arXiv:2303.14970v1 [math.CO] 27 Mar 2023

排除树小图定理再探

Vida Dujmović ‖ Robert Hickingbotham † Gwenaël Joret § Piotr Micek ¶ Pat Morin ‡ David R. Wood †

2023年3月28日

摘要

我们证明，对于每棵半径为 h的树 T，存在一个整数 c，使得每个T-无小图都包含于 $H\boxtimes K_c$中的某个图 H，且其路径宽度至多为$2h-1$。这是对 Robertson 和 Seymour 的排除树小图定理（GM I）的定性加强。我们证明，在这一情形下，半径是恰当的参数，而 $2h-1$ 是可能的最佳界。

1 引言

Robertson 和 Seymour [8] 证明，对于每棵树 T，都存在一个整数 c，使得每个无 T-图子式的图的路径宽度至多为 c。Bienstock、Robertson、Seymour 和 Thomas [1] 以及 Diestel [3] 证明了相同的结论，其中 $c=|V(T)|-2$，且这是最优的，因为具有 $|V(T)|-1$ 个顶点的完全图是无 T-图子式的，且其路径宽度为$|V(T)|-2$。图乘积结构理论将复杂图类中的图描述为

†澳大利亚墨尔本莫纳什大学数学学院（{robert.hickingbotham,david.wood}@monash.edu）。Wood 的研究获得澳大利亚研究理事会资助。Hickingbotham 的研究获得澳大利亚政府研究培训计划奖学金资助。

‖加拿大渥太华渥太华大学计算机科学与电气工程学院（vida.dujmovic@uottawa.ca）。研究获得加拿大自然科学与工程研究理事会资助，以及莫纳什大学数学学院颁发的戈登·普雷斯顿奖学金。§比利时布鲁塞尔自由大学计算机科学系（gwenael.joret@ulb.be）。研究获得澳大利亚研究理事会、国家科学研究基金（FNRS）的 CDR 项目资助和 PDR 项目资助。

‡加拿大渥太华卡尔顿大学计算机科学学院（morin@scs.carleton.ca）。研究获得加拿大自然科学与工程研究理事会资助。

¶波兰克拉科夫雅盖隆大学数学与计算机科学学院（piotr.micek@uj.edu.pl）。

较简单图的积的子图 [2, 5, 6]。受这一观点启发，我们证明了以下结果，其中 $H \boxtimes K_c$ 是这样得到的图：将 H 的每个顶点替换为 K_c 的一个副本，并将 H 的每条边替换为对应的 K_c副本之间的联接。

定理 1. 对于任意半径为 h 的树 T，都存在 $c \in \mathbb{N}$，使得每个无 T 图子式的图 G 都包含于 $H \boxtimes K_c$ 中，其中 $H \boxtimes K_c$ 是某个路径宽度至多为 $2h-1$ 的图 H。

定理 1是对 Robertson 和 Seymour 上述结果的定性加强， [8] 因为 pw(G) $\leqslant$ pw($H \boxtimes K_c$) $\leqslant c(\mathrm{pw}(H)+1)-1 \leqslant 2ch-1$。注意，定理 1 的证明依赖于 Robertson 和 Seymour 上述结果， [8]。 定理 1 的要点是，pw(H) 只取决于 T的半径，而不取决于 $|V(T)|$，后者可能远大于半径。此外，半径是此处考虑T 的恰当参数，下面我们将对此加以说明。

对于一棵树 T，令 $g(T)$ 表示满足以下条件的最小值：存在 $c \in \mathbb{N}$，使得每个无 T 图子式的图 G 都包含于 $H \boxtimes K_c$ 中，且 pw(H) $\leqslant k$。定理 1 表明，若 T 的半径为h，则 $g(T) \leqslant 2h-1$。现在我们证明一个下界。Campbell 等人的以下引理 [2] 很有用，其中 $T_{h,d}$ 是半径为 h 的完全 d 叉树。

引理 2 ([2, v1，命题 56])。 对于任意 h、$c \in \mathbb{N}$，存在 $d \in \mathbb{N}$，使得对于每个图 H，若 $T_{h,\,d}$ 包含于 $H \boxtimes K_c$，则 $\mathrm{pw}(H) \geqslant h$。

设 T 是半径为 h 的任意树。因此， T包含一条经过 $2h$ 个顶点的路径，而 $T_{h-1,\,d}$不含 T-图子式，否则 $T_{h-1,\,d}$ 就会包含一条经过 $2h$ 个顶点的路径。根据引理 2，若$T_{h-1,\,d}$ 包含于 $H \boxtimes K_c$，则 pw(H) $\geqslant h-1$。因此

$$h-1 \leqslant g(T) \leqslant 2h-1. \tag{1}$$

这说明， T 的半径是定理 1中应考虑的恰当参数。

此外，正如我们接下来要说明的，式（1）中的下界和上界都可以达到。式（1）中的上界在 T 为完全三叉树时可以达到，以下结果对此作出了说明。

命题 3。 对于所有 h、$c \in \mathbb{N}$，存在一个 $T_{h,\,3}$-无小图图 G，使得对于每个图 H，若 G 包含于 $H \boxtimes K_c$，则 H 含有一个大小为 $2h$ 的团，因此 $\mathrm{pw}(H) \geqslant \mathrm{tw}(H) \geqslant 2h-1$。

下一个结果改进了 定理 1 关于排除路径的结论。该结果表明，当 T 是路径时，式（1）中的下界可以达到，因为 P_{2h+1} 的半径为 h，并且图不含有 $2h+1$ 个顶点的路径，当且仅当它是 P_{2h+1}-图子式自由的。

命题 4。 对于任意 $h \in \mathbb{N}$，每个不含一条经过 $2h+1$ 个顶点的路径的图 G，都包含在某个满足 $\mathrm{pw}(H) \leqslant h-1$ 的图 H 中。

2 背景

我们考虑顶点集为 $V(G)$、边集为 $E(G)$ 的简单有限无向图 G。本文未给出的图论定义见 [4]。对于 $m, n \in \mathbb{Z}$，其中 $m \leqslant n$，令$[m,n] := \{m, m+1, \ldots\ldots, n\}$，并令 $[n] := [1,n]$。

若图 H 是图 G 的图子式，则 H 同构于一个可由 G 的某个子图通过收缩边得到的图。若图 G 不含 H 图子式，则称其为 H- 图子式无关图。若 H 不是 G 的图子式，则称图 G 不含 H 图子式。图 G 中的一个 H-模型由一组两两不相交的顶点子集 $(W_x \subseteq V(G) : x \in V(H))$（称为分支集）组成，使得每个子集在 G 中诱导出一个连通子图，且对于每条边 $xy \in V(H)$，在 G 中都有一条边联接 W_x 和 W_y。显然，H 是 G 的图子式，当且仅当 G 包含一个 H-模型。

图 G 的树分解是由 V 的顶点子集 $(B_x : x \in V(T))$ 组成的集合族，这些子集由树 T 的顶点索引（称为袋），且满足：(a) 对于 $uv \in E(G)$ 中的每条边，都存在一个袋 B_x 同时包含 u 和 v；(b) 对于每个顶点 $v \in V(G)$，集合 $\{x \in V(T) : v \in B_x\}$ 在 T 中诱导出一棵非空（连通）子树。$(B_x : x \in V(T))$ 的宽度为 $\max\{|B_x| : x \in V(T)\} - 1$。图 G 的树宽记作 $\mathrm{tw}(G)$，是 G 的树分解的最小宽度。路径分解是底层树为路径的树分解，通常简记为袋序列 $(B_1, \ldots, B_n)$。图 G 的路径宽度记作 $\mathrm{pw}(G)$，是 G 的路径分解的最小宽度。

以下引理是众所周知的结果（证明见 [6]）。

引理 5. 对于任意图 G、其任意树分解$\mathcal{D}$ 、 G的任意连通子图集$\mathcal{F}$ 以及任意 $\ell \in \mathbb{N}$，以下两者之一成立：

(a) $\mathcal{F}$中存在 ℓ 个顶点不相交子图；或者(b) 存在集合 $S \subseteq V(G)$，由$\mathcal{D}$ 中至多 $\ell-1$ 个袋组成，使得 $S \cap V(F) \neq \varnothing$对所有 $F \in \mathcal{F}$均成立。

图 A 和 B的强积，记作 $A \boxtimes B$，是顶点集为 $V(A) \times V(B)$ 的图；不同顶点 (v,x),$(w,y) \in V(A) \times V(B)$ 相邻，当且仅当$v = w$ 且 $xy \in E(B)$，或 $x = y$ 且 $vw \in E(A)$，或 $vw \in E(A)$ 且 $xy \in E(B)$。

设 G 为一个图。G 的一个划分是由 G 中顶点集构成的集合 $\mathbf{P}$，且 G 的每个顶点恰好属于 $\mathbf{P}$ 中的一个元素。$\mathbf{P}$ 中的每个元素称为一个部分。$\mathbf{P}$ 的宽度是一个部分中顶点数的最大值。$\mathbf{P}$ 的商图（相对于 G）是一个图，记作 $G/\mathbf{P}$，其顶点集为 $\mathbf{P}$；若两个不同的部分 A、$B \in \mathbf{P}$ 在 $G/\mathbf{P}$ 中相邻，当且仅当 A 中存在一个顶点与 B 中某个顶点在 G 中相邻。G 的一个 H-划分是 G 的一个划分 $\mathbf{P}$，满足 $G/\mathbf{P}$ 包含于 H。下面的观察说明了划分与积之间的联系。

观察 6 ([5])。 对于任意图 G 和 H 以及任意 $p \in \mathbb{N}$， G 包含于 $H \boxtimes K_p$ 当且仅当 G 存在一个宽度至多为 p 的 H-划分。

3 证明

我们证明以下定理 1的定量版本。

定理 7. 令 T 为一棵有 t 个顶点、半径为 h且最大度为 d的树。那么，每个T-图子式无关图 G 都包含在某个图 $H \boxtimes K_{(d+h-2)(t-1)}$ 中，其中 H 的路径宽度至多为 $2h-1$。

回顾一下，$T_{h,\ d}$ 是半径为 d的完全 h叉树。观察 6 和下面的引理推出定理 7，因为 T 中的树定理 7 是$T_{h\text{的子树},\ d}$并且每个 T-图子式无关图 G 都满足 $\mathrm{tw}(G) \leqslant \mathrm{pw}(G) \leqslant t-2$，这是 Bienstock等人 [1] 在第1节中提到的结果。

引理 8. 对于任意满足 $d+h \geqslant 3$的 $h, d \in \mathbb{N}$，对于每个 $T_{h,\ d}$-图子式无关图 G、 G的每个树分解$\mathcal{D}$ 以及 G的每个顶点 r ， 图 G 都有一个划分 $\mathcal{P}$满足：

- $\mathcal{P}$ 的每个部分都是$\mathcal{D}$中至多 $d+h-2$ 个袋的并集的子集，
- $\{r\} \in \mathcal{P}$，并且
- $G/\mathcal{P}$ 具有一个宽度至多为 $2h-1$ 的路径分解，其中第一个袋包含$\{r\}$。

证明。 我们按照字典序对数对 $(h, |V(G)|)$ 进行归纳。固定陈述中所述的 h、 d、G、D 和 r 。我们可以假设 G 是连通的。若 $|V(G)| \leqslant 1$，则结论显然成立。现在假设 $|V(G)| \geqslant 2$。

对于基础情形，假设 $h = 1$。对于 $i \geqslant 0$，令 $V_i := \{v \in V(G) : \mathrm{dist}_G(v, r) = i\}$。因此 $V_0 = \{r\}$。若对于某个 $i \geqslant 1$， $|V_i| \geqslant d$，则将 $G[V_0 \cup \cdots \cup V_{i-1}]$ 收缩为一个顶点可得到一个 $T_{1,d}$ 图子式。因此对每个 $i \geqslant 0$， $|V_i| \leqslant d-1 = d+h-2$。于是，$\mathbf{P} := (V_i : i \geqslant 0)$ 是 G 的一个划分，并且 P 的每个部分都是 D 中至多 $d+h-2$ 个袋的并集的子集。此外，商图 $G/\mathbf{P}$ 是一条路径，它具有宽度为 1 的路径分解，其中第一个袋包含 $\{r\}$。

现在假设 $h \geqslant 2$，且结论对 $h-1$ 成立。令 R 为 r 在 G 中的邻域。令 F 为 $G-r$ 的所有连通子图构成的集合，其中每个子图都含有一个来自 R 的顶点，并且含有一个 $T_{h-1,\ d+1}$ 图子式。若 F 中存在 d 个两两顶点不交的子图 $S_1, \ldots, S_d$，则我们断言 G 含有一个 $T_{h,\ d}$ 图子式。事实上，对每个 $i \in [d]$ ，考虑 S_i 中的一个 $T_{h-1,\ d+1}$-模型 $(W_x^i : x \in V(T_{h-1,\ d+1}))$。由于 S_i 是连通的，我们不妨假设

S_i 的所有顶点都在该模型中。对每个 $i \in [d]$，令 y_i 为 $T_{h-1,\ d+1}$ 的一个节点，使得 $W^i_{y_i}$ 含有一个来自 R 的顶点；并令 Y^i 为 W^i_x 的并集，其中取遍 $T_{h-1,\ d+1}$ 中 y_i 的所有祖先节点 x。注意，S_i 中存在一个 $T_{h-1,\ d}$-模型，使得 $T_{h-1,\ d}$ 的根映射到集合 Y^i。因此，$G-r$ 含有 $T_{h-1,\ d}$ 的 d 个两两不相交的模型，且每个根分支集都含有一个来自 R 的顶点。由此，G 含有 $T_{h,\ d}$ 的一个模型，证毕。

因此$\mathcal{F}$ 不含 d 两两顶点不交的元素。由引理 5，存在一个极小集 $X \subseteq V(G-r)$，使得 X 是 $d-1 \leqslant d+h-2$ 的至多$\mathcal{D}$个袋之并集的子集，并且 $G-r-X$ 不含$\mathcal{F}$中的任何元素。

令 G_1、……、G_p 为 $G-r-X$ 中包含来自 R的顶点的连通分量。根据 X的构造，图 G_i 不含 $T_{h-1、\ d+1}$ 图子式。由归纳法，G_i 有一个划分 $\mathbf{P}_i$，满足：

- $\mathbf{P}_i$ 的每个部分都是 D 的至多 $(d+1)+(h-1)-2 = d+h-2$个袋之并集的子集，并且
- $G_i/\mathbf{P}_i$ 有一个宽度至多为 $2h-3$的路径分解 $\mathbf{B}_i$。

令 $Z := V(G-r-X) \setminus V(G_1 \cup \cdots \cup G_p)$；也就是说，$Z$是 $G-r-X$ 中所有不含 R中顶点的连通分量的顶点集。

考虑一个顶点 $v \in X$。根据 X 的极小性，图 $G-r-(X \setminus \{v\})$ 含有一个连通子图 Y_v，其中包含 v 和一个顶点 $r_v \in R$（并且含有一个 $T_{h-1、\ d+1}$ 图子式）。令 P_v 为 Y_v 加上边 $r_v r$ 后，从 v 到 r_v 的一条路径。因此，$P_v - \{v, r\}$ 包含在某个 G_i 中，从而 P_v 避开了 Z。所以，$\cup\{P_v :\ v \in X\}$ 是 $G-Z$ 中的一个连通子图。令 G' 由 G 收缩 $\cup\{P_v :\ v \in X\}$ 为一个顶点 r'，并删除所有其余不在 Z 中的顶点得到。因此，$V(G') = \{r'\} \cup Z$。由于 G' 是 G 的图子式，图 G' 是 T_h,$_d$-图子式自由的。令 $\mathbf{D}'$ 为从 D 得到的 G' 的树分解：将 $\cup\{P_v :\ v \in X\}$ 中每个顶点的每个实例替换为 r'，然后移除 $V(G) \setminus V(G')$ 中的其他顶点。注意，对于 $\mathbf{D}'$ 中的每个袋 B，$B - \{r'\}$ 都包含在 D 的某个袋中。根据归纳法，G' 有一个划分 $\mathbf{P}'$，使得：

- $\mathbf{P}_\prime$ 的每个部分都是 $\mathbf{D}_\prime$至多 $d+h-2$ 个袋的并集的子集，
- $\{r_\prime\} \in \mathbf{P}_\prime$，并且
- $G_\prime/\mathbf{P}_\prime$ 有一个宽度至多为 $2h-1$ 的路径分解 $\mathbf{B}_\prime$，其中第一个袋包含 $\{r_\prime\}$。

令 $\mathbf{P} := \{\{r\}\} \cup \{X\} \cup \mathbf{P}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{P}_p \cup (\mathbf{P}' \setminus \{\{r'\}\})$。那么 P 是 G 的一个划分，使得每个部分都是 D 中至多 $d+h-2$ 个袋的并集的子集。令 B 为从 $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_p$, 与 $\mathbf{B}'$ 拼接得到的 $G/\mathbf{P}$ 的顶点子集序列，并将 $\{r\}$ 和 X 加入由 $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_p$ 得到的每个袋中，再将 $\{r'\}$ 替换为 X。现在我们证明 B 是 $G/\mathbf{P}$ 的一个路径分解。事实上，P 的每个部分都包含在 B 的连续若干个袋中；具体而言，$\{r\}$ 和 X 被加入 $\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_p$ 中的所有袋，而 X 位于 $\mathbf{B}'$ 的第一个袋中。由于 $G_1, \ldots, G_p$ 是 $G-r-X$ 的连通分量，

P_i 中某个部分在 G/P 中的邻域包含于 $\mathrm{P}_i \cup \{\{r\}\ X\}$。还要注意，$\{r\}$ 在 G/P 中的邻域包含于 $\mathrm{P}_1 \cup \cdots \cup \mathrm{P}_p \cup \{X\}$。由此可知，B 是 G/P 的一个路径分解。根据构造，B 的宽度至多为 $2h-1$，且第一个袋包含 $\{r\}$，符合要求。

□

现在我们转向命题 4 的证明。事实上，我们将证明一个关于树深度的更强结果。如果森林的每个连通分量都有一个根顶点（由此定义祖先关系），则称该森林为有根森林。有根森林 F 的顶点高度是 F 中一条根到叶路径上顶点数的最大值。有根森林 F 的闭包是图 G，其顶点集为 $V(G)$：当且仅当 v 是 w 的祖先（或反之）时，$= V(F)$ 与 $vw \in E(G)$ 相邻。图 G 的树深度是满足 G 为 F 的闭包的子图的有根森林 F 的最小顶点高度。众所周知且易于证明，对于每个图 G，都有 $\mathrm{pw}(G) \leq \mathrm{td}(G) - 1$。因此，下面的引理蕴含命题 4，因为根据第 1 节提到的 Bienstock等人 [1] 的结果，每个无 P_{2h+1}-图子式图 G 都满足 $\mathrm{tw}(G) \leq \mathrm{pw}(G) \leqslant 2h-1$。

引理9。对于任意 h、$k \in \mathbb{N}$，对于每个不含 $2h+1$ 个顶点路径的图 G，以及其任意树分解 $\mathcal{D}$，图 G 都存在一个划分 $\mathcal{P}$，使得 $\mathrm{td}(G/\mathcal{P}) \leqslant h$，且 $\mathcal{P}$ 的每个部分都是$\mathcal{D}$中至多两个袋的子集。

证明。我们对 h 进行归纳。对于 $h=1$，G 是 K_1 和 K_2 的副本的不交并。令 P 为 G 的划分，其中 G 的每个连通分量的顶点集都是 P 的一个部分。因此 $E(G/\mathrm{P}) = \varnothing$，且 $\mathrm{td}(G/\mathrm{P}) = 1$。每个部分都是 D 中一个袋的子集。

现在假设 $h \geqslant 2$，且该结论对 $h-1$ 成立。我们可以假设 G 是连通的。假设 G 包含三条点不相交路径，$P^{(1)}$、$P^{(2)}$ 和 $P^{(3)}$，每条路径都有 $2h-1$ 个顶点。令 G' 为通过将每条路径 $P^{(i)}$ 收缩为一个顶点 v_i 而得到的图。由于 G' 连通，对于某些互不相同的i、$j \in \{1,2,3\}$，G' 中存在一条长度至少为 2 的（v_i, v_j）路径。不失一般性，$i=1$ 且 $j=2$。因此，存在顶点$u \in V$（$P^{(1)}$）和 $v \in V$（$P(2)$），以及 G 中一条长度至少为 2 的（u,v）路径 Q，其内部避开 $P(1) \cup P(2)$。令 x 为 $P(1)$ 中距离 u（在 $P(1)$ 上）最远的端点，并令 y 为 $P(2)$ 中距离 v（在 $P^{(2)}$ 上）最远的端点。于是（$xP(1)uQvP(2)y$）是一条至少有 $2h+1$ 个顶点的路径，矛盾。

现在假设 G 不包含三条顶点不相交的路径，且这些路径共有 $2h-1$ 个顶点。根据引理 5，存在一个集合 $S \subseteq V(G)$，它由 D 中至多两个袋组成，使得 $G-S$是 P_{2h-1}-自由的。根据归纳法，$G-S$ 存在一个划分 P′，使得 $\mathrm{td}((G-S)/\mathrm{P}') \leqslant h-1$，并且 P′ 的每个部分都是 D 中至多两个袋的子集。令 $\mathrm{P} := \mathrm{P}' \cup \{S\}$。那么，P 就是 G 所需的划分，因为 $\mathrm{td}(G/\mathrm{P}) \leq \mathrm{td}((G-S)/\mathrm{P}') + 1 \leqslant h$。

□

下面我们来证明命题 3。这是对 Norin、Scott、Seymour 和 Wood 的一项类似结果的加强 [7, 引理 13]。

命题 3。 对于所有 $h, c \in \mathbb{N}$，都存在一个 $T_{h,3}$-无图子式图 G，使得对于每个图 H，若 G 包含于 $H \boxtimes K_c$，则 H 有一个大小为 $2h$ 的团，因此 $\mathrm{pw}(H) \geqslant \mathrm{tw}(H) \geqslant 2h-1$。

证明。 我们对 $h \geqslant 1$ 使用归纳法。首先考虑基础情形 $h = 1$。设 G 是一个包含 $n = c+1$ 个顶点的路径。因此， G 是 $T_{1,3}$-无小图。假设 G 包含于$H \boxtimes K_c$中。由于 $n > c$ 和 G 是连通的， $|E(H)| \geqslant 1$ ，且 H 有一个大小为 2 的团，证毕。

现在假设 $h \geqslant 2$ ，并且结论对 $h-1$成立。令 $t_0 := |V(T_{h-1,3})|$。由归纳法，存在一个$T_{h-1,3}$-无小图 G_0，使得对于每个图 H，若 G_0 包含于$H \boxtimes K_c$中，则 H 有一个大小为 $2h-2$ 的团。令 G 由一条长度为$c+1$ 的路径 P按如下方式构造：对于 P的每条边 vw，添加 $2c$ 个与$\{v, w\}$完全相连的 G_0 副本。
为导出矛盾，假设 G 包含一个T_h,3-模型。令 X 为T_h,3的根所对应的分支集。因此，$G - X$包含三个两两不相交的子图Y_1、 Y_2、 Y_3，且每个子图都包含一个T_{h-1},3-图子式。每个 Y_i 都与 P相交，否则 Y_i 就包含在 $G - P$的某个连通分量中，而该连通分量是 G_0 的一个副本。根据 G的构造，每个 Y_i都与 P 在一个子路径 P_i上相交。不失一般性， P_1、P_2、 P_3 按此顺序出现在 P中。由于 $G - P$的每个连通分量都只与 P的一条边相邻，因此$G - P_2$ 的任何连通分量都不会同时与 Y_1 和 Y_3相邻。特别地， X 不会同时与 Y_1 和 Y_3 相邻，这就产生了矛盾。因此， G不含T_h,3-图子式。

现在假设 G 包含在 $H \boxtimes K_c$中。令P为 G的相应 H-划分。由于 $|V(P)| > c$， P中存在一条边 v_1v_2，使得对于P中某两个不同的划分部分Q_1、 $Q_2 \in$，有 $v_i \in Q_i$。与 v_1v_2 相连的 G_0 的副本中，至多有 $c-1$ 个与 Q_1相交；与 v_1v_2 相连的 G_0 的副本中，至多有 $c-1$ 个与 Q_2相交。因此，存在一个与v_1v_2 相连且不与 $Q_1 \cup Q_2$相交的 G_0 副本。令 H_0 为 H 中由与该 G_0副本相交的那些划分部分所诱导的子图。因此， Q_1 和 Q_2 都不属于 H_0。根据归纳法， H_0 有一个大小为2$(h-1)$的团 C_0 。由于 G_0 与 v_1v_2完全相邻，因此 $C_0 \cup \{Q_1, Q_2\}$是 H中大小为 $2h$的团，证毕。 □

参考文献

[1]Dan Bienstock、Neil Robertson、Paul D. Seymour 和 Robin Thomas。快速排除森林。《组合理论杂志*B*辑》，52(2):274–283，1991。[2]Rutger Campbell、Katie Clinch、Marc Distel、J. Pascal Gollin、Kevin Hendrey、Robert Hickingbotham、Tony Huynh、Freddie Illingworth、Youri Tamitegama、Jane Tan 和 David R. Wood。 树宽有界图类的积结构。2022，arXiv:2206.02395。[3] Reinhard Diestel。 图次图。I. 路径宽度定理的简短证明。 组合学、概率与计算，4(1):27–30，1995。

[4] Reinhard Diestel。《图论》，第173卷，数学研究生教材。施普林格，第5版，2018。[5] Vida Dujmović、Gwenaël Joret、Piotr Micek、Pat Morin、Torsten Ueckerdt 和 David R. Wood。平面图的队列数有界。《*ACM*学报》，67(4):#22，2020。[6]Freddie Illingworth、Alex Scott 和 David R. Wood。具有排除的次图的图的积结构。2022，arXiv:2104.06627。[7]Sergey Norin、Alex Scott、Paul Seymour 和 David R. Wood。次图封闭类中的簇着色。《组合数学》，39(6):1387–1412，2019。[8] Neil Robertson 和 Paul Seymour。图次图。I. 排除森林。《组合理论杂志*B*辑》，35(1):39–61，1983。