arXiv:2303.14818v2 [math.AC] 1 Apr 2023

二分图环面理想的不变量比较

Kieran Bhaskara 和 Adam Van Tuyl

Abstract. 设 G 为一个有限简单图，并令 I_G 表示其在多项式环 R中的关联环面理想。对于每个整数 $n \geq 2$，当 G 是一个具有 n 个顶点的连通二分图时，我们完全确定元组 (reg(R/I_G), deg($h_{R/I_G}(t)$), pdim(R/I_G), depth(R/I_G), dim(R/I_G)) 的所有可能取值。

1. Introduction

设 I是多项式环 $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$ 中的一个齐次理想，其中系数域 $\mathbb{K}$ 是特征零的代数闭域。与 I 相关联的若干同调不变量可由 S/I的最小分次自由分解编码；其中一些不变量包括（Castelnuovo–Mumford）正则性 reg(S/I)、投射维数 pdim(S/I)、（Krull）维数 dim(S/I)、深度 depth(S/I)，以及 deg($h_{S/I}(t)$)，即 S/I的 h-多项式的次数。这些不变量中有四个由下列不等式联系起来：

$$\operatorname{reg}(S/I) - \deg(h_{S/I}(t)) \leq \dim(S/I) - \operatorname{depth}(S/I),$$

（例如，参见 [23, 推论 B.28]），而深度与射影维数则通过著名的 Auslander–Buchsbaum公式相关联。

组合交换代数的一个近期研究方向是，探究对于特定的理想族，这些不变量可能实现哪些数对（或元组）；其中最受关注的是由组合方式定义的理想（例如边理想、二项式边理想和图的环面理想）。这一系列问题由 Hibi、Higashitani、Kimura 和 O'Keefe 引入：他们比较了图的环面理想的深度与维数；Hibi 和 Matsuda 则首次证明，对于任意一对 r、d 正整数，都存在一个（字典序分段）单项式理想 I，使得（r，d）=（reg(S/I)，deg($h_{S/I}(t)$)）。随后，Hibi、Matsuda 和 Van Tuyl 对图的边理想证明了类似结果。此后，研究其他理想族可能实现的数对（reg(S/I)，deg($h_{S/I}(t)$））也很快展开，其中最受关注的是二项式边理想 [17, 21] 和图的环面理想 [6]。近期的其他研究则着重确定当 I 为边理想时，可能出现的数对（reg(S/I)，pdim(S/I)）[9] 和（depth(S/I)，dim(S/I)）[13, 19] 。

Hibi、Kimura、Matsuda 和 Van Tuyl [14] 提出了这一问题的一种变体，探讨如果将范围限制为具有 [14] 个顶点的连通图的边理想，是否能够完整描述所有的数对 (reg(S/I), deg($h_{S/I}(t)$))

2020年数学主题分类. 13D02, 13P10, 13D40, 14M25, 05E40. 关键词和短语. 环面理想、二部图、 h-多项式、正则性、射影维数、深度、维数. 版本：2023年4月4日。

对于 Cameron–Walker 图，他们成功回答了这个问题。在相关方向上，Erey 和 Hibi [5] 完整描述了所有可能的数对 (reg(S/I),pdim(S/I))，其中 I 遍历具有 n 个顶点的所有连通二分图的边理想。最近，Ficarra 和 Sgroi [7] 几乎完整地描述了具有 n 个非孤立顶点的图的二项式边理想所对应的 (reg(S/I),pdim(S/I))。受 [5, 7]，启发，本文刻画了当 I 为具有 n 个顶点的连通二分图的环面理想时，不变量可能取到的值。

我们引入一些记号来描述我们的结果。设 $G = (V, E)$ 是一个有限简单图，其边集为 $E = \{e_1, \ldots, e_q\}$，顶点集为 $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$。定义一个 $\mathbb{K}$-代数同态 φ：$R = \mathbb{K}[e_1, \ldots, e_q] \to \mathbb{K}[v_1, \ldots, v_n]$，使得 $\varphi(e_i) = v_j v_k$ 当且仅当 $e_i = \{v_j, v_k\} \in E$。G 的环面理想记作 I_G，是 φ 的核。若存在 V_1、$V_2 \subseteq V$，使得 $V = V_1 \cup V_2$ 且 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$，并且每条 $e \in E$ 都有一个端点属于 V_1，另一个端点属于 V_2，则图 G 是二分图。我们将 CBPT$_{\text{reg, deg, pdim, depth, dim}}(n)$ 定义为集合

$$\left\{ (\operatorname{reg}(R/I_G), \deg(h_{R/I_G}(t)), \operatorname{pdim}(R/I_G), \operatorname{depth}(R/I_G), \dim(R/I_G)) \;\middle|\; \begin{array}{c} G \text{ is a connected bipartite} \\ \text{graph on } n \text{ vertices} \end{array} \right\}.$$

Our 主要结果是对上述集合中元素的完整刻画 :

定理 1.1. 设 $n \geq 2$。那么，连通二分图$_{\text{reg, deg, pdim, depth, dim}}(n)$ 可表示为

$$\left\{ (r, r, p, n-1, n-1) \;\middle|\; 0 < r < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,\ 1 \leq p \leq r(n-2-r) \right\} \cup \{(0, 0, 0, n-1, n-1)\}.$$

注意，定理 1.1 描述了全部五个不变量；唯一一个与定理 1.1 类似的其他结果是 Hibi、Kanno、Kimura、Matsuda 和 Van Tuyl 的一项研究 [13]，该研究描述了 Cameron–Walker 图的边理想中这五个不变量里的四个。

定理 1.1 的证明需要用到新的和已有的结果。Almousa、Dochtermann 和 Smith [1]近期的工作使我们能够通过考察子图来给二部图的环面理想的正则性取上界。我们还需要 Jackson[20]关于二部图中圈存在性的一个经典图论结果，据此可以根据 R/I_G 的正则性为 G 的边数给出上界（见引理 3.4）。注意，众所周知，二部图的环面理想是 Cohen–Macaulay 的；因此，$\dim(R/I_G) = \operatorname{depth}(R/I_G) = n - 1$（参见 [25, 推论 10.1.21]），且 $\deg(h_{R/I_G}(t)) = \operatorname{reg}(R/I_G)$（参见 [23, 推论 B.28]）。因此，证明定理 1.1 等价于确定正则性和射影维数可以取哪些值；这些细节见定理 3.5。

本文结构如下。第 2 节回顾图论、交换代数和图的环面理想的相关背景。第 3 节聚焦于二部图的环面理想的正则性和射影维数。第 4 节综合本文前面的结果，证明定理 1.1。

致谢。我们的一些结果最初发表于第一作者的理学硕士论文[2]。作者感谢 Anton Dochtermann、Antonino Ficarra、Huy T`ai H`a、Takayuki Hibi、Akihiro Higashitani、Irena Peeva、Ben Smith 和 Rafael Villarreal 回答我们的问题并提供反馈。使用 Macaulay 2 [8] 进行的计算启发了其中一些结果。Van Tuyl 感谢 NSERC RGPIN-2019-05412 的资助。

2. Background

全文中， $\mathbb{K}$ 表示一个特征为零的代数闭域。本节汇总证明主要结果所需的事实。

2.1. 图论。我们回顾相关的图论术语。有限简单图（或图） $G = (V(G), E(G))$由一个非空有限集 $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$（称为顶点）和一个有限集 $E(G) = \{e_1, \dots, e_q\} \subseteq \{\{u, v\} \mid u, v \in V(G),\ u \neq v\}$ 组成；后者是 $V(G)$中不同元素构成的互不相同的无序对，称为边。如果上下文清楚，有时我们用 V （分别用 E）表示 $V(G)$（分别表示 $E(G)$）。如果 $V(H) \subseteq V(G)$且$E(H) \subseteq E(G)$，则称图 $H = (V(H), E(H))$是图 G 的子图。此时，我们称 G 包含 H，并记作 $H \subseteq G$。

G 的一条游走是由边组成的序列 $w = (e_1, e_2, \dots, e_m)$，其中每条边 $e_i = \{u_{i_1}, u_{i_2}\} \in E$，且对于每个 $i = 1$，$u_{i_2} = u_{(i+1)_1}$ $m - 1$。等价地，游走是顶点序列 $(u_1, \dots, u_m, u_{m+1})$，满足对于所有 $i = 1$，$\{u_i, u_{i+1}\} \in E$ m。这里，m 称为游走长度。若 m 为偶数，则该游走是偶游走；若 $u_{m+1} = u_1$，则该游走是闭游走。若两个顶点 u 和 v 之间存在一条游走，则称它们连通。若图G 中任意两个不同顶点 G 都连通，则称图G 是连通的。 G 的一个连通分支是 G的极大连通子图。

图 G 的一条圈是由 G 的顶点构成的闭游走 $(u_1, \dots, u_m, u_{m+1} = u_1)$（其中$m \geq 3$），且该游走中不两两不同的顶点只有 u_1和 u_{m+1}。长度为 m 的圈称为 m圈。 m圈图记作 C_m，它的顶点集为 $V(C_m) = \{v_1, \dots, v_m\}$，边集为 $E(C_m) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{m-1}, v_m\}, \{v_m, v_1\}\}$。树是没有圈的连通图；森林是每个连通分支都是树的图。

我们主要关注二分图。若存在一个划分（或二部划分） $V = V_1 \cup V_2$，满足 V_1、$V_2 \subseteq V$和 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$，使得 E 的每条边都连接 V_1 中的一个顶点和 V_2中的一个顶点，则图 $G = (V, E)$是二分图。给定 a、$b \geq 1$，完全二分图$K_{a,\ b}$是具有划分 $V = \{x_1, \dots, x_a\} \cup \{y_1, \dots, y_b\}$和边集 $\{\{x_i, y_j\} \mid 1 \leq i \leq a,\ 1 \leq j \leq b\}$的图。注意，当且仅当 m为偶数时， C_m 才是二分图。所有树和森林也都是二分图。

图 G 的一个匹配是 G中一组两两不相邻的边。 G的匹配数记为 $\mathrm{mat}(G)$，是 G的任意匹配中最大的大小。注意，若 G 是二分图，则很容易验证

$$\mathrm{mat}(G) \leq \left\lfloor \frac{|V(G)|}{2} \right\rfloor. \tag{2.1}$$

以下结果确定了二分图中圈的存在性，将在后续结果中发挥关键作用。

定理 2.1（[20, 定理 3]）。设 $m \geq 2$ 为一个整数， G 为一个二分图，其二部划分为 $V = A \cup B$，其中 $|A| = a$、$|B| = b$和 $2 \leq m \leq a \leq b$。如果

$$|E(G)| > \begin{cases} a + (b-1)(m-1), & a \leq 2m-2, \\ (a+b-2m+3)(m-1), & a \geq 2m-2, \end{cases}$$

那么 G 包含一个长度至少为 $2m$的圈。

2.2. 交换代数。我们的目标是比较若干同调不变量。我们回顾它们的定义和一些性质。设 $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$，并设 I 是 S 的一个齐次理想。S/I 的最小分次自由分解具有如下形式：

$$0 \to \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{p,j}(S/I)} \to \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{p-1,j}(S/I)} \to \cdots \to \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{1,j}(S/I)} \to S \to S/I \to 0$$

其中 $\beta_{i,j}(S/I)$ 表示 S/I 的第 (i, j) 个分次贝蒂数。

我们将考察的两个不变量编码在这个分解中。S/I 的（Castelnuovo–Mumford）正则性定义为

$$\operatorname{reg}(S/I) = \max\{j - i \mid \beta_{i,j}(S/I) \neq 0\}.$$

S/I 的射影维数是最小分次自由分解的长度，即

$$\operatorname{pdim}(S/I) = \max\{i \mid \beta_{i,j}(S/I) \neq 0 \text{ for some } j\}.$$

S/I 的希尔伯特级数是形式幂级数

$$\operatorname{HS}_{S/I}(t) = \sum_{i \geq 0} [\dim_{\mathbb{K}}(S/I)_i] t^i$$

其中，$\dim_{\mathbb{K}}(S/I)_i$ 是 S/I的第 i个分次分量的维数。

S/I的深度记作 $\operatorname{depth}(S/I)$，是包含在极大理想 $\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots, x_m \rangle \subset S$ 中的S/I的任意极大正则序列的长度。S/I的（Krull）维数记作 $\dim(S/I)$，是S/I中所有素理想链长度的上确界。众所周知，对于 S的所有齐次理想 I，都有 $\operatorname{depth}(S/I) \leq \dim(S/I)$。若 $\operatorname{depth}(S/I) = \dim(S/I)$，则称 S/I 为 Cohen–Macaulay。

根据希尔伯特–塞尔定理 [4, 推论 4.1.8], ，存在唯一的多项式$h_{S/I}(t) \in \mathbb{Z}[t]$，称为 S/I 的 h-多项式，使得 $\operatorname{HS}_{S/I}(t)$ 可写为

$$\operatorname{HS}_{S/I}(t) = \frac{h_{S/I}(t)}{(1-t)^{\dim(S/I)}}$$

其中 $h_{S/I}(1) \neq 0$。我们用 $\deg(h_{S/I}(t))$ 表示 h-多项式 $h_{S/I}(t)$ 的次数。

我们希望比较不变量 $\operatorname{reg}(S/I)$、$\operatorname{pdim}(S/I)$、$\operatorname{depth}(S/I)$、$\dim(S/I)$ 和 $\deg(h_{S/I}(t))$。以下结果给出了这些不变量之间的一些有用关系。

定理 2.2。设 I 是 $S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$的一个真齐次理想。那么

(*i*) $\operatorname{pdim}(S/I) + \operatorname{depth}(S/I) = m$；(*ii*) 若 S/I 是科恩-麦考利的，则 $\operatorname{reg}(S/I) = \deg(h_{S/I}(t))$。

证明。陈述（i）是 Auslander–Buchsbaum公式 [4,定理 1.3.3]的特例。陈述（ii）是 [23, 推论 B.28]（或早期印刷版中的推论 B.4.1）。□

2.3. 图的环面理想。我们定义本文所研究的一族理想及其一些性质。设 G 为一个图，其顶点集为 $V=\{v_1,\dots,v_n\}$，边集为 $E=\{e_1,\dots,e_q\}$，其中 $q\geq 1$。设 $\mathbb{K}[V]=\mathbb{K}[v_1,\dots,v_n]$ 和 $\mathbb{K}[E]=\mathbb{K}[e_1,\dots,e_q]$ 分别为关于顶点变量和边变量的多项式环。定义一个 $\mathbb{K}$-代数同态 $\varphi\colon \mathbb{K}[E]\to\mathbb{K}[V]$，使得对所有 $e_i=\{v_{i_1},v_{i_2}\}\in E$，$1\leq i\leq q$，有 $\varphi(e_i)=v_{i_1}v_{i_2}$。$G$ 的环面理想记为 I_G，定义为同态 φ 的核。

注 2.3。理想 I_G 称为环面理想，因为 I_G 是素二项式理想。事实上，φ 的像是一个整环；又由于根据第一同构定理，$\varphi(\mathbb{K}[E])$ 与 $\mathbb{K}[E]/I_G$ 同构，因此 I_G 是一个素理想。下文给出的定理 2.5 表明，I_G 是一个二项式理想。注意，在 I_G 的定义中，我们排除了 G 没有边的情形，以确保 $\mathbb{K}[E]$ 至少含有一个变量。

注 2.4。我们用 $\mathbb{K}[G]$ 表示商环 $\mathbb{K}[E]/I_G$。注意，在文献中（例如参见 [1, 10, 12]），$\mathbb{K}[G]$ 通常表示 G 的边环（即 φ 的像 $\mathrm{im}(\varphi)$）。如前一条注释所述，$\mathrm{im}(\varphi)$ 与 $\mathbb{K}[E]/I_G$ 作为环是同构的；然而，在陈述有关这些环上分次的结果时必须谨慎，因为它们可能有所不同。在之后所有出现记号 $\mathbb{K}[G]$ 的地方，我们都已确保文献中关于 $\mathbb{K}[G]$ 的结果在我们的解释下仍然成立。

虽然 I_G 的生成元是隐式定义的，但图 G 的闭偶游走与 I_G的一组（可能非最小）生成元之间存在一个众所周知的联系。对于图 G中的一条闭偶游走 $\Gamma=(e_{i_1},\dots,e_{i_{2m}})$，我们定义一个二项式

$$f_\Gamma=e_{i_1}e_{i_3}\cdots e_{i_{2m-1}}-e_{i_2}e_{i_4}\cdots e_{i_{2m}}.$$

现在我们可以描述 I_G的一组生成元。

The理 2.5（[24, 命题 3.1]）。若 I_G 是图 G的环面理想，则 n

$$I_G=\langle f_\Gamma \mid \Gamma \textit{ is a closed even walk of } G\rangle.$$

若 G 是二分图，则 $I_G=\langle f_\Gamma \mid \Gamma$ 是 $G\rangle$.的一个偶圈

现在我们汇总一些关于二部图的环面理想的事实。我们需要一个由 Almousa、Dochtermann 和 Smith 提出的结果 [1]，该结果允许我们利用子图来确定正则性的界（虽然 [1] 包含连通性假设，但可以证明并不需要这一假设；就我们的目的而言，只需采用原始表述）。

定理 2.6（[1, 定理 6.11]）。设$G\subseteq K_{a,\,b}$ 是一个连通二分图，并设 $G'\subseteq G$ 是一个至少有两个顶点的连通子图。那么，正则性$(\mathbb{K}[G'])$ ≤正则性$(\mathbb{K}[G])$。

下一个结果总结了文献中的一些有用结论。

定理 2.7。设 G 是一个有 $n\geq 2$ 个顶点的连通二分图。

(*i*) [10, 定理 1] 或 [25, 命题 14.4.19] 正则性$(\mathbb{K}[G])\leq \mathrm{mat}(G)-1$. (*ii*) [25, 推论 10.1.21] $\dim(\mathbb{K}[G])=n-1$. (*iii*) [11, 推论 5.26] $\mathbb{K}[G]$ 是 Cohen–Macaulay。

我们得到以下有用的推论。

推论 2.8. 设 G 是一个具有 $n \geq 2$ 个顶点和 q 条边的连通二分图。

(i) 深度($\mathbb{K}[G]$) = 维数($\mathbb{K}[G]$) $= n - 1$. (ii)
$0 \leq$ 度 ($h_{\mathbb{K}[G]}(t)$) = 正则性 ($\mathbb{K}[G]$) $< \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. ($iii$)
$0 \leq$ 投射维数 ($\mathbb{K}[G]$) $= q - n + 1$.

证明. 根据定理 2.7 (iii)，环 $\mathbb{K}[G]$ 是 Cohen–Macaulay 的。由 Cohen–Macaulay 性的定义和定理 2.7 (ii)，可得结论 (i)。对于结论 (ii)，由于 $\mathbb{K}[G]$ 是 Cohen–Macaulay 的，定理 2.2 (ii) 蕴含 $\deg(h_{\mathbb{K}[G]}(t)) = \operatorname{reg}(\mathbb{K}[G])$。该不等式由定理 2.7 ($i$) 和不等式 (2.1) 得出。对于结论 ($iii$)，定理 2.2 ($i$) 给出 投射维数($\mathbb{K}[G]$) $= q - \operatorname{depth}(\mathbb{K}[G]) = q - n + 1$，因为 $\mathbb{K}[E]$ 有 q个变量。□

对于某些特殊图族，我们可以给出正则性的精确值。

引理 2.9. 以下公式成立：

(i) 若 $G = K_{a,\ b}$，则 $\operatorname{reg}(\mathbb{K}[G]) = \min\{a, b\} - 1$;
(ii) 若 $G = C_{2r}$ 且 $r \geq 2$，则 $\operatorname{reg}(\mathbb{K}[G]) = r - 1$。

证明. 关于 (i)，见 [3, 推论 4.11]。对于 (ii)，定理 2.5 表明 $I_{C_{2r}}$ 是一个主理想，其极小生成元的次数为 r。结论由此得出。□

我们还需要对正则性和射影维数均等于零的二分图的环面理想进行分类。

引理 2.10. 设 G 是一个具有 $n \geq 2$ 个顶点的二分图。那么以下条件等价：

(i) G是森林。(ii)
$\operatorname{reg}(\mathbb{K}[G]) = 0$。($iii$)
$\operatorname{pdim}(\mathbb{K}[G]) = 0$。

证明。如果 G 是森林，那么 G 不含偶圈，因此由定理 2.5 可得 $I_G = \langle 0 \rangle$。于是 $\operatorname{reg}(\mathbb{K}[G])$ =$\operatorname{pdim}(\mathbb{K}[G]) = 0$。反过来，如果 G 不是森林，那么 G 至少含有一个偶圈。因此，根据定理 2.5，$I_G \neq \langle 0 \rangle$，由此可知 $\mathbb{K}[G]$ 的正则性和射影维数均非零。□

注 2.11。前述引理仅对正则性和射影维数均为零的二分图进行了分类。存在一些非二部图，其环面理想的正则性和射影维数均为零，例如，C_{2r+1} 的环面理想，其中 $r \geq 1$。

注 2.12. 虽然我们这里只强调了所需的有关二部图的环面理想正则性的结果，但我们指出，从 a-不变量的角度也已知许多其他结果（感谢 Rafael Villarreal 指出这一联系）。给定齐次理想 $I \subseteq S = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$，$S/I$ 的 a-不变量记为 $a(S/I)$，它是 $\mathrm{HS}_{S/I}(t)$ 作为有理函数（以最简形式表示）时的次数。因此，$a(S/I) = \deg\ h_{S/I}(t) - \dim(S/I)$。当 G 是连通二分图时，我们可以利用推论 2.8 证明 $a(\mathbb{K}[G]) = \operatorname{reg}(\mathbb{K}[G]) - n + 1$。因此，研究

连通二分图的环面理想的正则性，等价于研究它们的 a-不变量。在 [22], Valencia 和 Villarreal 给出了 a-不变量的组合解释，并提供了一个用于计算该不变量的线性规划。关于 $a(\mathbb{K}[G])$ 的其他性质，另请参见 [25, 第 11 节。5]例如，引理 2.9（i）等价于 [25, 推论 11.5。2]后者计算了 $K_{a,\ b}$ 的环面理想的 a-不变量。注 4.3 给出了二部图中 $\mathrm{reg}(\mathbb{K}[G])$ 的另一种组合解释。

3. 比较正则性与射影维数

令 $\mathrm{CBPT}(n)$ 表示顶点集为 n 个顶点的连通二分图集合。本节着重比较图 G 与 $G \in \mathrm{CBPT}(n)$ 的环面理想的正则性和射影维数。特别地，我们描述集合

$$\mathrm{CBPT}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pdim}}(n) = \{(\mathrm{reg}(\mathbb{K}[G]), \mathrm{pdim}(\mathbb{K}[G])) : G \in \mathrm{CBPT}(n)\}.$$

理解这个集合将是证明定理 1.1 的关键。

我们先介绍一个简单的不等式，后续引理中将会用到。

引理 3.1. 设 n 和 r 为整数。若 $r \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1$，则 $0 \leq n-2-2r$。

证明。注意到 $r \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \leq \frac{n}{2} - 1 = \frac{n-2}{2}$. 因此 $2r \leq n-2$，所以 $0 \leq n-2-2r$。 □

下面两个引理给出了正整数 r 和 p 的取值范围，这些数可分别作为某个连通二分图 G的$r = \mathrm{reg}(\mathbb{K}[G])$ 和 $p = \mathrm{pdim}(\mathbb{K}[G])$ 来实现。更确切地说，引理 3.2（分别地，引理 3.3）表明，任意的 $n \geq 4$、$0 < r < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 和 $1 \leq p \leq r^2$（分别地，$r^2 \leq p \leq r(n-2-r)$）都可作为某个具有 n 个顶点的连通二分图 G 的 $r = \mathrm{reg}(\mathbb{K}[G])$ 和 $p = \mathrm{pdim}(\mathbb{K}[G])$ 来实现。（注意，$p = r^2$ 情形被涵盖了两次。）

引理 3.2. 设 n、r、p 为整数，满足 $n \geq 4$、$0 < r < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 和 $1 \leq p \leq r^2$。那么存在一个连通二分图 G，它有 n 个顶点，且 $\mathrm{reg}(\mathbb{K}[G]) = r$，$\mathrm{pdim}(\mathbb{K}[G]) = p$。

证明. 我们描述所需图的构造。设给定 n、r、p，我们如下定义二分图$G_{n,\ r,\ p}$。令顶点集 V 为

$$V = \{x_1, \ldots, x_{r+1}, y_1, \ldots, y_{r+1}, z_1, \ldots, z_{n-2r-2}\}$$

其二部划分为 $V_1 = \{x_1, \ldots, x_{r+1}\}$ 和 $V_2 = \{y_1, \ldots, y_{r+1}, z_1, \ldots, z_{n-2r-2}\}$。为定义边集，令 E_1 和 E_2 为

$$E_1 = \{\{x_1, y_1\}, \{y_1, x_2\}, \{x_2, y_2\}, \{y_2, x_3\}, \ldots, \{x_{r+1}, y_{r+1}\}, \{y_{r+1}, x_1\}\};$$
$$E_2 = \{\{x_{r+1}, z_j\} \mid 1 \leq j \leq n-2r-2\}.$$

（注意，根据引理 3.1，$n-2r-2 \geq 0$。如果 $n-2r-2 = 0$，那么 $E_2 = \emptyset$，并且没有z_i 个顶点。）注意，E_1 是一个长度为 $2r+2$的圈。令 E_3 为任意 $p-1 \geq 0$ 条边，其中一个顶点在 $\{x_1, \ldots, x_{r+1}\}$ 中，另一个顶点在 $\{y_1, \ldots, y_{r+1}\}$ 中，且这些边尚未出现在 E_1中。由于 x_i与 y_j之间最多可以有 $(r+1)^2 = r^2 + 2r + 1$ 条边，并且 E_1 已经用了其中的 $2r+2$ 条，因此这些 $p-1$ 条边只有 $r^2 - 1 = r^2 + 2r + 1 -$ $(2r+2)$ 种可能的选取方式。由于 $p \leq r^2$，可以找到 $p-1$ 条这样的边。令 $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ 为$G_{n\text{的边集},\ r\text{的边集},\ p}$。图 1 给出了该图的一个例子

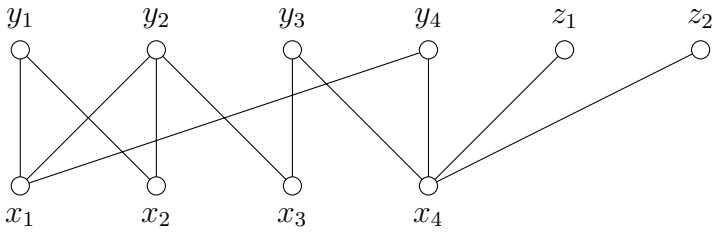


FIGURE 1. 图$G = G_{10,\ 3,\ 2}$的正则性为 reg($\mathbb{K}[G]$) $= 3$，投射维数为 pdim($\mathbb{K}[G]$) $= 2$

$G_{n,\ r,\ p}$，其中 $n = 10$、$r = 3$和 $p = 2$。我们声称，$G = G_{n,\ r,\ p}$是一个有 n 个顶点的连通二分图，其 reg($\mathbb{K}[G]$) 为 $= r$，且 pdim($\mathbb{K}[G]$) 为 $= p$。

根据构造，G是一个具有 $n = (r+1) + (r+1) + (n-2r-2)$ 个顶点、$q = 2r+2+(n-2r-2)+(p-1) = n+p-1$ 条边的连通二分图。注意，G 是完全二分图 $K_{r+1,\ n-r-1}$ 的一个子图。由于 $r+1 \leq n-r-1$，根据引理 3.1、定理 2.6 和引理 2.9（i），我们有

$$\operatorname{reg}(\mathbb{K}[G]) \leq \operatorname{reg}(\mathbb{K}[K_{r+1,n-r-1}]) = \min\{r+1, n-r-1\} - 1 = r.$$

由于 G 包含圈 C_{2r+2} 作为子图（E_1 的边构成这个圈），根据定理 2.6 和引理 2.9（ii），我们有$r =$ reg($\mathbb{K}[C_{2r+2}]$) $\leq$reg($\mathbb{K}[G]$)。因此，reg($\mathbb{K}[G]$) $= r$。此外，由推论 2.8（iii）可得

$$\operatorname{pdim}(\mathbb{K}[G]) = q - n + 1 = (n+p-1) - n + 1 = p,$$

如所需。 □

引理 3.3. 设 n、r、p 为整数，满足 $n \geq 4$、$0 < r < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$和 $r^2 \leq p \leq r(n-2-r)$。则存在一个具有 n 个顶点的连通二分图 G，使得 reg($\mathbb{K}[G]$) 为 $= r$，且 pdim($\mathbb{K}[G]$) 为 $= p$。

证明。我们描述所需图的构造。令 n、r、p 为给定值，定义二分图$H_{n,\ r,\ p}$如下。令顶点集 V 为

$$V = \{x_1, \ldots, x_{r+1}, y_1, \ldots, y_{r+1}, z_1, \ldots, z_{n-2r-2}\}$$

其二部划分为 $V_1 = \{x_1, \ldots, x_{r+1}\}$ 和 $V_2 = \{y_1, \ldots, y_{r+1}, z_1, \ldots, z_{n-2r-2}\}$。为定义边集，令 E_1 和 E_2 为

$$E_1 = \{\{x_i, y_j\} \mid 1 \leq i, j \leq r+1\};$$
$$E_2 = \{\{x_{r+1}, z_j\} \mid 1 \leq j \leq n-2r-2\}.$$

（注意，根据引理 3.1，$n-2r-2 \geq 0$。如果 $n-2r-2 = 0$，那么 $E_2 = \emptyset$，并且不存在 z_i 顶点。）注意，$\{x_1, \ldots, x_r\}$与 $\{z_1, \ldots, z_{n-2r-2}\}$之间至多有 $r(n-2r-2) = r(n-2-r) - r^2$ 条边。令 E_3为包含这些边中任意 $p - r^2 \geq 0$条边的集合。注意，我们的假设意味着 $r(n-2r-2) \geq p - r^2$，因此可以找到 $p - r^2$条这样的边。令 $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$为$H_{n,\ r,\ p}$的边集。图2给出了图$H_{n,\ r,\ p}$的一个例子，其中 $n = 10$、$r = 3$和 $p = 12$。. 我们声称，$G = H_{n,\ r,\ p}$是一个有 n 个顶点的连通二分图，且 reg($\mathbb{K}[G]$) $= r$，pdim($\mathbb{K}[G]$) $= p$。

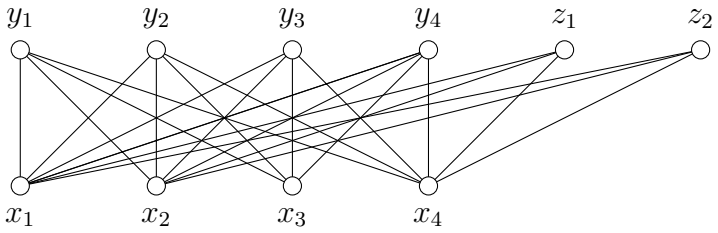


FIGURE 2. 图 $G = H_{10,\ 3,\ 12}$ 的正则性 $\mathbf{reg}(\mathbb{K}[G]) = 3$ 和投射维数 $\mathbf{pdim}(\mathbb{K}[G]) = 12$

根据构造， G 是一个有 $n = (r+1) + (r+1) + (n-2r-2)$ 个顶点的连通二分图，具有 $q = (r+1)^2 + (n-2r-2) + (p-r^2) = n+p-1$ 条边。注意， G 是完全二分图 $K_{r+1,\ n-r-1}$ 的子图。由于根据引理 3.1， $r+1 \leq n-r-1$，由定理 2.6 和引理 2.9（i），我们有

$$\mathrm{reg}(\mathbb{K}[G]) \leq \mathrm{reg}(\mathbb{K}[K_{r+1,n-r-1}]) = \min\{r+1, n-r-1\} - 1 = r.$$

另一方面，注意到 G 包含完全二分图 $K_{r+1,\ r+1}$ ，其顶点为 $\{x_1, \ldots, x_{r+1}, y_1, \ldots, y_{r+1}\}$。定理 2.6 和引理 2.9（$i$）推出 $r \leq \mathbf{reg}(\mathbb{K}[G])$。因此 $\mathbf{reg}(\mathbb{K}[G]) = r$，证毕。此外，由推论 2.8（$iii$）可知

$$\mathrm{pdim}(\mathbb{K}[G]) = q - n + 1 = (n+p-1) - n + 1 = p,$$

从而完成证明。 □

下一个结果本身也很有意义，它给出了以正则性为参数的二分图 G 边数上界。

引理 3.4. 设 G 是一个具有 $n \geq 2$ 个顶点的连通二分图。若 $\mathbf{reg}(\mathbb{K}[G]) = r$，则 G 至多有 $(r+1)(n-r-1)$ 条边。

证明。反设 $|E(G)| > (r+1)(n-r-1)$。由于 G 是二分图，我们可以将 G 视为 $K_{a,\ b}$ 的子图，其中 $1 \leq a \leq b$ 且 $a+b = n$。注意，若 $a = 1$，则 G 是一棵树，因为 G 是连通的。因此，由引理 2.10 可得 $r = 0$ ，于是 $|E(G)| = n-1 = (r+1)(n-r-1)$，这就产生了矛盾。

因此，我们可以假设 $2 \leq a \leq b$。由于 $G \subseteq K_{a,\ b}$ 且由引理 2.9（i）可知 $\mathbf{reg}(\mathbb{K}[K_{a,b}]) = a-1$，根据定理 2.6 可得 $a \geq r+1$。若 $a = r+1$，则 $b = n-r-1$，因此 G 是 $K_{r+1,\ n-r-1}$ 的子图，而该图有 $(r+1)(n-r-1)$ 条边，这与假设 $|E(G)| > (r+1)(n-r-1)$ 矛盾。因此，我们可以假设 $a \geq r+2$。于是 $2 \leq r+2 \leq a \leq b$，所以可以应用定理 2.1。我们分两种情况讨论：

情形 1： $a \leq 2(r+2) - 2$。由于 $0 \leq a-r-1$，我们有 $b \leq a+b-r-1 = n-r-1$。因此 $br \leq rn - r^2 - r$，所以

$$br + (n-r-1) \leq rn - r^2 - r + (n-r-1) = (r+1)(n-r-1).$$

由此可得 $a + (b-1)(r+1) = br + (n-r-1) \leq (r+1)(n-r-1) < |E(G)|$，因此根据定理 2.1，我们得出结论： G 包含一个长度至少为 $2(r+2)$ 的圈。

情形 2： $a \geq 2(r+2)-2$。此时 $(a+b-2(r+2)+3)(r+1) = (n-2r-1)(r+1) \leq (n-r-1)(r+1) < |E(G)|$，因此我们再次根据定理 2.1 得出结论： G 包含一个长度至少为 $2(r+2)$ 的圈。

无论哪种情况， G 都包含一个长度至少为 $2(r+2)$ 的偶圈 C。但根据定理 2.6 和引理 2.9 (ii)，有 $\operatorname{reg}(\mathbb{K}[G]) \geq \operatorname{reg}(\mathbb{K}[C]) \geq r+1$，这与 $\operatorname{reg}(\mathbb{K}[G]) = r$ 的事实矛盾。这个最终矛盾完成了证明。□

现在我们得到了本节的主要结果。

定理 3.5。设 $n \geq 2$ 是一个整数。那么

$$\mathrm{CBPT}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pdim}}(n) = \left\{(r,p) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 < r < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,\ 1 \leq p \leq r(n-2-r)\right\} \cup \{(0,0)\}.$$

证明。我们证明两个包含关系，先从 $\supseteq$ 开始。若 $n \in \{2,3\}$，则右侧集合为 $\{(0,0)\}$，由引理 2.10 可知，存在一棵树 G，其有 n 个顶点，且 $\operatorname{reg}(\mathbb{K}[G]) = \operatorname{pdim}(\mathbb{K}[G]) = 0$。因此设 $n \geq 4$，并取右侧集合中的一个元素 (r,p)。若 $(r,p) = (0,0)$，则同样由引理 2.10 可知，存在一棵树 G，其有 n 个顶点，且 $\operatorname{reg}(\mathbb{K}[G]) = \operatorname{pdim}(\mathbb{K}[G]) = 0$。否则，若 $(r,p) \neq (0,0)$，则必有 $0 < r < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，且 $1 \leq p \leq r(n-2-r)$。引理 3.2 和引理 3.3 表明，存在一个连通二分图 G，其有 n 个顶点，且 $\operatorname{reg}(\mathbb{K}[G]) = r$、$\operatorname{pdim}(\mathbb{K}[G]) = p$，从而验证了第一个包含关系。

现在，令 $n \geq 2$ 和 $G \in$ 为连通二分图(n)。由推论 2.8 (ii)，可得 $0 \leq$ 的正则性$(\mathbb{K}[G]) < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。若 $\mathbb{K}[G]$的正则性 $= 0$，则由引理 2.10 可知，$\mathbb{K}[G]$的投射维数 $= 0$。因此，令 $r =$ 为$\mathbb{K}[G]$的正则性，$p =$为$\mathbb{K}[G]$的投射维数，我们只需证明：若 $0 < r < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，则 $\mathbb{K}[G]$的投射维数 $\leq r(n-2-r)$。现设 $0 < r < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$。由于 $r \neq 0$，由引理 2.10 可知必有 $1 \leq p$。

还需证明 $p \leq r(n-2-r)$。由引理 3.4，可得 $q \leq (r+1)(n-r-1)$，其中 q 是 G的边数。因此，由推论 2.8 (iii)可得

$$\begin{aligned} p = q - n + 1 &\leq (r+1)(n-r-1) - n + 1 \\ &= rn - r^2 - 2r \\ &= r(n-r-2) \end{aligned}$$

正如所需，这就完成了证明。 □

作为定理 3.5 的一个例子，图 3 展示了对于 $n = 8$、9 而言的 $\mathrm{CBPT}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pdim}}(n)$ 集合。现在，我们已经描述了每个 n 对应的 $\mathrm{CBPT}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pdim}}(n)$，因此可以计算其基数。

推论 3.6。对于每个 $n \geq 2$,

$$|\mathrm{CBPT}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pdim}}(n)| = 1 - \frac{1}{6}\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right)\left(2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3n + 5\right).$$

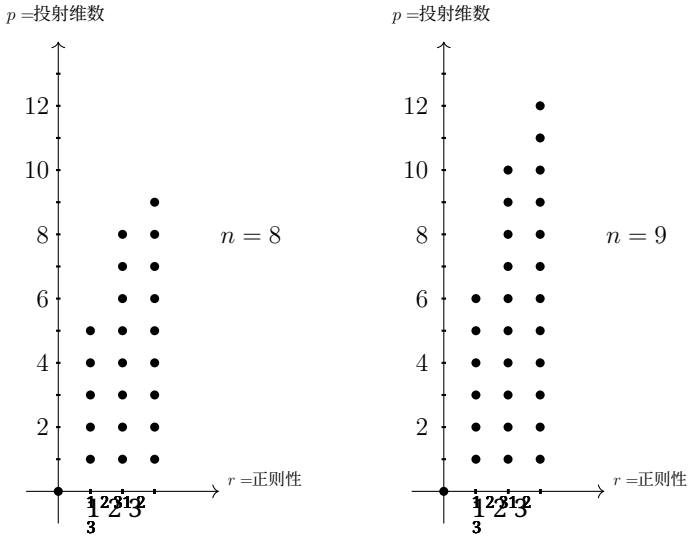


FIGURE 3.8 个和 9 个顶点的所有连通二分图的可能（r, p） $=$(reg($\mathbb{K}[G]$), pdim($\mathbb{K}[G]$))

证明。这　对于 $n = 2$, 3, 可以直接验证。令 $n \geq 4$。根据定理 3.5，我们有

$$\begin{aligned}|\mathrm{CBPT}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pdim}}(n)| - 1 &= \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} r(n-2-r) = (n-2) \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} r - \sum_{r=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} r^2 \\ &= \frac{n-2}{2} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) - \frac{1}{6} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) \left(2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{6} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1 \right) \left(2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 3n + 5 \right). \end{aligned}$$

□

我们的第二个推论表明，所有元组（r, p） $\in$ {(0, 0)} $\cup \mathbb{N}^2$ 都可以实现为某个连通二分图 G 的 (reg($\mathbb{K}[G]$), pdim($\mathbb{K}[G]$))。这里 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, \}$。

推论3.7。设 r 和 p 为整数。那么，存在一个至少有两个顶点的连通二分图 G，使得 reg($\mathbb{K}[G]$) $= r$ 且 pdim($\mathbb{K}[G]$) $= p$，当且仅当 $r = p = 0$ 或 $r, p \geq 1$。等价地，

$$\bigcup_{n \geq 2}^{\infty} \mathrm{CBPT}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{pdim}}(n) = \{(0,0)\} \cup \mathbb{N}^2.$$

证明。设 G 是一个有 $n \geq 2$ 个顶点的连通二分图，且 reg($\mathbb{K}[G]$) $= r$，pdim($\mathbb{K}[G]$) $= p$。根据定理 3.5，（r, p） $=$(0, 0)，或 $r, p \geq 1$。

反之，设 $r = p = 0$ 或 $r, p \geq 1$。若 $r = p = 0$，则由两个顶点构成的唯一树G是一个连通二分图，其 reg($\mathbb{K}[G]$) $=$ pdim($\mathbb{K}[G]$) $= 0$，因此 (0, 0) $\in$ CBPT$^{\mathrm{pdim}}{}_{\mathrm{reg}}$(2)。故设 $r, p \geq 1$。令 $N = 2 + r +$ max$\{r, p\}$。于是$N \geq 2 + r + r = 2 + 2r$。因此

$$0 < r < r + 1 = \left\lfloor \frac{2r+2}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$$

从而 $0 < r < \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$。此外，注意到由于 $r \geq 1$,

$$r(N-2-r) = r\max\{r,p\} \geq rp \geq p,$$

因此 $1 \leq p \leq r(N-2-r)$。由此，根据定理 3.5，$(r,p) \in$ 连通二分图$^{\text{pdim}}_{\text{正则性}}(N)$。 □

4. Proof of main theorem

利用前面各节的结果，我们可以证明本文的主要结论，即描述连通二分图$_{\text{reg,deg,pdim,depth,dim}}(n)$ 的所有元素。特别地，我们现在证明：

定理 4.1. 设 $n \geq 2$。那么，连通二分图$_{\text{reg,deg,pdim,depth,dim}}(n)$ 由下式给出

$$\left\{(r,r,p,n-1,n-1) \;\middle|\; 0 < r < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,\ 1 \leq p \leq r(n-2-r)\right\} \cup \{(0,0,0,n-1,n-1)\}.$$

证明。固定一个 $n \geq 2$，并令 T 表示陈述中的集合。我们首先证明，连通二分图$_{\text{reg,deg,pdim,depth,dim}}(n)$ 的所有元素都属于 T。

设 G 是一个具有 n 个顶点的连通二分图，并令

$$(r, d_1, p, d_2, d_3) = (\operatorname{reg}(\mathbb{K}[G], \deg(h_{\mathbb{K}[G]}(t)), \operatorname{pdim}(\mathbb{K}[G]), \operatorname{depth}(\mathbb{K}[G]), \dim(\mathbb{K}[G]))$$

由推论 2.8（i）和（ii），可得 $0 \leq r = d_1 < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 和 $d_2 = d_3 = n-1$，即（r, d_1, p, d_2, d_3）$= (r, r, p, n-1, n-1)$。由于 $G \in$ 是 n 个顶点的连通二分图（CBPT），根据定理 3.5，可得 $r = p = 0$，或者 $0 < r < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 且 $1 \leq p \leq r(n-2-r)$。因此，$(r, d_1, p, d_2, d_3) \in T$。

对于反向包含，注意到 $(0,0,0,n-1,n-1) \in$ 连通二分图 $_{\text{reg, deg, pdim, depth, dim}}(n)$，因为任何具有 n 个顶点的连通树 G 都满足

$$(\operatorname{reg}(\mathbb{K}[G]), \deg(h_{\mathbb{K}[G]}(t)), \operatorname{pdim}(\mathbb{K}[G]), \operatorname{depth}(\mathbb{K}[G]), \dim(\mathbb{K}[G])) = (0,0,0,n-1,n-1)$$

由推论 2.8 和引理 2.10 可得。因此，任取一个 $(r,r,p,n-1,n-1) \in T$ with $0 < r$。由定理 3.5，二元组 (r,p) 属于 $\text{CPBT}^{\text{pdim}}_{\text{reg}}(n)$，因此存在一个具有 n 个顶点的连通二分图 G，使得 $\operatorname{reg}(\mathbb{K}[G]) = r$ 且 $\operatorname{pdim}(\mathbb{K}[G]) = p$。但根据推论 2.8，$(i)$ 和 (ii)，该图 G 还满足 $\deg(h_{\mathbb{K}[G]}(t)) = r$ 且 $\dim(\mathbb{K}[G]) = \operatorname{depth}(\mathbb{K}[G]) = n-1$。因此，$(r,r,p,n-1,n-1) \in \text{CBPT}_{\text{reg,deg,pdim,depth,dim}}(n)$，证毕。□

备注 4.2. 定理 4.1 关注的是连通二分图。可以将定理 4.1 推广，以描述所有二分图（而不仅仅是连通二分图）的这些不变量的所有可能取值。具体而言，需要利用这些不变量在张量积下具有良好性质这一事实。不过，对于含有孤立顶点的二分图，需要格外谨慎。详见 [2]，其中给出了详细推导。

注 4.3。在定理 3.5 中，我们完全确定了集合 $\text{CBPT}^{\text{pdim}}_{\text{reg}}(n)$。Akihiro Higashitani 指出，描述这个集合等价于描述一个组合方式定义的集合；我们在此简要概述这些细节。图 G 的环面理想对应一个多面体 P_G。P_G 的余次数由 $\operatorname{codeg}(P_G) = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid \operatorname{int}(kP_G) \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset\}$ 给出。这个不变量衡量的是使多面体 kP_G 的内部含有一个整格点的最小整数 k。当 G是二分图时，可以证明 $\deg(h_{\mathbb{K}[G]}(t)) + \operatorname{codeg}(P_G) = n$。此外，当 G 是二分图时，根据推论 2.8（ii）和（iii），我们有 $\operatorname{codeg}(P_G) = n - \operatorname{reg}(\mathbb{K}[G])$，并且

$|E| = \mathrm{pdim}(\mathbb{K}[G]) + n - 1$。因此，确定 $\mathrm{CBPT}^{\mathrm{pdim}\ \text{正则性}}(n)$ 的元素，等价于确定

$$\mathrm{CBPT}^{|E|}_{\mathrm{codeg}}(n) = \{(\mathrm{codeg}(P_G), |E|) \mid G \in \mathrm{CBPT}(n)\}.$$

这一观察表明，考虑所有图（而不仅仅是二分图）的所有配对 $(\mathrm{codeg}(P_G)\ |E|)$ 可能会很有意思。

References

[1] Ayah Almousa、Anton Dochtermann 和 Ben Smith。根多面体、热带类型与环面边理想。预印本，arXiv:2209.09851，2022年。[2] Kieran Bhaskara。二部图的环面理想不变量比较。硕士论文，麦克马斯特大学，2023年。[3] Jennifer Biermann、Augustine O'Keefe 和 Adam Van Tuyl。图的环面理想正则性的界。Adv. in Appl. Math., 85:84–102，2017年。[4] Winfried Bruns 和 J¨urgen Herzog。Cohen–Macaulay环，《剑桥高等数学研究丛书》第39卷。剑桥大学出版社，剑桥，1993年。[5] Nursel Erey 和 Takayuki Hibi。二分图所产生的边理想的 Betti 表大小。Proc. Amer. Math. Soc., 150(12):5073–5083，2022年。[6] Giuseppe Favacchio、Graham Keiper 和 Adam Van Tuyl。图的环面理想的正则性与 h-多项式。Proc. Amer. Math. Soc., 148(11):4665–4677，2020年。[7] Antonino Ficarra 和 Emanuele Sgroi。二项式边理想的 Betti 表大小。预印本，arXiv:2302.03585，2023年。[8] Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。网址：https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2/。[9] Huy T`ai H`a 和 Takayuki Hibi。最大最小顶点覆盖与 Betti 表的大小。Ann. Comb., 25(1):115–132，2021年。[10] J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。边环的正则性与匹配数。Mathematics, 8(1):103–114，2020年。[11] J¨urgen Herzog、Takayuki Hibi 和 Hidefumi Ohsugi。二项式理想，《研究生数学教材》第279卷。Springer，瑞士，2018年。[12] Takayuki Hibi、Akihiro Higashitani、Kyouko Kimura 和 Augustine B. O'Keefe。有限图所产生的边环的深度。Proc. Amer. Math. Soc., 139(11):3807–3813，2011年。[13] Takayuki Hibi、Hiroju Kanno、Kyouko Kimura、Kazunori Matsuda 和 Adam Van Tuyl。Cameron–Walker 图的同调不变量。Trans. Amer. Math. Soc., 374(9):6559–6582，2021年。[14] Takayuki Hibi、Kyouko Kimura、Kazunori Matsuda 和 Adam Van Tuyl。Cameron–Walker 图的正则性与 h-多项式。Enumer. Comb. Appl., 2(3):Paper No. S2R17, 12，2022年。[15] Takayuki Hibi 和 Kazunori Matsuda。单项式理想的正则性与 h-多项式。Math. Nachr., 291(16):2427–2434，2018年。[16] Takayuki Hibi 和 Kazunori Matsuda。词段理想及其 h-多项式。Acta Math. Vietnam., 44(1):83–86，2019年。[17] Takayuki Hibi 和 Kazunori Matsuda。二项式边理想的正则性与 h-多项式。Acta Math. Vietnam., 47(1):369–374，2022年。[18] TakayukiHibi、Kazunori Matsuda 和 Adam Van Tuyl。边理想的正则性与 h-多项式。Electron. J. Combin., 26(1):Paper 1.22, 11，2019年。[19] Akihiro Higashitani、Akane Kanno 和 Ryota Ueji。边理想的维数与深度配对的行为。预印本，arXiv:2301.04763，2023年。[20] Bill Jackson。二部图中的长圈。J. Combin. Theory Ser. B, 38(2):118–131，1985年。[21] Thomas Kahle 和 Jonas Kr¨usemann。余图的二项式边理想。Rev. Un. Mat. Argentina, 63(2):305–316，2022年。

[22] Carlos E. Valencia 和 Rafael H. Villarreal。某些边子环的典范模。European J. Combin., 24(5):471–487，2003年。[23] Wolmer V. Vasconcelos。交换代数与代数几何中的计算方法，《数学中的算法与计算》第2卷。Springer-Verlag，柏林，1998年。章节作者包括 David Eisenbud、Daniel R. Grayson、J¨urgen Herzog 和 Michael Stillman。[24] Rafael H. Villarreal。边理想的Rees代数。Comm. Algebra, 23(9):3513–3524，1995年。[25] Rafael H. Villarreal。单项式代数。《数学专著与研究札记》。CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，第二版，2015年。

（K. Bhaskara，A. Van Tuyl） Department of Mathematics and Statistics, McMaster University, Hamilton, ON, L8S 4L8电子邮箱：kieran.bhaskara@mcmaster.ca, vantuyl@math.mcmaster.ca