界。

1.2. 证明的主要步骤：上界。定理 1 中上界的证明使用了复分析中的经典工具。事实上，我们不直接给出 F在 $[0,T]$中的实零点个数上界，而是给出其解析延拓 F 在该区间邻域内的复零点个数上界。类似的思路见[8]。

若存在 σ、$C>0$，使得……，则称整函数 $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 具有指数型。 t

$$|f(z)|\le C\exp(\sigma|z|),\quad \forall z\in\mathbb{C}. \tag{2}$$

若存在某个 C，使得该不等式成立，则将所有满足此条件的 σ 的下确界定义为 f 的指数型。若整函数 $f:\ \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 满足以下两个条件，则称其属于 Cartwright 类 $\mathcal{C}$。

(1) 对某个 $\sigma\in[0,\infty,$ f 具有指数型 σ。(2) f
满足积分条件：

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\log^{+}|f(t)|}{1+t^{2}}dt<\infty. \tag{3}$$

Cartwright 类函数的零点具有特殊性质，详见 [29, §16.1] 和 [18]。

我们证明的第一步是证明 F 几乎必然属于 Cartwright 类，且其指数型至多为 A（下文命题 4.1）。这保证了 log $|F|$ 的上界（推论 2.3）。随后，我们利用著名的詹森公式（下文定理 2.1），将 F的加权零点计数与某点处 log $|F|$ 的取值及积分联系起来。为了建立上界，我们进一步在精心选取的一组点上对该公式取平均，使得 $[0,T]$ 中每个实零点获得的总权重大致相同。接下来的挑战在于，为 log $|F|$ 以及存在合适点这一事件给出概率界。

定理 2 的上界是通过在 F与另一个平稳高斯过程 G（见下文主张 5.1）之间建立一种非平凡的耦合得到的。在这种耦合下，F 的拥挤不足对应于 G的过度拥挤。将定理 1 应用于 G 即可完成论证。Eremenko 和 Novikov [17]提出了这一有用的耦合。

1.3. 上界的紧性。 定理 1 和 2 给出的一侧界通常能刻画转变点上下概率的精确衰减率，指数中相差一个常数。本节综述相关结果，讨论这一结论成立的条件。

指数上界。 Basu、Dembo、Zeitouni 和第一作者的结果 [8]表明，对于谱密度紧支撑且协方差核绝对可积的平稳高斯过程，$N_F(T)$ 相对于其均值的任意（上侧或下侧）线性偏差，其衰减确实呈指数级或更快[1]。我们推测，只要谱密度有界且具有某个有限的指数矩，这一性质就应成立（见下文猜想 3 和 4）。

高斯下界。在 [19], Jay、Nazarov 和 Nitzan 与前两位作者的合作研究中，他们证明，若谱测度紧支撑且具有非平凡的绝对连续分量，则持久性（即 0-拥挤不足）的概率至少为 $\exp(-CT^2)$。根据单调性，这意味着对所有 η，η-拥挤不足概率都有一个高斯下界。第三位作者 [32] 证明了类似的高斯下界

[1]事实上，在[8] 中，这一点是针对一个稍大的平稳高斯过程族证明的。

下界 η-过度拥挤概率；该结论适用于矩有限且具有非平凡绝对连续分量的谱测度。因此，定理 1 和 2 的第一部分在指数中的常数因子意义下是紧的。

1.4. 确定性类比。 Cartwright 类函数在复平面中以原点为中心的球内的零点数量，渐近地受到其指数增长的限制。以下定理归功于 Levinson 和 Cartwright，与定理 1类似。

定理 1.2（[29, 第 17 章，定理 1]）。设 $f \in \mathcal{C}$ 为指数型 $A > 0$。则

$$\lim_{R\to\infty} \frac{n_f^+(R)}{R} = \lim_{R\to\infty} \frac{n_f^-(R)}{R} = \frac{A}{\pi},$$

其中， $n_f^{\pm}(R)$表示 f 在 $\{z \in \mathbb{C}$ 中的零点计数： $|z| < R$ 且 $\mathrm{Re}(z) \gtrless 0\}$。

Eremenko 和 Novikov 利用这一结果研究了在原点处具有谱隙的函数的渐近零点密度；这一结果类似于定理 2。

定理 1.3（[17, 命题 1]）。设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数，其谱支撑于 $\pm[B, A]$，其中 $A, B > 0$满足 $\int_{\mathbb{R}} \frac{\log^+|f(t)|}{1+t^2} dt < \infty$()。那么

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{N_f(R)}{R} \geq \frac{B}{\pi}.$$

注意，要使定理1.3 在如此一般的情形下成立，需要推广傅里叶变换的概念，详见 [17] 。

对于谱测度支撑于 $\pm[B, A]$的平稳高斯过程 F，这些结果表明，渐近地， $\frac{N_F(T)}{T} \in [\frac{B}{\pi}, \frac{A}{\pi}]$。本文旨在为收敛速率提供概率估计。尽管我们不直接使用定理1.2 和1.3 ，但在证明定理1 和 2 时，将分别借鉴这些结果证明中的思路。

1.5. 背景。多年来，研究平稳高斯过程的零点计数大偏差几乎没有进展。人们曾预期，与许多经典的随机和模型类似， $N(T)$ 中出现大偏差的概率应当关于 T 渐近呈指数级衰减。直到最近，即便对于平稳高斯过程中一个非平凡的例子，这种指数集中也尚未得到证明（正如 Tsirelson [40] 和 Sodin [38]的讲义中所提到的）；尽管相关模型已取得此类结果，包括平面与双曲高斯解析函数的复零点 [27, 39] ，以及高斯拉普拉斯特征函数的节点分支数 [30, 31, 35]。对于高次 Kostlan 多项式的零点，以及其他流形上的高斯模型 [22], ，也得到了一些偏差的指数界；对于具有快速协方差衰减的高维光滑高斯场中的节点分支数及其他拓扑事件，也有类似结果 [9]。

在 η 足够大时， η-过度拥挤概率会极快衰减，这一点已在 [32] 中指出。该文还研究了大于线性的过度拥挤；对于具有绝对连续分量的紧支撑谱测度，文中证明，当 $n \geq CT$ 时，$\log \mathbb{P}(N_F(T) \geq n) \asymp -n^2 \log(n/T)$，其中 $C > 0$ 是某个常数。

0-拥挤不足这一特殊情形也称为持久事件，受到了物理学家 [10] 和数学家 [6]的广泛关注。1962年，Slepian 提出了著名的比较不等式，以约束这些事件 [36], ，但这还不足以

确定许多值得关注的例子中的衰减率（例如，参见 [15]）。直到过去十年，人们才在理解持久性及估计其概率方面取得重大进展（例如，参见 [5, 13, 14, 26]）。利用新的谱技术，研究表明，持久性概率的衰减率主要取决于原点附近谱测度的行为 [21], ；当原点处存在谱密度时，其渐近行为呈指数型 [20]。这些研究中提出的方法在命题1.1的证明中发挥了重要作用。

1.6. 未来工作。本文概述了若干关于过度拥挤和欠拥挤事件的未来研究方向。

转变窗口。 虽然定理 1 和 2 表明过度拥挤概率和欠拥挤概率存在相变，但对于理解这一转变的精细特征并确定转变窗口，它们仍有不足。定理 1 表明，对于 $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$ 我们有

$$\mathbb{P}\left(N(T) \geq \frac{A}{\pi}T + T^{\beta}\right) \leq \exp(-T^{4\beta-2-\varepsilon})$$

对任意 $\varepsilon > 0$，而定理 2 则给出了欠拥挤的类似界。对于 $\beta \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$，这个界比 [8], 中得到的界更差，而且不太可能是紧的。我们的第一个问题旨在改进这个界，并找到与之匹配的下界。

问题 1. 对于 $\beta \in [0, 1]$，求 $\mathbb{P}\left(N(T) \geq \frac{A}{\pi}T + T^{\beta}\right)$ 的紧上界和下界。

非紧支撑谱下的拥挤不足。 对于所有具有谱隙的过程，拥挤不足概率呈次高斯衰减似乎是自然的，而且无需满足紧谱支撑这一条件。定理 2 中的这一限制仅仅源于我们在证明它时使用了定理 1 。

问题 2。 去掉定理 μ 具有紧支撑这一条件（定理 2）。

一般指数上界。 命题 1.1 表明，对于谱密度无界或在 [8] 以外具有奇异谱分量的谱测度，$\pm\pi\mathbb{E}[N_F(1)]$的指数上界并不成立。此外，指数上界还要求测度具有某种指数矩，否则 $N_F(T)$ 不可能呈指数衰减。我们猜想，这些正是此类上界成立的真正障碍。

猜想 3. 若 μ 具有有界密度，且有某个有限指数矩，则对于任意$\alpha > 0$，存在 $c > 0$ 使得

$$\mathbb{P}(|N_F(T) - \mathbb{E}N_F(T)| \geq \alpha T) \leq e^{-cT}.$$

事实上，我们猜想以下更强的结论成立。

猜想 4. 若 $a > \pi\mathbb{E}[N_F(1)]$ 满足 $\mu|_{[a,\infty)}$ 有界密度且具有某个有限的指数矩，则存在 $c > 0$ 使得 $\mathbb{P}\left(N_F(T) > \frac{a}{\pi}T\right) \leq e^{-cT}$。

拥挤不足也应具有类似性质。

指数与条件行为。最后，我们提出另外两个问题，分别涉及精确的过度拥挤和拥挤不足指数，以及条件行为。

问题 问题5. 描述使极限 $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\log \mathbb{P}(N_F(T) \geq \eta T)$ 存在的条件。

问题6. 描述在事件 $\{N_F(T) \geq \eta T\}$ 条件下的过程 F。特别是，描述经验功率谱 $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \left|\mathcal{F}^{-1}\left[F_{\mathbb{I}[0,T]}\right]\right|^2$，其中 F 是条件过程。

关于拥挤不足事件，也可以提出类似的问题。解决这些问题的一种可行方法，或许是改进 Donsker-Varadhan [16] 和 Bryc-Dembo [11], 针对平稳高斯过程经验测度所建立的大偏差原理，因为其现有条件过于严格，无法直接应用。

2. Preliminaries

2.1. 整函数理论。我们需要一些关于整函数的经典结果。对于 $z \in \mathbb{C}$ 和 $r > 0$，用 $B(z,r) := \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\} \subseteq \mathbb{C}$ 表示以 z为圆心、半径为 r的圆盘，用 $n_f(z,r)$表示整函数$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 在该圆盘内零点的个数（按重数计算）。以下是著名的 Jensen 零点计数公式。

定理 2.1（Jensen [29, §2.3]）。设 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个整函数，且 $f(0) \neq 0$。假设 f 在 $\partial B(0,R)$ 上没有零点。那么

$$\int_0^R \frac{n_f(0,t)}{t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})| d\theta - \log|f(0)|.$$

我们还需要 Phragmén–Lindelöf 定理。设 $\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ 表示上半平面，$\overline{\mathbb{U}}$ 表示其闭包。指数型 σ函数的概念可自然推广到定义在 $\mathbb{U}$ 上的全纯函数。

定理 2.2（Phragmén–Lindelöf [29, §6.1，定理 3]）。设 $f : \overline{\mathbb{U}} \to \mathbb{C}$ 是一个连续函数，在 $\mathbb{U}$ 上全纯，具有指数型 σ，且满足 $|f| \leq M$ 在 $\mathbb{R}$ 上。则对任意 $z = x + iy \in \overline{\mathbb{U}}$,

$$|f(x + iy)| \leq Me^{\sigma y}.$$

由此我们得到以下推论，它涉及 Cartwright 类中的函数。这类函数并非有界，而是满足缓慢增长假设（3）。这一结果是在证明[29, §16.1，定理 1] 的过程中得到的，现列于此以供完整参考。

推论 2.3. 设 f 是一个指数型为 $\sigma > 0$ 的 Cartwright 类函数。那么对于每个 $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$，有

$$\log|f(z)| \leq \frac{|y|}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\log^+|f(t)|}{|t - z|^2} dt + \sigma|y|.$$

证明. 不失一般性，设 $z \in \mathbb{U}$。记

$$g(z) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\log^+|f(t)|}{|t - z|^2} dt,$$

它由（3）收敛。这是 $\mathbb{U}$ 上的调和函数，其在 $\mathbb{R}$ 上的边界值与 $\log^+|f|$一致。记 g的调和共轭函数为 $\tilde{g}$并写作

$$F(z) = f(z)e^{-g(z)-i\tilde{g}(z)}.$$

由于 $g \geq 0$，我们有 $|F(z)| \leq |f(z)| \exp(-g(z)) \leq |f(z)|$，因此 F在 $\mathbb{U}$上是指数型至多为 σ 的解析函数。此外，对所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $|F(t)| \leq 1$，因此我们可以应用定理 2.2，得到 $|F(x + iy)| \leq \exp(\sigma y)$。两边取对数，即得推论。□

2.2. 平稳高斯过程理论中的工具。本节中，令 F 为一个固定的中心化平稳高斯过程，其谱测度为 μ，且所有矩均有限。因此， F 是光滑的，其高阶导数 $F^{(n)}$ 也是中心化平稳高斯过程，谱测度为 μ_n，由 $d\mu_n(x) = x^{2n}d\mu(x)$给出，协方差核为

$$\mathbb{E}[F^{(n)}(x) \cdot F^{(n)}(0)] = (-1)^n \ k^{(2n)}(x), \text{ for } x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

其中， k 是 F的协方差核。定义关于 μ 的对称平方可积函数空间如下

$$\mathcal{L}^2_{\text{symm}}(\mu) := \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \ \int_{\mathbb{R}} |\varphi|^2 d\mu < \infty, \ \varphi(-\lambda) = \overline{\varphi(\lambda)} \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

F 具有如下正交表示。

引理 2.4 ([21, 引理 3。7])。 设 $\{\varphi_n\}$ 是 $\mathcal{L}^2_{\text{symm}}(\mu)$ 的一组正交归一基，并记 $\psi_n(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda t}\varphi_n(\lambda)d\mu(\lambda)$。则

$$F \overset{d}{=} \sum_n \zeta_n \psi_n, \quad \zeta_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1).$$

下面的引理表明， F 在实数轴上至多线性增长，并为其增长率提供了一个概率界。

引理 2.5。存在 $c > 0$，使得对每个足够大的 $M > 0$

$$\mathbb{P}\Big(\forall s \in \mathbb{R} \ : \ |F(s)| \le M(1 + |s|)\Big) \ge 1 - e^{-cM^2}.$$

引理的证明 *2.5.* 通过简单应用 Dudley界 [1, 定理 1.3。3] 和 Borell-TIS 不等式 [1, 定理 2.1。1] (完整证明见 [32, 引理 3。10])，存在 $a, c \in (0,1)$ 使得对于每个 M 充分大的情形，都有

$$\mathbb{P}\left(\sup_{[0,aM]} |F| \ge M \right) \le \exp(-cM^2).$$

由 F 的平稳性，事件

$$E_{k,M} := \left\{ \sup\{|F(t)| : t \in [akM, a(k+1)M]\} > \frac{(|k|+1)M}{2} \right\}$$

满足 $\mathbb{P}(E_{k,M}) \le \exp(-ck^2M^2/4)$。应用并集界可得，对于充分大的 M ，

$$\mathbb{P}(\cup_{k\in\mathbb{Z}} E_{k,M}) \le \exp(-cM^2/5).$$

注意到 $\{\exists s \in \mathbb{R}: \ |F(s)| > M(1+|s|)\} \subset \cup_{k\in\mathbb{Z}} E_{k,M}$，引理得证。 □

我们还需要球事件概率的界。

引理 2.6 （[32, 引理 3.4]的应用）。假设 $\mu_{\text{ac}} \neq 0$。那么存在 α、 $\beta > 0$，使得对于所有 $T \ge 1$ 和 $\ell > 0$，我们有:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{[0,T]} |F| \le \ell \right) \le e^{\beta T^2} \ell^{\alpha T}.$$

引理 2.7 （[21, 引理 3.17]）。假设对于某个 $\delta > 0$，有 $\int |\lambda|^\delta d\mu(\lambda) < \infty$。那么存在 $\ell_0 > 0$ 和 $c > 1$，使得对于所有 $T \ge 1$ 和 $\ell > \ell_0$，我们有:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{[0,T]} |F| \le \ell \right) \ge \mathbb{P}\left(c|F(0)| \le \ell\right)^T.$$

以下著名的比较不等式归功于安德森。

引理 2.8 ([3])。设 X 和 Y 是定义在 I上的独立中心高斯过程。则对任意 $\ell > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_I |X+Y| \le \ell\right) \le \mathbb{P}\left(\sup_I |X| \le \ell\right).$$

我们还需要著名的高斯相关不等式。

引理 2.9 ([28, 34])。设 X 是 $\mathbb{R}^d$ 中的一个中心高斯向量。那么，对于任意关于 0 对称的凸集 K、$L \subset \mathbb{R}^d$，有

$$\mathbb{P}(X \in (K \cap L)) \ge \mathbb{P}(X \in K)\,\mathbb{P}(X \in L).$$

最后，我们给出高斯分布尾部的标准界。

引理 2.10 ([1, 第 1 章。2])。设 $Z \sim \mathcal{N}_{\mathbb{R}}(0,1)$。那么对任意 $x > 0$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} \le \mathbb{P}(Z > x) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x} e^{-x^2/2}.$$

特别地，对于 $x \ge 2$，有 $e^{-x^2} \le \mathbb{P}(Z > x) \le e^{-x^2/2}$。

3. Lower bounds

本节专门证明命题 1.1。不失一般性，假设 $X = 1$，$0 < \varepsilon < \frac{1}{10}$ 且 $T > 1$。注意，必定存在 $a \in (1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$ 使得

$$\mu\left(\left[a - \tfrac{1}{10T}, a + \tfrac{1}{10T}\right]\right) \ge \tfrac{1}{10\varepsilon T}\,\mu([1-\varepsilon, 1+\varepsilon]). \tag{5}$$

固定这样的 a，并记

$$I = \left[a - \tfrac{1}{10T}, a + \tfrac{1}{10T}\right] \text{ and } \pm I = I \cup -I.$$

取一个正交归一基 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 作为 $\mathcal{L}^2_{\text{symm}}(\mu$，其中 $f_1 = (\mu(\pm I))^{1/2}\mathbb{1}_{\pm I}$. 由引理 2.4可得

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{f_n}(x), \text{ where } \xi_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{N}(0,1).$$

记 $G := F - \xi_1 f_1$ 并注意到 G 独立于 ξ_1。我们计算得，

$$\sqrt{2\mu(I)}\,\widehat{f_1}(x) = 2\int_I \cos(\lambda x)d\mu(\lambda) = 2\mu(I)\cos(ax) + 2\int_I (\cos(\lambda x) - \cos(ax))\,d\mu(\lambda),$$

$$-\sqrt{2\mu(I)}\,\widehat{f_1}'(x) = 2\int_I \lambda\sin(\lambda x)d\mu(\lambda) = 2a\mu(I)\sin(ax) + 2\int_I (\lambda\sin(\lambda x) - a\sin(ax))\,d\mu(\lambda).$$

由于 sin 和 cos 都是 1-利普希茨的，因此我们得出，对于任意 $|x| \le T$,

$$\left|\frac{\widehat{f_1}(x)}{\sqrt{2\mu(I)}} - \cos(ax)\right| \le \frac{1}{\mu(I)}\int_I |\lambda - a||x|d\mu(\lambda) < \frac{1}{10}, \quad \text{and}$$

$$\left|\frac{\widehat{f_1}'(x)}{a\sqrt{2\mu(I)}} + \sin(ax)\right| \le \frac{1}{a\mu(I)}\int_I |\lambda - a|(|ax|+1)d\mu(\lambda) \le \frac{1}{10}\left(1 + \frac{2}{1-\varepsilon}\right) < \frac{4}{10},$$

其中我们用到了以下事实：对所有 $\lambda \in I$，$|\lambda - a| \le \frac{1}{10T}$。注意，根据我们的假设，$G$ 几乎必然连续可微，且 G' 是一个中心高斯过程

$\int \lambda^2 \log^2 \lambda d\mu(\lambda) < \infty$。给定 $L > 0$，定义这些事件

$$E_1 = \left\{ \sqrt{2\mu(I)}\xi_1 \geq 10L \right\}, \quad E_2 = \left\{ \sup_{[0,T]} |G| \leq L \right\}, \quad E_3 = \left\{ \sup_{[0,T]} |G'| \leq aL \right\},$$

并注意到 E_1 与 E_2 和 E_3 相互独立。我们推得，在事件 $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ 上，有

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x)}{\sqrt{2\mu(I)}\xi_1} - \cos(ax) \right| &= \left| \frac{\widehat{f}_1(x)\xi_1}{\sqrt{2\mu(I)}\xi_1} + \frac{G(x)}{\sqrt{2\mu(I)}\xi_1} - \cos(ax) \right| \\
&\leq \left| \frac{\widehat{f}_1(x)}{\sqrt{2\mu(I)}} - \cos(ax) \right| + \left| \frac{G(x)}{\sqrt{2\mu(I)}\xi_1} \right| < \frac{1}{2}. \\
\left| \frac{F'(x)}{a\sqrt{2\mu(I)}\xi_1} + \sin(ax) \right| &= \left| \frac{\widehat{f}_1{}'(x)\xi_1}{a\sqrt{2\mu(I)}\xi_1} + \frac{G'(x)}{a\sqrt{2\mu(I)}\xi_1} + \sin(ax) \right| \\
&\leq \left| \frac{\widehat{f}_1{}'(x)}{a\sqrt{2\mu(I)}} + \sin(ax) \right| + \left| \frac{G'(x)}{a\sqrt{2\mu(I)}\xi_1} \right| < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

记 $S_1 = \left(\frac{\pi}{a}\mathbb{Z} + \left[-\frac{\pi}{4a}, \frac{\pi}{4a}\right]\right) \cap [0,T]$ 和 $S_2 = \left(\frac{\pi}{a}\mathbb{Z} + \left[\frac{\pi}{4a}, \frac{3\pi}{4a}\right]\right) \cap [0,T]$，并注意到 $S_1 \cup S_2 = [0,T]$。我们得出结论，在事件 $E_1 \cap E_2 \cap E_3$ 上，有

$$\forall x \in S_1 : \quad \left| \frac{F(x)}{\sqrt{2\mu(I)}\xi_1} \right| > \cos(\tfrac{\pi}{4}) - \tfrac{1}{2} \tag{6}$$

$$\forall x \in S_2 : \quad \left| \frac{F'(x)}{a\sqrt{2\mu(I)}\xi_1} \right| > \sin(\tfrac{\pi}{4}) - \tfrac{1}{2} \tag{7}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \cap [0,T] : \quad \operatorname{sgn}\left(F(\tfrac{k\pi}{a})\right) = (-1)^k. \tag{8}$$

由 (6)，F 在 S_1 中没有零点。由 (8)，除了最后一个区间外，它在 S_2 的每个区间内至少有一个零点；而由 (7)，它在 S_2 的每个区间内至多有一个零点。由于这样的区间共有 $\lfloor \frac{aT}{\pi} \rfloor$ 个，因此我们推得 $\frac{N(T)}{T} \in [\frac{1-2\varepsilon}{\pi}, \frac{1+2\varepsilon}{\pi}]$ 对充分大的 T 成立。因此

$$\mathbb{P}\left(\frac{N(T)}{T} \in \left[\frac{1-2\varepsilon}{\pi}, \frac{1+2\varepsilon}{\pi} \right] \right) \geq \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2 \cap E_3). \tag{9}$$

因此，我们只需选择 L，并对 $\mathbb{P}(E_1)$ 和 $\mathbb{P}(E_2 \cap E_3)$ 得到一个界。

写出 $\kappa = \frac{1}{10\mu([1-\varepsilon,1+\varepsilon])}$，并结合（5）以及引理 2.10中的高斯尾界，对于充分大的 T，可得

$$\mathbb{P}(E_1) = \mathbb{P}\left(\xi_1 \geq 5\sqrt{\tfrac{2}{\mu(I)}}L \right) \geq \mathbb{P}\left(\xi_1 \geq 5\sqrt{2\kappa T}L \right) \geq e^{-50L^2\kappa T}.$$

此外，我们注意到，存在某个 $c_{1,L} > 0$，它依赖于 μ，使得

$$\mathbb{P}(E_2) = \mathbb{P}\left(\sup_{[0,T]} |G| \leq L \right) \geq \mathbb{P}\left(\sup_{[0,T]} |F| \leq L \right) \geq e^{-c_{1,L}T},$$

其中，第一个不等式由安德森不等式（引理 2.8）得出，第二个不等式则由引理 2.7 的球估计得出。由后一个引理以及 $\lim_{\ell\to\infty} \mathbb{P}(c|F(0)| \leq \ell) = 1$ 这一事实，我们还可推出 $\lim_{L\to\infty} c_{1,L} = 0$。

类似地，我们可以得到 $c_{2,L}$ 使得 $\lim_{L\to\infty} c_{2,L} = 0$，对于该 h

$$\mathbb{P}(E_3) = \mathbb{P}\left(\sup_{[0,T]} |G'| \leq aL \right) \geq \mathbb{P}\left(\sup_{[0,T]} |F'| \leq aL \right) \geq e^{-c_{2,L}T}.$$

由于 G，G' 几乎必然连续，我们可以应用高斯相关不等式（引理 2.9）得到 $\mathbb{P}(E_2 \cap E_3) \geq \mathbb{P}(E_2)\,\mathbb{P}(E_3)$。令 $L = \kappa^{-1/3}$ 并将得到的估计代入（9），可得

$$\mathbb{P}\left(\frac{N(T)}{T} \in \left[\frac{1-2\varepsilon}{\pi}, \frac{1+2\varepsilon}{\pi}\right]\right) \geq e^{-(50L^{-1}+c_{1,L}+c_{2,L})T}.$$

为了得到此外的结论，对任意小的 $\varepsilon = \delta$ 应用此结果，并注意到此时 $L = L(\delta)$ 可以任意大。□

4. Upper bound on overcrowding probabilities

本节证明定理 1 的第一部分，该部分给出了某些过度拥挤概率的高斯上界。注意，定理 1 的第二部分可直接由命题 1.1 推出。

在本文余下部分，我们令 F 为一个固定的中心化平稳高斯过程，其谱测度 μ 支撑在 $[-A, A]$ 上，并满足 $\mu_{\mathrm{ac}} \neq 0$。首先我们注意到，由于 μ 是紧支撑的，F 几乎必然是实解析的，因此对所有 $t \in \mathbb{R}$，我们有

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)t^k}{k!}. \tag{10}$$

该公式自然地将 F 延拓为 $\mathbb{C}$ 上的一个整函数。稍微滥用一下记号，我们也用 F 表示这个延拓后的函数。

为了将詹森公式应用于 F，我们需要以下命题。

命题 4.1. F 几乎必然属于 Cartwright 类，且指数型至多为 A .

利用这个命题，我们得出以下概率估计。

命题 4.2. 存在 $c > 0$，使得对所有 $T > e^8$，

$$\mathbb{P}\left(\forall a \in [0,T],\, r \in (0,T) : \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(a+re^{i\theta})|d\theta \leq \frac{A}{\pi}\cdot 2r + 6\log T\right) \geq 1 - e^{-cT^2}.$$

两个命题的证明见下文第 4.2 节。借助这两个命题，我们现在可以证明定理本身。

4.1. 定理1中上界的证明。令 $T \geq e^8$。给定 $\varepsilon \in \left[\frac{1}{\sqrt{T}},\ e^{-3}\right]$，记为

$$\Delta = \varepsilon^2 T,\ r = \varepsilon T \text{ and } n = \left\lceil \frac{T+2r}{\Delta} \right\rceil = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil. \tag{11}$$

令 x_1、…、$x_n \in [0,T]$ 满足

$$x_k \in I_k := [(k-1)\Delta - r, k\Delta - r]$$

并假设 $F(x_k) \neq 0$ 对所有 $k \in [n]$成立。由詹森公式（定理 2.1），对所有 $r > 0$，有

$$\sum_{k\in[n]} \int_0^r \frac{n_F(x_k,t)}{t}dt = \sum_{k\in[n]} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(re^{i\theta}+x_k)|d\theta - \sum_{k\in[n]} \log|F(x_k)|. \tag{12}$$

我们分三步进行。首先，将（12）的左侧与 $N_F(T)$ 联系起来。接着，利用命题4.2 将右侧的第一项替换为所需的界，并证明以高概率存在一组良好的点 x_1、……、x_n，使得

右侧的第二项可以忽略不计。最后，我们将这些结果结合起来，得到所需的上界。

步骤 1：建立 (12) 左端与实零点个数之间的关系。注意，对于所有 $x \in [0,T]$, $t>0$，我们有

$$|\{k \in [n] : \ x \in [x_k - t, x_k + t]\}| \geq \left\lceil \frac{2t}{\Delta} \right\rceil - 2.$$

特别地，这对于 x 是 F 的实零点的情形也成立。将 F 的实零点集合记为 $\mathcal{Z}$，因此我们有

$$\sum_{k\in[n]} n_F(x_k,t) \geq \sum_{k\in[n]} \sum_{w\in\mathcal{Z}} \mathbb{I}^{(x_k-t,x_k+t)}(w) \geq \left(\left\lceil \frac{2t}{\Delta} \right\rceil - 2 \right) N_F(T)$$

两边对 $\frac{1}{t}$ 积分，得到

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in[n]} \int_0^r \frac{n_F(x_k,t)}{t} dt &\geq N_F(T) \int_\Delta^r \frac{1}{t} \left(\left\lceil \frac{2t}{\Delta} \right\rceil - 2 \right) dt \\
&\geq 2N_F(T) \left(\frac{r-\Delta}{\Delta} - \log\left(\frac{r}{\Delta}\right) \right) \\
&= 2N_F(T) \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1 - \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right) \\
&\geq 2N_F(T) \left(\frac{1}{\varepsilon} - 2\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right), \qquad (13)
\end{aligned}$$

其中我们用到了（11），以及 $\varepsilon < e$ 这一事实。

步骤 2：对 (12) 的右端进行估计。 根据命题 4.2，存在 $c_1 > 0$，使得事件

$$E_1 := \left\{ \sum_{k\in[n]} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|F(re^{i\theta} + x_k)| d\theta \leq \frac{A}{\pi} \cdot 2rn + 6n \log T \right\}$$

满足

$$\mathbb{P}(E_1) \geq 1 - e^{-c_1 T^2}. \qquad (14)$$

根据引理2.6，存在 C, $c_2 > 0$ 使得若 $\varepsilon^2 T > 1$，则有

$$\mathbb{P}\left(\sup_{I_k} |F| \leq e^{-C\varepsilon^2 T} \right) = \mathbb{P}\left(\sup_{[0,\varepsilon^2 T]} |F| \leq e^{-C\varepsilon^2 T} \right) \leq e^{-c_2 \varepsilon^4 T^2}.$$

令

$$E_2 := \left\{ \forall k \in [n] : \sup_{I_k} |F| \geq e^{-C\varepsilon^2 T} \right\},$$

对 $k \in [n]$ 使用并集界，并利用 $n \leq \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} + 1 \leq \left(\sqrt{T}+1\right)^2 \leq 2T$ 这一事实，可得

$$\mathbb{P}(E_2) \geq 1 - ne^{-c_2\varepsilon^4 T^2} \geq 1 - 2Te^{-c_2\varepsilon^4 T^2}. \qquad (15)$$

在事件 E_2上，我们可以选取点 $\{x_k\}_{k\in[n]}$，它们满足 $|F(x_k)| \geq e^{-C\varepsilon^2 T}$。因此，在事件 $E_1 \cap E_2$上，我们可以将 (12) 的右端项界定为

$$\sum_{k\in[n]} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|F(re^{i\theta} + x_k)| d\theta - \sum_{k\in[n]} \log|F(x_k)| \leq \frac{A}{\pi} \cdot 2rn + 6n\log T + Cn\varepsilon^2 T. \qquad (16)$$

步骤 3：得到概率界。将 (13) 和 (16) 代入 (12，可得在事件 $E_1 \cap E_2$上，有

$$2\left(\tfrac{1}{\varepsilon} - 2\log(\tfrac{1}{\varepsilon})\right) N_F(T) \le \frac{A}{\pi} \cdot 2rn + 6n\log T + Cn\varepsilon^2 T.$$

回顾（11），并利用这一事实 $n\varepsilon^2 \le 1 + 3\varepsilon \le 2$，我们得出，在 $E_1 \cap E_2$,

$$\begin{aligned}(1 - 2\varepsilon\log(\tfrac{1}{\varepsilon}))N_F(T) &\le \frac{A}{\pi}T(1+3\varepsilon) + 3(\tfrac{1}{\varepsilon}+3)\log T + C\varepsilon T \\ &\le \frac{A}{\pi}T + D\varepsilon T + D\tfrac{1}{\varepsilon}\log T,\end{aligned}$$

其中 $D > 0$ 是某个常数。下文中，我们用 D 表示可能随行而变的常数。由于当 $\varepsilon < e^{-3}$ 时，$(1 - 2\varepsilon\log(\frac{1}{\varepsilon}))^{-1} \le 1 + 3\varepsilon\log(\frac{1}{\varepsilon})$，因此在 $E_1 \cap E_2$ 上，

$$\begin{aligned}N_F(T) &\le \frac{A}{\pi}T + D\varepsilon\log\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)T + D\tfrac{1}{\varepsilon}\log T \\ &\le \frac{A}{\pi}T + D\varepsilon\log\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)T,\end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们使用了 $\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{T}}$。由（14）和（15），可得 $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \ge 1 - e^{-c\varepsilon^4 T^2}$，其中 $c > 0$。通过令 $\delta = D\varepsilon\log(\frac{1}{\varepsilon})$作变量代换，我们得出

$$\mathbb{P}\left(N_F(T) \le \tfrac{A}{\pi}T + \delta T\right) \ge \mathbb{P}(E_1 \cap E_2) \ge 1 - \exp\left(-c\left(\delta/\log\delta\right)^4 T^2\right),$$

其中 $\delta \in [d_1\log T/\sqrt{T}, d_2]$，$d_1, d_2 > 0$ 为某些常数。 □

4.2. 命题 **4.1** 和 **4.2** 的证明。 这里我们证明命题 4.1，并结合第 2.1 节和2.2 节中的工具证明命题 4.2。

命题 *4.1* 的证明。 由引理 2.5 可知，积分条件（3）成立，因此几乎必然 F 在 $\mathbb{R}$ 上至多线性增长。剩下只需证明 F 的指数型至多为 A。回忆一下， F 的幂级数展开式（10）为:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} z^k, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

注意，对于 $k \in \mathbb{N}$，有 $F^{(k)}(0) \sim \mathcal{N}(0, C_{2k})$，其中 $C_{2k} := \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2k} d\mu(\lambda)$。利用 $\mathrm{sprt}(\mu) \subseteq [-A, A]$，可得 $C_{2k} \le A^{2k}$。应用引理 2.10 可得，对于 $k \ge 2$:

$$\mathbb{P}(|F^{(k)}(0)| \ge kA^k) \le \mathbb{P}(|F^{(k)}(0)| \ge k\sqrt{C_{2k}}) \le \exp(-k^2/2).$$

因此，几乎必然存在 $m \in \mathbb{N}$，使得对于每个 $k \ge m+1$，$|F^{(k)}(0)| \le kA^k$。记 $C = \max_{k\le m} |F^{(k)}(0)/A^k|$，则可得

$$\begin{aligned}|F(z)| &\le \sum_{k=0}^{m} |F^{(k)}(0)| \frac{|z|^k}{k!} + \sum_{k=m+1}^{\infty} kA^k \frac{|z|^k}{k!} \\ &\le C\sum_{k=0}^{m} A^k \frac{|z|^k}{k!} + A|z| \sum_{k=m}^{\infty} A^k \frac{|z|^k}{k!} \\ &\le (C + A|z|)\exp(A|z|).\end{aligned}$$

对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $C_\varepsilon > 0$ 使得 $C + A|z| \le C_\varepsilon e^{\varepsilon|z|}$ 对于所有 $z \in \mathbb{C}$，进而可推出 $|F(z)| \le C_\varepsilon e^{(A+\varepsilon)|z|}$。回顾第 1.2 节中的定义，我们推得 F 几乎处处是指数型至多为 A。 □

命题 *4.2* 的证明。 利用命题 4.1 ， 应用推论 2.3 可得，对每个 $z = x + iy \in \mathbb{C}$，我们有

$$\log|F(z)| \le \frac{|y|}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\log^+|F(t)|}{|t-z|^2}dt + A|y|. \tag{17}$$

令

$$E_M = \{\forall t \in \mathbb{R} : |F(t)| \le M(1+|t|)\}.$$

由引理2.5，存在 $c > 0$ 使得

$$\mathbb{P}(E_M) \ge 1 - e^{-cM^2}, \tag{18}$$

当 M充分大时。利用$\frac{y}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t-z|^2}dt = 1$这一事实，由（17）可知，在事件 E_M发生时，有

$$\log|F(z)| \le \log M + \frac{|y|}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\log(1+|t|)}{|t-z|^2}dt + A|y|, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{19}$$

对于 $y \neq 0$ 和 $|z| \le 2T$，可得

$$\begin{aligned}
\frac{|y|}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\log(1+|t|)}{(t-x)^2+y^2}dt &= \frac{|y|}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\log(1+|x+s|)}{s^2+y^2}ds \\
&\le \frac{|y|}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\log(1+2T+|s|)}{s^2+y^2}ds \\
&\le 2\log(1+2T) + \frac{2|y|}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\log^+|s|}{s^2+y^2}ds \\
&\le 2\log(1+2T) + 2\log^+|y| + 2 \le 4(2+\log T),
\end{aligned} \tag{20}$$

其中，对于第二个不等式，我们利用了以下事实：当 $\alpha \ge 1$和 $\beta > 0$时，$\log(\alpha+\beta) \le 2(\log \alpha + \log^+\beta)$；对于第三个不等式，我们使用了以下界

$$\frac{|y|}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\log^+|s|}{s^2+y^2}ds = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\log^+|ty|}{1+t^2}dt = \log^+|y| + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{\log^+|t|}{1+t^2}dt \le \log^+|y| + 1.$$

Plu将（20）代入（19），我们得出：在事件 E_M 上，对于 $|z| \le 2T$，若 $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ ，

$$\log|F(z)| \le A|y| + \log M + 4(2+\log T). \tag{21}$$

因此，在事件 E_M 上，对于所有 $a \in [0,T]$, $r \in (0,T)$ 和 $\theta \in (0,\pi)$, $\cup(\pi, 2\pi)$, 我们有

$$\log|F(a+re^{i\theta})| \le Ar|\sin\theta| + \log M + 4(2+\log T). \tag{22}$$

设 $M = T$。通过在 $\theta \in (0, 2\pi)$ 上积分，我们得到，在事件 E_T 上，

$$\forall a \in [0,T],\ r \in (0,T): \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|F(a+re^{i\theta})| \le \frac{2}{\pi}Ar + 6\log T,$$

只要 $T \ge e^8$。回顾（18），证明即告完成。 □

5. Upper bound on undercrowding probabilities

本节通过将定理 2归约到定理 1来证明该定理。设 μ， A 以及 B如定理 2的陈述所述。我们定义一个新测度 ν 如下：对于任意博雷尔可测的 $S \subseteq \mathbb{R}$,

$$\nu(S) := \mu_+(S+A) + \mu_-(S-A),$$

其中 $\mu_+(S) = \mu(S \cap [0,\infty))$ 且 $\mu_-(S) = \mu(S \cap (-\infty, 0))$。注意， ν是定义在 $\mathbb{R}$ 上、支撑集为 $[B-A, A-B]$的对称博雷尔概率测度，因此它是定义在 $\mathbb{R}$ 上的某个中心化 SGP 的谱测度，我们将该过程记为 G。

断言 5.1。过程 G 具有如下表示

$$G(x) = \cos(Ax)F(x) + \sin(Ax)H(x), \tag{23}$$

其中， H 与 F 具有相同的分布（但与其相依）。

首先，我们利用这一点证明定理 2 ，然后证明该断言本身。注意，根据（23），

$$G(k\pi/A) = (-1)^k F(k\pi/A), \quad \text{for any } k \in \mathbb{Z}.$$

由连续性可推知，若 G在区间$[k_0\frac{\pi}{A}, (k_0+1)\frac{\pi}{A}]$内没有零点，其中 $k_0 \in \mathbb{Z}$，则 F在该区间内必定至少有一个零点。由于 F和 G 都是非恒定的平稳高斯过程，它们的零点集几乎必然与格$(\pi/A)\mathbb{Z}$不相交。因此我们得到

$$N_F(T) \geq \left\lfloor \frac{AT}{\pi} \right\rfloor - N_G(T). \tag{24}$$

由于 G 满足定理 1的所有假设，我们可以利用该定理得到c、 d_1、 $d_2 > 0$的存在，使得对于每个 $T > e^8$和 $\varepsilon \in \left[d_1 \text{对数}\frac{T}{\sqrt{T}}, \; d_2\right]$，都有

$$\mathbb{P}\left(N_G(T) \geq \left\lceil \frac{A-B}{\pi} T \right\rceil + \varepsilon T\right) \leq \exp(-c(\varepsilon/\log\varepsilon)^4 T^2).$$

结合（24）可得定理 2中的上界。 □

断言 *5.1* 的证明。令 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为$\mathcal{L}^2_{\text{symm}}(\mu)$的一组正交归一基，如引理2.4所述。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，考虑如下定义的函数 g_n：

$$g_n(t) := \begin{cases} f_n(t+A), \text{ if } t < 0, \\ f_n(t-A), \text{ if } t \geq 0. \end{cases}$$

注意， $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ 构成 $\mathcal{L}^2_{\text{symm}}(\nu)$ 的一组正交归一基。因此，引理 2.4 意味着

$$F \overset{d}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{f_n}, \quad \text{and} \quad G \overset{d}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{g_n}, \tag{25}$$

其中 $\xi_n \overset{\text{独立同分布}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$，其中

$$\widehat{f_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(\lambda) e^{-i\lambda x} d\mu(\lambda), \quad \widehat{g_n}(x) = \int_{\mathbb{R}} g_n(\lambda) e^{-i\lambda x} d\nu(\lambda).$$

利用 g_n 和 f_n 之间的关系，我们计算得：

$$\begin{aligned}
\widehat{g_n}(x) &= \int_{\mathbb{R}} g_n(\lambda) e^{-i\lambda x} d\nu(\lambda) \\
&= \int_{B-A}^{0} f_n(\lambda + A) e^{-i\lambda x} d\nu(\lambda) + \int_{0}^{A-B} f_n(\lambda - A) e^{-i\lambda x} d\nu(\lambda) \\
&= e^{iAx} \int_{B}^{A} f_n(\tau) e^{-i\tau x} d\mu(\tau) + e^{-iAx} \int_{-A}^{-B} f_n(\tau) e^{-i\tau x} d\mu(\tau) \\
&= (\cos(Ax) + i\sin(Ax)) \int_{B}^{A} f_n(\tau) e^{-i\tau x} d\mu(\tau) + (\cos(Ax) - i\sin(Ax)) \int_{-A}^{-B} f_n(\tau) e^{-i\tau x} d\mu(\tau) \\
&= \cos(Ax) \cdot \widehat{f_n}(x) + \sin(Ax) \cdot h_n(x)
\end{aligned} \tag{26}$$

其中

$$\begin{aligned} h_n &= i\left(\int_B^A f_n(\tau)e^{-i\tau x}d\mu(\tau) - \int_{-A}^{-B} f_n(\tau)e^{-i\tau x}d\mu(\tau)\right) \\ &= i\int_{\mathbb{R}} \left(f_n \mathbb{I}_{[0,\infty)}(\tau) - f_n \mathbb{I}_{(-\infty,0)}(\tau)\right) e^{-i\tau x}d\mu(\tau). \end{aligned}$$

注意到 $\{if_n \mathbb{I}_{[0,\infty)} - if_n \mathbb{I}_{(-\infty,\ 0)}\}$ 也构成了 $\mathcal{L}^2_{\text{symm}}(\mu$ 的一组基，因此随机级数 $H:$ $= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n h_n$ 是一个谱测度为 μ （根据引理 2.4）。将（26）代入（25），得到

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{g}_n(x) = \cos(Ax)\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \widehat{f}_n(x) + \sin(Ax)\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n h_n(x), \\ &= \cos(Ax)F(x) + \sin(Ax)H(x), \end{aligned}$$

至此，命题 5.1 的证明完成。 □

Acknowledgements

我们非常感谢 Mikhail Sodin、Alon Nishry 和 Manjunath Krishnapur 的鼓励，以及他们就本文主题进行的许多富有启发性的讨论。

References

[1] Robert J. Adler 和 Jonathan E. Taylor。 *Random fields and geometry*， *Springer monographs in mathematics*第80卷。施普林格，2007年。[2] Michele Ancona 和 Thomas Letendre。光滑平稳高斯过程的零点。 *Electronic Journalof Probability*，26：1–81，2021年。[3] Theodore W Anderson。对称单峰函数在对称凸集上的积分及若干概率不等式。 *Proceedings of the American Mathematical Society*，6(2)：170–176，1955年。[4] Eran Assaf、Jeremiah Buckley 和 Naomi D. Feldheim。平稳高斯过程零点数方差的渐近公式。 *arXiv preprint arXiv:2101.04052*，2021年。[5] Frank Aurzada、Sumit Mukherjee 和 Ofer Zeitouni。马尔可夫链中的持久性指数。 *Annales del'Institut Henri Poincaré*， *Probabilités et Statistiques*，57(3)：1411–1441，2021年。[6] Frank Aurzada 和 Thomas Simon。持久性概率与指数。载于 *Lévy matters V*，第183–224页。施普林格，2015年。[7] Jean-Marc Aza¨ıs 和 Mario Wschebor。 *Level sets and extrema of random processes and fields*。约翰·威立父子公司，霍博肯，新泽西州，2009年。[8] Riddhipratim Basu、Amir Dembo、Naomi Feldheim 和 Ofer Zeitouni。平稳高斯过程零点的指数集中。 *International Mathematics Research Notices*，2020(23)：9769–9796，2018年12月。[9] Dmitry Beliaev、Stephen Muirhead 和 Alejandro Rivera。光滑高斯场拓扑事件的协方差公式。 *Annals of Probability*，48：2845–2893，2020年。[10] Alan J. Bray、Satya N. Majumdar 和 Gr´egory Schehr。非平衡系统中的持久性与首次通过性质。 *Advances in Physics*，62(3)：225–361，2013年。[11] W lodzimierz Bryc 和 Amir Dembo。平稳高斯过程经验测度的大偏差。 *Stochastic processes and their applications*，58(1)：23–34，1995年。[12] Harald Cram´er 和 M. R. Leadbetter。 *Stationary and related stochastic processes. Sample function properties and their applications*。约翰·威立父子公司，纽约—伦敦—悉尼，1967年。[13] Amir Dembo 和 Sumit Mukherjee。随机多项式和热方程的零交叉。 *TheAnnals of Probability*，43(1)：85–118，2015年。[14] Amir Dembo 和 Sumit Mukherjee。高斯过程的持久性：不可求和相关性。 *Proba-bility Theory and Related Fields*，169(3)：1007–1039，2017年。[15] Bernard Derrida、Vincent Hakim 和 Reuven Zeitak。相序线性扩散近似中的持久自旋与平稳高斯过程的零点。 *Physical review letters*，77(14)：2871，1996年。

[16] Monroe D. Donsker 和 Srinivasa R.S. Varadhan。平稳高斯过程的大偏差。 *Communications in Mathematical Physics*，97(1)：187–210，1985年。[17] A. Eremenko 和 D. Novikov。具有谱隙的傅里叶积分的振荡。 *J. Math. Pures Appl. (9)*，83(3)：313–365，2004年。[18] S. Yu. Favorov。满足实轴上附加条件的指数型整函数的零点集。*Algebra i Analiz*，20(1)：138–145，2008年。[19] Naomi D. Feldheim、Ohad N. Feldheim、Benjamin Jaye、Fedor Nazarov 和 Shahaf Nitzan。具有谱隙的平稳高斯过程在长区间上保持非负的概率。 *InternationalMathematics Research Notices*，2020(23)：9210–9227，2020年。[20] Naomi D. Feldheim、Ohad N. Feldheim 和 Sumit Mukherjee。平稳高斯过程的持久性与球指数。 *arXiv preprint arXiv:2112.04820*，2021年。[21] Naomi D. Feldheim、Ohad N. Feldheim 和 Shahaf Nitzan。平稳高斯过程的持久性：谱的视角。 *The Annals of Probability*，49(3)：1067–1096，2021年。[22] Damien Gayet 和 Jean-Yves Welschinger。具有许多分支的实曲线的指数稀疏化。 *Publications mathématiques de l'IHÉS*，113：69–96，2011年。[23] M. Kac。随机代数方程实根平均数研究。 *Bull. Amer. Math. Soc.*，49：314–320，1943年。[24] Marie F. Kratz。平稳高斯过程的水平穿越及其他水平泛函。 *Probab. Surv.*，3：230–288，2006年。[25] Marie F. Kratz 和 Jos´e R. Le´on。平稳高斯过程与场的水平泛函中心极限定理。 *Journal of Theoretical Probability*，14(3)：639–672，2001年。[26] Maddaly Krishna 和 Manjunath Krishnapur。离散时间中心化平稳高斯过程的持久性概率。 *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*，47(2)：183–194，2016年。[27] Manjunath Krishnapur。平面及双曲高斯解析函数零点的过度拥挤估计。 *Journal of statistical physics*，124(6)：1399–1423，2006年。[28] Rafa l Lata la 和 Dariusz Matlak。高斯相关不等式的Royen证明。载于 *Geometric Aspects of Functional Analysis: Israel Seminar (GAFA) 2014–2016*，第265–275页。施普林格，2017年。[29] B. Ya. Levin。 *Lectures on entire functions*， *Translations of Mathematical Monographs*第150卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996年。与 Yu. Lyubarskii、M. Sodin 和 V. Tkachenko 合作，并附有他们撰写的序言；由 Tkachenko 根据俄文手稿译出。[30] Fedor Nazarov 和 Mikhail Sodin。随机球谐函数的节点域数。 *American Journal of Mathematics*，131(5)：1337–1357，2009年。[31] Lakshmi Priya。高斯拉普拉斯特征函数节点分支数的集中。 *arXiv e-prints*，第 arXiv:2012.10302 页，2020年12月。[32] Lakshmi Priya。平稳高斯过程节点体积的过度拥挤估计。 *Interna-tional Mathematics Research Notices*，2022年2月。rnac035。[33] S. O. Rice。随机噪声的数学分析。 *Bell System Tech. J.*，24：46–156，1945年。[34] Thomas Royen。将高斯相关猜想推广至多元伽马分布的一个简单证明。 *Far East J. Theor. Stat.*，48：139–145，2014年。[35] Yoni Rozenshein。算术随机波的节点分支数。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(22)：6990–7027，2017年。[36] David Slepian。高斯噪声的单侧障碍问题。 *Bell System Technical Journal*，41(2)：463–501，1962年。[37] Eric V. Slud。与水平穿越计数相关泛函的Mwi展开。 *Chaos Expansions*， *Multiple Wiener-Ito Integrals and their Applications by Christian Houdré and Victor Pérez-Abreu*， *Probability and Stochastics Series*，第125–143页，1994年。[38] Mikhail Sodin。随机节点图像讲义。载于 *Probability and statistical physics in St. Petersburg*， *Proc. Sympos. Pure Math.*第91卷，第395–422页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2016年。[39] Mikhail Sodin 和 Boris Tsirelson。随机复零点，III：空洞概率的衰减。 *Israel Journalof Mathematics*，147(1)：371–379，2005年。[40]Tsirelson, Boris。高斯测度（研究生课程讲义）。http://www.tau.ac.il/~tsirel/Courses/Gauss3/main.html，2010年。

Naomi Dvora Feldheim
Department of Mathematics, Bar-Ilan University
Email address: naomi.feldheim@biu.ac.il

Ohad Noy FeldheimEinstein Institute of Mathematics,
Hebrew Univesity of Jerusalem*Email address*:
ohad.feldheim@mail.huji.ac.il

Lakshmi Priya M.E.
School of Mathematical Sciences, Tel-Aviv University
Email address: lpriyame@gmail.com