# 具有非线性稳定性约束的有限应变拓扑优化

Guodong Zhang[1], Kapil Khandelwal[2] 和 Tong Guo[3]

[1]副教授，东南大学土木工程学院，中国南京市九龙湖校区土木工程楼 319 室，邮编 211189，gzhang@seu.edu.cn （通讯作者） [2] 副教授，圣母大学土木与环境工程及地球科学系，Fitzpatrick Hall 156 室，美国印第安纳州圣母镇，邮编 46556，电子邮箱：kapil.khandelwal@nd.edu ORCID：0000-0002-5748-6019，（通讯作者）[3]教授，东南大学土木工程学院，中国南京市九龙湖校区土木工程楼 319 室，邮编 211189。

预印本已提交

## 摘要

本文提出一种计算框架，通过纳入非线性屈曲约束，实现大变形下稳定结构的设计优化。本文还提出一种抑制与低密度单元相关的伪屈曲模态的新策略。该策略通过构造伪质量矩阵实现：对于周围仅有低密度单元的自由度，赋予较小的伪质量；对于实体区域，则退化为单位矩阵。本文还开发了一种新颖的优化过程，可处理单特征值和重特征值；在此过程中，推导了单特征值的一致灵敏度和重特征值的方向导数，并将其用于基于梯度的优化算法——移动渐近线法。此外，非线性分析中还采用了自适应线性能量插值方法，以处理大变形下低密度单元的畸变。

数值结果表明，对于具有低对称性或高对称性的系统，非线性稳定性约束能够确保结构在大变形下、目标载荷处保持稳定。对B样条拟合设计进行后续分析后发现，通过选择不同的稳定性约束值，可以有效控制优化结构的安全裕度，即目标载荷与 $1^{st}$ 临界载荷之间的差值。研究还展示了模态切换和多重分岔等有趣的结构行为。

**关键词：**拓扑优化；结构稳定性；非线性屈曲约束；有限变形；虚拟域方法。

---

## 1 引言

自 Bendsøe 和 Kikuchi 开创性地提出基于均匀化的拓扑优化以来，结构拓扑优化计算方法的发展取得了巨大进展。除了绝大多数研究仍聚焦于线弹性结构之外，非弹性、有限变形以及多物理场方面的拓展也得到了研究。为确保优化结构能够在既定载荷条件下运行而不发生失效，设计优化必须相应地纳入适当的失效机制。此外，失效的含义会因具体情境而有很大差异。例如，失效可能与结构稳定性的丧失、材料中塑性的出现以及材料力学性能的退化等因素有关。本研究关注由超弹性材料构成、能够在弹性域内承受大应变的结构。因此，失效机制被定义为一种“屈曲型”失稳；对于保守系统，可使用能量判据来研究稳定性，而非保守系统则可能需要更一般的李雅普诺夫判据。

对于弹性固体，最常用的优化公式是在材料体积约束下实现最小柔度，也称为刚度设计公式 [2, 6]。在刚度设计中，优化过程可能会生成细长构件，因此稳定性考量对于获得有实际意义的设计至关重要，尤其是在大变形情况下 [16]。过去，大多数带有屈曲约束的拓扑优化研究都集中在桁架结构上，且大多局限于线性桁架结构，其约束范围从对每个构件采用欧拉屈曲判据的简单局部屈曲约束 [17] ，到针对整个结构的整体屈曲约束 [18]。向.....的扩展

几何非线性屈曲约束桁架拓扑优化由 Li 和 Khandelwal 开展 [19]。与桁架结构相比，关于带有屈曲约束的连续体结构拓扑优化的研究相对较少。对于连续体结构，Neves 等人开展了首项研究 [20], ，其中纳入了线性屈曲约束。线性屈曲分析可表示为一个广义特征值问题

$$(\boldsymbol{K}_0 - \lambda \boldsymbol{K}_\sigma)\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{K}_0$ 是初始刚度矩阵，即位移为零时的刚度矩阵；$\boldsymbol{K}_\sigma$ 是根据线性方程 $\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{P}$ 求得的位移场 $\boldsymbol{u}$ 计算得到的应力刚度矩阵，其中 $\boldsymbol{P}$ 是施加力。最小特征值记为 $\lambda_1$ ，它表示屈曲载荷因子，据此可近似得到屈曲载荷 $\lambda_1\boldsymbol{P}$；相应的特征向量 $\boldsymbol{\phi}_1$ 表示屈曲模态。需要指出的是，式（1）中的线性屈曲分析隐含地假设应力刚度与载荷呈线性关系，且临界点处的位移较小。此外，在基于密度的拓扑优化框架中引入线性屈曲约束面临两项主要挑战：（a）低密度区域中存在伪屈曲模态 [10, 20]；（b）多个/重特征值的不可微性 $\lambda$ [21]。

在 Neves等人 [20], 中，通过忽略低密度单元对 stress stiffness matrix 的贡献，抑制了伪屈曲模态；并利用广义梯度概念规避了重特征值的不可微性。随后，Bendsøe 和 Sigmund [2], 提出了针对初始刚度矩阵和 stress stiffness 矩阵的不同惩罚方案，以解决伪屈曲模态问题。Bruyneel [22] 指出，在线性屈曲优化中，必须纳入足够数量的代表性屈曲模态，以处理屈曲模态切换，避免收敛不佳。重

特征值的导数已由 Seyranian 等人 [21] 在结构优化领域进行了广泛研究，另请参见文献 [23, 24]。文献 [25] 利用重特征值对称多项式的可微性，解决与重特征值相关的不可微性问题。关于线性屈曲拓扑优化的其他重要研究成果见文献 [26-28]。近年来，结构屈曲拓扑优化日益受到关注。例如，Gao 和 Ma [29] 通过特征值平移，并计算模态应变能比进行模态识别，避免了伪屈曲模态；Dunning 等人 [30] 采用高效的迭代块共轭梯度法求解大型特征值问题；Thomsen 等人 [31]将线性屈曲与布洛赫波分析相结合，以设计屈曲强度更高的二维周期材料；Ferrari 等人 [32] 研究了使用聚合函数近似屈曲约束中的最小特征值，Russ 和 Waisman [33] 将其用于设计具有损伤和线性屈曲约束的弹塑性结构；Ferrari 等人 [34] 还开发了一种多层方法，以降低具有线性化屈曲约束的大规模优化问题的计算成本；Gao 等人 [35] 将线性屈曲与应力约束相结合，用于结构刚度设计，从而提高强度和稳定性。

在线性屈曲分析中，只有当屈曲前阶段的变形较小时，分析结果才有效；而在大变形情况下，线性屈曲分析可能会导致错误结果。然而，由于存在诸多挑战，拓扑优化中的非线性屈曲分析尚未得到充分研究，例如：准确估计临界点或其他稳定性指标并非易事；灵敏度分析（即使针对单特征值也如此）颇具挑战，因为切线刚度矩阵是位移的函数；大变形情况下还会出现低密度网格畸变，等等。例如，Kemmler 等人 [36] 利用所谓的扩展系统

方程直接计算临界点，并将其设定下限以最小化柔顺度。难点在于求解临界点，因为当前解点必须足够接近临界点，而这并非总能保证。作为一种替代方法，Lindgaard 和 Dahl [37] 提出在临界前载荷步近似临界点，方法是

$$(\boldsymbol{K}_0 + \boldsymbol{K}_u^n)\boldsymbol{\phi} = -\lambda \boldsymbol{K}_\sigma^n \boldsymbol{\phi} \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{K}_u^n$ 和 $\boldsymbol{K}_\sigma^n$ 分别是临界前 $n^{\text{th}}$ 步的位移刚度和应力刚度。如 [19], 所示，近似临界点的精度取决于临界前步与临界点的接近程度。在 [36, 37], 中，网格畸变和重特征值相关问题尚未得到处理。在 Dalklint 等人最近的一项研究中 [10],，通过采用线性能量插值方案 [38] 扩展了 [37] 中的方法，以处理网格畸变，并结合聚合函数方法处理重特征值的灵敏度。

另一方面，由于两者都在求解特征值问题，结构特征频率优化与结构屈曲优化有许多共同之处。结构特征频率优化通常表述为包含质量矩阵和刚度矩阵的广义特征值问题，而静态屈曲分析则只涉及刚度矩阵。同样，大多数研究都局限于线弹性。例如，Pedersen [39] 通过将刚度和质量的新插值方法与一种忽略仅被低密度单元包围的节点的策略相结合，最大化了基频，以避免伪振动模态；Du 和 Olhoff [40] 对低密度单元的质量施加更大的惩罚，以抑制伪特征模态，并提出了双循环优化过程，其中内循环考虑方向导数，以处理重特征值的不可微性。Dalklint 等人 [41]将这一过程扩展到了几何非线性情形。此外

Yoon 等人 [42]研究了几何非线性特征频率优化：在单元连接拓扑参数化框架下，最大化结构在变形构形下的基频，并证明大变形会显著影响非线性系统的特征频率。

本研究聚焦于结构拓扑优化，在满足材料体积和非线性稳定性约束的同时，最小化末端柔度。本研究的主要贡献如下：(a) 提出一种基于构造伪质量矩阵、用于消除伪屈曲模态的新策略；(b) 采用一种新的拓扑优化非线性稳定性分析方法，直接计算切线刚度矩阵的特征值，不作其他近似；(c) 优化问题纳入固定数量的特征值簇，而非固定数量的特征值，从而能够在优化过程中处理任意特征值重数；(d) 将 Zhang 等人提出的自适应线性能量插值 [16] 纳入所提出的框架，该方法已在先前研究中展现出处理网格畸变的稳健性能 [13, 43, 44]；(e) 最后，对经 B 样条拟合的优化拓扑进行后分析，以评估优化结构的稳定性表现。

本文其余部分安排如下。第 2 节简要回顾基于密度的框架。第 3 节介绍拓扑优化中采用虚拟域方法的非线性有限元分析。第 4 节提出一种新型伪质量矩阵，用于处理虚拟区域中的伪屈曲模态，并给出一个示例。第 5 节推导简单特征值和重特征值的灵敏度分析。第6节介绍一种能够处理简单和重特征值情形的新型优化公式。第 7 节通过四个数值算例，

展示非线性屈曲约束在大变形下控制结构稳定性的有效性。最后，第8节给出总结性评述。

## 2 基于密度的框架

在采用有限元离散（见第 3 节）的基于密度的拓扑优化中，设计由逐单元常数密度场 $\rho(\boldsymbol{X})$ 参数化，该密度场表示单元中材料的存在（$\rho = 1$）或缺失（$\rho = 0$），其中 $\boldsymbol{X} \in \Omega_0$ 表示未变形参考构形 $\Omega_0$ 中任意材料点的位置。为适应基于梯度的优化算法，离散密度变量被放宽为连续值，即 $\rho \in [0,1]$，其中 $0 < \rho < 1$ 表示空相与实体相的混合。

### *2.1* 材料插值

为将密度变量（$\rho$）与待优化或受约束的结构性能指标联系起来，材料属性通过 $\rho$ 参数化。例如，对于可压缩弹性材料，杨氏模量（$E$）可按如下方式插值：$E(\rho = 0) = E_{min}$，$E(\rho = 1) = E_0$且 $E_{min} < E(0 < \rho < 1) < E_0$，其中 $E_{min}$ 是一个用于避免奇异性的小数值，而 $E_0$ 表示拓扑优化中所用实体材料的杨氏模量。本研究在拓扑优化中考虑超弹性介质，并采用所谓的惩罚简化各向同性材料（SIMP）方法 [45, 46] ，其中密度为 $\rho$ 的单元的杨氏模量 $E(\rho)$ 插值为

$$E(\rho) = [\epsilon + (1 - \epsilon)\rho^p]E \tag{3}$$

其中，$E$ 表示实体单元内材料的杨氏模量，$\epsilon = 10^{-8}$ 是下界，用于赋予空单元可忽略不计的刚度$E_{min} = \epsilon E$ ，以避免奇异性；$p \geq 1$ 是

对中间密度进行惩罚的惩罚指数。拓扑优化过程的详细说明见第6节。

## 3 考虑有限变形的有限元分析

设 $\Omega_0 \in \mathrm{R}^3$ 为可变形连续体的参考构形，其中 $\boldsymbol{X} \in \Omega_0$表示该连续体中任意材料点 $\Omega_0$的位置向量。假设存在一个光滑的一一映射 $\boldsymbol{\varphi}\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{x}$，可描述将连续体从参考构形运动到当前构形 $\Omega_t \in \mathrm{R}^3$的运动，且满足 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{X}) - \boldsymbol{X}$，其中 $\boldsymbol{u}$表示位移场。相应的局部变形梯度定义为 $\boldsymbol{F} := \nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\varphi}$，其中 $J := \det \boldsymbol{F} > 0$，$\nabla_{\boldsymbol{X}}$ 表示关于参考坐标 $\boldsymbol{X}$的梯度。准静态边值问题的强形式是求位移场 $(\boldsymbol{u})$，使得

$$\begin{cases} \nabla_{\boldsymbol{X}} . \boldsymbol{P} = \boldsymbol{0} & \text{in } \Omega_0 \\ \boldsymbol{u} = \overline{\boldsymbol{u}} & \text{on } \partial\Omega_{0u} \\ \boldsymbol{P} . \widehat{\boldsymbol{N}} = \overline{\boldsymbol{T}} & \text{on } \partial\Omega_{0\sigma} \end{cases} \tag{4}$$

其中忽略体力，边界 $\partial\Omega_0$ 分解为互不相交的集合 $\partial\Omega_{0u}$ 和$\partial\Omega_{0\sigma}$，满足 $\partial\Omega_0 = \partial\Omega_{0u} \cup \partial\Omega_{0\sigma}$ 和 $\partial\Omega_{0u} \cap \partial\Omega_{0\sigma} = \emptyset$；$\boldsymbol{P}$ 是1st Piola-Kirchhoff（PK）应力张量，并通过指定的本构模型与变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 相关联；$\boldsymbol{u}$K 和 $\boldsymbol{T}$K 分别是边界$\partial\Omega_{0u}$ 和$\partial\Omega_{0\sigma}$ 上规定的位移向量和1st PK 牵引向量，单位外法向量为 $\boldsymbol{N}$N。

相应的弱形式为：求解 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$，使得

$$\int_{\Omega_0} \delta\boldsymbol{F} : \boldsymbol{P}\, dV - \int_{\partial\Omega_{0\sigma}} \delta\boldsymbol{u} : \overline{\boldsymbol{T}}\, dS = 0 \quad \forall\, \delta\boldsymbol{u} \in \mathcal{V} \tag{5}$$

其中 $\delta\boldsymbol{F} = \nabla_{\boldsymbol{X}}\delta\boldsymbol{u}$ 以及相应的解空间和变分空间为

$\mathcal{U} = \{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) \in H^1(\Omega_0), \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{u}$K 对于 $\boldsymbol{X} \in \partial\Omega_{0u}\}\mathcal{V} = \{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}) \mid \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}) \in H^1(\Omega_0), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0}$ 对于 $\boldsymbol{X} \in \partial\Omega_{0u}\}$ 其中 $H^1(\Omega_0) =$ ‘$\boldsymbol{v}$ a $v_i \in L^2(\Omega_0), \partial v_i/\partial X_j \in L^2(\Omega_0), \quad i,j = 1,2,3$j 且$L^2($ $\Omega_0)$ 表示平方可积函数空间。 (6)

采用伽辽金法，使用相同的有限元网格，通过 $\mathcal{U}^h$ 和 $\mathcal{V}^h$ 构造空间 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{V}$ 的有限维近似。由此得到以下非线性平衡方程组

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{F}_{int}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{F}_{ext} = \boldsymbol{0}$$

其中 $\boldsymbol{F}_{int}(\boldsymbol{u}) = \mathop{\mathcal{A}}_{e=1}^{n_{ele}} \boldsymbol{F}_{int}^e$ 和 $\boldsymbol{F}_{int}^e =$ T $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P}\, dV$ ，oe 且 $\boldsymbol{F}_{ext} = \mathop{\mathcal{A}}_{e\in S_\sigma}$ T $\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{T}$K $dS$ -，oσe, (7)

全局残差 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u})$ 用于求解未知位移 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}^h$；$\boldsymbol{N}$ 为形函数矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为梯度运算矩阵。$\Omega_0^e$ 表示 $e^{\text{th}}$ 单元积分域，$n_{ele}$ 为单元总数。$\partial\Omega_{0\sigma}^e$ 表示边界 $\partial\Omega_{0\sigma}$ 的一部分，该部分由 $e^{\text{th}}$ 单元和 $\partial\Omega_{0\sigma} = \cup_{e\in S_\sigma} \partial\Omega_{0\sigma}^e$ 共享。假设外载荷 $\boldsymbol{F}_{ext}$ 与位移无关。本文研究的所有示例均采用适用于二维平面应变问题的标准双线性 Q4 单元。对于协调有限元网格，使用牛顿-拉夫森（NR）法求解式（7），并计算切线刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_T = \partial\boldsymbol{F}_{int}/\partial\boldsymbol{u}$，以实现二次收敛。对于非协调网格（虚拟域），需对 $\boldsymbol{F}_{int}$ 及其相关的 $\boldsymbol{K}_T$ 进行修改，以处理低密度单元的畸变，详见第 3.2 节。

### *3.1* 本构模型

本研究在拓扑优化中考虑超弹性介质。具体而言，采用正则化 neo-Hookean 模型，其自由能函数为

$$\psi(\boldsymbol{C}) = \frac{\kappa}{2}(J-1)^2 + \frac{\mu}{2}(\bar{I}_1 - 3) \tag{8}$$

其中 $\bar{I}_1 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{C}\mathrm{K})$，且 $\boldsymbol{C}\mathrm{K} = J^{-2/3}\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T$。 $\boldsymbol{F}$ 为右柯西-格林应变张量；$\kappa$ 和$\mu$ 分别为体积模量和剪切模量，它们与杨氏模量 $E$ 和泊松比 $\nu$ 之间的关系为$\kappa = E/\mathrm{x3}(1-2\nu)\mathrm{y}$ 和 $\mu = E/\mathrm{x2}(1+\nu)\mathrm{y}$。1st PK 应力张量为

$$\boldsymbol{P} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{F}} = \kappa(J-1)\,\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{F}} + \frac{\mu}{2}\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \boldsymbol{F}} \tag{9}$$

其中 $\dfrac{\partial J}{\partial \boldsymbol{F}} = J\boldsymbol{F}^{-T}$ 和 $\dfrac{\partial \bar{I}_1}{\partial \boldsymbol{F}} = -\dfrac{2}{3}\bar{I}_1\boldsymbol{F}^{-T} + 2J^{-2/3}\boldsymbol{F}$

以及　用于计算切线刚度矩阵的切线模量是

$$\begin{aligned}\mathbb{A} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{F}\partial \boldsymbol{F}} &= \kappa(J-1)J\frac{\partial \boldsymbol{F}^{-T}}{\partial \boldsymbol{F}} + \kappa(2J-1)J\boldsymbol{F}^{-T}\otimes\boldsymbol{F}^{-T} \\ &\quad + \frac{\mu}{2}\left(-\frac{2}{3}\bar{I}_1\frac{\partial \boldsymbol{F}^{-T}}{\partial \boldsymbol{F}} - \frac{2}{3}\boldsymbol{F}^{-T}\otimes\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \boldsymbol{F}} + 2J^{-\frac{2}{3}}\mathbb{I}_4 - \frac{4}{3}J^{-\frac{2}{3}}\boldsymbol{F}\otimes\boldsymbol{F}^{-T}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

与 $(\mathbb{I}_4)_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$ 和

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}^{-T}}{\partial \boldsymbol{F}}\right)_{ijkl} = -(\boldsymbol{F}^{-1})_{li}(\boldsymbol{F}^{-1})_{jk} \tag{11}$$

备注：基于使用单元密度变量 $\rho$ 的拓扑参数化（见第 2 节），本构模型是密度变量 $\rho$的函数。具体而言，此处的体积模量 $(\kappa)$ 和剪切模量 $(\mu)$ 是通过式 (3) 中对杨氏模量进行 $\rho$ 插值得到的 $\rho$ 的函数。

### *3.2* 采用（自适应）线性能量插值的虚拟域

在基于密度的拓扑优化中，虚拟域方法因便于对拓扑结构不断演化的结构进行有限元分析（FEA）而得到广泛应用。然而，正如文献 [6, 38], 所指出的，在有限变形下，虚拟域方法可能导致空洞（或低密度）单元发生网格畸变，进而引发数值收敛问题

在求解过程中。为解决这一问题，已有多种策略被提出，例如：在牛顿-拉夫森收敛过程中忽略与空洞单元相关的自由度 [6], ； 单元移除与重新引入策略 [47], ； 基于单元间零长度弹性连接的新型拓扑参数化方法 [48], ； 由单元畸变指标引导的设计更新 [49], ； 线性能量插值方案 [16, 38, 50], 等。本文采用作者提出的自适应线性能量插值法 [16] 。为求完整起见，本节将简要介绍这一方法。

线性能量插值的主要思想是根据密度变量 $\rho$ 对单元变形能进行线性插值，使得当 $\rho \to 0$ 时采用小变形（线性）理论，而当 $\rho \to 1$ 时采用有限变形理论。为此，将变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 插值为

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} + \eta(\rho)\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{u} \quad \text{with} \quad \eta(\rho) = \frac{\exp(\beta\rho)}{\exp(c\beta) + \exp(\beta\rho)} \tag{12}$$

其中，$c$ 和 $\beta$ 是插值参数，取值为 $\beta = 120$ 和 $c = c_0 = 0.08$。相应地，式（7）中的单元内力 $_2$ 修改为

$$\boldsymbol{F}^e_{int}(\boldsymbol{u}) = \int_{\Omega^e_0} \eta \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{P}\, dV + \int_{\Omega^e_0} (1-\eta^2)\boldsymbol{B}^T_L[\mathbb{C}\colon \boldsymbol{\varepsilon}]\, dV \tag{13}$$

其中，$\boldsymbol{B}_L$ 表示小应变度量的应变-位移矩阵，即$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{B}_L\boldsymbol{u}$，其中$\boldsymbol{\varepsilon} \coloneqq \boldsymbol{\nabla}^s_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{u}$ 和$\boldsymbol{\nabla}^s_{\boldsymbol{X}}$ 为对称梯度算子；C 为线性各向同性弹性模量，其根据式（3）中的插值杨氏模量确定，但采用更高的惩罚指数 $p_L$，即 $p_L > p$，以避免利用低密度值来发挥小变形运动学的作用。张量外的方括号表示该张量的矩阵-向量形式。

请注意，在所考虑的自适应策略中，如果有限元分析在达到预设的最小步长后仍未收敛，则会自适应地更新$c$ 值，即$c \rightarrow c + \Delta c$ ，其中$\Delta c = 0$为 0.05。随着$c$ 增大，采用的线性运动学会增多；通过这种自适应策略，当$c$ 足够大时，有限元分析最终会收敛。在当前优化步骤中的有限元分析收敛后，参数$c$ 会重置为其默认值$c_0$。需要强调的是，针对插值参数$c$ 采用这种自适应方案，对于提高线性能量插值法的稳健性至关重要，因为很难预先选定一个或一系列$c$ 值，使其适用于优化过程中所有中间拓扑结构。这种自适应方案的必要性可从第7.1节的结果中看出。

将 $\boldsymbol{F}_{int}^{e}$ 替换为式（13）后，采用带有自适应步长策略的牛顿-拉夫森方法求解全局非线性平衡方程（7）。为实现二次收敛，切线刚度矩阵计算如下:

$$\boldsymbol{K}_T = \mathop{\mathcal{A}}_{e=1}^{n_{ele}} \boldsymbol{k}_T^e \quad \text{with } \boldsymbol{k}_T^e = \int_{\Omega_0^e} \eta^2 \boldsymbol{B}^T [\mathbb{A}] \boldsymbol{B} \, dV + \int_{\Omega_0^e} (1-\eta^2) \boldsymbol{B}_L^T [\mathbb{C}] \boldsymbol{B}_L \, dV \tag{14}$$

其中，$\mathbb{A}$ 是材料子程序提供的切线模量；新胡克模型对应的表达式见式（10）。

## 4 采用虚拟域的非线性结构稳定性分析

对于保守系统，若某一平衡状态下系统的势能取得严格极小值，则该状态被称为稳定。采用协调网格进行有限元离散后，可通过检查切线刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_T$ （施加边界条件后）的正定性来评估结构稳定性。也就是说，在临界点（极限点或分岔点）处，切线刚度矩阵失去正定性，即一个或多个特征值变为零，此时结构失稳。在对应于极限点的临界点处，结构所能承受的

外载荷幅值无法再继续增大。在分岔点处，解的唯一性丧失，即除主分支外还存在其他解分支；这些分支的稳定性也可通过检查切线刚度矩阵的正定性来评估。

假设 $\boldsymbol{K}_T$ 的特征对记为 $\mathrm{x}\lambda_q, \boldsymbol{\phi}_q\mathrm{y}$，则特征值问题可表示为 $\mathrm{x}\boldsymbol{K}_T - \lambda_q \boldsymbol{I}\mathrm{y}\boldsymbol{\phi}_q = \boldsymbol{0}$，$q = 1, 2, \ldots, s$

(15)

其中，$\lambda_q$ 按递增顺序排列，即 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_s$，且 $s$ 为切线刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_T$的大小。假设施加边界条件后，刚体运动受到抑制，所得$\boldsymbol{K}_T$ 在初始未变形状态下稳定。因此，若 $\lambda_1 > 0$，则具有切线刚度 $\boldsymbol{K}_T$ 的结构在给定状态下稳定。设外载荷按其大小乘以标量 $\gamma$ 进行缩放（通常称为载荷因子），即 $\boldsymbol{F}_{ext} = \gamma \boldsymbol{P}\mathrm{N}$，其中 $\boldsymbol{P}\mathrm{N}$采用式（7）中的 $\boldsymbol{F}_{ext}$ 表达式；若结构在载荷因子 $\gamma_{cr}$处失稳，则临界点（$\gamma_{cr}$）的性质（极限点或分岔）由以下条件确定:

$$\boldsymbol{\phi}_c^T \boldsymbol{P}\mathrm{N} = \begin{cases} = 0 & \text{分岔点} \\ \neq 0 & \text{极限点} \end{cases} \tag{16}$$

其中，$\boldsymbol{\phi}_c$ 是载荷因子为 $\gamma_{cr}$ 时与零特征值（$\lambda_c = 0$）相关的特征向量。要进一步对失稳类型进行分类，还需要高阶导数 [51], ，但本研究不对此进行探讨。

由于虚拟域中存在空洞和/或低密度单元，其刚度远低于实体单元，因此在稳定性分析中，这些单元可能出现伪屈曲模态。为抑制伪屈曲模态，本文提出一种新策略，采用对角伪质量矩阵（$\boldsymbol{S}_M$），其中，与实体单元相连的自由度对应的元素取值为 $\mathbf{1}$，与空洞单元相连的自由度对应的元素取较小值。这一思路类似于

动态情形中为消除伪振动模态而采用的质量矩阵插值策略[40]。相应地，对切线刚度矩阵进行特征值分析时，

$$\left(\boldsymbol{K}_T - \lambda_q \boldsymbol{S}_M\right)\boldsymbol{\phi}_q = \boldsymbol{0}\ , \qquad q = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

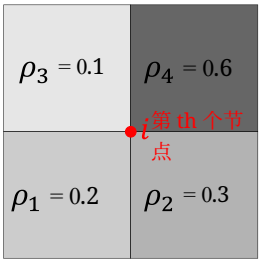
其中，对于所有单元均为实体的协调网格，式（17）在 $\boldsymbol{S}_M = \boldsymbol{I}$ 时退化为式（15），即单位矩阵。由于 $\boldsymbol{K}_T$ 和 $\boldsymbol{S}_M$ 均为对称矩阵，不失一般性，特征向量 $\boldsymbol{\phi}_q$ 按 $\boldsymbol{S}_M$正交归一化，即 $\boldsymbol{\phi}_p^T \boldsymbol{S}_M \boldsymbol{\phi}_q = \delta_{pq}$。伪质量矩阵（$\boldsymbol{S}_M$）的构造将在下一节详细介绍。

### *4.1* 伪质量矩阵构造

与特征频率优化情形中的质量矩阵插值不同，所需的伪质量矩阵为对角矩阵，并且在所有单元均为实体时应退化为单位矩阵。根据这一要求，第一步是确定每个节点属于实体/高密度区域还是空洞/低密度区域。为此，引入节点伪密度（$\varpi_i$、 $i$ = 1, …, #nodes），定义为该节点周围单元密度的最大值（图1）。为了保证可微性，采用 $p$-范数函数近似该最大值，形式如下：

$$\varpi_i = \left( \sum_{r \in \mathcal{B}_i} \rho_r^q \right)^{1/q}\ , \qquad i = 1, \ldots, \#\text{nodes} \tag{18}$$

其中，$\mathrm{B}_i$ 是与$i^{\text{th}}$ 节点相连的单元编号集合，$q$ 是此处选取为$q$ = 15的$p$-范数的幂。对于采用均匀Q4单元离散的规则二维域，$\mathrm{B}_i$ 可根据节点位置包含1个（凸角节点）、2个（边节点）、3个（凹角节点）或4个（内部节点）单元编号，参见图2。




$$\varpi_i = \max\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\} = 0.6$$

图1. 节点伪密度示意图。

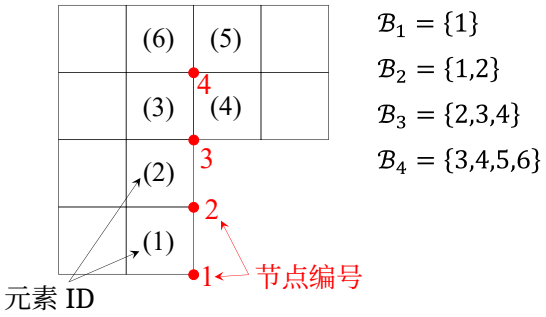



图2. 不同类型节点的单元编号集合示意图。

利用节点伪密度$\varpi_i$，节点伪质量可插值得到：

$$\tilde{m}_i = \begin{cases} \hat{\epsilon} + (1-\hat{\epsilon})\varpi_i^{p_m} & \text{if } \varpi_i \le \varpi_L \\ a_0 + a_1\varpi_i + a_2\varpi_i^2 + a_3\varpi_i^3 & \text{if } \varpi_L < \varpi_i < \varpi_H \\ 1 & \text{if } \varpi_i \ge \varpi_H \end{cases} \tag{19}$$

其中，$\hat{\epsilon}$ 是一个用于避免奇异性的小正数，$p_m$ 是惩罚指数，$\varpi_L$ 和$\varpi_H$是两个截断值，其设置使节点伪质量在$\varpi_i \le \varpi_L$时以类似于式（3）中刚度的方式通过$\varpi_i$ 进行插值，而在$\varpi_i \ge \varpi_H$时等于 1。两种插值之间的过渡由一个三次多项式完成，该多项式在两端$\varpi_i = \varpi_L$ 和$\varpi_i = \varpi_H$处的函数值及其1st 阶导数均连续。为此，通过以下线性方程确定参数$a_0$、$a_1$、$a_2$ 和$a_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & \varpi_L & \varpi_L^2 & \varpi_L^3 \\ 0 & 1 & 2\varpi_L & 3\varpi_L^2 \\ 1 & \varpi_H & \varpi_H^2 & \varpi_H^3 \\ 0 & 1 & 2\varpi_H & 3\varpi_H^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\epsilon} + (1-\hat{\epsilon})\varpi_L^{p_m} \\ p_m(1-\hat{\epsilon})\varpi_L^{p_m-1} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{20}$$

作为示例，图3展示了式（19）中函数$\tilde{m}_i$（$\varpi_i$）在截断值为$\varpi_L = 0.1$和$\varpi_H = 0.2$且$p_m$ 取不同值时的曲线。可以看出，在两个截断值处的过渡均具有连续斜率。

最后，伪质量矩阵 $\boldsymbol{S}_M$ 构造如下：

$$\boldsymbol{S}_M = \begin{bmatrix} \widetilde{m}_1 \boldsymbol{I}_{d\times d} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \ddots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \widetilde{m}_{\#\text{nodes}} \boldsymbol{I}_{d\times d} \end{bmatrix} \tag{21}$$

其中，$\boldsymbol{I}_{d\times d}$ 表示一个$d$ 尺寸的单位矩阵（$d=2$ 对应二维情况，$d=3$ 对应三维情况）。需要注意的是，应以相同的方式对$\boldsymbol{S}_M$ 施加边界条件，就像此前在式（17）中进行特征值分析时对$\boldsymbol{K}_T$ 所做的那样。还需指出，本节所述节点伪质量的构造对均匀和非均匀有限元网格均适用。下一节将通过一个示例展示采用虚拟域和所提出的伪质量矩阵进行稳定性分析的有效性。

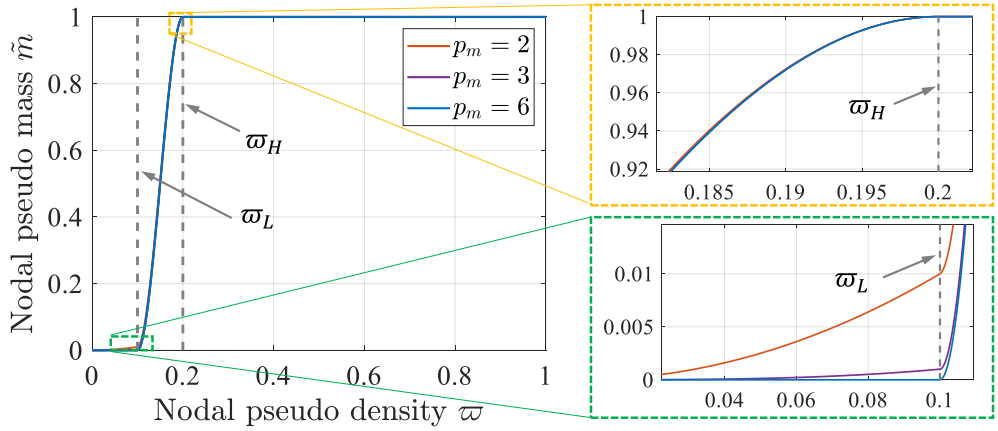
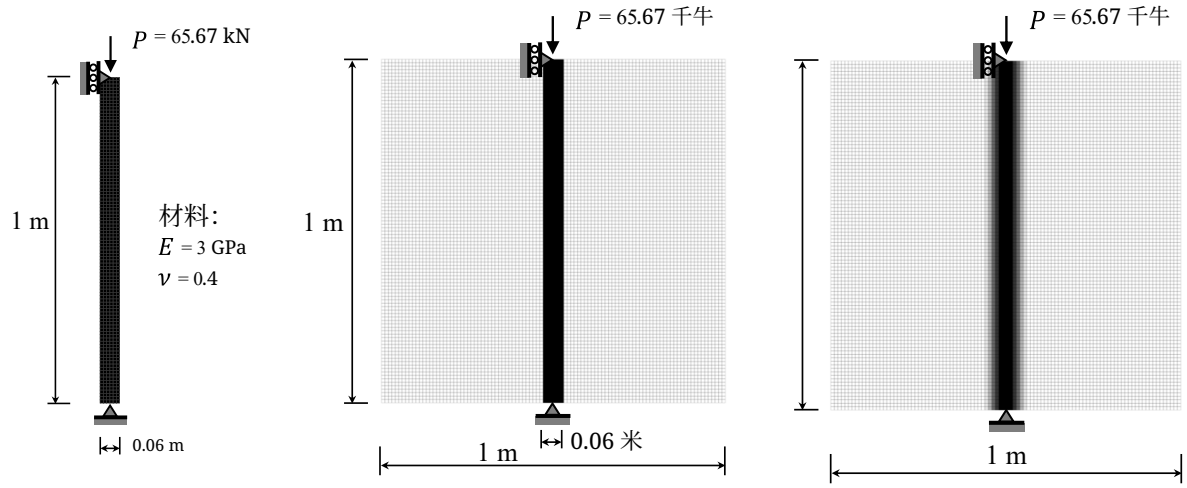



图3. 节点伪质量 $\widetilde{m}$ 随节点伪密度 $\varpi$ 的变化函数，截断值为 $\varpi_L = 0.1$ 和 $\varpi_H = 0.2$，幂指数值不同 $p_m$。

*4.2* 示例

在拓扑设计问题中，应舍弃低密度区域中的屈曲模态，只考虑实体部分或高密度值区域中的屈曲模态。为说明伪模态问题，本文研究了图4a所示承受压缩载荷的柱。图4中的所有有限元网格均采用尺寸为10mm×10mm的有限元进行离散化。在图4b中，通过添加刚度可忽略不计的空洞单元，将该柱置于虚拟域中。此外，图4c中通过将该柱的拓扑模糊化

具体做法是设置四列实体单元、两列密度分别为$\rho = 0.8$、 $\rho = 0.6$、 $\rho$ =0.3和$\rho = 0.1$的单元，其余单元的密度设为$\rho = 0.001$。对于这些中间密度，采用方程(3)中的材料插值方案，其中$\epsilon = 10^{-8}$、 $p = 3$ 和$p_L$= 6。构造伪质量矩阵所用的参数取值为：$q = 15$、$\hat{\epsilon} = 10^{-9}$、$p_m = 6$、 $\varpi_L = 0.1$和$\varpi_H = 0.2$，见方程(18)-(21)。




(a) 协调有限元 mesh　　(b) 虚拟域方法 采用实体/空洞单元　　(c) 模糊拓扑，采用中间密度单元

图4. 采用协调有限元网格和虚拟域有限元网格，并含有中间密度单元的受压铰支柱的非线性稳定性分析。

在最终加载步，使用式（15）对图4 (a)-(c) 进行稳定性分析，并使用式（17）对图4 (b)-(c) 进行分析。表*1*列出了图4中三种情况的前六个特征值对比，而相应的特征模态则绘于图5、图6和图7。对比图5和图6a可见，空单元会产生伪模态；而对比图5和图7a则表明，所提出的伪质量思想能有效抑制伪模态。此外，采用伪质量矩阵计算得到的特征值与协调网格得到的特征值几乎相同，见表1。由于对中间密度施加了较大的惩罚（$p = 3$），

模糊拓扑得到的特征值始终较小。然而，如图7b所示，同时存在空单元和低密度单元时，均不会出现伪模态。

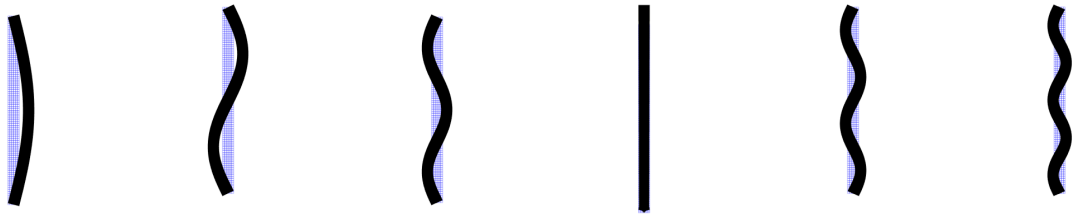
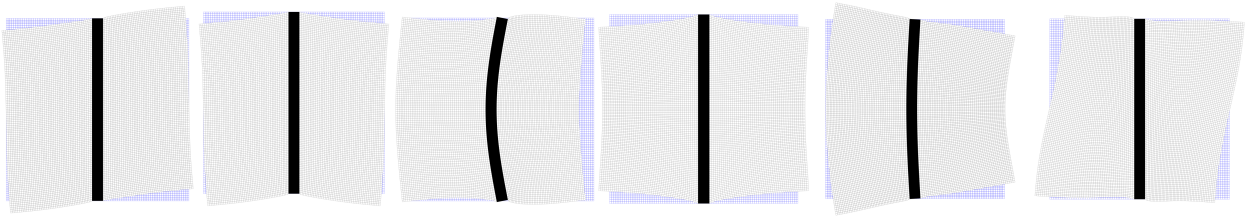
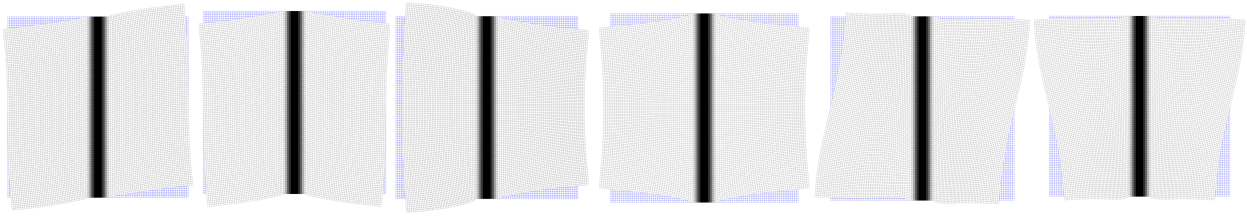


图5. 图4a中协调网格的特征模态：从左到右依次为$\boldsymbol{\phi}_1$,...,$\boldsymbol{\phi}_6$。

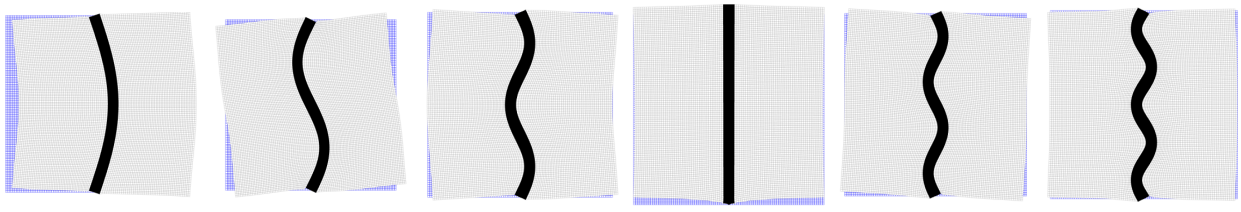


(a) 采用实体/空洞单元的虚拟域方法

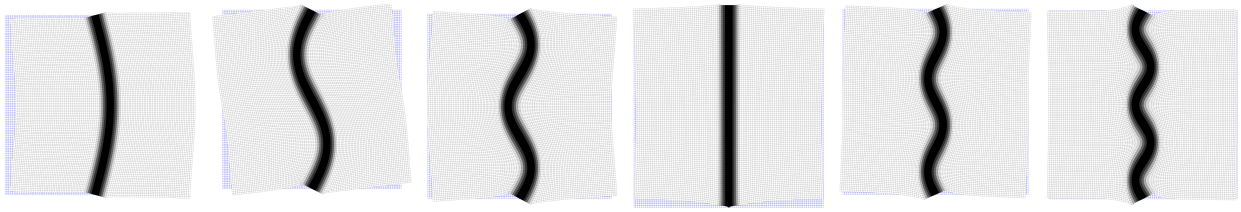


(b) 含中间密度单元的模糊拓扑

图6. 图4（b）和（c）中非协调网格的特征模态，不含伪质量矩阵：从左到右依次为$\boldsymbol{\phi}_1$,..., $\boldsymbol{\phi}_6$。



(a) 采用实体/空洞单元的虚拟域方法



（b）含中间密度单元的模糊拓扑

图7. 图4（b）和（c）中非协调网格的特征模态，采用伪质量矩阵：从左到右分别为 $\boldsymbol{\phi}_1$,..., $\boldsymbol{\phi}_6$。

表1. 使用式（15）或（17）对协调网格或虚拟域有限元网格进行非线性稳定性分析所得特征值的比较

| | 使用式（*15*）进行稳定性分析 | | | 使用式（*17*）进行稳定性分析 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 协调 FE mesh in 图4a | 虚拟域与 实体-空隙 图 4b | 实体-中间态-空隙拓扑在 图4c | 虚拟域，具有 实体-空隙图 4b | 实体-中间态-空隙拓扑在 图4c |
| $\lambda_1$ | $2.8326\times10^{-8}$ | $8.9900\times10^{-10}$ | $1.0418\times10^{-9}$ | $3.4671\times10^{-8}$ | $8.6913\times10^{-6}$ |
| $\lambda_2$ | 0.01052993 | $8.9900\times10^{-10}$ | $1.0418\times10^{-9}$ | 0.01052995 | 0.00677015 |
| $\lambda_3$ | 0.05912481 | $2.0254\times10^{-9}$ | $3.3478\times10^{-9}$ | 0.05912486 | 0.03760269 |
| $\lambda_4$ | 0.06507443 | $3.1175\times10^{-9}$ | $3.3482\times10^{-9}$ | 0.06507443 | 0.03838094 |
| $\lambda_5$ | 0.18120229 | $3.4448\times10^{-9}$ | $4.7736\times10^{-9}$ | 0.18120235 | 0.11421241 |
| $\lambda_6$ | 0.41148828 | $4.2193\times10^{-9}$ | $4.7737\times10^{-9}$ | 0.41148836 | 0.25709518 |

## 5 单重/多重特征值的灵敏度分析

本节讨论特征值相对于设计变化的导数计算，因为这是拓扑优化中基于梯度的优化算法的重要组成部分。当特征值为单特征值时，特征值是可微的，此情况下的具体计算方法见第 5.1 节。当特征值为重特征值（重复特征值）时，特征值不可微，且仅存在方向导数。在这种情况下，可以采用 Seyranian 等人提出的摄动方法 [21] 计算重特征值的方向导数。

### *5.1* 单特征值的灵敏度分析

线弹性结构的单特征值关于密度变量 $\rho$ 的灵敏度，已在各种设计优化问题的文献中得到充分论述，例如参考文献 [21, 29]。对于

几何非线性结构，单特征值导数的计算在计算上更加复杂，因为切线刚度矩阵 $\boldsymbol{K}_T$ 不仅通过材料插值显式依赖于密度变量 $\rho$，还通过对位移 $\boldsymbol{u}$的依赖而隐式依赖于它。Dalklint 等人 [41] 通过伴随公式将其推广至几何非线性结构；当设计变量的数量超过目标函数和约束函数 [52]的数量时，这种方法在计算上更为高效。本文也采用伴随方法，推导过程如下。

假设已通过求解式（7）$_1$（其中 $\boldsymbol{F}_{int}$ 由式（13）给出）完成非线性结构分析，随后根据式（17）进行特征值分析，目标是计算简单特征值 $\lambda_q$ 的导数，即 $d\lambda_q/d\boldsymbol{\rho}$。为此，考虑对伴随方程进行全微分

$$\boldsymbol{\phi}_q^T\left(\boldsymbol{K}_T - \lambda_q \boldsymbol{S}_M\right)\boldsymbol{\phi}_q + \boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{R} = 0 \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{\eta}$ 是伴随向量，$\boldsymbol{\phi}_q^T\mathrm{x}\boldsymbol{K}_T - \lambda_q\boldsymbol{S}_M\mathrm{y}\boldsymbol{\phi}_q = 0$ 和 $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{0}$ 由方程（17）和（7）$_1$ 隐含给出，无论密度变量 $\boldsymbol{\rho}$如何变化，这些关系均成立。关于 $\boldsymbol{\rho} \equiv [\rho_1 \ldots \rho_{nele}]$ 的全微分为

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_q}{d\boldsymbol{\rho}} = &\left.\frac{\partial\left(\boldsymbol{\phi}_q^T\boldsymbol{K}_T\boldsymbol{\phi}_q\right)}{\partial\boldsymbol{\rho}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_q \text{ fixed}} - \lambda_q\left.\frac{\partial\left(\boldsymbol{\phi}_q^T\boldsymbol{S}_M\boldsymbol{\phi}_q\right)}{\partial\boldsymbol{\rho}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_q \text{ fixed}} + \boldsymbol{\eta}^T\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\boldsymbol{\rho}} \\ &+ \left[\left.\frac{\partial\left(\boldsymbol{\phi}_q^T\boldsymbol{K}_T\boldsymbol{\phi}_q\right)}{\partial\boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_q \text{ fixed}} + \boldsymbol{\eta}^T\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\boldsymbol{u}}\right]\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial\boldsymbol{\rho}}\end{aligned} \tag{23}$$

其中，利用由 $\boldsymbol{S}_M$ 正交归一化所蕴含的条件 $\boldsymbol{\phi}_q\boldsymbol{S}_M\boldsymbol{\phi}_q = 1$ 和式（17）进行简化。最后，灵敏度 $d\lambda_q/d\boldsymbol{\rho}$ 为

$$\frac{d\lambda_q}{d\boldsymbol{\rho}} = \left.\frac{\partial\left(\boldsymbol{\phi}_q^T \boldsymbol{K}_T \boldsymbol{\phi}_q\right)}{\partial \boldsymbol{\rho}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_q \text{ fixed}} - \lambda_q \left.\frac{\partial\left(\boldsymbol{\phi}_q^T \boldsymbol{S}_M \boldsymbol{\phi}_q\right)}{\partial \boldsymbol{\rho}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_q \text{ fixed}} + \boldsymbol{\eta}^T \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{\rho}}$$

$$\text{with } \boldsymbol{\eta}^T = -\left.\frac{\partial\left(\boldsymbol{\phi}_q^T \boldsymbol{K}_T \boldsymbol{\phi}_q\right)}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_q \text{ fixed}} \left[\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{u}}\right]^{-1} \tag{24}$$

其中，需要用到以下导数

$$\left.\frac{\partial\left(\boldsymbol{\phi}_q^T \boldsymbol{K}_T \boldsymbol{\phi}_q\right)}{\partial \boldsymbol{\rho}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_q \text{ fixed}}, \quad \left.\frac{\partial\left(\boldsymbol{\phi}_q^T \boldsymbol{K}_T \boldsymbol{\phi}_q\right)}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_q \text{ fixed}}, \quad \left.\frac{\partial\left(\boldsymbol{\phi}_q^T \boldsymbol{S}_M \boldsymbol{\phi}_q\right)}{\partial \boldsymbol{\rho}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_q \text{ fixed}}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{\rho}}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{u}} \tag{25}$$

这些内容见附录 A。

*5.2* 多重特征值灵敏度分析

当特征值重复时，例如 $N$ 重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_N$，相应的特征向量并非唯一确定，且重特征值不可微。不过，可以求得重特征值的 方向导数，并将其与拓扑优化中设计变化方向的约束结合使用，参见第6节。为此，考虑一个值为 $\lambda\dagger$ 的 $N$ 重特征值，即

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_N = \tilde{\lambda} \tag{26}$$

以及一组经 $\boldsymbol{S}_M$ 正交归一化的特征向量 $\boldsymbol{\phi}_r, r = 1, \ldots, N$。在这种情况下，这些特征向量并不唯一，对这些向量进行任意正交变换，所得结果也仍是 $\boldsymbol{S}_M$ 正交归一化的特征向量。对于给定的设计扰动 $\boldsymbol{\rho} \to \boldsymbol{\rho} + \Delta\boldsymbol{\rho}$，存在特征向量 $\boldsymbol{\phi}_{\cdot r}$ ($r$ =1, … , $N$)，它们相对于设计变化是连续的。然而，确定这些连续特征向量并非易事，可能需要用到高阶导数，更多详情请参见 Friswell [23]。遵循 Seyranian 等人 [21] 的研究（另见参考文献 [53]，第 5-13 章），本文重点关注方向导数，即考虑密度 $\boldsymbol{\rho}$ 沿方向 $\Delta\boldsymbol{\rho}$ 的扰动，也就是 $\boldsymbol{\rho} \to \boldsymbol{\rho} + \varepsilon\Delta\boldsymbol{\rho}$，其中 $\varepsilon$ 是扰动参数。令 $\boldsymbol{\phi}_{\cdot r}$ 为

相对于该扰动连续的基，则存在一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ ， 使得 $\boldsymbol{\phi}_{\cdot r}$ 可表示为

$$\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r = \sum_{k=1}^{N} Q_{rk}\boldsymbol{\phi}_k \quad , \quad r = 1, \dots, N \tag{27}$$

其中，$Q_{rk}$ 是正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的未知系数。所得重特征值 $\lambda_r$ 和特征向量 $\boldsymbol{\phi}_{\cdot r}$ 的摄动展开为

$$\begin{aligned} &\lambda_r(\boldsymbol{\rho} + \varepsilon\Delta\boldsymbol{\rho}) = \tilde{\lambda} + \varepsilon\Delta\lambda_r + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \qquad r = 1, \dots, N \\ &\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r(\boldsymbol{\rho} + \varepsilon\Delta\boldsymbol{\rho}) = \widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r + \varepsilon\Delta\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad r = 1, \dots, N \end{aligned} \tag{28}$$

其中，$\lambda\dagger\ = \lambda\dagger(\boldsymbol{\rho})$，$\boldsymbol{\phi}_{\cdot r} = \boldsymbol{\phi}_{\cdot r}(\boldsymbol{\rho})$，以及 $\Delta\lambda_r$ 和 $\Delta\boldsymbol{\phi}_{\cdot r}$ 是一阶修正。

考虑到一阶扰动 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ 项，特征方程 (17) 变为

$$\left(\boldsymbol{K}_T + \varepsilon\frac{d\boldsymbol{K}_T}{d\boldsymbol{\rho}}\Delta\boldsymbol{\rho}\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r + \varepsilon\Delta\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right) = \left(\tilde{\lambda} + \varepsilon\Delta\lambda_r\right)\left(\boldsymbol{S}_M + \varepsilon\frac{d\boldsymbol{S}_M}{d\boldsymbol{\rho}}\Delta\boldsymbol{\rho}\right)\left(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r + \varepsilon\Delta\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r\right) \tag{29}$$

将其展开并略去高阶 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ 项后，得到

$$\left(\boldsymbol{K}_T - \tilde{\lambda}\boldsymbol{S}_M\right)\Delta\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r + \left(\frac{d\boldsymbol{K}_T}{d\boldsymbol{\rho}}\Delta\boldsymbol{\rho} - \Delta\lambda_r\boldsymbol{S}_M - \tilde{\lambda}\frac{d\boldsymbol{S}_M}{d\boldsymbol{\rho}}\Delta\boldsymbol{\rho}\right)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r = \boldsymbol{0} \tag{30}$$

接下来，将方程 (30) 左乘 $\boldsymbol{\phi}_s^T$ $(s = 1, \dots, N)$，得到

$$\boldsymbol{\phi}_s^T\left(\frac{d\boldsymbol{K}_T}{d\boldsymbol{\rho}}\Delta\boldsymbol{\rho} - \Delta\lambda_r\boldsymbol{S}_M - \tilde{\lambda}\frac{d\boldsymbol{S}_M}{d\boldsymbol{\rho}}\Delta\boldsymbol{\rho}\right)\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_r = \boldsymbol{0}\,, \qquad s = 1, \dots, N \tag{31}$$

通过在式（*27*）中使用 $\boldsymbol{\phi}_k$ 展开 $\boldsymbol{\phi}_{\cdot r}$，可以进一步改写为

$$\sum_{k=1}^{N} Q_{rk}\left[\boldsymbol{\phi}_s^T\left(\frac{d\boldsymbol{K}_T}{d\boldsymbol{\rho}}\Delta\boldsymbol{\rho} - \tilde{\lambda}\frac{d\boldsymbol{S}_M}{d\boldsymbol{\rho}}\Delta\boldsymbol{\rho}\right)\boldsymbol{\phi}_k - \Delta\lambda_r\delta_{sk}\right] = 0, \quad s = 1, \dots, N \tag{32}$$

式（*32*）可视为一个包含 $N$ 线性方程 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的系统，其中 $\boldsymbol{A}\in \mathrm{R}^{N\times N}$, $\boldsymbol{x}\in \mathrm{R}^{N\times 1}$, $A_{sk}=\boldsymbol{\phi}_s^T$ ‰$^{d\boldsymbol{K}_T}{}_{d\boldsymbol{\rho}}\ \Delta\boldsymbol{\rho}-\lambda_{\dagger\ d\boldsymbol{S}_M\ d\boldsymbol{\rho}}\ \Delta\boldsymbol{\rho}\big)\boldsymbol{\phi}_k-\Delta\lambda_r\delta_{sk}$，以及 $x_k=Q_{rk}$。因此，要使 $\boldsymbol{x}$ 有非平凡解，必须满足

$$\det\left[\boldsymbol{\phi}_s^T\left(\frac{d\boldsymbol{K}_T}{d\boldsymbol{\rho}}\Delta\boldsymbol{\rho}-\tilde{\lambda}\frac{d\boldsymbol{S}_M}{d\boldsymbol{\rho}}\Delta\boldsymbol{\rho}\right)\boldsymbol{\phi}_k-\Delta\lambda_r\delta_{sk}\right]=0\,,\quad s,k=1,\dots,N \tag{33}$$

引入一系列向量 $\boldsymbol{z}_{sk}\in \mathrm{R}^{n_{ele}\times 1}$ $(s,k=1,\dots,N)$，其中

$$\boldsymbol{z}_{sk}=\left[\boldsymbol{\phi}_s^T\left(\frac{d\boldsymbol{K}_T}{d\rho_1}-\tilde{\lambda}\frac{d\boldsymbol{S}_M}{d\rho_1}\right)\boldsymbol{\phi}_k\quad\dots\quad\boldsymbol{\phi}_s^T\left(\frac{d\boldsymbol{K}_T}{d\rho_{n_{ele}}}-\tilde{\lambda}\frac{d\boldsymbol{S}_M}{d\rho_{n_{ele}}}\right)\boldsymbol{\phi}_k\right]_{n_{ele}\times 1} \tag{34}$$

方程 (33) 可改写为

$$\det[\boldsymbol{T}-\Delta\lambda_r\boldsymbol{I}_N]=0\,,\quad s,k=1,\dots,N \tag{35}$$

其中，矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的分量为 $T_{sk}=\boldsymbol{z}_{sk}^T\Delta\boldsymbol{\rho}$, $T_{sk}=T_{ks}$，而 $\boldsymbol{I}_N$ 是一个 $N\times N$ 单位矩阵。因此，方程 (35) 中的一阶修正 $\Delta\lambda_r$ 可通过对矩阵 $\boldsymbol{T}$进行特征值分析得到。此外，若对于 $r\neq s$有 $\Delta\lambda_r\neq\Delta\lambda_s$，则可由方程 (*32*) 和 (*27*) 唯一确定随设计变化连续的特征向量；否则需要高阶修正 [23]。尽管如此，在这种情况下，一阶修正 $\Delta\lambda_r$ 仍然有效。

如果选择扰动向量 $\Delta\boldsymbol{\rho}$，使得 $\boldsymbol{T}$ 中的所有非对角项均为零，即对于 $r\neq s$ 有 $T_{sk}=\boldsymbol{z}_{sk}^T\Delta\boldsymbol{\rho}=0$，则还可以进一步简化。在这种情况下，考虑由下式定义的方向导数算子 $D_{\Delta\boldsymbol{\rho}}[*]$

$$D_{\Delta\boldsymbol{\rho}}[f]\coloneqq\lim_{h\to 0^+}\frac{f(\boldsymbol{\rho}+h\Delta\boldsymbol{\rho})-f(\boldsymbol{\rho})}{h} \tag{36}$$

其中，$f(*)$ 是 $\boldsymbol{\rho}$ 的函数，沿方向 $\Delta\boldsymbol{\rho}$ 连续，且在式（36）中取有限值。于是，$D_{\Delta\boldsymbol{\rho}}[\lambda_r]=\Delta\lambda_r=\boldsymbol{z}_{rr}^T\Delta\boldsymbol{\rho}$（$r=1,\ \dots,\ N$）是方向 $\Delta\boldsymbol{\rho}$的线性函数。

因此，对于方向 $\Delta\boldsymbol{\rho}$的这一特殊选择， 可以计算重特征值的方向导数，并进一步将其用于基于梯度的优化算法。由于对 $\boldsymbol{K}_T$ 进行全微分得到 $d\boldsymbol{K}_T/d\boldsymbol{\rho} = \partial\boldsymbol{K}_T/\partial\boldsymbol{\rho} + (\partial\boldsymbol{K}_T/\partial\boldsymbol{u})(\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{\rho})$，且可通过对式（7）1 进行全微分来计算隐式导数 $\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{\rho}$ ，即 $\partial\boldsymbol{u}/\partial\boldsymbol{\rho} = -[\partial\boldsymbol{R}/\partial\boldsymbol{u}]^{-1}(\partial\boldsymbol{R}/\partial\boldsymbol{\rho})$，因此可以更高效地计算式（34）中 $\boldsymbol{z}_{sk}$ 的分量:

$$[\boldsymbol{z}_{sk}]_r = \left.\frac{\partial(\boldsymbol{\phi}_s^T\boldsymbol{K}_T\boldsymbol{\phi}_k)}{\partial\rho_r}\right|_{\boldsymbol{\phi}_s,\boldsymbol{\phi}_k \text{ fixed}} - \tilde{\lambda}\left.\frac{\partial(\boldsymbol{\phi}_s^T\boldsymbol{S}_M\boldsymbol{\phi}_k)}{\partial\rho_r}\right|_{\boldsymbol{\phi}_s,\boldsymbol{\phi}_k \text{ fixed}} + \hat{\boldsymbol{\eta}}_{sk}^T\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\rho_r}\,,\quad r = 1,\dots,n_{ele} \tag{37}$$

with

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_{sk}^T = -\left.\frac{\partial(\boldsymbol{\phi}_s^T\boldsymbol{K}_T\boldsymbol{\phi}_k)}{\partial\boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_s,\boldsymbol{\phi}_k \text{ fixed}}\left[\frac{\partial\boldsymbol{R}}{\partial\boldsymbol{u}}\right]^{-1} \tag{38}$$

因此，尚待计算的项为

$$\left.\frac{\partial(\boldsymbol{\phi}_s^T\boldsymbol{K}_T\boldsymbol{\phi}_k)}{\partial\boldsymbol{\rho}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_s,\boldsymbol{\phi}_k \text{ fixed}},\quad \left.\frac{\partial(\boldsymbol{\phi}_s^T\boldsymbol{K}_T\boldsymbol{\phi}_k)}{\partial\boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_s,\boldsymbol{\phi}_k \text{ fixed}},\quad \left.\frac{\partial(\boldsymbol{\phi}_s^T\boldsymbol{S}_M\boldsymbol{\phi}_k)}{\partial\boldsymbol{\rho}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_s,\boldsymbol{\phi}_k \text{ fixed}} \tag{39}$$

$s,k = 1,\dots,N$

其定义见附录 A。

## 6 拓扑优化

目标是在给定载荷下，针对给定的材料用量和指定的稳定性目标，设计末端柔度最小的结构。稳定性目标通过对最终变形阶段切线刚度矩阵的前（最小的）$m$ 个 特征值施加约束来指定。需要注意的是，$m$ 应足够大，以纳入所有相关的屈曲模态，从而处理模态切换。如果在所有优化迭代中，前$m$ 个特征值始终为单特征值，则可采用基于梯度的优化过程进行优化，因为可以计算设计灵敏度（第5.1节）。然而，如果某些

特征值是重特征值，那么只能获得方向导数（第5.2节），因此需要采用能够利用这些方向导数的适当优化公式。

### *6.1* 优化公式

受 [40], 启发，我们提出了一种新的优化过程，用于处理优化过程中出现的重特征值。当所有特征值均为单特征值时，直接优化设计变量；当出现重特征值时，则通过子优化问题增量优化设计变量。下面介绍这两种优化公式。

情况 $(a)$：单特征值

对于仅涉及 $\boldsymbol{K}_T$ 的单特征值的优化迭代，即 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m < \lambda_{m+1}$，优化问题可表述为

$$
\begin{aligned}
&\min_{\boldsymbol{x}} \quad f_0(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}_{ext}^T \boldsymbol{u} \\
&\text{s.t.} \quad f_1(\boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{x})/V_f - 1 \le 0 \\
&\qquad f_{q+1}(\boldsymbol{x}) = 1 - \lambda_q/\hat{\lambda} \le 0\,, \quad q = 1, \ldots m \\
&\qquad \mathbf{0} \le \boldsymbol{x} \le \mathbf{1}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

情形（$b$）：重特征值

对于涉及 $\boldsymbol{K}_T$ 的多个特征值的优化迭代（即，对于某个 $k$，有 $\lambda_{k-1} = \lambda_k$），假设处于第 $n^{\text{th}}$ 次迭代，则可针对设计增量构建一个子优化问题。令 $\boldsymbol{x}_n$ 为第 $n^{\text{th}}$ 次迭代时的设计变量，目标是优化增量设计更新 $\Delta\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{x}_{n+1} = \boldsymbol{x}_n + \Delta\boldsymbol{x}$。为此，使用第 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_n$ 次迭代时柔顺度、体积和稳定性约束的线性近似来构建子优化问题，并将特征值

约束施加于前$m$ 个不同特征值簇，例如，$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{N_1} <$簇-1

$\underbrace{\lambda_{N_1\mathrm{Y\#}} = \cdots = \lambda_{N_1\mathrm{YR}_2}}_{\text{簇-2}} < \cdots < \underbrace{\lambda_{N_1\mathrm{Y}\cdots\mathrm{YR}m-1\mathrm{Y\#}} = \cdots = \lambda_{N_1\mathrm{Y}\cdots\mathrm{YR}m}}_{\text{簇-}m}$ 与 $m^- \coloneqq N_1 + \cdots + N_m$。该

子优化问题表述为

$$\min_{\Delta \boldsymbol{x}} \ \check{f}_0(\Delta \boldsymbol{x}) = \left.\frac{df_0}{d\boldsymbol{x}}\right|_{x_n} \Delta \boldsymbol{x}$$

使得 $\check{f}_1(\Delta \boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{x}_n + \Delta \boldsymbol{x})/V_f - 1 \le 0$

$$\begin{aligned} &\check{f}_{q+1}(\Delta \boldsymbol{x}) = 1 - \left(\lambda_q + \Delta\lambda_q\right)/\hat{\lambda} \le 0, \qquad q = 1, \ldots \bar{m} \\ &\check{f}_q(\Delta \boldsymbol{x}) = g_{sk}(\Delta \boldsymbol{x}) = 0, \qquad j = (\bar{m}+2), \ldots, (\bar{m}+1+c_{nt}) \\ &\text{（其中 } g_{sk}(\Delta \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{z}_{sk}^T \Delta \boldsymbol{\rho}, \ s > k, \text{ 适用于重特征值）} \\ &\max\{-\boldsymbol{x}_n, -\theta \boldsymbol{1}\} \le \Delta \boldsymbol{x} \le \min\{(\boldsymbol{1} - \boldsymbol{x}_n), \theta \boldsymbol{1}\} \end{aligned} \tag{41}$$

在上述公式中，为解决网格依赖性和棋盘格问题，采用密度滤波器 [54], a density filter [7, 55]，将设计变量 $\boldsymbol{x}$ 映射为密度变量 $\boldsymbol{\rho}$，其表达式为

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{W}\boldsymbol{x} \quad \text{with} \quad W_{pq} = \frac{w_{pq} v_q}{\sum_{q=1}^{n_{ele}} w_{pq} v_q} \quad \text{and} \quad w_{pq} = \max\left(r_{min} - \left\|\boldsymbol{X}_p - \boldsymbol{X}_q\right\|, 0\right) \tag{42}$$

其中，$r_{min}$ 为滤波半径，$v_q$ 为$q^{\text{th}}$ 单元的体积，$\boldsymbol{X}_p$ 为$p^{\text{th}}$ 单元形心的坐标。该滤波器也应用于子优化问题（即上文的情况 (b)）中的密度增量，即 $\Delta\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{W}\Delta\boldsymbol{x}$。

在式（40）和式（41）中，$\hat{\lambda} > 0$ 是用户定义的$\boldsymbol{K}_T$ 特征值阈值，用于约束结构稳定性；$V_f$ 表示允许材料体积分数，而设计的材料体积$V$（$\boldsymbol{x}$）计算如下:

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{V_s} \boldsymbol{\rho}^T \tilde{\boldsymbol{v}} \tag{43}$$

其中，$\tilde{\boldsymbol{v}}$ 是单元体积向量，$V_s$ 是设计域$\Omega_0$的总体积。

在式 (41) 中，采用约束 $g_{sk}(\Delta\boldsymbol{x}) = 0$，以使矩阵 $[T_{sk}]$ 中的非对角项消失，其中 $T_{sk} = \boldsymbol{z}_{sk}^T \Delta\boldsymbol{\rho}$、$(s, k = 1, \dots, N)$ 对于某些 $N$重特征值而言成立，从而重特征值的增量为 $\Delta\lambda_r = \boldsymbol{z}_{rr}^T \Delta\boldsymbol{\rho}$ $(r = 1, \dots, N)$，这意味着 $\Delta\lambda_r$ 与 $\Delta\boldsymbol{\rho}$ 线性相关。假设前 $m$ 个特征值簇中有 $k$ 个重特征值，其重数分别为 $N_1$、…、$N_k$，那么这组约束的数量 $c_{nt}$可计算为 $c_{nt} = \sum_{=} N_r(N_r - 1)/2$；@ # 这是因为 $\boldsymbol{z}_{sk} = \boldsymbol{z}_{ks}$。例如，考虑前六个特征值簇 $(m = 6)$，并假设 $\lambda_1$ <⎵簇-1$\lambda_2 = \lambda_3 < \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 <$ $\lambda_7$ $< \lambda_8 = \lambda_9 <$ $\lambda_{10}$ $(N_1 = 2、$ $N_2 = 3$ 和 $N_3 = 2)$，$c_{nt} = 1 + 3 +$⎵⎵ ⎵⎵⎵ ⎵ ⎵⎵ ⎵簇-2 簇-3 簇-4 簇-5 簇-6l = 5，且式 $(41)_4$ 必须分别针对 $N_1$重特征值 $\lambda_2 = \lambda_3$、$N_2$重特征值 $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$ 和 $N_3$重特征值 $\lambda_8 = \lambda_9$单独考虑。

最后，在方程（40）和（41）的盒约束中，$\mathbf{1}$ 是全1向量，而*min*和*max*算子以逐元素方式应用。由于方程（41）中设计增量$\Delta\boldsymbol{x}$ 的子优化问题公式采用了上一个收敛设计$\boldsymbol{x}_n$处的线性化近似，因此总体设计变化应限制在$\boldsymbol{x}_n$附近的小范围内。因此，引入移动限值参数$\theta$ 来控制设计增量$\Delta\boldsymbol{x}$的步长。本研究中采用的移动限值为$\theta \leq 0.1$。图8展示了总体拓扑优化过程的流程图。下一小节将详细介绍优化算法及相关参数设置。

备注:

1. 方程 $(7)_1$ 和 (17) 中规定位移 $\boldsymbol{u}$ 和特征对 $(\lambda_r, \boldsymbol{\phi}_r)$ 对设计变量 $\boldsymbol{x}$ 的依赖关系的等式（平衡和特征值）约束，并非由优化算法强制满足，而是分别通过有限元分析和特征值分析来满足。2. 由于特征值重数发生变化，方程 (41) 中的约束数量可能会在优化迭代过程中发生变化。不过，这不会造成任何困难，因为方程 (41) 中 $\Delta\boldsymbol{x}$ 的解是一个独立的优化问题。

3. 在设计阶段，稳定性约束仅在最终载荷步施加，并假定系统在低于此载荷时保持稳定。本研究所考虑的所有数值算例确实都满足这一点。

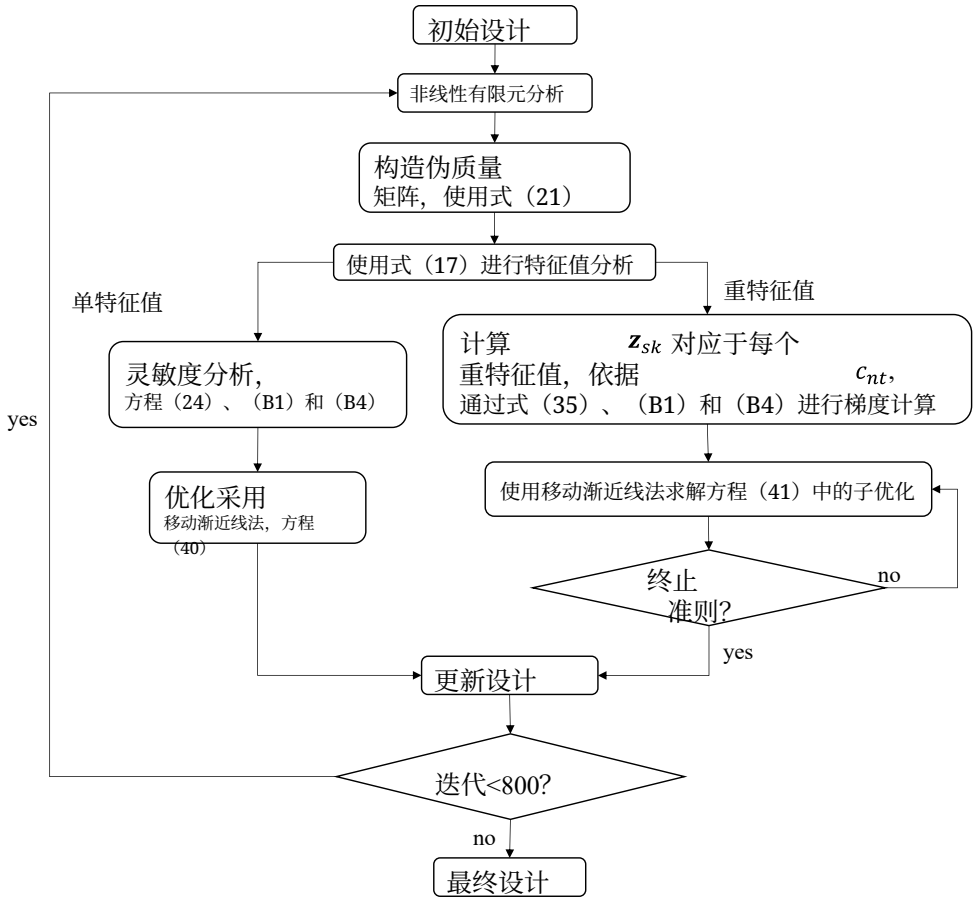


图8. 具有非线性屈曲约束的有限应变拓扑优化流程图。

### *6.2* 优化算法

移动渐近线法（MMA）[56] 用于式（40）中的优化问题和式（41）中的子优化问题，除非另有说明，否则均采用默认参数值。图8所示的优化过程包含两个主要循环，分别用于求解式（40）和式（41），称为外循环和内循环。只有当所纳入的特征值簇中存在重特征值时，才会出现内循环。内循环是指在外循环的单次迭代中，求解一个完整的子优化问题（式（41）），以更新设计变量。

#### *6.2.1* 外循环

在优化的外循环中，存在一些优化参数，即MMA算法中的移动上、下渐近线，这些参数由MMA优化器迭代更新。如果某些优化迭代中存在重特征值，则必须使用式（41）为这些迭代构建子优化问题并逐一求解。在这种情况下，内循环子优化完成后，外循环MMA算法中的上、下渐近线将重新初始化为其初始值。外循环的终止条件取决于迭代总次数，本研究将其设为800。

#### *6.2.2* 内循环

如果某个中间设计所考虑的特征值簇中包含重特征值，则会启动式（41）中的子优化问题，并再次使用 MMA优化器求解。子优化迭代终止准则基于以下条件：(a) 两个连续（线性）目标函数值之差相对于初始值的变化，即{v1}/{v2}；

或 (b) 两个连续设计变量之差的 2-范数，即$\left\|\Delta \boldsymbol{x}^{(I+1)}-\Delta \boldsymbol{x}^{I}\right\|_{2} \leq 10^{-4}$；或 (c) 内循环迭代次数总和，即 $I>100$，其中 $I$表示子优化迭代次数。

## 7 数值算例

在进行拓扑优化之前，先验证灵敏度分析的正确性。根据第 5 节、附录 A 和 B 中给出的推导，附录C给出了采用中心差分法验证灵敏度分析的过程。在拓扑优化中，优化以由目标体积分数值均匀分布构成的初始设计开始（即 $\rho=V_f$, ，其中 $V_f$ 是方程 (40) 和 (41) 中体积分数约束的阈值），并在经过 800 次迭代后终止（第6.2.1节），此时离散拓扑已形成。除第7.2节的铰支柱算例包含 $m$ =4 个不同特征值簇外，其余算例的非线性稳定性约束中均包含 $m=6$ 个特征值簇，见方程 (40) 和 (41)。在数值实现中，如果两个特征值的绝对差小于 1.0E-8，则视为相等。在以下算例中，方程 (41) 中子优化的移动限值设为 $\theta=0.04$；但第7.4节的对称受压块算例设为 $\theta=0.1$。为避免优化早期迭代期间因大变形而导致分析失效，并缓解优化问题的非凸性，采用延续方案逐步增大惩罚指数 $p$[方程 (3)] 以及 $p_L$ [参见方程 (*13*)] 之后的说明。具体而言，$p$ 每 5 次迭代增加 0.1，从 1 提高至 3；$p_L$ 每 5 次迭代增加 0.1，从 4 提高至 6。此外，节点伪质量构造中的惩罚指数 $p_m$ [方程

(*19*)] 也每 5 次迭代增加 0.1，从 1 提高至 6；伪质量矩阵的所有其他相关参数均取与第 4.2 节相同的值，即 $q$ = 15, $\hat{\epsilon} = 10^{-9}$, $\varpi_L$= 0.1 和 $\varpi_H$ = 0.2。所有优化算例均采用载荷控制，有限元分析中的求解器使用牛顿–拉夫森方案和自适应步长策略；当能量残差降至 1.0E-12 [57]以下时，即认为收敛。

除非另有说明，后续性能分析所用优化设计的 B样条拟合均使用 Rhino [58] 完成，水平集值为 0.5。对于后屈曲分析，采用附录D中所述的分支切换法，以有效捕捉从分岔点延伸出的多个次级分支；同时采用圆柱弧长法[57] 追踪主分支/次分支解路径。所有数值计算均使用基于 Matlab 的专用有限元库 CPSSL-FEA 完成，该库由圣母大学开发。

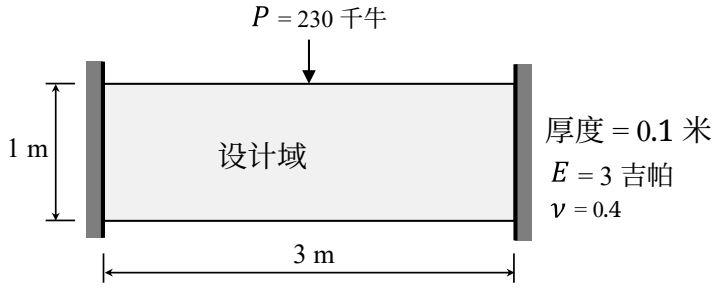
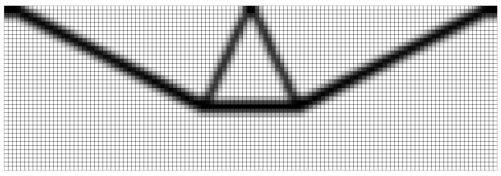


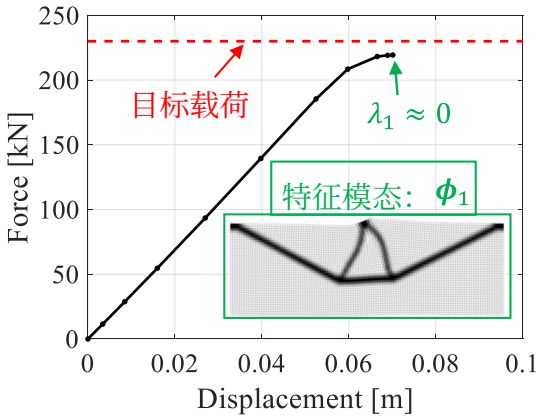

图 9. 双端固支梁问题示意图。

### *7.1* 双端固支梁

第一个示例考虑图 9 所示的双端固支梁问题，其设计域由一个 120×40 有限元网格离散。体积约束设为 $V_f$ =0.1，密度滤波半径为 $r_{min}$ = 50 mm。由于问题具有对称性，优化空间仅考虑设计域的一半，而完整设计域则纳入

非线性有限元分析中，以捕捉非对称屈曲模态。该示例已在多项研究中探讨过 [6, 8, 38, 48]，其难点有两个：（a）一种线性类型设计呈翻转V形 [38]，另一种非线性类型设计具有图10a所示的特征，这两种设计在优化过程中相互竞争。当惩罚指数 $p$ 提高到较高值时，线性设计无法承受载荷，进而导致有限元分析失败。（b）即使在优化过程中出现了具有非线性特征的设计，有限元分析仍可能失败，因为该设计可能会因其总体深度及其他不稳定特征而变得不稳定。






(a) 第 102 次迭代时的优化后的拓扑，该拓扑的有限元分析无法收敛

(b) 优化后的拓扑的载荷-位移曲线，拓扑在……之前达到临界点目标载荷

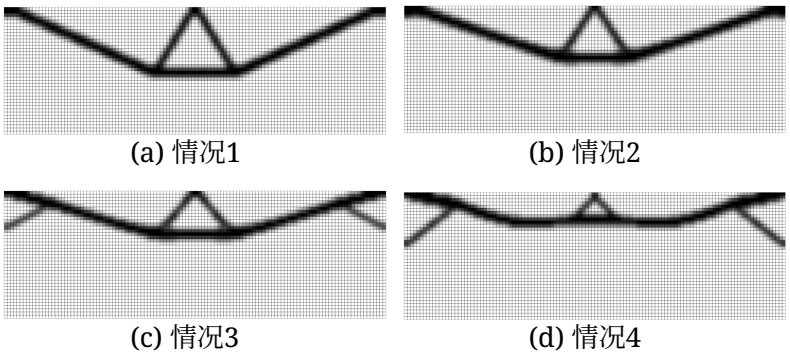
图10。拓　扑优化：不考虑屈曲约束的双端固支梁　　.

第一个难题可以通过采用相对快速的延续方案 [38]、以较高的惩罚指数 $p$（例如如 [59]，所做的那样取 2）作为起点，或选择经过扰动以促进非线性特征的初始设计 [8] 来克服。然而，第二个问题若没有稳定性约束则无法解决。为说明这一点，图10a展示了一个没有稳定性约束的优化后拓扑，即移除了式（40）中的 $f_q$ $(q = 2, \dots, m + 1)$。优化从均匀设计开始，并采用延续方案：$p$ 从 1.6 开始，

每 25 次迭代增加 0.2。优化在第 $102^{th}$ 次迭代时中断，原因是有限元分析失败：在达到目标载荷之前到达了临界点。参见图10b所示的载荷-位移曲线，其中位移是在加载点处测量的，即顶面上的中间节点。

表2. 双端固支梁拓扑优化的四种案例，采用不同的稳定性阈值 $\hat{\lambda}$

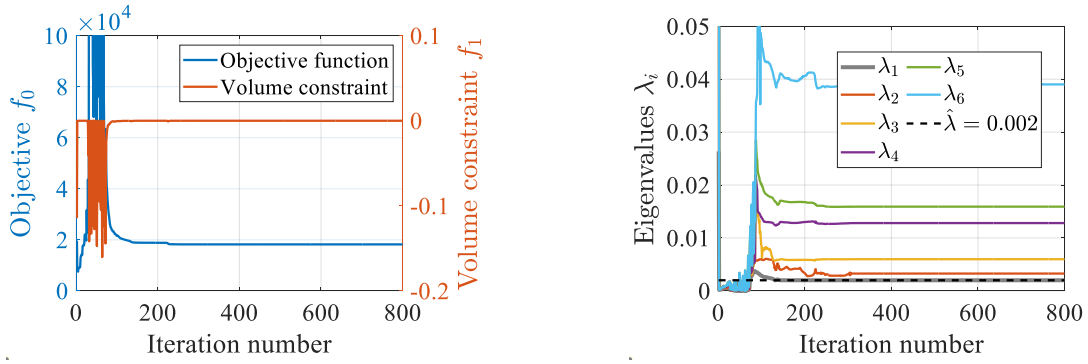
| 案例编号 | 稳定性阈值 $\hat{\lambda}$ | 最小化的目标函数值 $f_0$ [kN·m] | 优化后的前六个特征值<br>拓扑 |
|---|---|---|---|
| 情况1 | 0.002 | 18.21 | $\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\\ \lambda_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.00200001\\ 0.00326693\\ 0.00597627\\ 0.01280943\\ 0.01591148\\ 0.03901548\end{bmatrix}$ |
| 情况2 | 0.004 | 21.94 | $\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\\ \lambda_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.00400000\\ 0.00606846\\ 0.01731487\\ 0.01828198\\ 0.02475417\\ 0.05668777\end{bmatrix}$ |
| 情况3 | 0.006 | 27.31 | $\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\\ \lambda_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.00599953\\ 0.00599969\\ 0.02345340\\ 0.02457844\\ 0.03094318\\ 0.06674226\end{bmatrix}$ |
| 情况4 | 0.008 | 46.38 | $\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\\ \lambda_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.00800098\\ 0.00919497\\ 0.02950062\\ 0.03670040\\ 0.05752595\\ 0.05953313\end{bmatrix}$ |



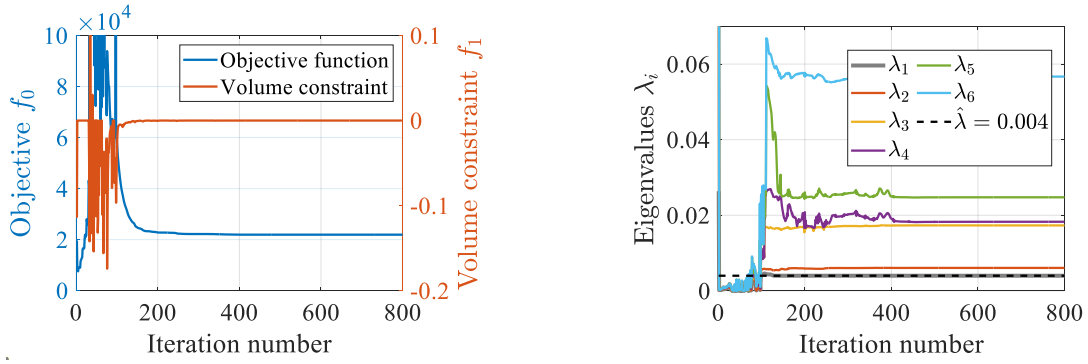
(a) 情况1 (b) 情况2

(c) 情况3 (d) 情况4

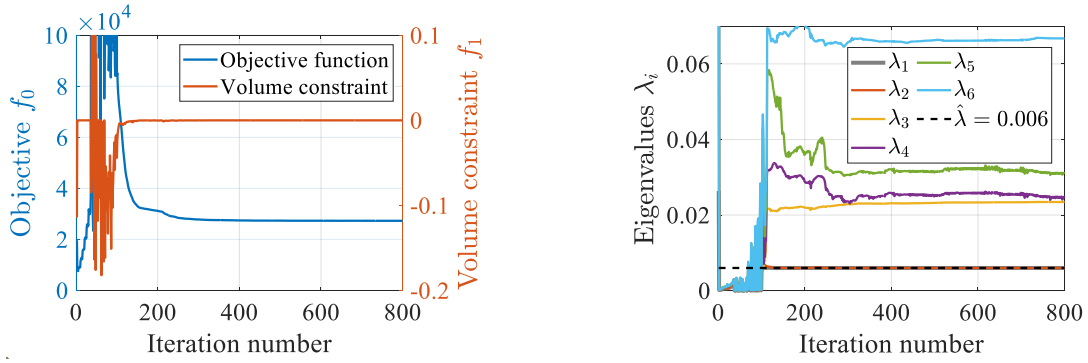
图11. 表*2*中列出的四种情况的优化拓扑。



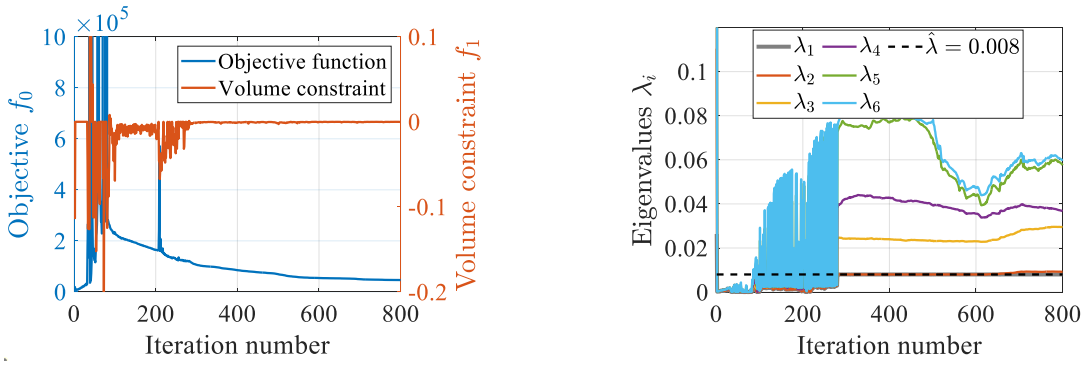

(a) 情况1




(b) 情况2

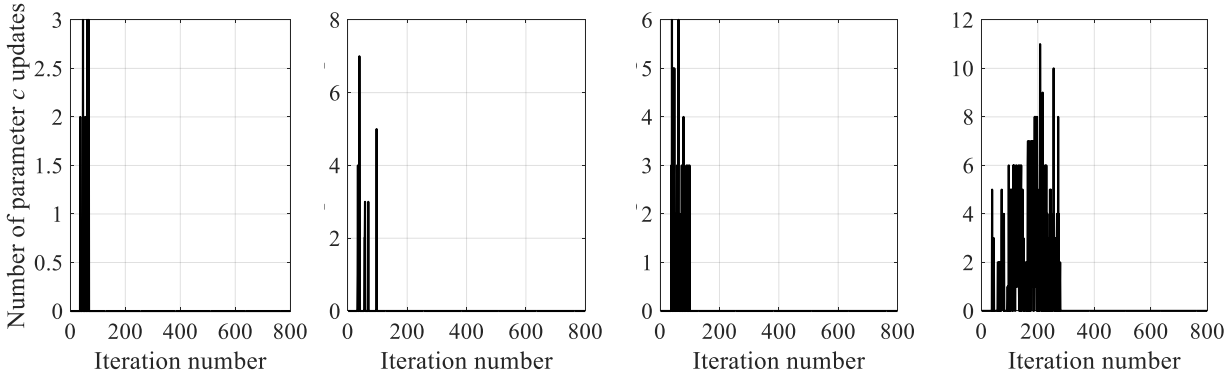


(c) 情况3



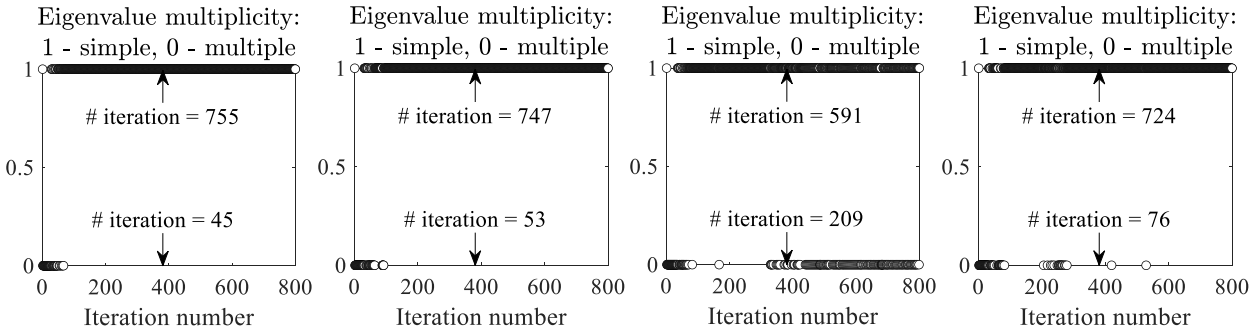

(d) 情况4

图12。表*2*中四种情况在目标载荷下的设计的目标函数、材料体积约束函数值以及切线刚度矩阵前六个特征值的优化历史。



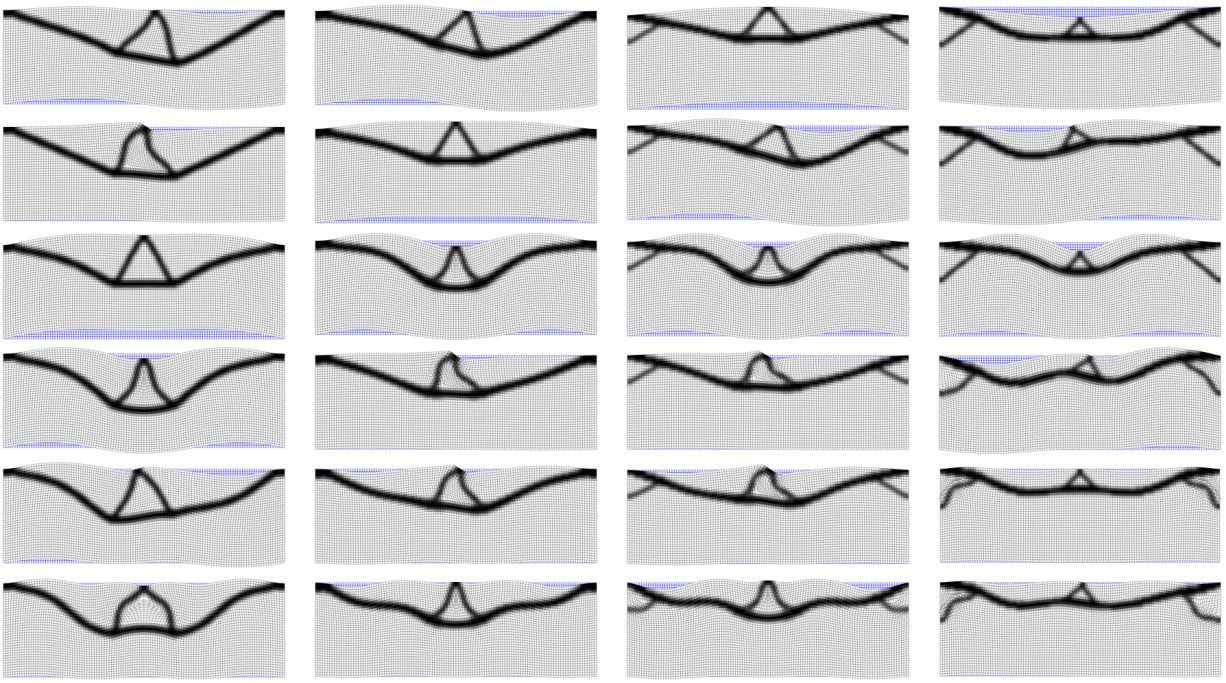

(a) 情况1 (b) 情况2 (c) 情况3 (d) 情况4

图13. 表2所列四种情况在优化过程中自适应线性能量插值的截断参数 $c$ 更新历史。




(a) 情况1 (b) 情况2 (c) 情况3 (d) 情况4

图14. 在针对表*2*中列出的四种情况进行优化的过程中，设计在目标载荷下所包含的前$m$ (= 6)个特征值簇的重数。

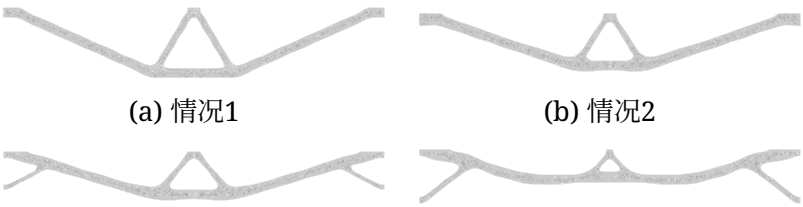


(a) 情况1　(b) 情况2　(c) 情况3　(d) 情况4

图15. 表*2*所列四种情况下，在目标载荷下优化设计的特征模态：从上到下依次为 $\boldsymbol{\phi}_1$,…, $\boldsymbol{\phi}_6$。（注：为便于可视化，对特征向量进行了适当缩放）

在优化公式中考虑屈曲约束，即方程（*40*）和（*41*），可以很好地解决第二个难题。为此，我们考察方程（40）和（41）中采用不同阈值 $\hat{\lambda}$ 的非线性屈曲约束，这些约束可以直观地理解为针对不同的安全裕度。为避免优化迭代过程中设计更新出现大幅跳变，MMA算法中的移动参数设为0.3。表*2*列出了$\hat{\lambda}$ 值各不相同的四种情况。这些情况下的优化拓扑见图11，目标函数和约束值的优化历史见图12。值得注意的是，在最终优化阶段，所有约束均得到满足；所需的非线性特征出现后，目标函数平稳下降。此外，从

图12可以看出，在优化过程中，只有与$\lambda_1$ 相关的第一个稳定性约束被激活，而其他特征值均远高于阈值$\hat{\lambda}$。随着稳定性阈值增大，优化后的拓扑趋于变浅。与图10中的拓扑相比，显然，较浅的拓扑通过缩短两根受压杆的长度来提高其稳定性。此外，从表2可以看出，随着稳定性阈值（$\hat{\lambda}$）增大，目标值趋于上升，这意味着这两个目标相互制约，符合预期。图13绘出了所有情况下每次优化迭代中自适应线性能量插值（第3.2节）对$c$ 值的更新次数。可以看出，在几何非线性拓扑优化的早期阶段，灰色区域较大，自适应方案对于保证有限元分析收敛是必要的；情况4尤其如此，因为优化器正在寻找满足严格稳定性约束的可行解时，目标值和约束值都出现了大量振荡（图12d）。图14展示了优化过程中简单和重特征值情形所占的比例，可以看出，在大部分迭代中，前$m$ （= 6）个特征值是单特征值；更重要的是，在最终优化阶段，特征值均为单特征值（表2）。最后，图15绘出了四种情况下优化结构的六个特征模态，可以确认所有屈曲约束都施加在“真实”的屈曲模态上。



(a) 情况1　(b) 情况2

(c) 情况3　(d) 情况4

图16. 图11中四种优化拓扑的B样条拟合设计的有限元网格。

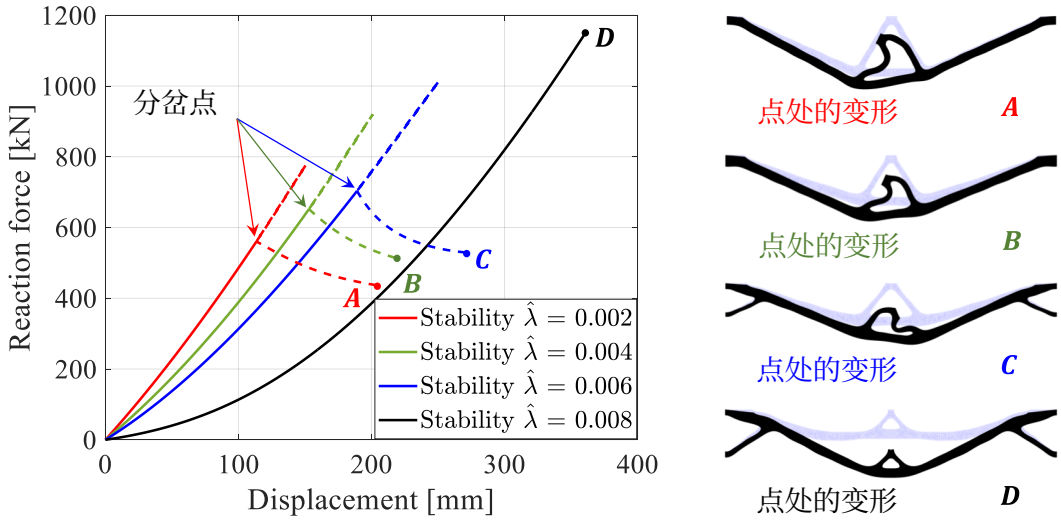



图17. 不同稳定性约束下双端固支梁的B样条拟合优化拓扑的载荷-位移曲线及其变形形状（实线对应稳定区域，虚线对应不稳定区域）。

为研究优化拓扑在相同载荷模式下的稳定性表现，使用B样条拟合图11中的优化设计，以去除空洞和中间密度；相应的有限元模型如图16所示。随后，采用弧长控制和分支切换技术（附录D1），在相同载荷模式下分析拟合设计，以追踪次级分支。拟合设计的载荷-位移曲线及其变形形状如图17所示。正如预期，稳定性阈值较高的设计（$\hat{\lambda}$）具有较高的临界载荷，但刚度会有所降低。此外，对于$\hat{\lambda} = 0.002$、0.004和0.006的优化设计，主分支和分岔支在临界（分岔）点之后均不稳定。

### *7.2* 铰支柱

第二个示例考虑铰支柱设计问题，其尺寸、载荷、边界条件和材料属性如图18所示。设计域由 60×180 有限元网格离散化，并在底部和顶部边界的中间三个

节点上分别施加铰支和滚支边界条件。总载荷平均分配到三个中间节点。体积分数约束设为 $V_f = 0.3$，密度滤波半径为 $r_{min} = 40\text{mm}$。由于结构对称性，优化空间仅考虑设计域的四分之一。不过，为了模拟非对称屈曲模态，非线性有限元分析中包含完整设计域。与前一个示例类似，本例中 MMA算法的移动参数也设为 0.3。

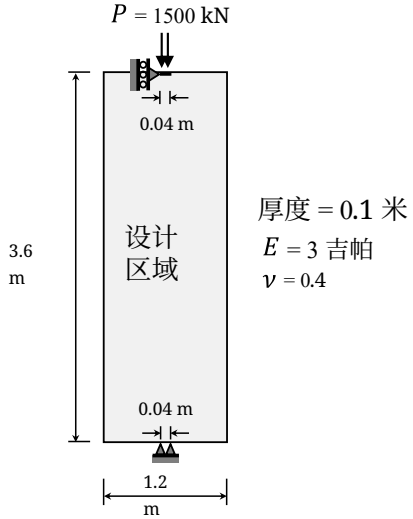
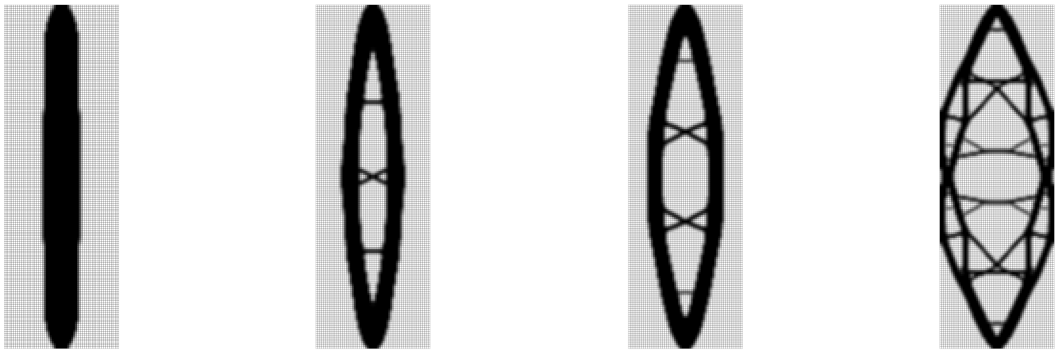



图18. 铰支柱问题示意图。



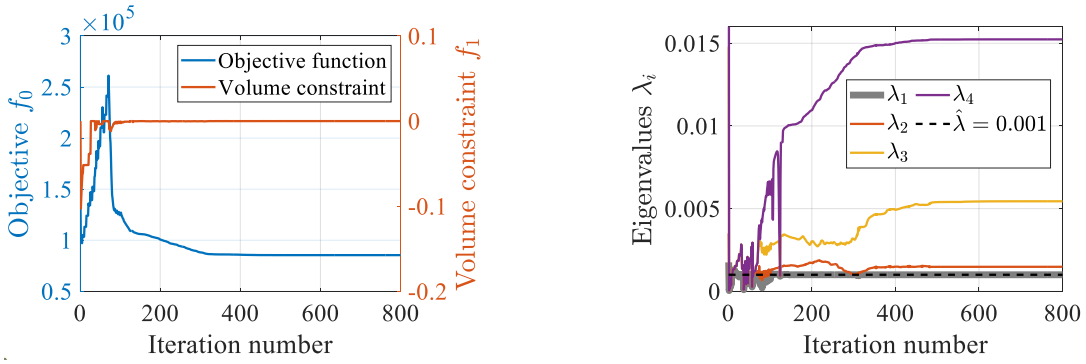
（a）无稳定性约束

（b）稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.001$

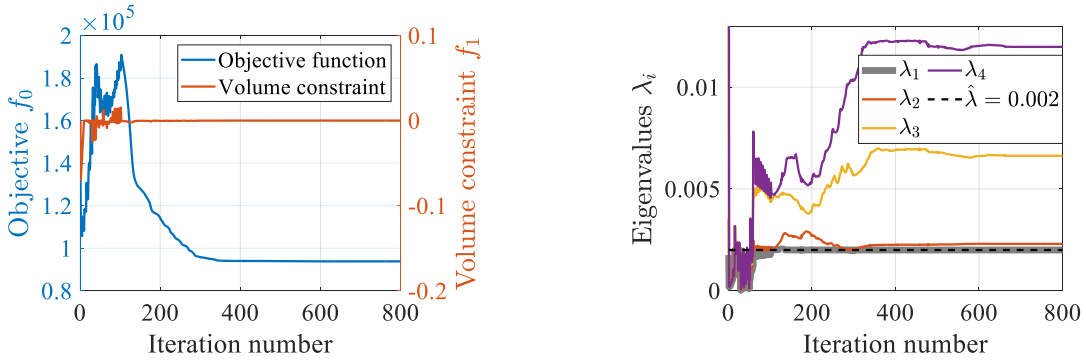
(c) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.002$

(d) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.003$

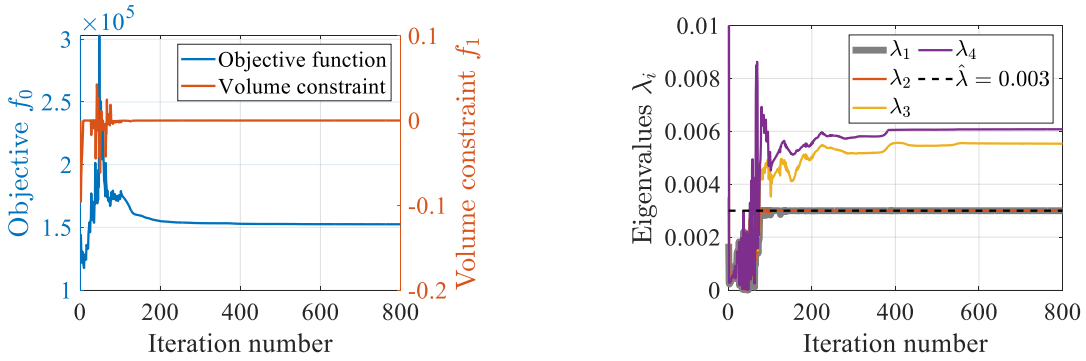
图19。优化　　不同稳定性约束下铰支柱问题的拓扑结构　　.




(a) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.001$

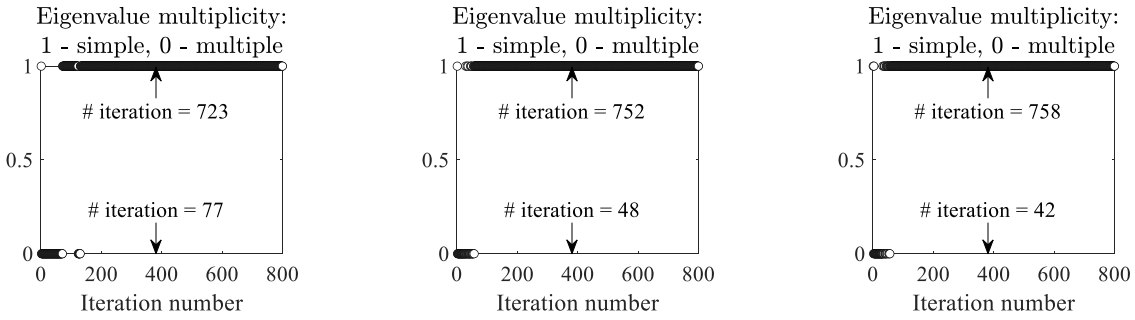



(b) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.002$



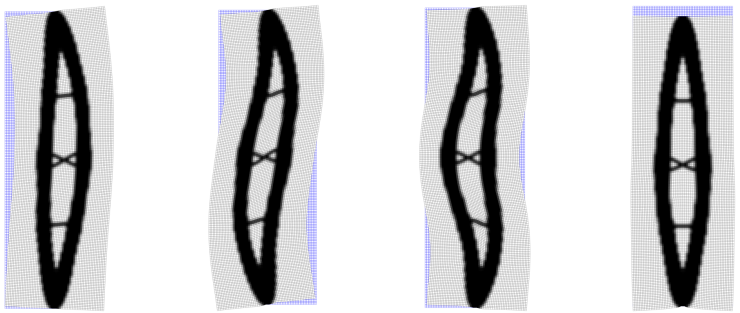

(c) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.003$

图20. 铰支柱问题中，不同稳定性阈值下目标函数、材料体积约束函数值，以及目标载荷下各设计的切线刚度矩阵前四个特征值的优化历史。

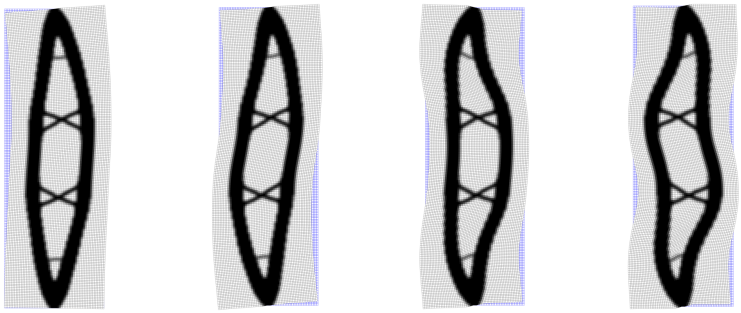



(a) $\hat{\lambda} = 0.001$ (b) $\hat{\lambda} = 0.002$ (c) $\hat{\lambda} = 0.003$

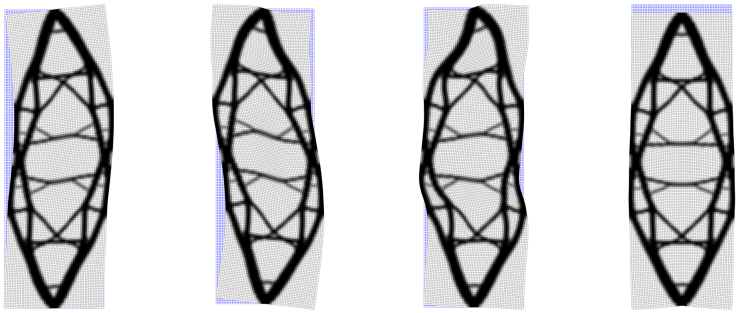
图21. 铰支柱问题中不同稳定性阈值下优化过程中的特征值重数。



(a) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.001$



(b) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.002$



(c) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.003$

图22. 目标载荷下优化后的稳定设计的特征模态：从左至右依次为 $\boldsymbol{\phi}_1$,...， $\boldsymbol{\phi}_4$。（注：为便于可视化，对特征向量采用了适当的缩放）

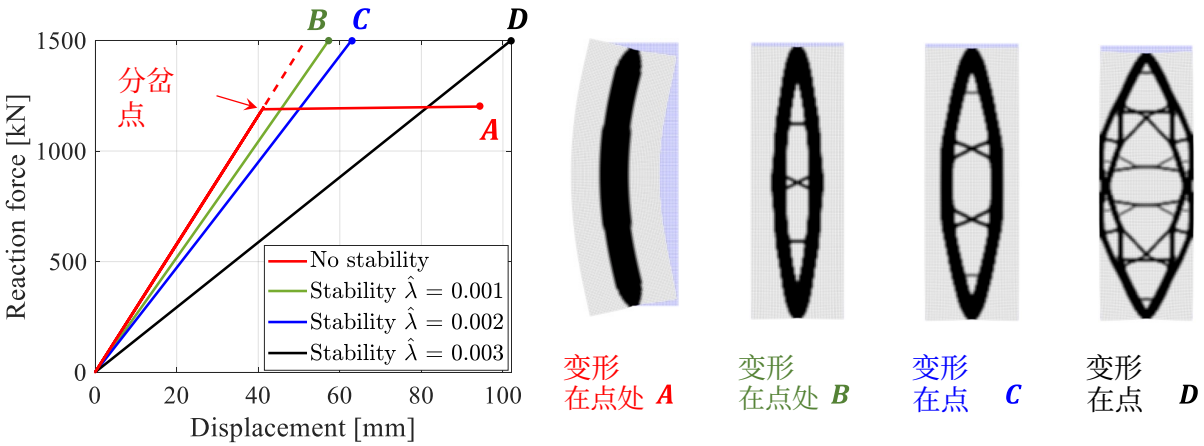
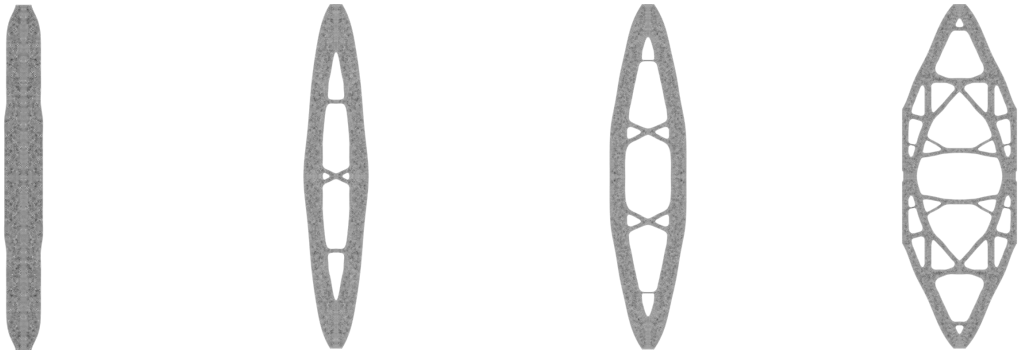



图23. 对应于不同稳定性约束的优化后铰支柱拓扑结构的载荷-位移曲线，以及它们在目标载荷或屈曲状态下的变形形状（实线表示稳定区域，虚线表示不稳定区域）。



（a）无稳定性约束　（b）稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.001$　(c) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.002$　(d) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.003$

图19中四种优化拓扑的 B 样条拟合设计的有限元网格。

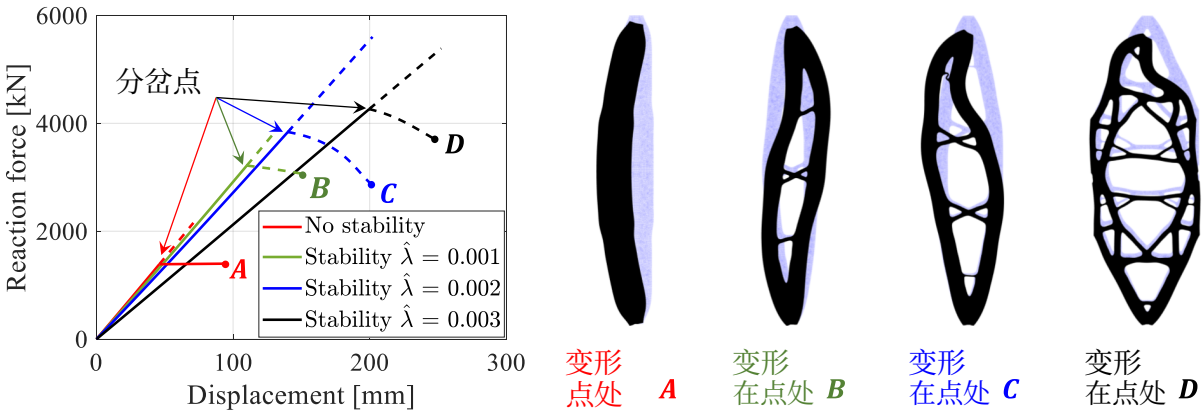



图25. 四种经B样条拟合的优化铰支柱拓扑结构的载荷-位移曲线及其变形形状（实线对应稳定区域，虚线对应不稳定区域）。

未施加稳定性约束时的优化拓扑如图19a所示，为一根直杆。根据式（17）进行稳定性分析表明，该杆将在达到目标载荷之前发生屈曲，因为目标载荷下的最小特征值为$-2\times10^{-4}$，且其屈曲模态与图5中的第一特征模态相似。为获得稳定设计，随后加入稳定性约束；对应三种不同稳定性阈值（$\hat{\lambda}$）的优化拓扑如图19（b）、（c）和（d）所示。随着稳定性阈值增大，拓扑结构趋于横向扩展，内部的支撑杆数量也随之增加。图20给出了目标函数和约束的优化历史，可以看到，在所需特征出现后，目标函数平稳下降，并且在最终优化阶段，所有约束均得到良好满足。需要注意的是，在图20c中，尽管前两个特征值（$\lambda_1$ 和$\lambda_2$）在视觉上无法区分，但它们的差值大于设定阈值（1.0E-8）。图21进一步验证了这一点，该图展示了优化过程中设计的特征值重数。总体而言，只有前一百次迭代出现了重特征值。图22绘出了最终优化设计在目标载荷下受控的特征模态。同样，采用所提出的伪质量策略后，不会出现伪模态，这正是预期的结果。载荷-

位移曲线展示了这些经过稳定性检验的优化设计在达到目标载荷前的表现，如图23所示，其中位移是在顶面中间节点处测量的。可以看出，所有施加稳定性约束的设计在1500 kN的目标载荷下均保持稳定，而未施加稳定性约束的设计则在载荷达到1188 kN时失稳。

为考察这些优化设计的稳定性表现，进行了B样条拟合，有限元网格如图24所示。为了保留优化拓扑结构中的所有特征，图24d的水平集取为0.4。随后，采用弧长控制，在相同载荷模式下对拟合设计进行分析。图25展示了位移-载荷曲线以及标记加载阶段对应的变形。可以看出，通过引入稳定性约束，结构的稳定性显著提高；并且可以通过指定不同的约束阈值（$\hat{\lambda}$）来控制这种改进。值得指出的是，对于图24中的设计，1$^{st}$临界点上方的主分支可能存在多个临界点（极限点和分岔点），从而导致复杂响应；本文不对此进行研究。

*7.3 L*形支架

第三个算例考虑图26所示的 L形问题，该问题采用单元尺寸为 0.02 m × 0.02 m 的均匀有限元网格进行离散，右侧最边缘的四个节点上施加了总载荷 300 kN，载荷分布分别为 50kN、100kN、100kN 和 50kN。允许体积分数为 $V_f$ =0.4，密度滤波半径为 $r_{min}$ = 40 mm。图27展示了施加和未施加稳定性约束时的优化拓扑结构。可以看出，加入稳定性约束后，左侧的两根竖杆之间出现了支撑杆。随着稳定性阈值（$\hat{\lambda}$）增大，这些连接杆会变粗。此外，承受压缩的外围弯曲杆会随着稳定性阈值（$\hat{\lambda}$）

增大而变粗、变短。这些特征带来的稳定化效果将在稳定性分析中讨论。图28绘出了目标函数、体积约束以及受约束的前六个特征值的优化历史。优化过程中，所有设计的前六个特征值均为单特征值，即 $\lambda_a \neq \lambda_b$ for $a \neq b, a, b = 1, \dots, 6$。如图所示，在最终一次优化迭代中，材料体积约束和稳定性约束均得到满足，目标函数在经历几次振荡后平稳下降。图29绘出了目标载荷下优化结构对应的六个特征模态。同样，所有受到约束的特征模态都是“真实”特征模态。图30对比了三种优化设计的载荷-位移曲线，其中位移取施加载荷的顶面右角节点处的竖向位移。可以看出，包括未施加稳定性约束的设计在内，所有设计在达到目标载荷前均保持稳定；增大稳定性阈值（$\hat{\lambda}$）会得到刚度较低的结构。

为研究优化拓扑结构的稳定性表现，采用图31所示的有限元网格，以B样条拟合设计，然后在相同载荷模式下通过弧长控制进行分析。所得载荷-位移曲线以及不同加载阶段的变形如图32所示。如图所示，未施加稳定性约束的设计在载荷为418.07 kN时遇到1st 临界（极限）点，此时左侧竖杆受压屈曲。采用阈值为$\hat{\lambda} = 0.001$的稳定性约束，有助于将临界点推迟至载荷为820.59 kN时。达到临界载荷后，左侧竖杆尽管受到两根连接杆支撑，仍然发生屈曲。采用阈值为$\hat{\lambda} = 0.002$的稳定性约束后，优化设计在载荷达到834.00 kN之前未遇到临界点。由于支撑杆加厚、宽度增加且长度缩短，受压外围弯曲杆保持稳定。

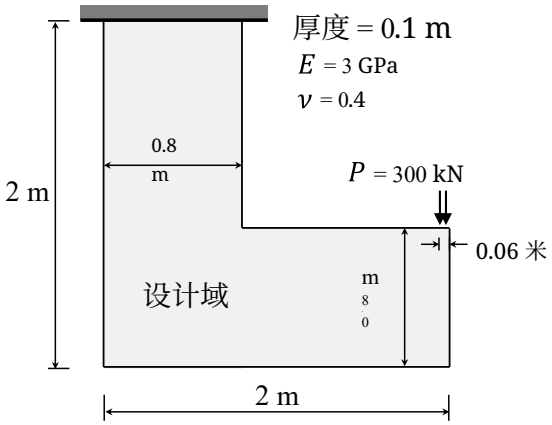
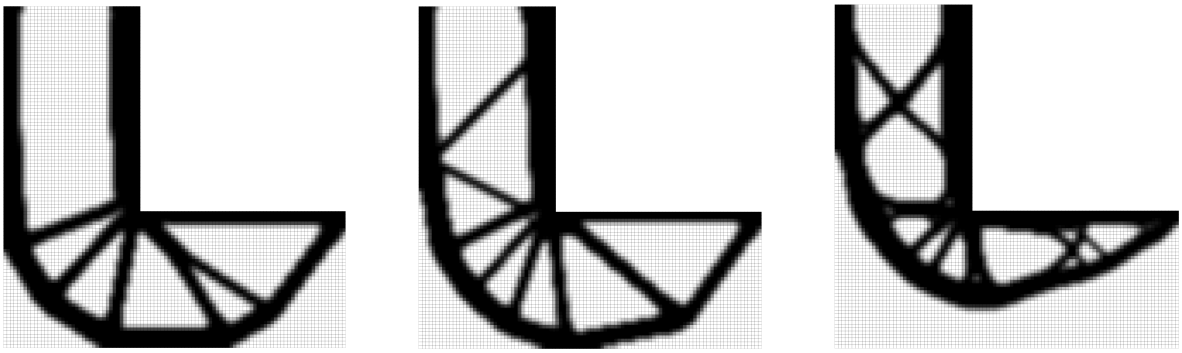
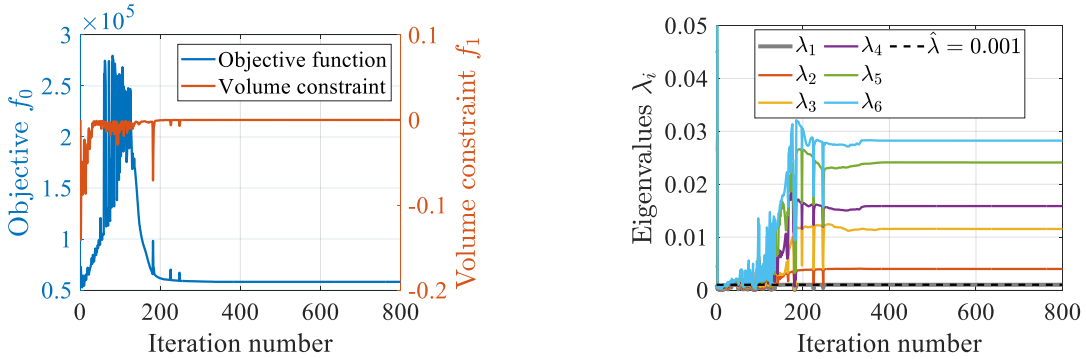



图26. L形问题示意图。

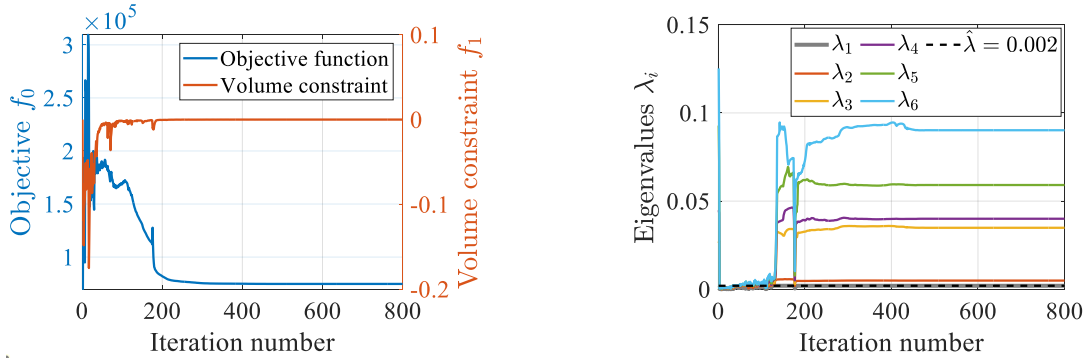


(a) 无稳定性约束　(b) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.001$　(c) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.002$

图27. 不同稳定性约束下L形区域的优化拓扑。

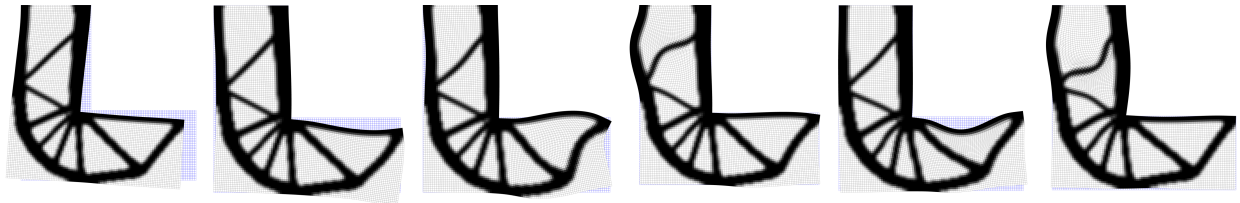



(a) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.001$

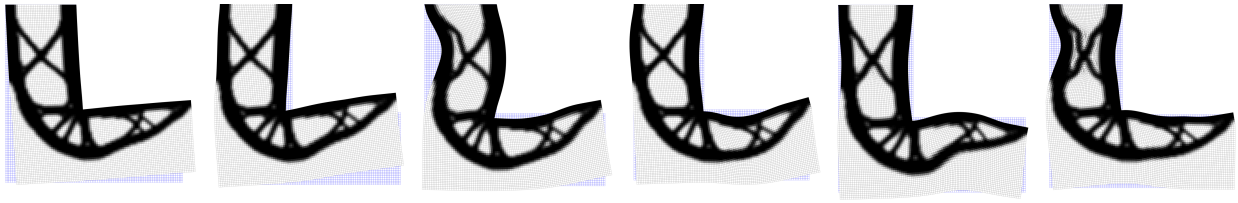



（b）稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.002$

图28. L形问题中，不同稳定性阈值下，目标函数、材料体积约束函数值以及目标载荷下各设计的切线刚度矩阵前六个特征值的优化历史。



（a）稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.001$



（b）稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.002$

图29. 目标载荷下优化后的稳定设计的特征模态：从左到右分别为 $\boldsymbol{\phi}_1$,..., $\boldsymbol{\phi}_6$。（注：为便于可视化，对特征向量采用了适当的缩放）

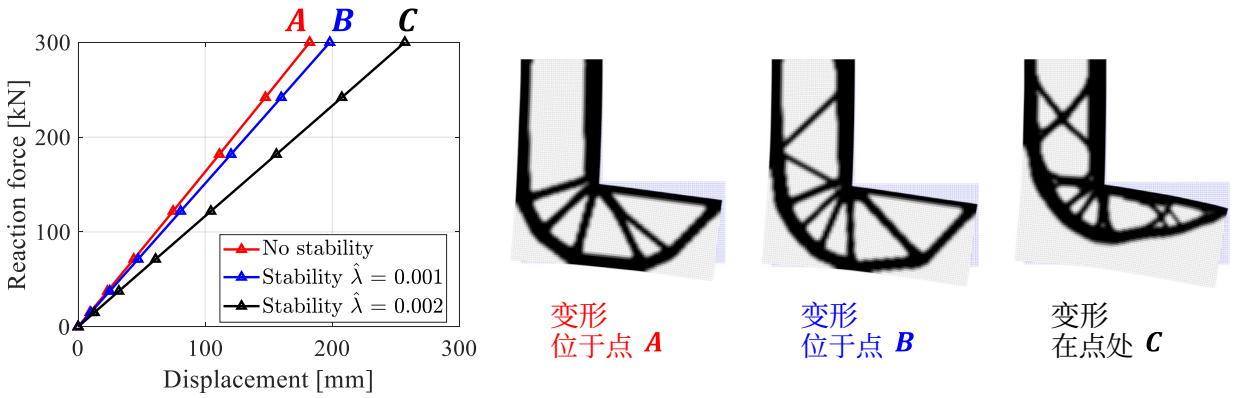
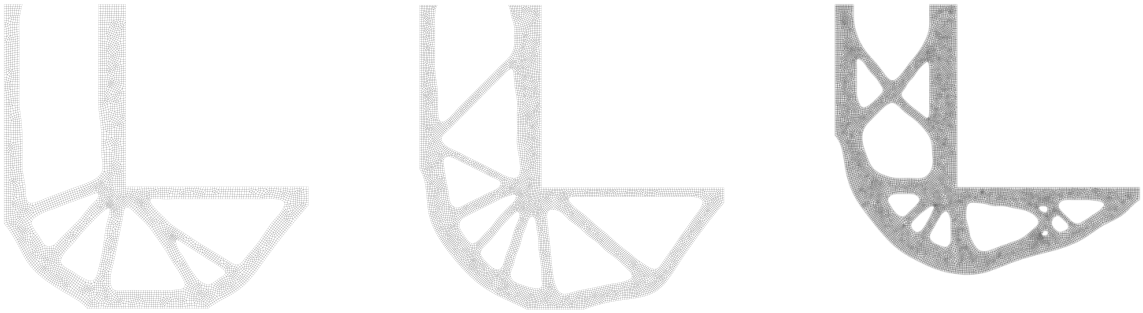



图30. 三种优化的L形拓扑结构的载荷-位移曲线及其在目标载荷下的变形形状。



（a）无稳定性约束　　（b）稳定性约束 $\hat{\lambda}=0.001$　　（c）稳定性约束 $\hat{\lambda}=0.002$

Figure 31. 图27中三种情况下B样条拟合设计的有限元网格　　.

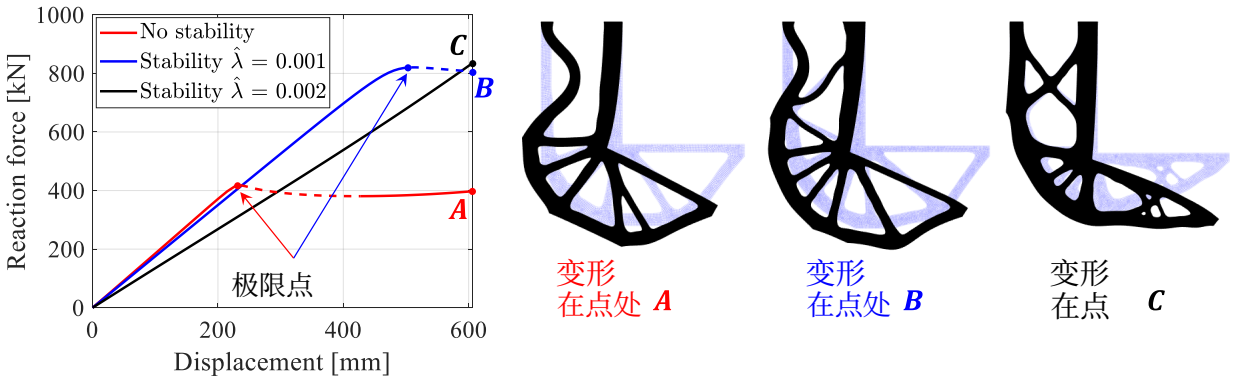



图32. 三种B样条拟合的优化L形拓扑的载荷-位移曲线及其变形形状（实线对应稳定区域，虚线对应不稳定区域）。

*7.4* 对称受压块

最后一个示例研究一个四侧受到压缩载荷的方形块体，如图33所示。设计采用 100×100 有限元网格离散，每侧的集中载荷均匀分布在三个中间节点上。由于载荷、边界条件和几何形状均具有对称性，预期最优设计也具有高度对称性。因此，仅对设计域的八分之一进行优化，但在有限元分析中纳入整个设计域，以捕捉非对称屈曲模态。允许体积分数为 $V_f = 0.2$，密度滤波半径为 $r_{min} = 20$ mm。考虑三种情况：一种不设稳定性约束，另外两种采用不同的稳定性阈值 $\hat{\lambda} = 0.001$ 和 $\hat{\lambda} = 0.002$。

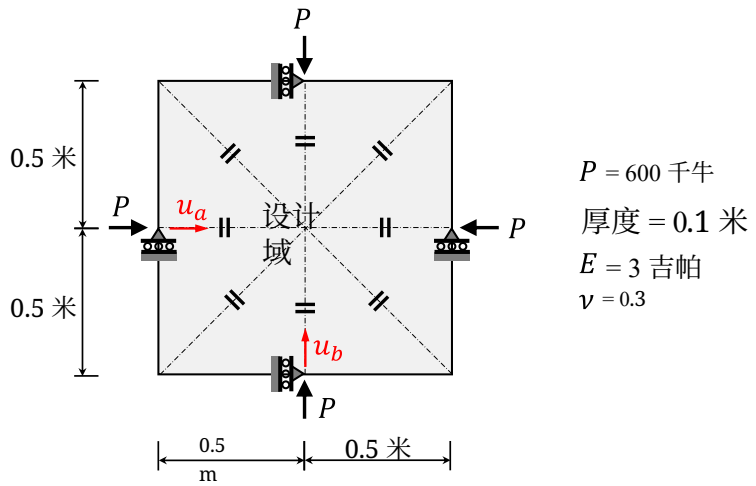
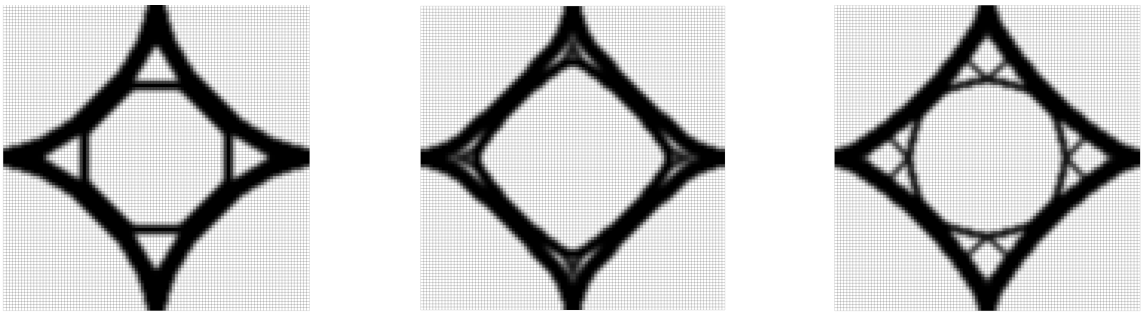



图33. 对称受压块体问题示意图。

表3. 采用不同稳定性约束的对称受压块体拓扑优化的三种情况

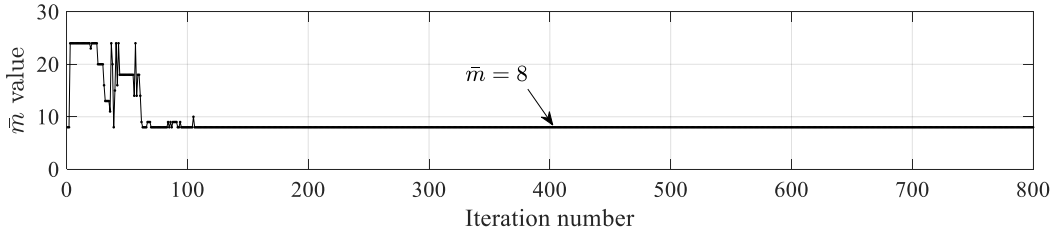
| 案例编号 | 情况1 | 情况2 | 情况3 |
|---|---|---|---|
| 稳定性约束 | 无稳定性约束 | $\hat{\lambda} = 0.001$ | $\hat{\lambda} = 0.002$ |
| 最小化目标值 $f_0$ [千牛·米] | 24.71 | 25.09 | 26.43 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 前八个的特征值<br>优化后的拓扑 | $\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\\ \lambda_6\\ \lambda_7\\ \lambda_8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-0.00047528\\ -0.00047528\\ 0.00333745\\ 0.00387963\\ 0.02189753\\ 0.08101026\\ 0.08101026\\ 0.12860280\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\\ \lambda_6\\ \lambda_7\\ \lambda_8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.00100007\\ 0.00100007\\ 0.00100012\\ 0.00658858\\ 0.02030942\\ 0.06050304\\ 0.06050304\\ 0.06557759\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\\ \lambda_6\\ \lambda_7\\ \lambda_8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.00200017\\ 0.00200017\\ 0.00302139\\ 0.00664495\\ 0.01716183\\ 0.05217245\\ 0.05217245\\ 0.07241556\end{bmatrix}$ |

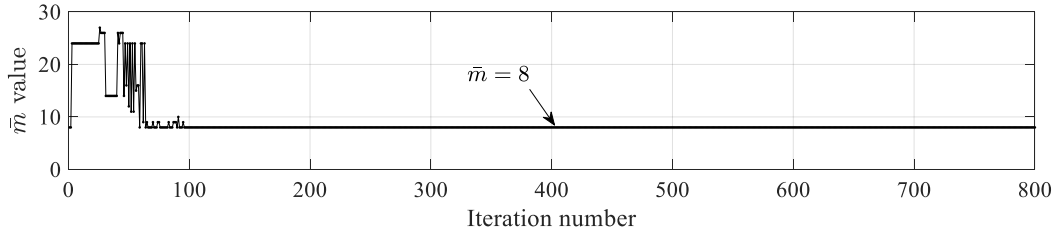


(a) 无稳定性约束　(b) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.001$　(c) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.002$

图34. 对称受压块体区域在不同稳定性约束值下的优化拓扑。

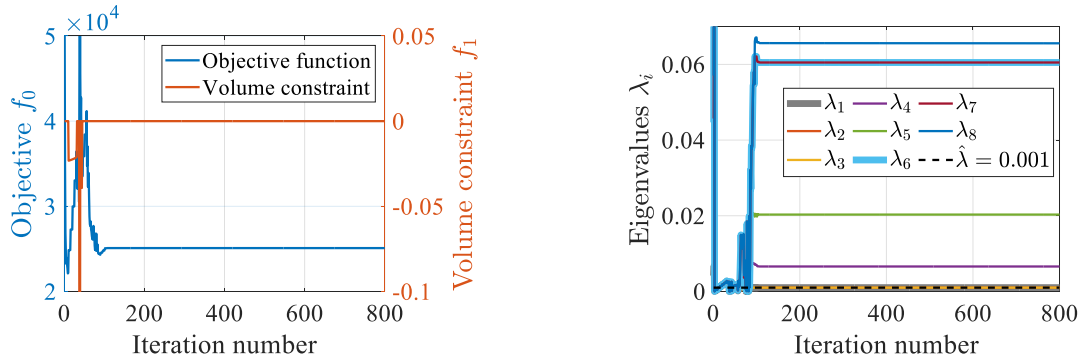



(a) $\hat{\lambda} = 0.001$

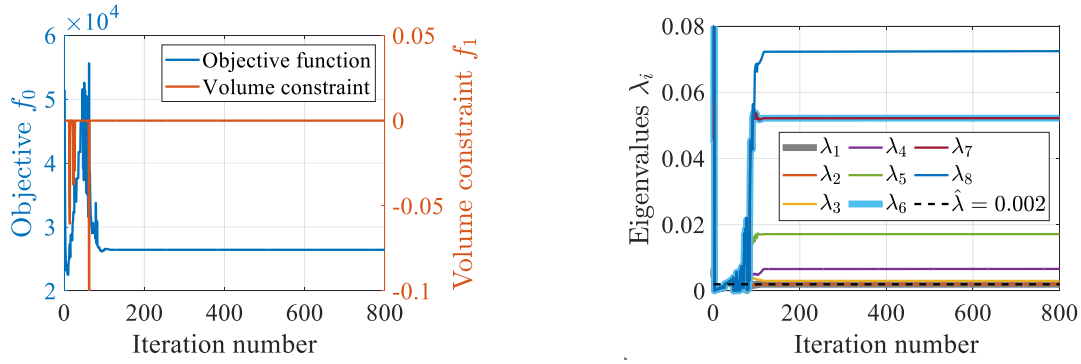



(b) $\hat{\lambda} = 0.002$

图35. 对称受压块体问题中，中间设计的优化过程中纳入的特征值数量，即$m$K的值，随不同稳定性约束值的变化。

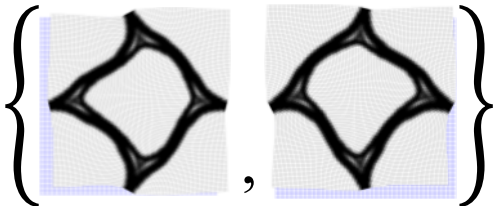



(a) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.001$

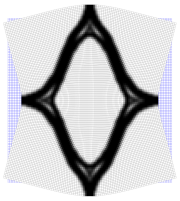



(b) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.002$

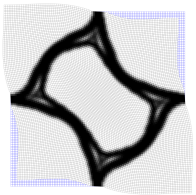
图36. 对称受压块体问题中，不同稳定性阈值下，目标函数、材料体积约束函数值，以及设计在目标载荷下切线刚度矩阵的前八个特征值的优化历史。



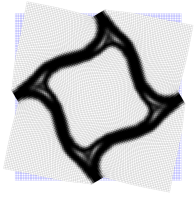
特征模态的基 $\{\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2\}$
对应于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2$



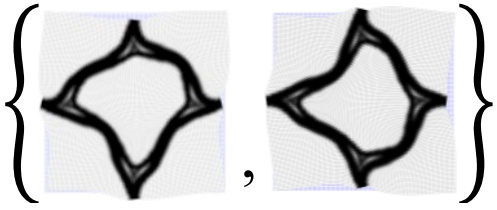
$\boldsymbol{\phi}_3$ （与 $\lambda_3$ 配对）



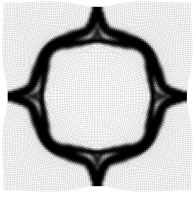
$\boldsymbol{\phi}_4$ （与 $\lambda_4$ 配对）



$\boldsymbol{\phi}_5$ （与 $\lambda_5$ 配对）

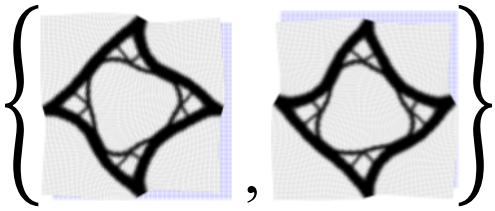


特征模态的基 $\{\boldsymbol{\phi}_6, \boldsymbol{\phi}_7\}$
对应于特征值 $\lambda_6 = \lambda_7$

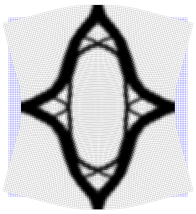


$\boldsymbol{\phi}_8$ （与 $\lambda_8$ 配对）

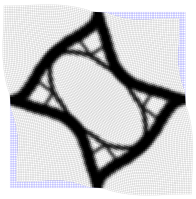
(a) 稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.001$



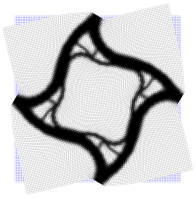
特征模态的基 $\{\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2\}$
对应于特征值 $\lambda_1 = \lambda_2$



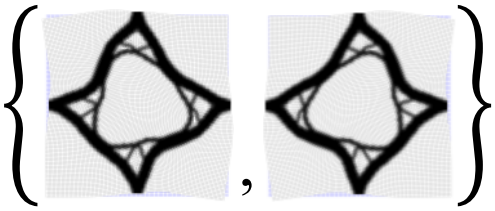
$\boldsymbol{\phi}_3$ (与 $\lambda_3$ 成对)



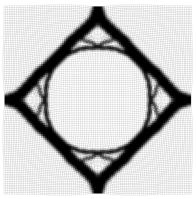
$\boldsymbol{\phi}_4$ (与 $\lambda_4$ 成对)



$\boldsymbol{\phi}_5$ （与 $\lambda_5$ 成对）



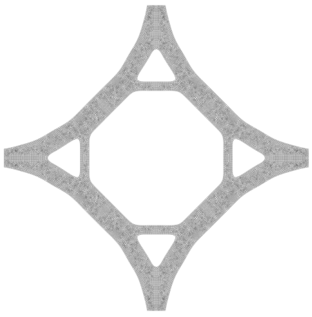
特征模态的基 $\{\boldsymbol{\phi}_6, \boldsymbol{\phi}_7\}$
对应于特征值 $\lambda_6 = \lambda_7$



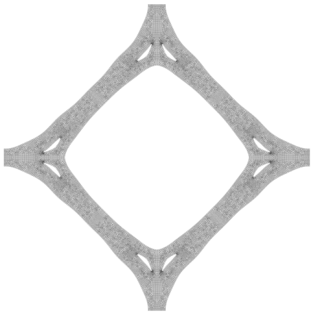
$\boldsymbol{\phi}_8$ （与 $\lambda_8$ 成对）

（b）稳定性约束 $\hat{\lambda} = 0.002$

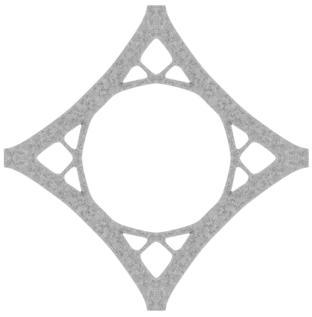
图37. 目标载荷下优化后的稳定设计的特征模态（注：为便于可视化，对特征向量应用了适当的缩放）



(a) 无稳定性约束



(b) 稳定性约束 $\hat{\lambda} =$ 0.001



(c) 稳定性约束 $\hat{\lambda} =$ 0.002

图38. 图34中三个案例的 B样条拟合设计的有限元网格。

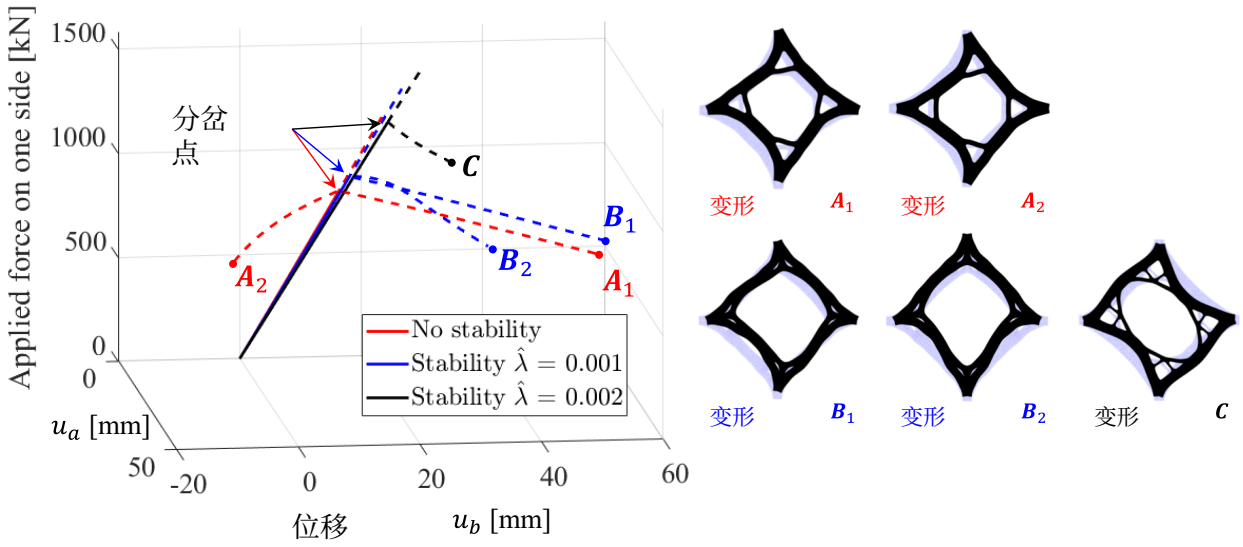
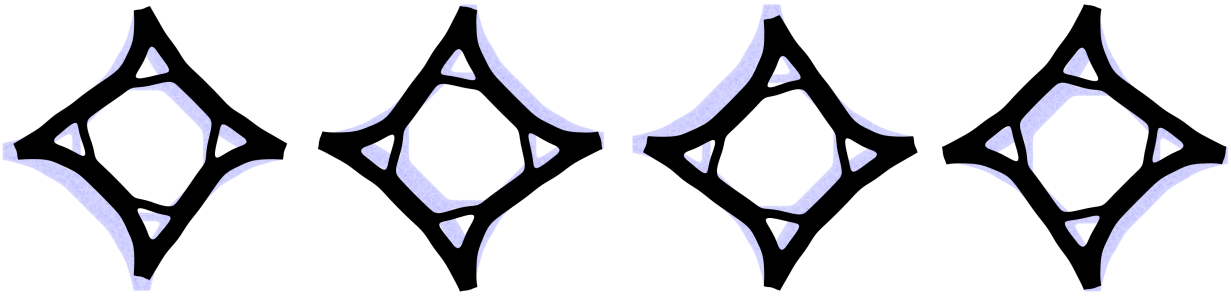



图39。三种经B样条拟合优化后的对称压缩块拓扑结构的载荷-位移曲线及其变形形状（实线对应稳定区域，虚线对应不稳定区域）。



（a）屈曲模态1的两个方向　　（b）屈曲模态2的两个方向

图40。插　图39中与变形$\boldsymbol{A_1}$ 相关的对称解示意图　　.

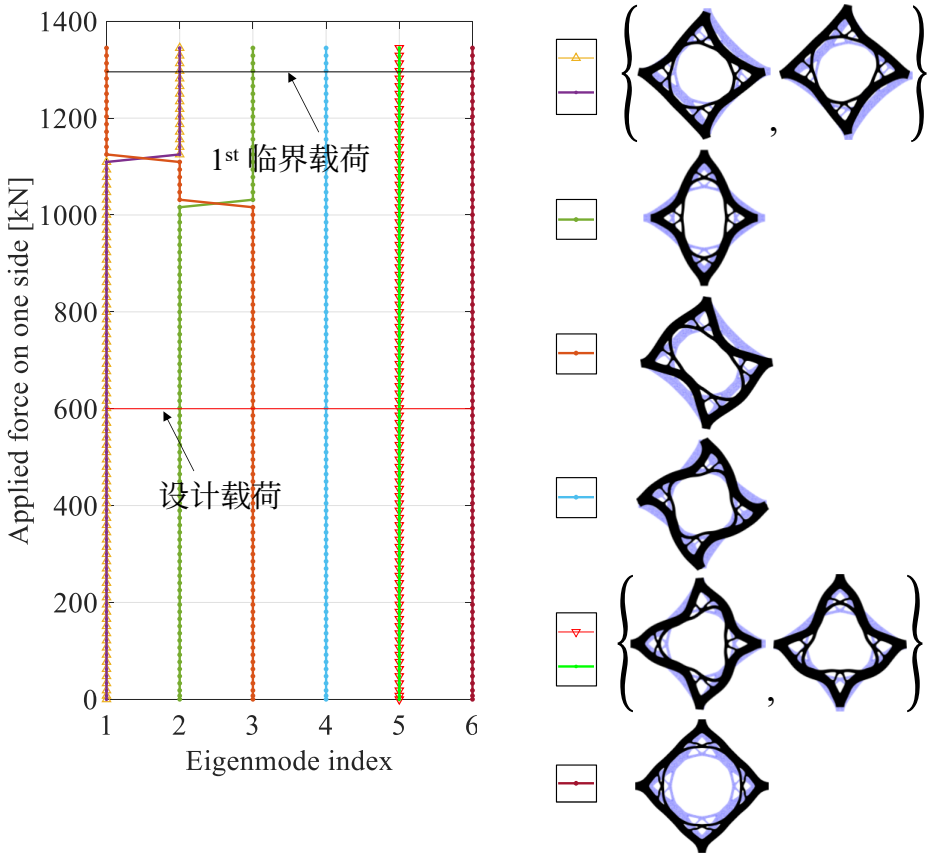



图41. 稳定性阈值$\hat{\lambda} = 0.002$ 时拟合设计在加载过程中的模态切换（注：1st 临界载荷以上的曲线沿主分支变化）。

三种情况的优化拓扑如图34所示，其目标函数值和前八个特征值列于表3。从表3可以看出，情况1中未施加稳定性约束的设计在达到目标载荷之前就已失稳。由于对称性，在优化过程中，所考虑的前六个特征值簇中始终存在重特征值，因此情况2和情况3在整个优化过程中都会启用式（41）中的子优化。图35绘出了优化过程中纳入的特征值数量（$m$K），可以看出，在大约前一百次迭代中，前六个不同特征值簇中最多可包含27个特征值（图35b），而在其余迭代中为$m\mathrm{K} = 8$。图36展示了目标函数、体积约束函数和前八个特征值的优化历史，

其中所有约束均得到满足，且目标函数值不断下降。约束特征模态

最终优化设计的形态如图37所示，它们均为“真实”模态。图34中的优化拓扑结构进一步采用B样条进行拟合，并用有限元网格离散，如图38所示。在相同载荷模式下，采用附录D2中的弧长延续法和分支切换方法，绘制了三个设计的载荷-位移曲线，如图39所示。其中，案例1、2和3的1st 分岔载荷分别为912.49 kN、992.61 kN和1295.55 kN。需要注意的是，为简化起见，图39中每两个/四个对称解仅绘出一个。作为示例，图40展示了四个本质上对称的不同解。这四个解中，图39仅绘出了对应于变形$\boldsymbol{A}_1$ 的解。此外，案例2（$\hat{\lambda}$ =0.002）的载荷-位移曲线表明，在1st 分岔点处分出的分岔支并未像案例1那样遵循与设计载荷下最小特征值相关的模态（图37b）。为进一步探究这一现象，图41跟踪了加载过程中各特征值簇中的每个特征模态及其对应特征值。如图41所示，在外载荷达到1000 kN之前，特征模态的顺序与图37b中的相同。然而，在1000 kN至1200 kN之间发生了模态切换，此后，与初始特征模态$\boldsymbol{\phi}_4$ 相关的特征值变为最小，而与位于由初始特征基$\boldsymbol{\phi}_1$ 和$\boldsymbol{\phi}_2$ 张成的超平面上的特征模态成对的重特征值则切换至第二个簇。

## 8 结论

本研究提出了一种用于带有非线性稳定性约束的几何非线性拓扑优化的计算框架。与只有在变形较小时才能提供准确结果的线性屈曲约束不同，本研究采用的非线性稳定性约束

能够在大变形情况下准确控制潜在屈曲。有限变形下的非线性稳定性分析借助所提出的伪质量矩阵实现，该矩阵能够有效去除与空洞和低密度单元相关的伪屈曲模态。当所有单元均为实体时，该伪质量矩阵最终退化为单位矩阵。对于多重（重复）特征值不可微的问题，本研究采用 Seyranian 等人提出的扰动策略计算方向导数[21]，并将该框架扩展至纳入非线性切线刚度矩阵和伪质量矩阵。本文提出了一种新颖的优化公式，以适应简单和多重特征值情形；该公式由外层循环和内层循环组成，外层循环优化设计变量，内层循环则利用线性化的目标函数和约束函数优化增量设计变量。针对几何非线性导致的网格畸变问题，本文采用了作者在[16]中提出的自适应线性能量插值方案。

数值算例证明了所开发框架在处理具有简单特征值和重特征值的设计优化问题时的有效性。根据所展示的结果可以得出结论：通过纳入非线性屈曲约束，可以保证优化设计在目标载荷范围内的结构稳定性。此外，提高稳定性约束中的稳定性阈值（$\hat{\lambda}$）值，可得到临界载荷更高的优化结构。结果表明，采用所提出的框架能够获得更优的稳定性表现，但代价是刚度降低。还值得指出的是，由于模态切换，稳定性约束中与最小特征值对应的特征模态可能并非优化结构在其 $1^{st}$ 临界载荷下的屈曲模态，而该临界载荷通常高于目标设计载荷。

**致谢**

第一作者谨此感谢中央高校基本科研业务费（编号：3205002207A1）提供的经费支持。第二作者谨此感谢美国国家科学基金会通过 CMMI-1762277 项目提供的支持。本文中表达的任何观点、研究结果、结论和建议均为作者所持，并不一定反映资助方的观点。

## 附录 A：单重/多重

### 特征值

本附录详细说明了计算单重/多重特征值灵敏度分析所需各项内容的方法，即公式（25）和（39）中给出的各项内容。

**A 1. 导数** $\partial(\boldsymbol{\phi}_s^T \boldsymbol{K}_T \boldsymbol{\phi}_k)$ $\partial\boldsymbol{\rho}$ fi $\boldsymbol{\phi}_s,\boldsymbol{\phi}_k$

MNOPQ

由于密度场在每个单元内均为常数，因此可以逐单元计算导数。也就是说，首先将特征向量 $\boldsymbol{\phi}_s$ 按单元逐一分解为 $\boldsymbol{\phi}_s^e$ $(e = 1, \dots, n_{ele})$，然后即可计算导数：

$$\left.\frac{\partial(\boldsymbol{\phi}_s^T \boldsymbol{K}_T \boldsymbol{\phi}_k)}{\partial \rho_e}\right|_{\boldsymbol{\phi}_s,\boldsymbol{\phi}_k \text{ fixed}} = \boldsymbol{\phi}_s^{eT} \frac{\partial \boldsymbol{k}_T^e}{\partial \rho_e} \boldsymbol{\phi}_k^e \quad , \quad e = 1, \dots, n_{ele} \tag{A 1}$$

其中，利用方程 (14)、(12) 和 (3)，可按以下方式计算 $e^{\text{th}}$ 单元的导数 $\partial \boldsymbol{k}_T^e / \partial \rho_e$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{k}_T^e}{\partial \rho_e} = 2\eta \frac{\partial \eta}{\partial \rho_e} \int_{\Omega_0^e} \boldsymbol{B}^T [\mathbb{A}] \boldsymbol{B} \, dV + \eta^2 \int_{\Omega_0^e} \boldsymbol{B}^T \left[ \left.\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \rho_e}\right|_{\boldsymbol{F} \text{ fixed}} + \frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \boldsymbol{F}} : \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \rho_e} \right] \boldsymbol{B} \, dV \\ - 2\eta \frac{\partial \eta}{\partial \rho_e} \int_{\Omega_0^e} \boldsymbol{B}_L^T [\mathbb{C}] \boldsymbol{B}_L \, dV + (1 - \eta^2) \int_{\Omega_0^e} \boldsymbol{B}_L^T \left[ \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \rho_e} \right] \boldsymbol{B}_L \, dV\end{aligned} \tag{A 2}$$

其中，$\partial\eta/\partial\rho_e$ 根据式 (12)$_2$计算，$\partial\mathbb{A}/\partial\rho_e|_{\boldsymbol{F} \text{ fixed}}$和 $\partial\mathbb{C}/\partial\rho_e$ 则很容易求得，因为它们与杨氏模量成正比；对于式 (8) 中所考虑的 Neo-Hookean 超弹性模型，导数 $\partial\mathbb{A}/\partial\boldsymbol{F}$ 为

$$\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \boldsymbol{F}} = \kappa(2J-1)J\frac{\partial \boldsymbol{F}^{-T}}{\partial \boldsymbol{F}} \otimes \boldsymbol{F}^{-T} + \kappa(J-1)J\frac{\partial^2 \boldsymbol{F}^{-T}}{\partial \boldsymbol{F}\partial \boldsymbol{F}} + \kappa(4J-1)J\boldsymbol{F}^{-T} \otimes \boldsymbol{F}^{-T}$$
$$\otimes \boldsymbol{F}^{-T} + \kappa(2J-1)J\frac{\partial(\boldsymbol{F}^{-T} \otimes \boldsymbol{F}^{-T})}{\partial \boldsymbol{F}} - \frac{\mu}{3}\frac{\partial \boldsymbol{F}^{-T}}{\partial \boldsymbol{F}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \boldsymbol{F}} - \frac{\mu}{3}\bar{I}_1\frac{\partial^2 \boldsymbol{F}^{-T}}{\partial \boldsymbol{F}\partial \boldsymbol{F}}$$
$$-\frac{\mu}{3}\boldsymbol{F}^{-T} \otimes \frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \boldsymbol{F}\partial \boldsymbol{F}} - \frac{\mu}{3}\frac{\partial \boldsymbol{F}^{-T}}{\partial \boldsymbol{F}} \boxdot \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \boldsymbol{F}} - \frac{2}{3}\mu J^{-\frac{2}{3}}\mathbb{I}_4 \otimes \boldsymbol{F}^{-T} + \frac{4}{9}\mu J^{-\frac{2}{3}}\boldsymbol{F}$$
$$\otimes \boldsymbol{F}^{-T} \otimes \boldsymbol{F}^{-T} - \frac{2}{3}\mu J^{-\frac{2}{3}}\frac{\partial(\boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{F}^{-T})}{\partial \boldsymbol{F}} \tag{A 3}$$

其中

$$\left[\frac{\partial^2 \boldsymbol{F}^{-T}}{\partial \boldsymbol{F}\partial \boldsymbol{F}}\right]_{ijklpq} = F^{-1}_{qi}F^{-1}_{lp}F^{-1}_{jk} + F^{-1}_{qk}F^{-1}_{jp}F^{-1}_{li}$$

$$\left[\frac{\partial(\boldsymbol{F}^{-T} \otimes \boldsymbol{F}^{-T})}{\partial \boldsymbol{F}}\right]_{ijklpq} = -F^{-1}_{qi}F^{-1}_{jp}F^{-1}_{lk} - F^{-1}_{qk}F^{-1}_{lp}F^{-1}_{ji}$$

$$\left[\frac{\partial(\boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{F}^{-T})}{\partial \boldsymbol{F}}\right]_{ijklpq} = \delta_{ip}\delta_{jq}F^{-1}_{lk} - F_{ij}F^{-1}_{qk}F^{-1}_{lp} \tag{A 4}$$

$$\frac{\partial^2 \bar{I}_1}{\partial \boldsymbol{F}\partial \boldsymbol{F}} = -\frac{2}{3}\boldsymbol{F}^{-T} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \boldsymbol{F}} - \frac{2}{3}\bar{I}_1\frac{\partial \boldsymbol{F}^{-T}}{\partial \boldsymbol{F}} - \frac{4}{3}J^{-2/3}\boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{F}^{-T} + 2J^{-2/3}\mathbb{I}_4$$

而项 $\partial \bar{I}_1/\partial \boldsymbol{F}$ 和 $\partial \boldsymbol{F}^{-T}/\partial \boldsymbol{F}$ 的计算分别见方程 (9) 和 (11)，算子 $\boxdot$ 定义为 $(\mathrm{H} \boxdot \boldsymbol{H})_{ijklpq} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{H}_{ijpq}H_{kl}$，其中 H 是 4th 阶张量，$\boldsymbol{H}$ 是 2nd 阶张量。

在式 (A 2) 中，变形梯度 $\boldsymbol{F}$ 对单元密度变量 $\rho_e$ 的依赖关系由线性能量插值确定，见式 (12)，其导数为

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \rho_e}\right] = \frac{\partial \eta}{\partial \rho_e}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_e \tag{A 5}$$

**A 2. 导数** $\partial(\boldsymbol{\phi}_s^T \boldsymbol{K}_T \boldsymbol{\phi}_k)$ $\partial \boldsymbol{u}$ fi $\boldsymbol{\phi}_s,\boldsymbol{\phi}_k$

MNOPQ

通过有限元组装，可以逐单元地计算此项，即:

$$\left.\frac{\partial(\boldsymbol{\phi}_s^T \boldsymbol{K}_T \boldsymbol{\phi}_k)}{\partial \boldsymbol{u}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_s,\boldsymbol{\phi}_k \text{ fixed}} = \mathop{\mathcal{A}}_{e=1}^{n_{ele}} \frac{\partial\left(\boldsymbol{\phi}_s^{eT} \boldsymbol{k}_T^e \boldsymbol{\phi}_k^e\right)}{\partial \boldsymbol{u}_e} \tag{A 6}$$

其中，项 $\boldsymbol{\phi}_s^{eT} \boldsymbol{k}_T^e \boldsymbol{\phi}_k^e$ 首先展开为

$$\boldsymbol{\phi}_s^{eT} \boldsymbol{k}_T^e \boldsymbol{\phi}_k^e = \int_{\Omega_0^e} \eta^2 (\boldsymbol{B}\boldsymbol{\phi}_s^e)^T [\mathbb{A}] (\boldsymbol{B}\boldsymbol{\phi}_k^e)\, dV + \int_{\Omega_0^e} (1-\eta^2)(\boldsymbol{B}_L \boldsymbol{\phi}_s^e)^T [\mathbb{C}] (\boldsymbol{B}_L \boldsymbol{\phi}_k^e)\, dV \tag{A 7}$$

并可进一步改写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_s^{eT} \boldsymbol{k}_T^e \boldsymbol{\phi}_k^e = & \int_{\Omega_0^e} \eta^2 [\mathbb{A}] : [(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\phi}_k^e)(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\phi}_s^e)^T]\, dV \\ & + \int_{\Omega_0^e} (1-\eta^2) [\mathbb{C}] : [(\boldsymbol{B}_L \boldsymbol{\phi}_k^e)(\boldsymbol{B}_L \boldsymbol{\phi}_s^e)^T]\, dV \end{aligned} \tag{A 8}$$

其中，双点积“:”的作用与张量缩并类似，但它作用于两个矩阵之间，即 $[\boldsymbol{A}]:[\boldsymbol{B}] = \sum_{i\,j} A_{ij} B_{ij,}$ 。因此，导数 $\partial \mathrm{x}\boldsymbol{\phi}_s^{eT} \boldsymbol{k}_T^e \boldsymbol{\phi}_k^e \mathrm{y}/\partial \boldsymbol{u}_e$ 可通过以下方式计算

$$\frac{\partial\left(\boldsymbol{\phi}_s^{eT} \boldsymbol{k}_T^e \boldsymbol{\phi}_k^e\right)}{\partial \boldsymbol{u}_e} = \int_{\Omega_0^e} \eta^2 [(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\phi}_k^e)(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\phi}_s^e)^T] : \left[\frac{\partial \mathbb{A}}{\partial \boldsymbol{u}_e}\right] dV \tag{A 9}$$

因为线性部分不是位移的函数。在式（A *8*）中，矩阵 [𝔸] 是二维情况下的矩阵（3D 情况下则为 9×9 ）。因此，$[(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\phi}_k^e)(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\phi}_s^e)^T]$ 与矩阵 [𝔸]的尺寸相同。为简化数值实现，二维情况下的矩阵 $[(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\phi}_k^e)(\boldsymbol{B}\boldsymbol{\phi}_s^e)^T]$ 和 [𝔸] 可以重塑为大小为 16×1的向量，而双点积则变为两个向量之间的点积

因此，张量 $[\partial\mathbb{A}/\partial\boldsymbol{u}_e]$ 的矩阵形式大小为 16×8。导数$\partial\mathbb{A}/\partial\boldsymbol{u}_e$ 推导如下

$$\frac{\partial\mathbb{A}}{\partial\boldsymbol{u}_e}=\frac{\partial\mathbb{A}}{\partial\boldsymbol{F}}:\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial\boldsymbol{u}_e} \tag{A 10}$$

其中，矩阵形式的导数 $\partial\boldsymbol{F}/\partial\boldsymbol{u}_e$ 简单地写作 $[\partial\boldsymbol{F}/\partial\boldsymbol{u}_e]=\eta\boldsymbol{B}$。

**A 3. 导数** $\partial(\boldsymbol{\phi}_s^T\boldsymbol{S}_M\boldsymbol{\phi}_k)$ $\partial\boldsymbol{\rho}$ fi $_{\boldsymbol{\phi}_s,\boldsymbol{\phi}_k}$

MNOPQ

首先，通过将特征向量 $\boldsymbol{\phi}_s$ 按节点格式排列，对项 $\boldsymbol{\phi}_s^T\boldsymbol{S}_M\boldsymbol{\phi}_k$ 进行展开。也就是说，对于二维情况，特征向量 $\boldsymbol{\phi}_s$ 被重塑为大小为 $2\times\#node$ 的矩阵；对于三维情况，则重塑为大小为 $3\times\#node$ 的矩阵。每一列表示相应特征模态中一个节点的位移。我们将特征向量的新格式记为

$$\boldsymbol{\phi}_s=[\widehat{\boldsymbol{\phi}}_s^1\quad\widehat{\boldsymbol{\phi}}_s^2\quad\dots\quad\widehat{\boldsymbol{\phi}}_s^{\#node}]_{d\times\#node} \tag{A 11}$$

因此，项 $\boldsymbol{\phi}_s^T\boldsymbol{S}_M\boldsymbol{\phi}_k$ 可以表示为

$$\boldsymbol{\phi}_s^T\boldsymbol{S}_M\boldsymbol{\phi}_k=\sum_{i=1}^{\#node}\widetilde{m}_i\widehat{\boldsymbol{\phi}}_s^{i\,T}\widehat{\boldsymbol{\phi}}_k^i \tag{A 12}$$

密度 v ector $\boldsymbol{\rho}$ 被分解为节点密度向量 $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_i$ $(i=1,\dots,\#node)$，其中 e

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}}_i=\begin{bmatrix}\vdots\\ \rho_r\\ \vdots\end{bmatrix},\ r\in\mathcal{B}_i \tag{A 13}$$

其大小可能有所不同，具体取决于 $\mathrm{B}_i$ 中单元编号的数量，参见方程 (18) 后的说明。由方程 (18) 和 (19) 可知,

$$\frac{\partial\widetilde{m}_i}{\partial\widehat{\boldsymbol{\rho}}_i}=\frac{\partial\widetilde{m}_i}{\partial\varpi_i}\frac{\partial\varpi_i}{\partial\widehat{\boldsymbol{\rho}}_i} \tag{A 14}$$

with

$$\frac{\partial \widetilde{m}_i}{\partial \varpi_i} = \begin{cases} p_m(1-\hat{\epsilon})\varpi_i^{p_m-1} & \text{if } \varpi_i \le \varpi_L \\ a_1 + 2a_2\varpi_i + 3a_3\varpi_i^2 & \text{if } \varpi_L < \varpi_i < \varpi_H \\ 0 & \text{if } \varpi_i \ge \varpi_H \end{cases}$$

$$\frac{\partial \varpi_i}{\partial \widehat{\boldsymbol{\rho}}_i} = \frac{1}{q}\left(\sum_{r\in\mathcal{B}_i} \rho_r^q\right)^{\frac{1}{q}-1} \begin{bmatrix} \vdots \\ q\rho_r^{q-1} \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad r \in \mathcal{B}_i$$

并且当 $i \neq j$ 时，$\partial \widetilde{m}_i/\partial \widehat{\boldsymbol{\rho}}_j = \mathbf{0}$。

因此，很容易得出

$$\left.\frac{\partial(\boldsymbol{\phi}_s^T \boldsymbol{S}_M \boldsymbol{\phi}_k)}{\partial \boldsymbol{\rho}}\right|_{\boldsymbol{\phi}_s,\boldsymbol{\phi}_k \text{ fixed}} = \mathop{\widehat{\mathcal{A}}}_{\iota=1}^{\#node} \frac{\partial(\boldsymbol{\phi}_s^T \boldsymbol{S}_M \boldsymbol{\phi}_k)}{\partial \widehat{\boldsymbol{\rho}}_i} \tag{A 15}$$

其中，$\widehat{\mathcal{A}}$ 是一个组装算子，用于将相同单元编号的项相加。

根据式（A *12*），导数 $\partial(\boldsymbol{\phi}_s^T \boldsymbol{S}_M \boldsymbol{\phi}_k)/\partial \widehat{\boldsymbol{\rho}}_i$ 可计算为

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\phi}_s^T \boldsymbol{S}_M \boldsymbol{\phi}_k)}{\partial \widehat{\boldsymbol{\rho}}_i} = \left(\widehat{\boldsymbol{\phi}}_s^{i\,T} \widehat{\boldsymbol{\phi}}_k^i\right) \frac{\partial \widetilde{m}_i}{\partial \widehat{\boldsymbol{\rho}}_i} \tag{A 16}$$

## A 4. 导数 $\partial \boldsymbol{R}/\partial \boldsymbol{\rho}$

导数 $\partial \boldsymbol{R}/\partial \boldsymbol{\rho}$ 通过有限元组装计算为

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \mathop{\mathcal{A}}_{e=1}^{n_{ele}} \frac{\partial \boldsymbol{R}_e}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad \text{with} \quad \frac{\partial \boldsymbol{R}_e}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{R}_e}{\partial \rho_1} & \dfrac{\partial \boldsymbol{R}_e}{\partial \rho_2} & \cdots & \dfrac{\partial \boldsymbol{R}_e}{\partial \rho_{n_{ele}}} \end{bmatrix} \tag{A 17}$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{R}_e}{\partial \rho_e} = {} & \frac{\partial \eta}{\partial \rho_e} \int_{\Omega_0^e} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{P}\, dV + \int_{\Omega_0^e} \eta \boldsymbol{B}^T \left( \left.\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial \rho_e}\right|_{\boldsymbol{F} \text{ fixed}} + \mathbb{A} : \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \rho_e} \right) dV \\ & - 2\eta \frac{\partial \eta}{\partial \rho_e} \int_{\Omega_0^e} \boldsymbol{B}_L^T [\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}]\, dV + \int_{\Omega_0^e} (1-\eta^2) \boldsymbol{B}_L^T \left[ \frac{\partial \mathbb{C}}{\partial \rho_e} : \boldsymbol{\varepsilon} \right] dV \end{aligned} \tag{A 18}$$

且 $\partial \boldsymbol{R}_e/\partial \rho_j = \mathbf{0}$ if $e \neq j$。求导数（$\partial \boldsymbol{P}/\partial \rho_e$）$|_{\boldsymbol{F}\text{ fixed}}$ 很简单，因为 1st PK 应力$\boldsymbol{P}$ 与杨氏模量成正比。

## A 5. 导数 $\partial \boldsymbol{R}/\partial \boldsymbol{u}$

根据定义，导数 $\partial \boldsymbol{R}/\partial \boldsymbol{u}$ 给出切线刚度矩阵，即

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{K}_T \tag{A 19}$$

其中，$\boldsymbol{K}_T$ 由式（*14*）给出。

## 附录 B：末端柔度和体积分数的灵敏度分析

### B 1. 目标函数的灵敏度 $f_0$

目标函数的灵敏度分析采用伴随法进行。

$$\frac{df_0}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\chi}^T \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \tag{B 1}$$

其中，$\boldsymbol{\chi}$ 是与$\boldsymbol{R}$ 大小相同的伴随变量向量，其计算公式为

$$\boldsymbol{\chi}^T = -\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{u}} \left[\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{u}}\right]^{-1} \tag{B 2}$$

其中，导数$\partial \boldsymbol{R}/\partial \boldsymbol{\rho}$ 和$\partial \boldsymbol{R}/\partial \boldsymbol{u}$ 见附录 A4 和 A5，其余需要计算的项为$\partial f_0/\partial \boldsymbol{\rho}$ 和$\partial f_0/\partial \boldsymbol{u}$，其计算公式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{\rho}} &= \boldsymbol{0} \\ \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{u}} &= \boldsymbol{F}_{ext}^T \end{aligned} \tag{B 3}$$

### B 2. 体积分数的灵敏度 $f_1$

体积分数函数仅是密度变量的函数，不依赖于结构响应。根据方程 (40) 和 (43),

$$\frac{df_1}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{1}{V_f}\frac{1}{V_s}\tilde{\boldsymbol{v}}^T \tag{B 4}$$

## 附录 C：灵敏度验证

在本附录中，使用双端固支梁示例和中心差分法（CDM），验证第 5 节、附录 A 和 B 中给出的灵敏度推导的准确性，其中采用的扰动值为 $h = 10^{-5}$。双端固支梁的尺寸、载荷、边界条件和材料属性见图 9。设计域采用 30×10 有限元网格进行离散，其（随机）密度分布和单元编号如图 42 所示。SIMP 中的参数选为 $p = 3$、 $p_L = 6$、 $\epsilon = 10^{-8}$，伪质量构造中使用的参数与第 4.2 节中使用的参数相同。

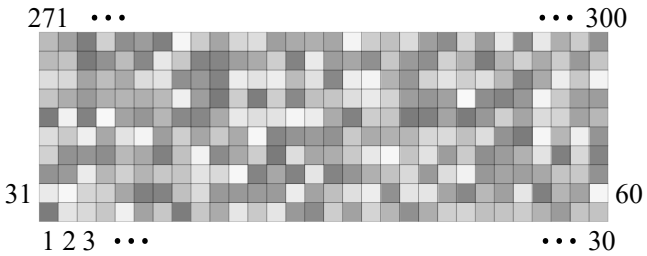
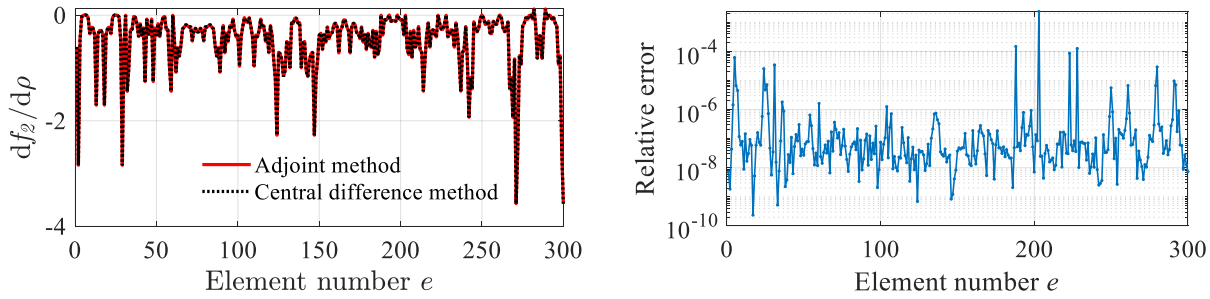
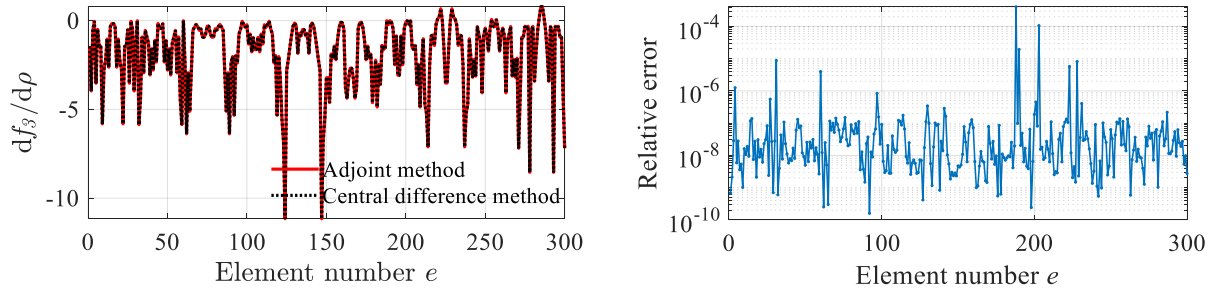



图 42. 用于灵敏度验证的双端固支梁有限元网格、单元编号和密度分布。

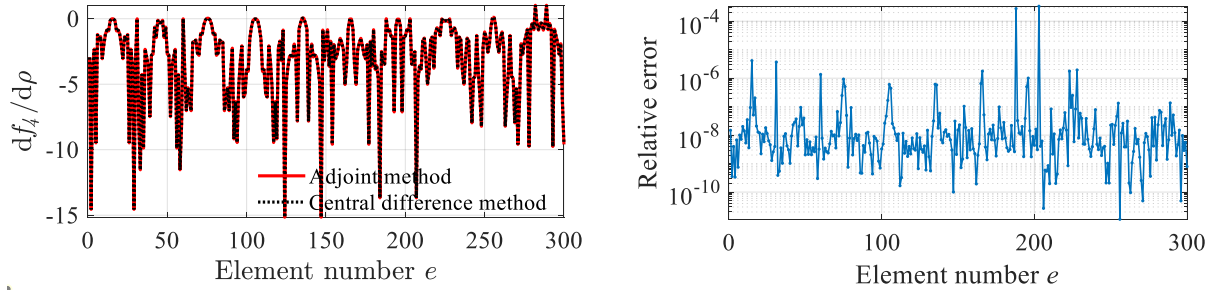
对于图 42 所示的密度分布，前六个特征值均为单特征值。图 43 和图 44 展示了特征值（$df_i/d\boldsymbol{\rho}$ with$f_i$ 在公式（40）中3）以及目标函数（$df_0/d\boldsymbol{\rho}$）的灵敏度验证结果，其中将所提出的伴随法得到的设计灵敏度与通过中心差分法得到的结果进行了比较。如图 43 和图 44 所示，使用伴随法计算的灵敏度与中心差分法所得结果高度吻合，相对误差介于 $10^{-4}$ 至 $10^{-10}$之间。需要指出的是，尽管灵敏度验证中仅考察了单特征值情形，但其中使用的要素与多重特征值情形相同，参见公式（25）和（39）以及附录 A。因此，伴随灵敏度分析是正确的，可放心用于拓扑优化研究。



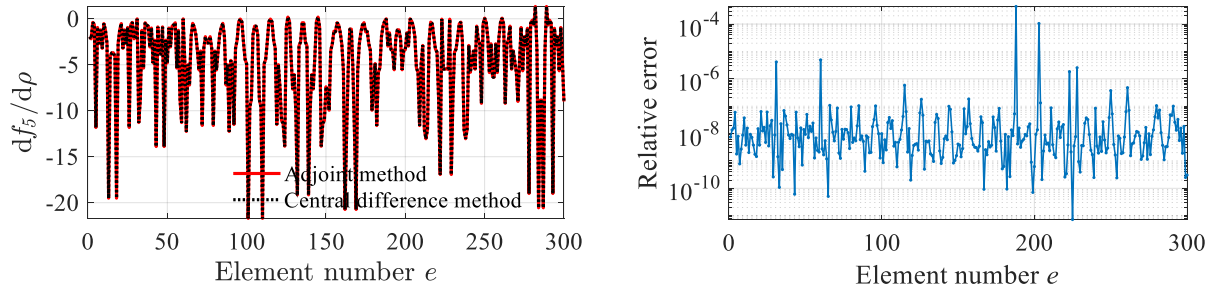

(a) $df_2/d\boldsymbol{\rho}$ 的导数



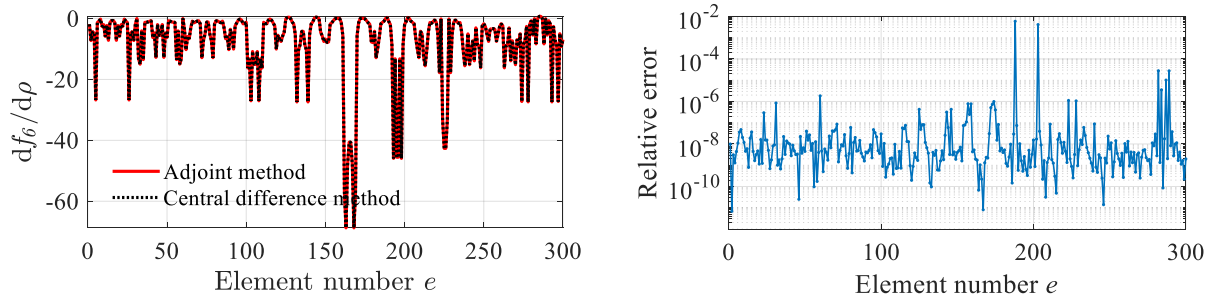

(b) $df_3/d\boldsymbol{\rho}$ 的导数



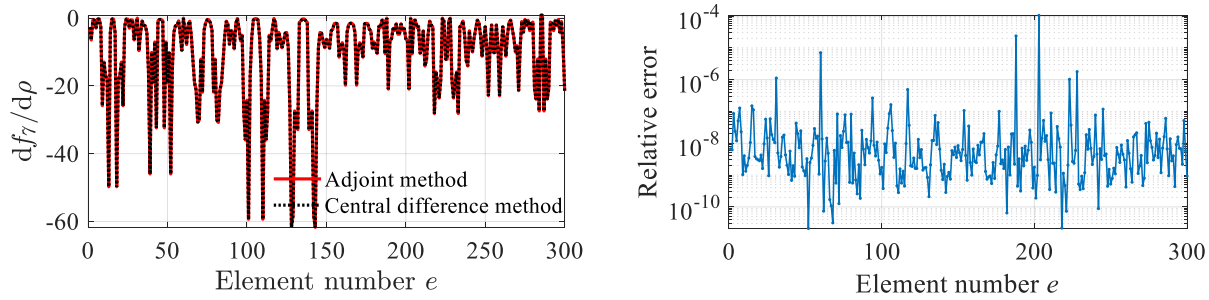

(c) $df_4/d\boldsymbol{\rho}$ 的导数




(d) $df_5/d\boldsymbol{\rho}$ 的导数




(e) $df_6/d\boldsymbol{\rho}$ 的导数




(f) $df_7/d\boldsymbol{\rho}$ 的导数

图 43. 比较使用伴随法和中心差分法计算的特征值函数 $f_i$ ($i = 2, ..., 7$) 的灵敏度。左：两种方法的比较；右：伴随法相对于中心差分法的相对误差。

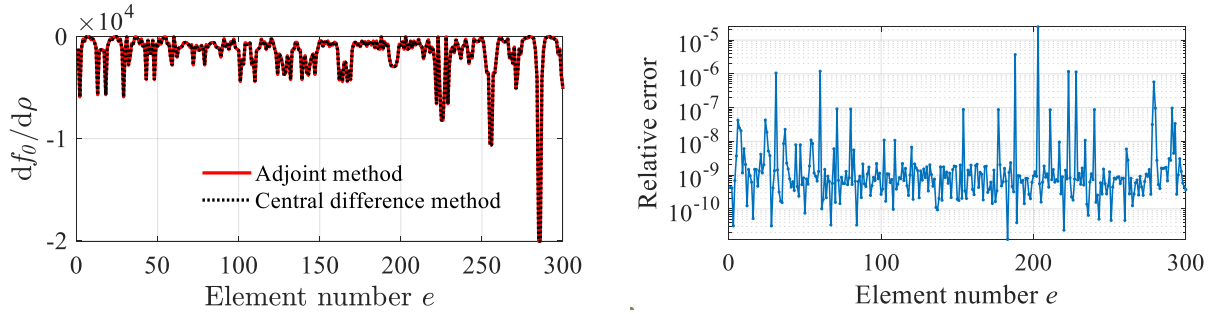



图 44. 比较使用伴随法和中心差分法计算的目标函数 $f_0$ 的灵敏度。左：两种方法的比较；右：伴随法相对于中心差分法的相对误差。

## 附录D：分支切换分岔

当临界点为极限点时，解是唯一的（即主解），可以采用弧长延续法追踪跳跃或可能出现的回跳路径。然而，当临界点为分岔点时，后屈曲分析方法必须能够从主分支切换到次分支。关于简单/多重分岔点之后进行分支切换的现有方法，可参见文献 [60-64]。本附录简要介绍本研究采用的分支切换处理方法。

### D 1. 简单分岔点

在简单分岔点处，除主分支外只有一条分岔支。对于从分岔点发出的次分支路径上的 1st 点，可将扰动解用作牛顿-拉夫森迭代的初始猜测，从而直接实现从主分支到次分支的切换 [60]。该扰动是在分岔点处的解上添加一个缩放特征向量，即，

$$\boldsymbol{u}^p = \boldsymbol{u}_{cr} + \zeta \frac{\boldsymbol{\phi}_1}{\|\boldsymbol{\phi}_1\|} \tag{D 1}$$

其中，$\boldsymbol{u}^p$ 用作牛顿-拉夫森迭代的预测量，用于求解分岔点之后次分支路径上的第一个点。这里，$\boldsymbol{u}_{cr}$ 表示临界（分岔）点处的解，$\boldsymbol{\phi}_1$ 是与分岔点处的简单零特征值对应的特征向量。文献[61, 64], 建议，缩放因子$\zeta$可估算为

$$\zeta = \pm \frac{\|\boldsymbol{u}_{cr}\|}{\tau} \tag{D 2}$$

其中，$\tau$ 是控制扰动幅度的因子，建议将其选为大约与 100 [61] 同一量级。$\zeta$ 的符号表示沿次级

分支前进的方向。在简单分岔点，存在三个方向——一个沿主分支前进，另外两个与次级分支相关。在后屈曲分析中，由于这两个方向具有对称性，因此只跟踪并展示其中一个。

### D 2. 多重分岔点

与简单分岔情形相比，在多重分岔点处寻找分岔后分支的计算复杂得多，因为分支的数量并非先验已知。尽管可以在式（D 1）中将缩放特征向量替换为多个特征向量的线性组合[61], ，以此采用该扰动，但要获得完整的分支集仍然很困难。Kouhia 和 Mikkola[63]综述了现有的分支切换算法。在这些算法中，Huitfeldt [65] 提出的方法基于局部扰动算法，通过沿分支连接曲线进行遍历，被认为能够稳健地计算出所有平衡分支。该方法属于广义路径跟踪方法 [64]，可视为将传统的平衡路径跟踪扩展到多维解流形：通过多参数设置（例如载荷因子、材料属性、几何尺寸等）进行探索 [14, 62, 64] ，而非仅采用单参数设置（即载荷因子）。

根据参考文献 [62, 64], ，待求解的全局非线性平衡与辅助方程和弧长法结合后，可表示为

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{u},\gamma,\gamma_s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_u \\ (\boldsymbol{u},\gamma,\gamma_s)\ R_{aux}(\boldsymbol{u})\ R_{arc}(\boldsymbol{u}) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad \text{与} \boldsymbol{R}_u(\boldsymbol{u},\gamma,\gamma_s)$$

$$= \boldsymbol{F}_{int}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{F}_{ext}(\gamma,\gamma_s) \text{ 与 } \boldsymbol{F}_{ext}(\gamma,\gamma_s) = \gamma \boldsymbol{P}\mathrm{N} + \gamma_s \boldsymbol{P}\mathrm{N}_s R_{aux}(\boldsymbol{u}) = ( \qquad \text{(D 3)}$$
$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{cr})^T(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{cr}) - r^2$$

$R_{arc}$（$\boldsymbol{u}$）$= \Delta \boldsymbol{u}^T \Delta \boldsymbol{u} - \mathrm{l}^2$

其中，$\boldsymbol{P}$N 是原始外载荷向量（即式（7）中的项 $\boldsymbol{F}_{ext}$），并乘以载荷因子$\gamma$； $\boldsymbol{P}\mathrm{N}_s$ 表示扰动力向量，其中 $\gamma_s$ 用于控制其大小；$\boldsymbol{u}_{cr}$ 表示临界点处已知的位移解；$r$ 表示包围临界点 $\boldsymbol{u}_{cr}$的圆柱半径；l 表示弧长参数。这里，$\boldsymbol{R}_u(\boldsymbol{u}, \gamma, \gamma_s) = \boldsymbol{0}$ 定义了一个由两个参数 $\gamma$ 和 $\gamma_s$ 参数化的扰动平衡状态，它代表 $\mathrm{R}^{n+2}$ 中的一个二维解流形，其中 $\boldsymbol{u} \in \mathrm{R}^n$。已有研究表明，圆柱辅助方程 $R_{aux} = 0$ 优于球面方程（例如，$R_{aux}(\boldsymbol{u}, \gamma, \gamma_s) = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{cr})^T(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_{cr}) + (\gamma - \gamma_{cr})^2 + \gamma_s^2 - r^2$，其中 $\gamma_{cr}$ 是临界点处的载荷因子），参见 Eriksson [62]。$\boldsymbol{R}_u(\boldsymbol{u}, \gamma, \gamma_s) = \boldsymbol{0}$ 与 $R_{aux}(\boldsymbol{u}) = 0$ 的交集在 $\mathrm{R}^{n+2}$中定义了一条闭合的一维曲线，即所谓的分支连接曲线（BCC）。显然，满足$\gamma_s = 0$ 的解子集就是式（7）中原始平衡问题的解。该曲线在每个分支上恰好经过一个点，并且扰动参数 $\gamma_s$ 经过该点时会改变符号。因此，目标是在追踪 BCC 的过程中定位 $\gamma_s$ 的零点。通过柱面弧长法 [57] 追踪 BCC 曲线，具体做法是添加 $R_{arc}(\boldsymbol{u})$；其中 $\Delta \boldsymbol{u}$ 是从上一步到当前求解步的位移增量。

备注：

1. 根据 Eriksson [62], 的建议，$R_{aux}(\boldsymbol{u}) = 0$ 中定义的圆柱半径选为$r \approx 0.1 \| \boldsymbol{u}_{cr} \|_2$。

2. 对于扰动力 $\boldsymbol{P}\mathrm{N}_s$ 的选取，与 Eriksson [62] 建议采用特征模态主导分量的单位向量不同，研究发现，随机向量

经原始力 $\boldsymbol{P}$N 正交化后，通过遍历 BCC 更能稳健地获得所有分支，即，

$$\widehat{\boldsymbol{P}}_s = \left( \boldsymbol{I} - \frac{1}{\|\widehat{\boldsymbol{P}}\|} \widehat{\boldsymbol{P}} \otimes \widehat{\boldsymbol{P}} \right) \boldsymbol{\xi} \quad \text{where} \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \text{ with } \xi_i \sim U(-1,1), \ i = 1, \ldots, n \qquad \text{(D 4)}$$

其中，$U(-1,1)$ 表示取值范围为 -1 到 1 的均匀分布。$\boldsymbol{P}\mathrm{N}_s$ 还可以通过除以其范数 $\|\boldsymbol{P}\mathrm{N}_s\|_2$ 进一步归一化。

3. 如参考文献 [62, 64]，所述，确定具有 $\gamma_s = 0$ 的解点时，在正负 $\gamma_s$ 之间进行线性插值可以得到较好的近似。然而，当弧长参数 l 相对较大时，解 $(\boldsymbol{u}, \gamma)$ 的精度可能会受到影响。在这种情况下，可以采用牛顿-拉夫森迭代来提高解的精度。

4. 当 BCC 曲线闭合时，弧长延续法终止，即在 $\gamma_s = 0]$ 处最后找到的解点 $[(\boldsymbol{u}, \gamma)$ 与第一个找到的解相同。

5. 每个分岔支都有两个方向（见图40a或图40b）。采用所提出的 BCC 遍历方法，并适当选择扰动荷载向量，预计可以计算两个方向上的所有次级分支。

6. 对式 (D 3) 中的非线性方程组求解，得到每条次分支上的第一个点。此后，再以找到的点为起点，重新使用圆柱弧长法，沿每条次分支进行追踪，从而完成后屈曲分析。

## 参考文献

1. Bendsøe, M.P. 和 N. Kikuchi，利用均匀化方法生成结构设计中的最优拓扑。《计算力学与工程方法》，1988年。71(2): p. 197-224。DOI: https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90086-2。 2. Bendsoe, M.P. 和 O. Sigmund，《拓扑优化：理论、方法与应用》。2003年：Springer Science & Business Media。 3. Deaton, J.D. 和 R.V. Grandhi，结构与多学科连续体拓扑优化综述：2000年以后。《结构与多学科优化》，2014年。49(1): p. 1-38。DOI: 10.1007/s00158-013-0956-z。 4. Kato, J. 等，弹塑性复合材料拓扑优化中的解析灵敏度。《结构与多学科优化》，2015年。52(3): p. 507-526。DOI: 10.1007/s00158-015-1246-8。 5. Zhang, G.、L. Li 和 K. Khandelwal，使用增强假定应变单元对各向异性塑性材料结构进行拓扑优化。《结构与多学科优化》，2017年。55(6): p. 1965-1988。DOI: 10.1007/s00158-016-1612-1。 6. Buhl, T.、C.B.W. Pedersen 和 O. Sigmund，利用拓扑优化进行几何非线性结构的刚度设计。《结构与多学科优化》，2000年。19(2): p. 93-104。DOI: 10.1007/s001580050089。 7. Bruns, T.E. 和 D.A. Tortorelli，非线性弹性结构与柔顺机构的拓扑优化。《计算力学与工程方法》，2001年。190(26): p. 3443-3459。DOI: https://doi.org/10.1016/S0045-7825(00)00278-4。 8. Wallin, M.、N. Ivarsson 和 D. Tortorelli，非线性弹性结构的刚度优化。《计算力学与工程方法》，2018年。330: p. 292-307。DOI: https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.11.004。 9. Yin, L. 和 G.K. Ananthasuresh，针对电热驱动柔顺微机构多物理场问题的一种新型拓扑设计方案。《传感器与执行器A：物理》，2002年。97-98: p. 599-609。DOI: https://doi.org/10.1016/S0924-4247(01)00853-6。 10. Dalklint, A.、M. Wallin 和 D.A. Tortorelli，拓扑优化中的结构稳定性与人工屈曲模态。《结构与多学科优化》，2021年。64(4): p. 1751-1763。DOI: 10.1007/s00158-021-03012-z。 11. da Silva, G.A.、A.T. Beck 和 O. Sigmund，考虑均匀制造不确定性的应力约束拓扑优化。《计算力学与工程方法》，2019年。344: p. 512-537。DOI: https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.10.020。 12. Li, L.、G. Zhang 和 K. Khandelwal，使用非局部弹塑性损伤模型对结构进行抗失效拓扑优化。《结构与多学科优化》，2018年。58(4): p. 1589-1618。DOI: 10.1007/s00158-018-1984-5。 13. Zhang, G. 和 K. Khandelwal，Gurson–Tvergaard–Needleman模型指导下的有限变形抗断裂结构设计。《国际工程数值方法杂志》，2022年。123(14): p. 3344-3388。DOI: https://doi.org/10.1002/nme.6971。 14. Eriksson, A，多参数结构分析的平衡子集。《计算力学与工程方法》，1997年。140(3): p. 305-327。DOI: https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01096-1。 15. Liapounoff, A.M.，《运动稳定性一般问题》(AM-17)。2016年，普林斯顿：普林斯顿大学出版社。

16. Zhang, G., R. Alberdi, 和 K. Khandelwal，使用混合 u/p 单元对小变形和有限变形下的不可压缩材料进行拓扑优化。《国际工程数值方法杂志》，2018年。115(8)：第 1015-1052 页。DOI：https://doi.org/10.1002/nme.5834。17. Zhou, M.，具有应力和局部屈曲约束的桁架拓扑优化中的难点。《结构优化》，1996年。11(2)：第 134-136 页。DOI：10.1007/BF01376857。18. Kočvara, M.，关于具有整体稳定性约束的桁架设计问题的建模与求解。《结构与多学科优化》，2002年。23(3)：第 189-203 页。DOI：10.1007/s00158-002-0177-3。19. Li, L. 和 K. Khandelwal，通过控制伪特征模态对几何非线性桁架进行拓扑优化。《工程结构》，2017年。131：第 324-344 页。DOI：https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.11.001。20. Neves, M.M., H. Rodrigues, 和 J. M. Guedes，采用屈曲载荷准则的结构广义拓扑设计。《结构优化》，1995年。10(2)：第 71-78 页。DOI：10.1007/BF01743533。21. Seyranian, A.P., E. Lund, 和 N. Olhoff，结构优化问题中的重特征值。《结构优化》，1994年。8(4)：第 207-227 页。DOI：10.1007/BF01742705。22. Bruyneel, M., B. Colson, 和 A. Remouchamps，关于屈曲优化中若干收敛问题的讨论。《结构与多学科优化》，2008年。35(2)：第 181-186 页。DOI：10.1007/s00158-007-0129-z。23. Friswell, M.I.，重特征值及其相关特征向量的导数。《振动与声学杂志》，1996年。118(3)：第 390-397 页。DOI：10.1115/1.2888195。24. Sun, J.-g.，重特征值灵敏度分析。《线性代数及其应用》，1990年。137-138：第 183-211 页。DOI：https://doi.org/10.1016/0024-3795(90)90129-Z。25. Gravesen, J., A. Evgrafov, 和 D.M. Nguyen，关于重特征值的灵敏度。《结构与多学科优化》，2011年。44(4)：第 583-587 页。DOI：10.1007/s00158-011-0644-9。26. Rodrigues, H.C., J.M. Guedes, 和 M.P. Bendsøe，基于非光滑特征值准则的结构最优设计必要条件。《结构优化》，1995年。9(1)：第 52-56 页。DOI：10.1007/BF01742645。27. Rahmatalla, S. 和 C.C. Swan，屈曲敏感结构的连续体拓扑优化。《AIAA 杂志》，2003年。41(6)：第 1180-1189 页。DOI：10.2514/2.2062。28. Haftka, R.T. 和 H.M. Adelman，结构灵敏度分析的最新进展。《结构优化》，1989年。1(3)：第 137-151 页。DOI：10.1007/BF01637334。29. Gao, X. 和 H. Ma，屈曲约束下连续体结构的拓扑优化。《计算机与结构》，2015年。157：第 142-152 页。DOI：https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.05.020。30. Dunning, P.D. 等，采用高效且稳健的特征值求解器、带有多个线性屈曲约束的水平集拓扑优化。《国际工程数值方法杂志》，2016年。107(12)：第 1029-1053 页。DOI：https://doi.org/10.1002/nme.5203。31. Thomsen, C.R., F. Wang, 和 O. Sigmund，基于线性化分岔分析的二维周期材料屈曲强度拓扑优化。《计算力学与工程方法》，2018年。339：第 115-136 页。DOI：https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.04.031。

32. Ferrari, F. 和 O. Sigmund，重新审视带有屈曲约束的拓扑优化。《结构与多学科优化》，2019年。59(5)：第 1401-1415 页。DOI：10.1007/s00158-019-02253-3。33. Russ, J.B. 和 H. Waisman，通过局部延性失效约束和线性屈曲分析提高抗失效能力的新型弹塑性拓扑优化公式。《计算力学与工程方法》，2021年。373：113478。DOI：https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113478。34. Ferrari, F. 和 O. Sigmund，以线性分析的计算成本求解带有屈曲约束的大规模拓扑优化问题。《计算力学与工程方法》，2020年。363：112911。DOI：https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.112911。35. Gao, X. 等，提高连续体结构的整体性能：兼顾刚度、强度和稳定性的拓扑优化模型。《计算力学与工程方法》，2020年。359：112660。DOI：https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.112660。36. Kemmler, R., A. Lipka, 和 E. Ramm，拓扑优化中的大变形与稳定性。《结构与多学科优化》，2005年。30(6)：第 459-476 页。DOI：10.1007/s00158-005-0534-0。37. Lindgaard, E. 和 J. Dahl，跳跃失稳问题拓扑优化中的柔顺度与屈曲目标函数。《结构与多学科优化》，2013年。47(3)：第 409-421 页。DOI：10.1007/s00158-012-0832-2。38. Wang, F. 等，虚拟域技术的插值方案及有限应变弹性问题的拓扑优化。《计算力学与工程方法》，2014年。276：第 453-472 页。DOI：https://doi.org/10.1016/j.cma.2014.03.021。39. Pedersen, N.L.，利用拓扑优化最大化特征值。《结构与多学科优化》，2000年。20(1)：第 2-11 页。DOI：10.1007/s001580050130。40. Du, J. 和 N. Olhoff，以简单和重特征频率及频率间隙最大化为目标的自由振动连续体结构拓扑设计。《结构与多学科优化》，2007年。34(2)：第 91-110 页。DOI：10.1007/s00158-007-0101-y。41. Dalklint, A., M. Wallin, 和 D.A. Tortorelli，有限应变超弹性结构的特征频率约束拓扑优化。《结构与多学科优化》，2020年。61(6)：第 2577-2594 页。DOI：10.1007/s00158-020-02557-9。42. Yoon, G.H.，基于单元连接参数化的拓扑优化最大化几何非线性结构的基频。《计算机与结构》，2010年。88(1)：第 120-133 页。DOI：https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2009.07.006。43. Zhang, G. 和 K. Khandelwal，通过拓扑优化设计有限应变下的耗散型多材料黏弹性—超弹性系统。《国际工程数值方法杂志》，2019年。119(11)：第 1037-1068 页。DOI：https://doi.org/10.1002/nme.6083。44. Zhang, G. 和 K. Khandelwal，通过拓扑优化与非线性均匀化进行有限应变负泊松比超材料的计算设计。《计算力学与工程方法》，2019年。356：第 490-527 页。DOI：https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.07.027。45. Bendsøe, M.P. 和 O. Sigmund，拓扑优化中的材料插值方案。《应用力学档案》，1999年。69(9)：第 635-654 页。DOI：10.1007/s004190050248。

46. Zhou, M. 和 G.I.N. Rozvany，《COC算法》第二部分：拓扑、几何与广义形状优化。《计算力学与工程方法》，1991年。89(1)：第309-336页。DOI：https://doi.org/10.1016/0045-7825(91)90046-9。47. Bruns, T.E. 和 D.A. Tortorelli，用于结构与柔顺机构拓扑优化的单元移除与重新引入策略。《国际工程数值方法杂志》，2003年。57(10)：第1413-1430页。DOI：https://doi.org/10.1002/nme.783。48. Yoon, G.H. 和 Y.Y. Kim，用于几何非线性结构拓扑优化的单元连接参数化。《国际固体与结构杂志》，2005年。42(7)：第1983-2009页。DOI：https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.09.005。49. Lahuerta, R.D. 等，探索大变形拓扑优化中低密度单元的稳定化。《计算力学》，2013年。52(4)：第779-797页。DOI：10.1007/s00466-013-0843-x。50. Pajot, J.M.，包含热力耦合的几何非线性结构拓扑优化（博士论文）。2006年，科罗拉多大学博尔德分校。51. Reese, S. 和 P. Wriggers，有限弹性稳定性问题的有限元方法。《国际工程数值方法杂志》，1995年。38(7)：第1171-1200页。DOI：https://doi.org/10.1002/nme.1620380706。52. Alberdi, R. 等，拓扑优化中非线性路径相关灵敏度分析的统一框架。《国际工程数值方法杂志》，2018年。115(1)：第1-56页。DOI：https://doi.org/10.1002/nme.5794。53. Courant, R. 和 D. Hilbert，《数学物理方法》。1989年。275-396。54. Sigmund, O. 和 J. Petersson，拓扑优化中的数值不稳定性：处理棋盘格、网格依赖性和局部极小值的程序综述。《结构优化》，1998年。16(1)：第68-75页。DOI：10.1007/BF01214002。55. Bourdin, B.，拓扑优化中的滤波器。《国际工程数值方法杂志》，2001年。50(9)：第2143-2158页。DOI：https://doi.org/10.1002/nme.116。56. Svanberg, K.，移动渐近线法——一种新的结构优化方法。《国际工程数值方法杂志》，1987年。24(2)：第359-373页。DOI：https://doi.org/10.1002/nme.1620240207。57. Crisfield, M.，《固体与结构的非线性有限元分析》。1991年，西萨塞克斯，英格兰：John Wiley & Sons。58. McNeel, R. 等，mcneel-rhinoceros，载于 Rhinoceros 3D，版本6.0。2010年，Robert McNeel & Associates：西雅图，WA。59. Luo, Q. 和 L. Tong，一种消除空单元对非线性柔度结构拓扑优化影响的算法。《结构与多学科优化》，2016年。53(4)：第695-714页。DOI：10.1007/s00158-015-1325-x。60. Wriggers, P.，《非线性有限元方法》。2008年：Springer Science & Business Media。61. Stein, E.、W. Wagner 和 P. Wriggers，包含分支切换的壳体与接触问题非线性稳定性分析。《计算力学》，1990年。5(6)：第428-446页。DOI：10.1007/BF01113447。62. Eriksson, A.，基于广义路径跟踪的结构失稳分析。《计算力学与工程方法》，1998年。156(1)：第45-74页。DOI：https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00200-4。

63. Kouhia, R. 和 M. Mikkola，追踪越过复合临界点的平衡路径。《国际工程数值方法杂志》，1999年。 **46**(7)：第1049- 1074页。DOI：https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19991110)46:7<1049::AID-NME739>3.0.CO;2-3。
64. Groh, R.M.J.、D. Avitabile 和 A. Pirrera，面向良态非线性结构的广义路径跟踪。《计算力学与工程方法》，2018年。 **331**：第394-426页。DOI：https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.12.001。65. Huitfeldt, J.，非线性特征值问题——分岔点预测与分支切换，载于 技术报告*17*。1991年，计算机科学系，查尔姆斯理工大学，哥德堡，瑞典。