arXiv:2303.14821v1 [cs.CC] 26 Mar 2023

强多项式时间内判定箭图的矩锥成员资格

MICHÈLE VERGNE 和 MICHAEL WALTER

摘要。本文指出，对于任意无环箭图，判定箭图表示空间的动量锥成员资格可以在强多项式时间内完成。这推广了 Chindris-Collins-Kline 最近针对二分箭图得到的结果。他们的方法是构造“重数多面体”，其几何实现类似于张量积重数所对应的 Knutson-Tao 多面体。本文表明，对其构造稍作变动，采用一种几何性较弱但更直接的方法，即可为任意无环箭图构造这样的重数多面体。结合 Tardos 的组合线性规划强多项式时间算法与饱和性质，便可推出判定动量锥成员资格可以在强多项式时间内完成。半不变量的类似问题仍未解决。

1. 引言

设 $Q = (Q_0, Q_1)$ 为一个箭图，其中 Q_0 是有限顶点集，Q_1 是有限箭集。我们用记号 $a : x \to y$ 表示一条从 $x \in Q_0$ 指向 $y \in Q_0$ 的箭 $a \in Q_1$。允许 Q 在两个顶点之间有多条箭，但不允许出现环。为简单起见，假设 Q 连通。箭图 Q 的一个维数向量是一族非负整数 $\mathbf{n} = (n_x)_{x \in Q_0}$。给定这样的维数向量，我们考虑复向量空间族 $\boldsymbol{V} = (V_x)_{x \in Q_0}$，其中 $V_x = \mathbb{C}^{n_x}$.。箭图 Q 在 $\boldsymbol{V}$ 上的表示所构成的复向量空间定义为

$$\mathcal{H}_Q(\boldsymbol{V}) := \bigoplus_{a : x \to y \in Q_1} \mathrm{Hom}(V_x, V_y).$$

李群 $\mathrm{GL}_Q(\mathbf{n}) = \prod_{x \in Q_0} \mathrm{GL}(n_x)$ 自然作用于 $\mathcal{H}_Q(\boldsymbol{V})$，因此也自然作用于 $\mathcal{H}_Q(\boldsymbol{V})$ 上的多项式函数空间 $\mathrm{Sym}^*(\mathcal{H}_Q(\boldsymbol{V}))$。将其分解

$$\mathrm{Sym}^*(\mathcal{H}_Q(\boldsymbol{V})) = \bigoplus_{\boldsymbol{\lambda}} m_Q(\boldsymbol{\lambda}) V^{\boldsymbol{\lambda}},$$

其中，$V^{\boldsymbol{\lambda}}$ 表示 $\mathrm{GL}_Q(\mathbf{n})$ 中最高权为 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_x)_{x \in Q_0}$ 的不可约表示。假设 Q 无环，这意味着重数 $m_Q(\boldsymbol{\lambda})$ 有限。相应的矩锥定义为由满足 $m_Q(\boldsymbol{\lambda}) > 0$ 的 $\boldsymbol{\lambda}$ 生成的多面体凸锥。

当 Q 是箭图

$$1 \to 3 \leftarrow 2 \tag{1.1}$$

且维数向量为 $\boldsymbol{n} = [n, n, n]$，那么 $m_Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 是 $V^{\lambda_1} \otimes V^{\lambda_2} \otimes V^{\lambda_3}$ 中 $\mathrm{GL}(n)$ 的平凡表示的重数，也就是 Clebsch-Gordan 系数或 Littlewood-Richardson 系数 $C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$。[1] Knutson-Tao [KT99] 构造了一族多面体 $\mathrm{KT}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$，其参数为 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in (\mathbb{R}^n)^3$,，位于一个 $O(n^2)$ 维空间中；当 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 是支配权时，多面体中的整点数等于 Littlewood-Richardson 系数 $C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$。此外，该多面体由一个形式为 $Ax \le b(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 的组合线性规划[2] 给出，其中 A 仅取决于维数 n，而 b 是 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的线性函数（事实上，A 和 b 的系数取自 1、0、-1），见第 2 节。此外，他们证明了饱和猜想：$C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) > 0$ 当且仅当存在一个正整数 N，使得 $C(N\lambda_1, N\lambda_2, N\lambda_3) > 0$。特别地，$C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) > 0$ 当且仅当 $\mathrm{KT}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 非空；这又等价于属于相应的矩锥。在当前情形下，这意味着存在厄米矩阵 A_1, A_2, A_3，其特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,

[1] 在文献中，这些量通常以不对称的方式定义为 V^{λ_3} 在 $V^{\lambda_1} \otimes V^{\lambda_2}$ 中的重数，即 $c_{\lambda_1, \lambda_2}^{\lambda_3} := C(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3^*)$，其中 λ_3^* 为对偶表示的最高权。[2] 回想一下，若线性规划 $Ax \le b$ 的系数在问题维数 A 上是多项式有界的，则称其为 组合的。 [Tar86]。

分别，使得 $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ （Horn问题）。由于 $\mathrm{KT}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 由一个组合线性规划给出，因此很容易得出，所有这些问题都可以通过一种强多项式时间算法来判定[3]，方法是使用塔尔多什算法 [Tar86]，正如 Mulmuley-Narayanan-Sohoni 所指出的 [MNS12]。[4]

由此自然引出一个问题：对于任意箭图 Q 和维数向量 $\boldsymbol{n}$，能否构造一个多面体 $P_Q(\boldsymbol{\lambda})$，使其由上述组合线性规划给出，并且 $P_Q(\boldsymbol{\lambda})$ 中整点的数量等于重数 $m_Q(\boldsymbol{\lambda})$? 根据 Derksen-Weyman [DW00], 的结果，重数同样具有饱和性，即 $m_Q(\boldsymbol{\lambda}) > 0$ 当且仅当存在整数 $N > 0$ 使得 $m_Q(N\boldsymbol{\lambda}) > 0$, [5] 因此这也意味着可以得到一个用于矩锥成员资格的强多项式时间算法。在近期的一篇文章中，Chindris-Collins-Kline [CCK22]在以下情形实现了这一点： Q 是二分箭图，且任意一对源点和汇点之间的边数相同（式 (1.1) 所描述的就是这样的箭图）。他们的多面体具有具体的几何描述，与 Knutson-Tao多面体非常相似。本文给出一种几何性较弱、但适用于任意无环箭图的构造。

定理 1. 对于任意箭图 Q 和维数向量 $\boldsymbol{n}$，存在一族多面体 $P_Q(\boldsymbol{\lambda})$，使得当 $\boldsymbol{\lambda}$ 是支配权时， $P_Q(\boldsymbol{\lambda})$ 中的整点数等于 $m_Q(\boldsymbol{\lambda})$。此外， $P_Q(\boldsymbol{\lambda})$ 可以由一个组合线性规划描述；给定 Q（由顶点数量和以整数对编码的箭列表给出）以及 $\boldsymbol{\lambda}$ （由大小为 n_x的整数向量 λ_x 组成的列表给出），该规划可在强多项式时间内生成；不等式的右端项关于 $\boldsymbol{\lambda}$ 呈线性关系，且所有系数均属于 $\{0, 1, -1\}$。

我们在第3节证明定理 1。由于 $P_Q(\boldsymbol{\lambda})$ 是有理多面体，当且仅当对于某个整数 $N > 0$，一个 $NP_Q(\boldsymbol{\lambda})$ 含有整点时，它才非空。根据构造，对于所有支配权 $\boldsymbol{\lambda}$ 和 $N > 0$， $P_Q(N\boldsymbol{\lambda}) = NP_Q(\boldsymbol{\lambda})$。因此，饱和性质意味着，$m_Q(\boldsymbol{\lambda}) > 0$ 当且仅当多面体 $P_Q(\lambda)$ 非空。因此，如同 MNS12、CCK22] 中所示，可以使用塔尔多什算法 [Tar86]，在强多项式时间内判定 $m_Q(\boldsymbol{\lambda}) > 0$ 是否成立，或者等价地，判定 $\boldsymbol{\lambda}$ 是否属于相应的矩锥。因此，定理 1 推出以下结论：

推论 2. 存在一种强多项式时间算法，在输入箭图 Q 和一个支配权 $\boldsymbol{\lambda}$时，判定其是否属于矩锥。

给定一个箭图 Q 和一个维数向量 $\boldsymbol{n}$，也可以考虑与这些数据对应的半不变量多项式的权所构成的锥 $\Sigma_Q(\boldsymbol{n})$。也就是说，当且仅当在空间 $\mathcal{H}_Q(\boldsymbol{V})$上存在一个权为 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{Z}^{Q_0}$的非零半不变量多项式时，$\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_Q(\boldsymbol{n})$成立。Chindris-Collins-Kline 提出，能否为判定是否属于 $\Sigma_Q(\boldsymbol{n})$这一问题给出强多项式时间算法；他们将该问题称为一般半稳定性问题 [CCK22, Problem 2]。有趣的是，推论 2 并不能推出该问题存在（强或非强）多项式时间算法——即使采用自然的输入模型，其中 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 由长度均为 $|Q_0|$ 的整数向量列表指定。我们将在第 4 节讨论这一点，并给出一些正面的例子。

2. 预备知识

在证明上述结果之前，我们先回顾一些记号。对于任意整数 n，我们用非递增整数序列 $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ 来标记 $\mathrm{GL}(n)$ 的支配权。我们用 V^α 表示 $\mathrm{GL}(n)$ 的相应不可约表示；当 $\alpha_n \geq 0$ 时，它是多项式表示。我们将 $D(n) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq \cdots \geq x_n \geq 0\}$ 简写为 $D(n) \cap \mathbb{Z}^n$；这些恰好是与多项式不可约表示对应的支配权。

[3]回顾一下，强多项式时间算法所执行的初等算术运算次数有一个上界，该上界是输入数字个数的多项式；并且在布尔模型或图灵模型下，该算法是一个多项式空间算法 [GLS12]。[4]我们指出，已有大量工作从结构或算法的角度研究矩多面体的计算。例如，参见 [BS00、Res10、VW17、BCMW17、BFG+19] 及其中的参考文献。尽管在自然且一般的设定下，成员资格问题已知属于复杂度类 NP 和 coNP [BCMW17], 但目前尚无适用于所有参数、且运行时间为多项式时间的通用算法。[5]Nicolas Ressayre 曾向我们指出这一点。详情请参见 [BVW19，第 8] 节。

接下来，我们回顾 ***Knutson-Tao*** 多面体 的一种描述：对于 λ_1， λ_2， $\lambda_3 \in \mathbb{R}^n$，

$$\begin{aligned}\mathrm{KT}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \Big\{ p \in W_n \ : E_r(p) \geq 0 \quad \forall r = 1,\dots,\tfrac{3n(n-1)}{2}, \\ B_k(p,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = 0 \quad \forall k = 1,\dots,3n, \\ S(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = 0 \Big\},\end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $W_n = \mathrm{R}_{(n+1)(n+2)/2}$， E_r 是在 W_n 上定义所谓“菱形不等式”的线性形式， B_k 是在 $W_n \oplus (\mathbb{R}^n)^{\oplus 3}$ 上定义“边界方程”的线性形式，而 $S(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \sum_{i=1}^n \lambda_{1,i} + \sum_{i=1}^n \lambda_{2,i} + \sum_{i=1}^n \lambda_{3,i}$ 定义所谓的“相容性方程”。线性形式 E_r、 B_k 和 S 的系数均属于 $\{0,1,-1\}$。例如，参见 [Buc00]。给定以整数列表表示的 λ_1、 λ_2、 λ_3 ，即可在强多项式时间内生成不等式列表。正如第 1 节所述，若 λ_1、 λ_2、 λ_3 是支配权，则 $\mathrm{KT}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 中整点的数量等于 Littlewood-Richardson 系数 $C(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，其定义为 $\mathrm{GL}(s)$-不变子空间 $V^{\lambda_1} \otimes V^{\lambda_2} \otimes V^{\lambda_3}$ 的维数：

$$C(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \#\Big(\mathrm{KT}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \cap \mathbb{Z}^{(n+1)(n+2)/2}\Big) \tag{2.2}$$

注意， $C(\lambda_1^*, \lambda_2, \lambda_3)$ 也可以解释为 V^{λ_1} 在张量积 $V^{\lambda_2} \otimes V^{\lambda_3}$ 中的重数。

最后，我们回顾一下柯西公式，该公式指出，相对于 $\mathrm{GL}(n_x) \times \mathrm{GL}(n_y)$，我们有如下分解

$$\mathrm{Sym}^*(\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{n_x}, \mathbb{C}^{n_y})) \cong \bigoplus_{\mu \in D(n_x,n_y) \cap \mathbb{Z}^{n_x}} V^{\mu} \otimes V^{d(\mu)^*}, \tag{2.3}$$

其中， $D(n_x,n_y)$ 表示满足 $x_j = 0$ 对所有 $n_y < j \leq n_x$ 均成立的向量 $x \in D(n_x)$ 的集合（当 $n_x \leq n_y$ 时，该条件自动成立）；而 $d(\mu) \in \mathrm{R}^{n_y}$ 表示如下得到的向量：若 $n_y \leq n_x$ ，则取 μ 的前 n_y 个坐标；若 $n_y > n_x$ ，则在 μ 后补零。另见 Ful97，第 8 节中的公式 (18)3]。

3. The construction

我们先通过一个简单的例子说明这一构造，然后再讨论一般情形。

3.1. 一个例子。 考虑如下箭图 Q，

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 1 & & & & 4 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & 3 & & \end{array}, \tag{3.1}$$

它是二分的，但并非属于 [CCK22] 中所考虑的形式。为简单起见，考虑维数向量 $\boldsymbol{n} = [n,n,n,n]$。对于 $V_x = V_y = \mathbb{C}^n$，公式 (2.3) 中的柯西公式 表明

$$\mathrm{Sym}^*(\mathrm{Hom}(V_x, V_y)) \cong \bigoplus_{\mu \in D(n) \cap \mathbb{Z}^n} V^{\mu} \otimes V^{\mu^*}$$

相对于 $\mathrm{GL}(n) \times \mathrm{GL}(n)$，因为在这种情况下 $D(n,\ n) = D(n)$ 且 $d(\mu) = \mu$。由于有 $\mathrm{Sym}(A \oplus B) = \mathrm{Sym}(A) \otimes \mathrm{Sym}(B)$，我们得到关于 $\mathrm{GL}_Q(\boldsymbol{V})$ 作用的如下分解：

$$\mathrm{Sym}^*(\mathcal{H}_q(\boldsymbol{V})) \cong \bigoplus_{\alpha,\beta,\gamma,\delta \in D(n) \cap \mathbb{Z}^n} V_1^{\alpha} \otimes V_2^{\alpha^*} \otimes V_1^{\beta} \otimes V_3^{\beta^*} \otimes V_2^{\gamma} \otimes V_4^{\gamma^*} \otimes V_3^{\delta} \otimes V_4^{\delta^*}$$

其中，与顶点 x 相关联的 $\mathrm{GL}_Q(\boldsymbol{V})$ 中的 $\mathrm{GL}(n_x)$ 因子，以对角方式作用于所有下标为 x 的张量因子。根据 Littlewood–Richardson 系数的定义，可得

$$m_Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta \in D(n) \cap \mathbb{Z}^n} C(\lambda_1^*,\alpha,\beta) C(\lambda_2^*,\alpha^*,\gamma) C(\lambda_3^*,\beta^*,\delta) C(\lambda_4^*,\gamma^*,\delta^*). \tag{3.2}$$

我们声称，可以将这个重数写成以下多面体中整点的个数：

$$P_Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=\Big\{(\alpha,\beta,\gamma,\delta,p_1,p_2,p_3,p_4)\in(\mathbb{R}^n)^{\oplus 4}\oplus W_n^{\oplus 4}\ :\ \alpha,\beta,\gamma,\delta\in D(n),$$
$$p_1\in \mathrm{KT}(\lambda_1^*,\alpha,\beta), p_2\in \mathrm{KT}(\lambda_2^*,\alpha^*,\gamma), p_3\in \mathrm{KT}(\lambda_3^*,\beta^*,\delta), p_4\in \mathrm{KT}(\lambda_4^*,\gamma^*,\delta^*)\Big\}.$$

由公式 (2.1) 可知， $P_Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ 可由多项式数量的不等式描述，且每个不等式都具有所需的形式。为了说明 $P_Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ 中整数点的数量等于 $m_Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$，注意在投影下， $P_Q(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)$ 的纤维

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta,p_1,p_2,p_3,p_4)\mapsto(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$$

是 Knutson-Tao 多面体的乘积。 $P_Q(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4)$ 中的整点数量，可以通过对所有支配多项式权 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$求和，累加这些 Knutson-Tao 多面体中整点数量的乘积来计算。根据 公式 (2.2)，每个 Knutson-Tao 多面体中的整点数量都给出了相应的 Clebsch-Gordan 系数。因此，我们得到（3.2）。

3.2. **一般构造**。 上述内容很容易推广到一般的箭图 Q 和维数向量 $\boldsymbol{n}$。

我们首先为任意数量的张量因子定义 Knutson-Tao 多面体（参见例如 [Zel99]）。给定 GL(n) 的支配权 $\lambda_1,\dots,\lambda_s$，用 $C(\lambda_1,\dots,\lambda_s)$ 表示平凡表示在张量积 $V^{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes V^{\lambda_s}$ 中的重数。由此可以定义多面体，记作 $\mathrm{KT}(\lambda_1,\dots,\lambda_s)$，使其整点数等于 $C(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_s)$。以下构造足以满足我们的目的： $s\le 2$ 的情形是平凡的， $s=3$ 的情形是 Knutson-Tao 最初研究的情形，并在公式 (2.1) 中给出定义；而对于 $s>3$，有

$$C(\lambda_1,\dots,\lambda_s)=\sum_\mu C(\mu^*,\lambda_1,\dots,\lambda_{s-2})C(\mu,\lambda_{s-1},\lambda_s),$$

其中 μ 遍历所有支配权，因此我们可以归纳地定义

$$\mathrm{KT}(\lambda_1,\dots,\lambda_s)=\Big\{(\mu,p,q)\in\mathbb{R}^n\oplus W_n\oplus W_n\ :\ \mu_1\ge\cdots\ge\mu_n,$$
$$p\in\mathrm{KT}(\mu^*,\lambda_1,\dots,\lambda_{s-2}),\ q\in\mathrm{KT}(\mu,\lambda_{s-1},\lambda_s)\Big\}.$$

归纳可知，不等式的数量关于 n 和 s呈多项式增长，其右端关于 λ_1、……、 λ_s呈线性关系，且所有系数都属于 $\{0,1,-1\}$。

现在考虑任意一个无环箭图 Q 和任意一个维数向量 $\boldsymbol{n}$。利用一般形式的柯西公式，公式 (2.3)，我们得到如下关于 $\mathrm{GL}_Q(\boldsymbol{V})$ 的分解：

$$\mathrm{Sym}^*(\mathcal{H}_Q(\boldsymbol{V}))=\bigoplus_{\{\mu_a\in D(n_x,n_y)\cap\mathbb{Z}^{n_x}\}_{a:x\to y\in Q_1}}\ \bigotimes_{a:x\to y\in Q_1}V_x^{\mu_a}\otimes V_y^{d(\mu_a)^*}$$
$$=\bigoplus_{\{\mu_a\in D(n_x,n_y)\cap\mathbb{Z}^{n_x}\}_{a:x\to y\in Q_1}}\ \bigotimes_{x\in Q_0}\left(\bigotimes_{a\in\mathrm{out}(x)}V_x^{\mu_a}\otimes\bigotimes_{a\in\mathrm{in}(x)}V_x^{d(\mu_a)^*}\right),$$

其中，我们用 $\mathrm{out}(x)$ 和 $\mathrm{in}(x)$ 分别表示从 x 出发和到达 x的箭的集合；对于每个顶点 x，对应的因子 $\mathrm{GL}(n_x)$ 属于 $\mathrm{GL}_Q(\boldsymbol{V})$，并再次对所有下标为 x 的张量因子作对角作用。因此，与公式 (3.2)类似，最高权 $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_x)_{x\in Q_0}$ 的重数 $m_Q(\boldsymbol{\lambda})$ 可按以下方式计算：

$$m_Q(\boldsymbol{\lambda})=\sum_{\{\mu_a\in D(n_x,n_y)\cap\mathbb{Z}^{n_x}\}_{a:x\to y\in Q_1}}\ \prod_{x\in Q_0}C(\lambda_x^*,\{\mu_a\}_{a\in\mathrm{out}(x)},\{d(\mu_a)^*\}_{a\in\mathrm{in}(x)}),$$

因此，我们定义这个多面体：

$$P_Q(\boldsymbol{\lambda})=\Big\{\big((\mu_a)_{a\in Q_1},(p_x)_{x\in Q_0}\big)\ :\ \mu_a\in D(n_x,n_y)\quad\forall a:x\to y\in Q_1,$$
$$p_x\in\mathrm{KT}\big(\lambda_x^*,\{\mu_a\}_{a\in\mathrm{out}(x)},\{d(\mu_a)^*\}_{a\in\mathrm{in}(x)}\big)\quad\forall x\in Q_0\Big\}$$

注意到 $P_Q(\boldsymbol{\lambda})$ 可以用一个组合线性规划来描述，其不等式的数量关于顶点数和箭图中箭的数量呈多项式级增长，右端项关于 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$呈线性关系，且所有系数都属于 $\{0, 1, -1\}$。显然，$m_Q(\boldsymbol{\lambda})$ 等于该多面体中整点的数量。此外，给定 Q 和 $\boldsymbol{\lambda}$，可以在强多项式时间内生成该组合线性规划。因此，我们证明了定理 1。正如引言中所述，推论 2随之得证。

对于 [CCK22], 中所研究的二分箭图类，作者也构造了多面体，其整数点的数量等于相应的重数。他们的构造有一个简洁的几何描述：利用 Zelevinsky 对高阶张量积重数的多面体描述，将仅仅两个Knutson-Tao 多面体拼接起来 [Zel99]。

4. 半不变量与一般半稳定性问题的复杂度

给定一个箭图 Q 和一个维数向量 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^{Q_0}$，令 $\Sigma_Q(\boldsymbol{n})$ 表示由该数据对应的半不变量多项式的权生成的锥。根据饱和性，$\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_Q(\boldsymbol{n})$ 当且仅当在空间 $\mathcal{H}_Q(\boldsymbol{V})$ 上存在一个非零的、权为 $\boldsymbol{\sigma}$ 的半不变量多项式时成立。Chindris、Collins 和 Kline 提出，能否为判定是否属于 $\Sigma_Q(\boldsymbol{n})$这一问题给出一个强多项式时间算法；他们将其称为一般半稳定性问题 [CCK22]*问题 2。

从数学角度看，一般半稳定性问题可视为矩锥成员资格的一个特例。事实上，对任意 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{Z}^{Q_0}$，我们关联支配权 $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\sigma})$，其定义为 $\lambda_x = (\sigma_x, \dots, \sigma_x) \in \mathbb{Z}^{n_x}$，对所有 $x \in Q_0$ 均成立。于是有

$$\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_Q(\boldsymbol{n}) \quad \Leftrightarrow \quad m_Q(\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\sigma})) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad P_Q(\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\sigma})) \neq \emptyset.$$

然而，推论 2 中用于矩锥成员资格的强多项式时间算法，并不意味着一般半稳定性问题存在（强或非强）多项式时间算法。事实上，一般半稳定性问题的输入数据自然包含箭图 Q 的描述，以及两个长度为 $|Q_0|$ 的整数列表，分别描述维数向量 $\boldsymbol{n} \in \mathrm{N}^{Q_0}$ 和权 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathrm{Z}^{Q_0}$。因此，该问题的输入数字数量与维数 n_x 无关（这与矩锥成员资格问题不同）。然而，上文构造的多面体 $P_Q(\boldsymbol{\lambda})$ 的描述复杂度至少随维数 n_x 线性增长。因此，无法根据输入数据在强多项式时间内构造它。事实上，当维数 n_x 以二进制表示（如计算复杂性理论中的通常做法）时，甚至无法根据输入数据在普通（非强）多项式时间内生成 $P_Q(\boldsymbol{\lambda})$。由此可见，我们关于矩锥成员资格的结果并不意味着一般半稳定性问题存在（强或非强）多项式时间算法。由于我们的构造与 [CCK22], 中的构造非常相似，我们认为，正如 [CCK22] 所述，一般半稳定性问题是否存在强多项式时间算法仍是一个开放问题。[6]

在下文中，我们将证明，至少对于某些特殊的箭图，一般半稳定性问题可以在多项式时间内判定。我们的第一个例子是箭图 Q，见（1.1）：

$$1 \to 3 \leftarrow 2$$

给定维数向量 $\boldsymbol{n} = [n_1, n_2, n_3] \in \mathbb{N}^3$ 和权 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] \in \mathbb{Z}_3$，我们希望了解何时 $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_Q(\boldsymbol{n})$。若 $n_1 = n_2 = n_3$，那么当且仅当

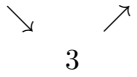
$$\sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_2 \geq 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0.$$

若 $n_1 = n_3 \neq n_2$，则 $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_Q(\boldsymbol{n})$ 当且仅当 $\sigma_1 + \sigma_3 = 0$ 且 $\sigma_2 = 0$。类似地，若 $n_1 \neq n_3 = n_2$，则 $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_Q(\boldsymbol{n})$ 当且仅当 $\sigma_1 = 0$ 且 $\sigma_2 + \sigma_3 = 0$。最后，若 $n_1 + n_2 = n_3$，则 $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_Q(\boldsymbol{n})$ 当且仅当 $\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_3$。在其他所有情况下，$\Sigma_Q(\boldsymbol{n}) = \{0\}$。由此可见，对于这个箭图，一般半稳定性问题可以在强多项式时间内判定。

接下来，我们讨论 (3.1) 中的箭图：

$$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ \nearrow & & \searrow \\ 1 & & 4 \end{array},$$

[6]这也适用于星形箭图这一特殊情形，近期在 [FM23] 中对此进行了讨论。



设 $\boldsymbol{n} = [n_1, n_2, n_3, n_4] \in \mathbb{N}^4$，并设 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] \in \mathbb{Z}^4$。同样，我们希望了解何时 $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_Q(\boldsymbol{n})$。一个必要条件是 $n_1\sigma_1 + \cdots + n_4\sigma_4 = 0$，因此该锥至多为三维。可以利用 公式 (2.3)中的柯西公式计算。结果如下：

$$\Sigma_Q(\boldsymbol{n}) = \mathfrak{C}(\boldsymbol{n}) \cap \{n_1\sigma_1 + \cdots + n_4\sigma_4 = 0\},$$

当 $\boldsymbol{n}$ 遍历所有（无穷多个）维数向量时，$\mathfrak{C}(\boldsymbol{n})$ 遍历了有限 个$\mathbb{R}^4$ 中的多面体凸锥。此外，给定 $\boldsymbol{n}$，通过有限次初等算术运算即可计算出相应锥 $\mathfrak{C}(\boldsymbol{n})$ 的定义不等式。因此，一般半稳定性问题同样可以在强多项式时间内判定。由于需要考虑的情形很多（但数量有限），我们只讨论几个例子。当 $\boldsymbol{n} = [n, n, n, n]$ 时，$\Sigma_Q(\boldsymbol{n})$ 是由以下向量生成的三维锥：$(1, -1, 0, 0)$、$(1, 0, -1, 0)$、$(0, 1, 0, -1)$、$(0, 0, 1, -1)$，它们分别对应四个箭的行列式。因此，$\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_Q(\boldsymbol{n})$ 当且仅当

$$\sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 \geq 0, \quad \sigma_1 + \sigma_3 \geq 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \geq 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 = 0.$$

当沿着路径 $1 \to 2 \to 4$和 $1 \to 3 \to 4$的维数每次至多增加一时，$\Sigma_Q(\boldsymbol{n})$仍是三维的。对于 $\boldsymbol{n} = [n, n, n, n+1]$，它由下式给出：

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4 \geq 0, \quad \sigma_1 + \sigma_3 + \sigma_4 \geq 0, \quad \sigma_4 \leq 0, \quad n\sigma_1 + n\sigma_2 + n\sigma_3 + (n+1)\sigma_4 = 0;$$

对于 $\boldsymbol{n} = [n, n+1, n, n+1]$，它由下式描述：

$$\sigma_1 + \sigma_3 \geq 0, \quad \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_4 \geq 0, \quad \sigma_2 \geq 0, \quad n\sigma_1 + (n+1)\sigma_2 + n\sigma_3 + (n+1)\sigma_4 = 0;$$

利用对称性，$\boldsymbol{n} = [n, n, n+1, n+1]$的情形也类似；最后，对于 $\boldsymbol{n} = [n, n+1, n+1, n+1]$，锥由下式给出：

$$\sigma_1 \geq 0, \quad \sigma_2 \geq 0, \quad \sigma_3 \geq 0, \quad n\sigma_1 + (n+1)\sigma_2 + (n+1)\sigma_3 + (n+1)\sigma_4 = 0.$$

当沿着两条路径的维数增加超过一时（即 $n_4 \geq n_1 + 2$），则还需考虑若干种情况。例如，$n_1 < n_2 < n_4$、$n_1 < n_3 < n_4$和 $n_4 \leq 2n_1$ 的情形尤其有趣，因为此时 $\mathfrak{C}(\boldsymbol{n})$ 还取决于集合 $\{n_j, n_j - n_k\}$ 中整数进行欧几里得除法所得余数的基数。

致谢

我们谨向 Calin Chindris、Brett Collins 和 Daniel Kline 致谢，感谢他们就其预印本 [CCK22]进行了宝贵的讨论。我们也感谢 Cole Franks 和 Visu Makam 就本文早期版本所进行的讨论。

MW 感谢欧盟（欧洲研究理事会，SYMOPTIC，101040907）、德国科学基金会（DFG）根据德国卓越战略（EXC 2092 CASA，390781972）、德国联邦教育与研究部（BMBF，QuBRA 项目）以及荷兰研究理事会（NWO，资助编号 OCENW.KLEIN.267）提供的支持。文中表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究理事会执行机构的观点。欧盟和资助机构均不对此承担责任。

参考文献

[BCMW17] Peter Burgisser、Matthias Christandl、Ketan D Mulmuley 和 MICHAEL WALTER，矩多面体中的成员资格问题属于 *NP* 和 *coNP*，《SIAM 计算杂志》**46** (2017)，第 3 期，972–991。[BFG+19] Peter Bürgisser、Cole Franks、Ankit Garg、Rafael Oliveira、Michael Walter 和 Avi Wigderson，迈向非交换优化理论：矩映射与多面体的测地线一阶和二阶方法，2019年IEEE第60届计算机科学基础年会（FOCS），IEEE，2019年，第 845–861 页。[BS00] Arkady Berenstein 和 Reyer Sjamaar，余伴随轨道、矩多面体与希尔伯特–芒福德判据，《美国数学会杂志》**13** (2000)，第 2 期，433–466。

[Buc00] Anders Skovsted Buch，《饱和猜想》（根据 A. Knutson 和 T. Tao），Enseign. Math. (2) 46 (2000)，第 1/2 期，43–60，附录由 William Fulton 撰写。[BVW19] Velleda Baldoni、Michèle Vergne 和 Michael Walter，箭图子表示的 Horn 条件与矩映射，arXiv 预印本 arXiv:1901.07194 (2019)，即将发表于 Pure Appl. Math. Q。[CCK22] Calin Chindris、Brett Collins 和 Daniel Kline，二分箭图的动量锥成员资格、箭图半不变量与一般半稳定性，arXiv 预印本 arXiv:2211.01990 (2022)，2022年11月。[DW00] Harm Derksen 和 Jerzy Weyman，箭图的半不变量与 Littlewood–Richardson 系数的饱和性，《美国数学会杂志》13 (2000)，第 3 期，467–479。[FM23] Cole Franks 和 Visu Makam，iPCA 与星形箭图的稳定性，arXiv 预印本 arXiv:2302.09658 (2023)。[Ful97] William Fulton，《杨表》，剑桥大学出版社，1997。[GLS12] Martin Grötschel、László Lovász 和 Alexander Schrijver，《几何算法与组合优化》，第 2 卷，Springer Science & Business Media，2012。[KT99] Allen Knutson 和 Terence Tao，$GL_n(\mathbb{C})$ 张量积的蜂窝模型 I：饱和猜想的证明，《美国数学会杂志》12 (1999)，第 4 期，1055–1090。[MNS12] Ketan D. Mulmuley 、 Hariharan Narayanan 和 Milind Sohoni，几何复杂性理论 III：判定 Littlewood–Richardson 系数的非零性，J. Algebraic Combin. 36 (2012)，103–110，arXiv:cs/0501076。[Res10] Nicolas Ressayre，几何不变理论与广义特征值问题，Inventiones mathematicae 180 (2010)，第 2 期，389–441。[Tar86] Éva Tardos，一种求解组合线性规划的强多项式时间算法，Operations Research 34 (1986)，第 2 期，250–256。[VW17] Michèle Vergne 和 Michael Walter，有限维表示的动量锥不等式，Journal of Symplectic Geometry 15 (2017)，第 4 期，1209–1250。[Zel99] Andrei Zelevinsky，Littlewood–Richardson 半群，《代数组合学新视角》，剑桥大学出版社，1999年，第 337–345 页。

Michèle Vergne：巴黎第七狄德罗大学、朱西厄数学研究所、索菲·热尔曼，75205号信箱，法国巴黎第13邮区电子邮件地址：michele.vergne@imj-prg.fr

Michael Walter，波鸿鲁尔大学计算机科学学院，Universitätsstr. 150，44801 波鸿，德国电子邮件地址：michael.walter@rub.de