arXiv:2303.14992v1 [math.SG] 27 Mar 2023

隐藏的 Sp(1) 对称性与超凯勒流形上的膜量子化

NAICHUNG CONAN LEUNG 和 YUTUNG YAU

Abstract. 对于超凯勒流形 X上的固定预量子线丛 L ，我们在 $\Omega^*(X,L)$ 上发现一个自然的 Sp(1) 作用，它交织了扭子族中作用于 X上取值于 L的 $(0,*)$-形式空间上的 Spin^c-狄拉克拉普拉斯算子；值得注意的是， L 仅对扭子族中的一种复结构是全纯的。这通过 Gukov-Witten 膜量子化建立了 X 的几何量子化，并由此提出了一个数学定义方案：对于 X 上的典范余各向同性 A 膜 $\mathcal{B}_{\mathrm{cc}}$ 及其共轭膜 $\overline{\mathcal{B}}_{\mathrm{cc}}$，定义 $\mathrm{Hom}(\overline{\mathcal{B}}_{\mathrm{cc}},\mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$。

1. 引言

超凯勒流形 X 具有一族$\{J_\zeta\}_{\zeta\in\mathbb{S}^2}$ 复结构，其由李代数 $\mathfrak{sp}(1)$中的单位球面 $\mathbb{S}^2$ 参数化；Sp(1) 通过其在 $\mathfrak{sp}(1)$上的伴随作用作用于 $\mathbb{S}^2$ 。由此在 $\Omega^*(X,\mathbb{C})$ 上诱导出一个 Sp(1) 作用，该作用交织 Dolbeault 拉普拉斯算子$\Delta_{\overline{\partial}_{J_\zeta}}$ （它们实际上相同），但不交织$\overline{\partial}_{J_\zeta}$。Verbitsky 将此推广到任意超全纯丛 E 在 X [37] 上的情形，即 $\Omega^*(X,E)$ 的情形（见定理 3.1）。该丛是X 上的厄米向量丛，带有酉联络，其曲率 F_E 相对于 $\zeta\in\mathbb{S}^2$的任意 J_ζ 均为 (1,1) 型；等价地， F_E 是 $\Omega^2(X,\mathrm{End}(E))$ 中的 Sp(1)不变形式。与前一种情形不同，对于 $\mathbb{S}^2$中的不同 ζ， $\Delta_{\overline{\partial}_{J_\zeta}}$通常并不相同。

本文则考虑复结构 J 的扭子族中的一个复结构 J ，以及其对应的 K¨ahler 形式 ω_J ；在其上取厄米向量丛 E over X ，并配备曲率为 F_E 的酉联络。注意， E 仅为 $\pm J$-全纯，但仍存在一个以 $\mathbb{S}^2$ 为指标的 Spin^c-狄拉克算子族 $\not{D}_{J_\zeta}$ ，作用于 $\Omega^{0,*_{J_\zeta}}(X,E)$，该算子族由 J_ζ 诱导而来。令人惊讶的是，尽管 ω_J 并非 Sp(1) 不变，我们仍发现了一种 Sp(1) 对称性，它将作用于 $\Omega^{0,*_{J_\zeta}}(X,E)$ 上的狄拉克拉普拉斯算子 $\not{D}^2_{J_\zeta}$ 相互交织。更准确地说，我们证明了本文的以下主要结果。

定理 1.1. 设 X 为一个超 K¨ahler 流形， E 为 X 上的厄米向量丛，并配备曲率为 F_E 、满足 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_E=\omega_J\mathrm{Id}_E$ 的酉联络。则存在一个 Sp(1) 作用

$$\chi:\mathrm{Sp}(1)\times\Omega^*(X,E)\to\Omega^*(X,E),\quad (\eta,s)\mapsto\eta\cdot s,$$

使得对于所有 $\eta\in$Sp(1) 和 $\zeta\in\mathbb{S}^2$，以下图交换：

$$\begin{array}{ccc}\Omega^{0,*}_{J_\zeta}(X,E) & \xrightarrow{\not{D}^2_{J_\zeta}} & \Omega^{0,*}_{J_\zeta}(X,E)\\ \eta\cdot\downarrow & & \downarrow\eta\cdot\\ \Omega^{0,*}_{J_{\eta\cdot\zeta}}(X,E) & \xrightarrow[\not{D}^2_{J_{\eta\cdot\zeta}}]{} & \Omega^{0,*}_{J_{\eta\cdot\zeta}}(X,E)\end{array}$$

其中 $\not{D}_{J_\zeta}$ 是 $\Omega^{0,*_{J_\zeta}}(X,E)$ 上的 Spin^c-狄拉克算子，定义见定义 3.2。

请注意，上述定理不要求 X 是紧致的。此外，本定理中的 Sp(1) 对称性 χ 与超全纯丛的情形不同：后者保留 $\mathbb{Z}$-分次，而定理 1.1 中仅保留 $\mathbb{Z}_2$-分次。定理 1.1 的证明依赖于 Verbitsky 在超 K¨ahler 几何中的结果 [36, 37, 39, 40] ，尤其是 Sp(4,$\mathbb{C}$) 对 X 上的 E-值微分形式空间 $\Omega^*(X,E)$ 的作用。我们需要找出一个适当的

Sp(1) 子群作用，并应用 Lichnerowicz 公式来证明定理 1.1。我们的证明思路也可用于重新证明定理 3.1。

定理 1.1 的一个直接推论是，关于一个以 $\mathbb{S}^2$ 为指标的 Spin^c-狄拉克算子族的消失定理，其证明基于 Kodaira消失定理。

推论 1.2. 在与定理 1.1 相同的假设下，对所有 $\zeta \in \mathbb{S}^2$，我们有

$$\ker \not{D}^-_{J_\zeta} = 0,$$

其中，$\not{D}^-_{J_\zeta}$ 是 $\not{D}_{J_\zeta}$ 在奇数次分量 $\Omega^{0\,2*+1}_{J_\zeta}(X,E)$ 上的限制。

$\not{D}_{J_\zeta}$ 的指标定义为形式差 $\operatorname{ind} \not{D}_{J_\zeta} := \ker \not{D}^+_{J_\zeta} - \ker \not{D}^-_{J_\zeta}$，其中 $\not{D}^+_{J_\zeta}$ 是 $\not{D}_{J_\zeta}$ 在偶数次分量 $\Omega^{0\,2*}_{J_\zeta}(X,E)$ 上的限制。因此，这个推论表明 $\operatorname{ind} \not{D}_{J_\zeta}$ 是一个真正的向量空间，并且族 $\{\operatorname{ind} \not{D}_{J_\zeta}\}_{\zeta\in\mathbb{S}^2}$ 是 Sp(1)-等变的。

尽管 Verbitsky 证明的定理 3.1 与定理 1.1 有相似之处，我们发现二者有统一的物理解释。特别是，定理 1.1 导出了一个提议的定义，用于某些余各向同性 A-膜对之间的态射空间。

1.1. 研 究 Sp(1) 对称性下余各向同性 A-膜之间的态射空间。

Kapustin-Orlov [27] 发现，余各向同性 A-膜是 A 模型中的自然边界条件，并对其进行了研究，以理解镜像对称。此后，许多尝试相继出现，旨在为余各向同性 A-膜之间的态射空间给出严格的数学定义，例如 [2, 6, 26, 28, 33, 34]。尽管这一问题仍颇具挑战性，但人们发现这些态射空间对其他领域也很重要。考虑 (X,ω_K) 的 A 模型时，Gukov-Witten[22] 认识到 $\mathrm{Hom}_{\omega_K}(\mathcal{B}_{\mathrm{cc}},\mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$ 和 $\mathrm{Hom}_{\omega_K}(\mathcal{B},\mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$ 分别与变形量子化和几何量子化有关，其中 $\mathcal{B}_{\mathrm{cc}}$ 是 X 上的填充空间膜，其 Chan-Paton 丛为 L，且满足 $c_1(L) = [\omega_J]$；$\mathcal{B}$ 则是支撑在 X 中的一个 J-全纯拉格朗日子流形 M 上的膜，其 Chan-Paton 丛为平凡丛。这促成了 Bischoff-Gualtieri [6]关于定义 $\mathrm{Hom}_{\omega_K}(\mathcal{B},\mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$ 的工作。Gaiotto-Witten [18] 和 Etingof-Frenkel-Kazhdan [15]的工作揭示，$\mathrm{Hom}_{\omega_K}(\overline{\mathcal{B}}_{\mathrm{cc}},\mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$ 与解析几何朗兰兹纲领有关，其中 $\overline{\mathcal{B}}_{\mathrm{cc}}$ 是配有 Chan-Paton 丛 $L^\vee$的膜。Aldi-Zaslow [2] 研究了 $(\overline{\mathcal{B}}_{\mathrm{cc}},\mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$ 系统在 X 为四维仿射环面的特殊情形。

虽然物理学中将 X 的超 K¨ahler 子流形上的超全纯丛视为 (B, B, B) 膜，但上述膜 $\mathcal{B}_{\mathrm{cc}},\overline{\mathcal{B}}_{\mathrm{cc}},\mathcal{B}$ 都是 (A, B, A) 膜 [22],，即对于所有 $\zeta \in \mathbb{S}^2$，它们都是相对于 $\mathcal{J}_\zeta$ 同时成立的膜对象；其中 $\{\mathcal{J}_\zeta\}_{\zeta\in\mathbb{S}^2}$ 是由三元组 (ω_I, J, ω_K) 确定的以 $\mathbb{S}^2$ 为指标的广义复结构族 [21, 25]（见例 A.8）。物理学上，[22] 的第 2.3 节（以及 [18] 的第 3.9 节）解释了：当 X 为超 K¨ahler 且 M 紧致时，关于 J 和 ω_K 的 $(\mathcal{B},\mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$-系统的态射空间彼此相同。事实上，(B, B, B) 膜和 (A, B, A) 膜是 X 上超膜的两个基本例子，符合定义 4.1 的含义；其中 X 配备了源自同一个超 K¨ahler 结构的不同广义超 K¨ahler 结构。我们预期

- 对于广义超K¨ahler 流形上的一对超膜，若其支撑集的交是紧致的，则它们之间的态射空间存在一种相互交织的 Sp(1) 对称性。

Verbitsky 证明的定理 3.1 验证了我们对充满空间的 (B, B, B) 膜的预期；这些膜的 B 模型态射空间在数学上以凝聚层的导出范畴来定义 [13, 29]，并通过层上同调计算。(A, B, A) 膜的态射空间则更为微妙。根据 [21] 中的命题 3.27（另见 [25]），$\mathcal{J}_{\pm \mathbf{j}}$ 对应于一个 B 模型；除 $\zeta = \pm \mathbf{j}$ 之外，$\mathcal{J}_\zeta$ 是由 X上的辛形式诱导的广义复结构的 B 场变换，对应于一个 A 模型。一般而言，对于一对 (A, B, A) 膜，我们没有其 A 模型态射空间的先验数学定义。对于 $(\overline{\mathcal{B}}_{\mathrm{cc}},\mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$ 系统，我们提出其 A 模型态射空间的一种定义（定义 4.2）。推论 1.2 可解释为建立了 Sp(1) 对称性，将 $(\overline{\mathcal{B}}_{\mathrm{cc}},\mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$ 系统中由 $\mathbb{S}^2$ 参数化的一族态射空间联系起来。我们对其他某些 (A, B, A) 膜对的预期，包括 $(\mathcal{B}_{\mathrm{cc}},\mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$ 系统、$(\mathcal{B},\mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$ 系统以及 $(\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_1)$ 系统，将在

其支撑集 $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ 为 J-全纯拉格朗日的情形，将在第 4 节讨论。总的来说，我们看到，这种 Sp(1) 对称性至关重要，因为它帮助我们通过数学上定义的 B 膜之间的态射空间，理解余各向同性 A-膜之间的态射空间。

1.2. 超凯勒流形上的膜量子化。

我们主要结果的另一项物理意义与 Gukov-Witten 膜量子化有关——这是一种获得量子希尔伯特空间的新方案。辛流形 (M, ω_M) 上的几何量子化需要一个极化，才能得到量子希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{\mathrm{GQ}}$。而膜量子化则需要复化，即一组如下数据:

$$(Y, \Omega, L, \tau),$$

其中 (Y, Ω) 是一个全纯辛流形， L 是 Y 上的一个厄米线丛，配备曲率为 F_L 的酉联络，其中 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_L = \operatorname{Re}\Omega$，且 $\tau : Y \to Y$ 是一个反全纯对合，满足 $\tau^*\Omega = \Omega$，使得 M 嵌入于 Y 中，且是 τ 的不动点集的一个分支，其中 $\Omega|_M = \omega_M$ ，并且 τ 在 Y 上的作用可提升为在 L上的作用，且在 M上限制为恒等作用。按照这一方案，量子希尔伯特空间由 A 模型态射空间 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Im}\,\Omega}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$ 给出，其数学定义将在后文说明；其中， $\mathcal{B}$、$\mathcal{B}_{\mathrm{cc}}$ 是 $(Y, \mathrm{Im}\,\Omega)$ 上的 A-膜，其定义与超凯勒流形 X上的 A-膜类似。如果 Y上的全纯辛结构可扩展为超凯勒结构，且 M是紧致的，那么 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Im}\,\Omega}(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$ 应当与 $\mathcal{H}_{\mathrm{GQ}}$ 作为向量空间同构。

我们的主要结果与超K¨ahler 流形 X上的几何量子化有关。Andersen-Malus`a-Rembado 在 [3] 中研究了 X 上的几何量子化的 Sp(1)-对称性，其假设是 X 上存在一个等距的 Sp(1) 作用，可传递地置换 K¨ahler 形式。与此不同，我们假设 X 是紧致的，且 L 是一个带有曲率为 F_L 的酉联络的厄米线丛，其中 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_L = \omega_J$。按照 Kostant 的上同调方法 [30]，$(X, 2\omega_J)$ 在（伪）K¨ahler 极化 $T^{0,1}_{\pm J} X$下的量子希尔伯特空间为

$$\mathcal{H}_{\pm J} := H^{0,*}_{\overline{\partial}_{\pm J}}(X, L^{\otimes 2}).$$

辛流形 $(X, 2\omega_J)$ 可以如下复化，以便我们进行膜量子化。我们取乘积复流形 $(X, I) = (X, -I) \times (X, I)$，并赋予其全纯辛形式 $\omega_{\widehat{J}} + \sqrt{-1}\omega_{\widehat{K}}$，其中 $\omega_{\widehat{J}} = \pi_1^*\omega_J + \pi_2^*\omega_J$, $\omega_{\widehat{K}} = -\pi_1^*\omega_K + \pi_2^*\omega_K$ 和 $\pi_1, \pi_2 : X \to X$ 分别是到第一和第二个因子的投影。事实上， X是一个带有度量 $\widehat{g} = \pi_1^* g + \pi_2^* g$的超K¨ahler 流形。所需的带酉联络的厄米线丛为 $L := L \boxtimes L$，而 X 作为对角线嵌入 X 中。通过交换两个因子中的变量，定义了 X 上的一个对合及其在 L 上的提升作用。

这个复化 X 上的两种 (A, B, A) 膜：膜 Chan-Paton 丛；以及填充空间膜 $\mathcal{B}_{\mathrm{cc}}$ ，其 Chan-Paton 丛为 L。我们可以通过 Gaiotto-Witten 折叠技巧 [18] 比较 $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$-系统与 $(\overline{\mathcal{B}}_{\mathrm{cc}}, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$-系统：这一技巧给出了如下物理预期:

$$\mathrm{Hom}_{\omega_K}(\overline{\mathcal{B}}_{\mathrm{cc}}, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}}) \cong \mathrm{Hom}_{\omega_{\widehat{K}}}(\widehat{\mathcal{B}}, \widehat{\mathcal{B}}_{\mathrm{cc}}). \tag{1.1}$$

事实上，$(X, \omega_{\widehat{K}})$ 是 (X, ω_K) 的辛群胚，因此 (1.1) 也符合 Bischoff-Gualtieri [6] 提出的定义广义复膜之间态射的方案。最后，采用定义 4.2，利用霍奇理论和推论 1.2，我们得到如下同构:

$$\mathrm{Hom}_{\omega_K}(\overline{\mathcal{B}}_{\mathrm{cc}}, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}}) \cong \mathcal{H}_{\pm J}.$$

因此，如果物理折叠技巧在数学上说得通，那么我们的主要结果便验证了双曲¨ahler 流形上几何量子化与膜量子化之间的关系。

本文结构如下。第 2 节将回顾任意 X上的厄米向量丛上的 $\mathrm{Sp}(4, \mathbb{C})$ 对称性。第 3 节将专门证明这些定理。第 4 节将引入超膜的概念，并更详细地讨论广义超K¨ahler 流形上超膜之间的态射空间上的 Sp(1) 对称性。

1.3. 致谢。

我们感谢 Marco Gualtieri、Eric Sharpe、Misha Verbitsky 和 Eric Zaslow 提供的宝贵评论与建议。本研究获得中国香港特别行政区研究资助局的项目资助（项目编号：CUHK14306720 和 CUHK14301721）以及香港中文大学直接拨款的大力支持。

2. Sp(4, $\mathbb{C}$)-Symmetry for a HyperKähler Manifold

证明定理 1.1 需要我们理解一种 Sp(4, $\mathbb{C}$) 对称性，它源自 X 上的超K¨ahler 结构。本节将简要回顾这种对称性，并为证明我们的主定理设定记号。

Verbitsky [36] 首先发现，在 $\Omega^*(X,\mathbb{C})$ 上存在 $\mathfrak{so}(5,\mathbb{C}) \cong \mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$ 的复表示；注意到 $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$ 是 $\mathfrak{so}(4,1) \cong \mathfrak{sp}(1,1)$ 的复化（另见 [7, 32]）。事实上，这种表示源自纤维上的李代数作用，并且可以推广到厄米向量丛 E 上的 $\Omega^*(X,E)$：我们有一个纤维上的李代数作用 $X \times \mathfrak{sp}(4,\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(\bigwedge T^*X_{\mathbb{C}} \otimes E)$，它可积分为纤维上的李群作用 $X \times \mathrm{Sp}(4,\mathbb{C}) \to \mathrm{End}(\bigwedge T^*X_{\mathbb{C}} \otimes E)$，因为 Sp(4, $\mathbb{C}$) 是单连通的。

为明确描述上述作用，我们在 $\Omega^*(X,E)$ 上引入以下算子。回顾一下，$\{J_\zeta\}_{\zeta\in\mathbb{S}^2}$ 表示 X上的复结构扭子族。对每个 $\zeta \in \mathbb{S}^2$，定义 $\Omega^*(X,E)$ 上的算子 $\mathrm{ad}(J_\zeta)$，使得对所有 $p,q \in \mathbb{N}$ 以及截面$s \in \Omega^{p,q}_{J_\zeta}(X,E)$，$\mathrm{ad}(J_\zeta)s = (p-q)\sqrt{-1}s$。记 ω_ζ 为 J_ζ 的 K¨ahler 形式。令 L_{ω_ζ} 为与 ω_ζ 相关联的 Lefschetz 算子，其作用于 $\Omega^*(X,E)$，并令 Λ_{ω_ζ} 为 L_{ω_ζ}的厄米伴随。最后，在 $\Omega^*(X,E)$ 上定义线性算子 H 为 $Hs = (k-2n)s$，其中 $k \in \mathbb{N}$ 且 $s \in \Omega^k(X,E)$，并且 $4n = \dim_{\mathbb{R}} X$。

命题 2.1. 复李代数 $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$ 在 $\Omega^*(X,E)$ 上有一个复表示 $\rho^{\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})}$，其中 $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$ 嵌入 $\Omega^*(X,E)$ 上由以下 10 个算子张成的 $\mathbb{C}$-向量空间，即零阶微分算子空间

$$L_{\omega_I}, L_{\omega_J}, L_{\omega_K}, \Lambda_{\omega_I}, \Lambda_{\omega_J}, \Lambda_{\omega_K}, \mathrm{ad}(I), \mathrm{ad}(J), \mathrm{ad}(K), H. \tag{2.1}$$

它积分为李群 Sp(4, $\mathbb{C}$) 在 $\Omega^*(X,E)$ 上的一个复表示 $\rho^{\mathrm{Sp}(4,\mathbb{C})}$。

Sp(4, $\mathbb{C}$) 的某些子群所诱导的作用与主定理密切相关。在第 2.1 小节中，我们将回顾由 X 上的超复结构导出的 $\Omega^*(X,E)$ 上的 Sp(1) 表示。在第 2.2 小节中，我们将描述由 X 上的反全纯辛形式诱导的 $\Omega^*(X,E)$ 上的 SL(2, $\mathbb{C}$) 表示。在第 2.3 节中，我们将讨论 $\Omega^*(X,E)$ 上由克利福德作用给出的 Sp(1) 作用。

2.1. 超复结构诱导的 Sp(1) 作用。

在李代数 $\mathfrak{sp}(1,1)$ 中，由 $\mathrm{ad}(I)$、$\mathrm{ad}(J)$、$\mathrm{ad}(K)$ 生成一个李子代数 $\mathfrak{sp}(1)$。这个 $\mathfrak{sp}(1)$ 的副本所诱导的作用可积分为一个 Sp(1) 作用

$$\rho^{\mathrm{Sp}(1)} : \mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{End}(\Omega^*(X,E)) \tag{2.2}$$

由以下条件确定：对于任意 $\zeta \in \mathbb{S}^2 \subset \mathfrak{sp}(1)$，$p$、$q \in \mathbb{N}$ 和 $s \in \Omega^{p,q}_{J_\zeta}(X,E)$，

$$\rho^{\mathrm{Sp}(1)}(\zeta)(s) = \sqrt{-1}^{p-q} s.$$

2.2. 由反全纯辛形式生成的 SL(2, $\mathbb{C}$) 作用。

本小节讨论由相对于复结构 J_ζ 的反全纯辛形式所生成的 $\Omega^*(X,E)$ 上的 SL(2, $\mathbb{C}$) 作用，其中 $\zeta \in \mathbb{S}^2$，例如 $J_\zeta = J$，并确定 $\Omega^*(X,E)$ 分解为不可约 SL(2, $\mathbb{C}$) 表示的方式。

定义 J-全纯辛形式 $\Omega = \frac{1}{2}(\omega_K + \sqrt{-1}\omega_I)$。令 $L_{\overline{\Omega}}$为 Ω 的 Lefschetz 算子，$\Lambda_{\overline{\Omega}}$ 为 $L_{\overline{\Omega}}$的厄米伴随，并且 $H_{\overline{\Omega}} = [L_{\overline{\Omega}}, \Lambda_{\overline{\Omega}}]$。根据 [40],[1] 中的命题 3.1，$(L_{\overline{\Omega}}, \Lambda_{\overline{\Omega}}, H_{\overline{\Omega}})$ 构成一个 Lefschetz 三元组，作用于 $\Omega^{*,*}_J(X,E)$，且对所有 $k \in \mathbb{N}$和 $s \in \Omega^{*,k}_J(X,E)$，

[1]在 [40], 中，假设 E是 J-全纯的，但证明（$L_{\overline{\Omega}}$、$\Lambda_{\overline{\Omega}}$、$H_{\overline{\Omega}}$）构成一个 Lefschetz 三元组并不需要这一假设。事实上，该证明归功于 [16]，与通常关于 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$-作用的 Lefschetz定理的证明类似。

$H_{\overline{\Omega}}s = (k-n)s$。由 $L_{\overline{\Omega}}, \Lambda_{\overline{\Omega}}, H_{\overline{\Omega}}$ 在 $\mathbb{C}$ 上生成的李代数 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 包含于 $\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})$ 中。为确定 $\Omega^*(X,E)$ 分解为不可约表示的方式，我们给出 Ω-本原性的定义。

定义 2.2. 若截面 $s \in \Omega^*(X,E)$ 满足 $\Lambda_{\overline{\Omega}} s = 0$，则称其为 Ω-本原截面。

注 2.3. 存在由与 j 正交的单位四元数 $\mu \in \mathfrak{sp}(1)$ 参数化的 J-全纯辛形式 $\Omega^{(\mu)} := \frac{1}{2}(\omega_\mu + \sqrt{-1}\omega_{\mathbf{j}\mu})$，并且对于某个 $\theta \in \mathbb{R}$，有 $\Omega^{(\mu)} = e^{\sqrt{-1}\theta}\Omega$。特别地，$\Omega^{(\mathbf{k})} = \Omega$。这些形式给出了不同的 Lefschetz 三元组

$$(L_{\overline{\Omega}^{(\mu)}}, \Lambda_{\overline{\Omega}^{(\mu)}}, H_{\overline{\Omega}^{(\mu)}}) = (e^{\sqrt{-1}\theta}L_{\overline{\Omega}}, e^{-\sqrt{-1}\theta}\Lambda_{\overline{\Omega}}, H_{\overline{\Omega}}),$$

但由此得到的 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-表示以及 $\Omega^{(\mu)}$-本原性与 μ 的选择无关。

对于 $p,q \in \mathbb{N}$，我们将 $\Omega_J^{p,q}{}_{,,\text{本原}}(X,E)$ 记作 Ω-本原截面在 $\Omega_J^{p,q}(X,E)$ 中构成的向量子空间。对于 $m \in \mathbb{N}$，令 U_m 为 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的 $(m+1)$ 维不可约复表示。现在我们给出本小节的主要命题。

命题 2.4. 存在一个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 的复表示同构，

$$\Omega^*(X,E) \cong \bigoplus_{q=0}^{n} U_{n-q} \otimes \Omega^{*,q}_{J,\mathrm{prim}}(X,E), \tag{2.3}$$

其右端的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 在 $\Omega_J^{*,q}{}_{,,\text{本原}}(X,E)$ 上平凡作用。

证明。根据 [16], 中的命题 2.6，$\Omega^*(X,\overline{E})$ 上的 Ω-本原分解给出

$$\Omega^*(X,E) = \bigoplus_{q=0}^{n}\bigoplus_{i=0}^{n-q} L_{\overline{\Omega}}^i \Omega^{*,q}_{J,\mathrm{prim}}(X,E).$$

考虑每个 $q \in \{0,...,n\}$ 并定义 $m = n-q$。注意到对于 $s \in$，$\Omega_J^{*,q}{}_{,,\text{本原}}(X,E)$，

$$\Lambda_{\overline{\Omega}} L_{\overline{\Omega}}^{i+1} s = (i+1)(m-i)L_{\overline{\Omega}}^i s \quad \text{and} \quad H_{\overline{\Omega}} L_{\overline{\Omega}}^i s = (2i-m)L_{\overline{\Omega}}^i s, \tag{2.4}$$

这意味着 $\bigoplus_{i=0}^m L_{\overline{\Omega}}^m \Omega_J^{*,q}{}_{,,\text{本原}}(X,E)$ 是 $\Omega^*(X,E)$ 的一个 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-子表示。定义 $\mathbb{C}$-线性同构

$$\Phi : U_m \otimes \Omega^{*,q}_{J,\mathrm{prim}}(X,E) \to \bigoplus_{i=0}^{m} L_{\overline{\Omega}}^i \Omega^{*,q}_{J,\mathrm{prim}}(X,E)$$

如下。我们采用 U_m 的显式模型，即它是变量 x,y 上的 m 次齐次多项式构成的向量空间，系数取自 $\mathbb{C}$。对于每个截面 $s \in \Omega_J^{*,q}{}_{,,\text{本原}}(X,E)$ 和 $i \in \{0,...,m\}$，定义

$$\Phi(x^i y^{m-i} \otimes s) = \tfrac{(m-i)!}{m!} L_{\overline{\Omega}}^i s.$$

由此，根据 (2.4)，可知对于 $s \in \Omega_J^{*,q}{}_{,\ \mathrm{prim}}(X,E)$ 和 $f \in U_m$，其中 $fs := f \otimes \quad s$,

$$L_{\overline{\Omega}}\Phi(fs) = \Phi(L_m f \otimes s), \quad \Lambda_{\overline{\Omega}}\Phi(fs) = \Phi(\Lambda_m f \otimes s), \quad \text{and} \quad H_{\overline{\Omega}}\Phi(fs) = \Phi(H_m f \otimes s).$$

其中 (L_m, Λ_m, H_m) 是如 (B.1) 所给出的 Lefschetz 三元组。证毕。 □

2.3. 由 Clifford 作用诱导的 Sp(1) 作用。

X 上的超复结构产生一个以 $\mathbb{S}^2$ 为指标的 Spin^c 自旋子丛族。结合 X 上的超K¨ahler 度量 g，可得到一个以 $\mathbb{S}^2$ 为指标的纤维逐点 Clifford 作用族（由 $\zeta \in \mathbb{S}^2$ 参数化）

$$c_\zeta : T^*X_{\mathbb{C}} \to \mathrm{End}(\textstyle\bigwedge T^*X_{\mathbb{C}} \otimes E) \tag{2.5}$$

定义如下。对于 $\alpha \in T^*X_{\mathbb{C}}$，记 $\alpha = \alpha^{1,\ 0} + \alpha^{0,\ 1}$，其中 $\alpha^{1,\ 0} \in T^{1,\ }{}_{J_\zeta}{}^0 X$ 且 $\alpha^{0,\ 1} \in T^{0,\ }{}_{J_\zeta}{}^1 X$。于是

$$c_\zeta(\alpha) = \sqrt{2}(\alpha^{0,1} \wedge - (g^{-1})^\sharp(\alpha^{1,0})\lrcorner).$$

根据将 $\bigwedge T^*X_{\mathbb{C}}$ 识别为 (X,g) 上的 Clifford 代数丛，我们知道，$\omega_I, \omega_J, \omega_K$ 生成了 $\Omega^2(X,\mathbb{C})$ 的一个李子代数，该代数同构于 $\mathfrak{sp}(1)$。于是，三元组 $(c_\zeta(\omega_I)\ c_\zeta(\omega_J)\ c_\zeta(\omega_K))$ 在 $\Omega^*(X,E)$ 上定义了一个 $\mathfrak{sp}(1)$ 作用。事实上，这个 $\mathfrak{sp}(1)$ 的副本包含于一个

由第 2.2 小节介绍的 Lefschetz 三元组生成的 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 副本中。为此，取 $J_\zeta = J$ 和 $\Omega = \frac{1}{2}(\omega_K + \sqrt{-1}\omega_I)$。我们可以验证

$$c_{\mathbf{j}}(\omega_J) = 2\sqrt{-1}H_{\overline{\Omega}}, \quad c_{\mathbf{j}}(\overline{\Omega}) = 2L_{\overline{\Omega}}, \quad \text{and} \quad c_{\mathbf{j}}(\Omega) = -2\Lambda_{\overline{\Omega}}.$$

因此，

$$c_{\mathbf{j}}(\omega_J) = 2\sqrt{-1}H_{\overline{\Omega}}, \quad c_{\mathbf{j}}(\omega_K) = 2(L_{\overline{\Omega}} - \Lambda_{\overline{\Omega}}), \quad \text{and} \quad c_{\mathbf{j}}(\omega_I) = 2\sqrt{-1}(L_{\overline{\Omega}} + \Lambda_{\overline{\Omega}}).$$

我们将上述观察总结为以下命题。

命题 2.5. 由 $c_{\mathbf{j}}(\omega_I)$ $c_{\mathbf{j}}(\omega_J)$ $c_{\mathbf{j}}(\omega_K)$ 生成的 $\Omega^*(X,E)$ 上的 $\mathfrak{sp}(1)$ 表示可积分为一个 Sp(1) 表示 $\rho^{\mathrm{Sp}(1)}{}_{\mathbf{j}}$，其定义如下

$$\rho^{\mathrm{Sp}(1)}_{\mathbf{j}} = \rho^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}_{\mathbf{j}} \circ \rho^{\mathrm{Sp}(1)}_1,$$

其中，$\rho^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})}{}_{\mathbf{j}}$ 是命题 2.4 中给出的 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 表示，$\rho^{\mathrm{Sp}(1)}_1$ 是 (B.2) 中给出的嵌入 $\mathrm{Sp}(1) \hookrightarrow \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$。特别地，

$$\rho^{\mathrm{Sp}(1)}_{\mathbf{j}}(\mathbf{j}) = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}H_{\overline{\Omega}}}, \quad \rho^{\mathrm{Sp}(1)}_{\mathbf{j}}(\mathbf{k}) = e^{\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}} - \Lambda_{\overline{\Omega}})}, \quad \textit{and} \quad \rho^{\mathrm{Sp}(1)}_{\mathbf{j}}(\mathbf{i}) = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}(L_{\overline{\Omega}} + \Lambda_{\overline{\Omega}})}.$$

另一方面，我们将看到，由 X 上的超复结构诱导的 Sp(1) 作用 $\rho^{\mathrm{Sp}(1)}$ 如何与上述逐纤维的克利福德作用族相交织。以下命题对定理 1.1 很有用。其证明可通过直接计算得出。

命题 2.6. 设 $\rho := \rho^{\mathrm{Sp}(1)}$ 为 (2.2) 中给出的作用。设 $\zeta \in \mathbb{S}^2$ 和 $\eta \in$属于 Sp(1)。则下图交换：

$$\begin{array}{ccc} T^*X_{\mathbb{C}} & \xrightarrow{c_\zeta} & \mathrm{End}(\bigwedge T^*X_{\mathbb{C}} \otimes E) \\ {\scriptstyle \rho(\eta)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle conjugation\ by\ \rho(\eta)} \\ T^*X_{\mathbb{C}} & \xrightarrow[c_{\eta\cdot\zeta}]{} & \mathrm{End}(\bigwedge T^*X_{\mathbb{C}} \otimes E) \end{array}$$

3. 自旋^c-Dirac Operators on a HyperKähler Manifold

本节是本文的核心部分。在本节中，设 E 是 X 上的一个厄米向量丛，带有酉联络 ∇。我们首先回顾 Verbitsky 证明的下述定理。该定理与定理 1.1 平行，并为本文提供了研究动机。

定理 3.1.（定理 8.1 在 [37] 中的改写）设 X 是一个超 K¨ahler 流形，E是 X上的一个超全纯丛。则对于所有 $\eta \in \in$Sp(1) 及 $\zeta \in \mathbb{S}^2$，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{0,*}_{J_\zeta}(X,E) & \xrightarrow{\Delta_{\overline{\partial}_{J_\zeta}}} & \Omega^{0,*}_{J_\zeta}(X,E) \\ {\scriptstyle \eta\cdot}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta\cdot} \\ \Omega^{0,*}_{J_{\eta\cdot\zeta}}(X,E) & \xrightarrow[\Delta_{\overline{\partial}_{J_{\eta\cdot\zeta}}}]{} & \Omega^{0,*}_{J_{\eta\cdot\zeta}}(X,E) \end{array} \tag{3.1}$$

其中 $\Delta_{\overline{\partial}_{J_\zeta}} := (\overline{\partial}_{J_\zeta} + \overline{\partial}^*_{J_\zeta})^2$ 是 $\Omega^{0,*}_{J_\zeta}(X,E)$ 上的 Dolbeault 拉普拉斯算子，并且

$$\rho^{\mathrm{Sp}(1)} : \mathrm{Sp}(1) \times \Omega^*(X,E) \to \Omega^*(X,E), \quad (\eta, s) \mapsto \eta \cdot s,$$

是 $\Omega^*(X,E)$ 上的 Sp(1) 作用，如式 (2.2) 所示。

对于任意带有酉联络 ∇ 的 X 上的厄米向量丛 E，E 不一定具有 J_ζ-全纯结构，但我们总能定义相应的 Spin^c-狄拉克算子 $\not{D}_{J_\zeta}$，它在我们的主定理中起着关键作用。为简便起见，∇ 也表示由 ∇ 和 (X,g) 上的列维-奇维塔联络 ∇^g 在 $\bigwedge T^*X_{\mathbb{C}} \otimes E$ 上诱导的联络。

定义 n 3.2. 对于 $\zeta \in \mathbb{S}^2$，将 $\Omega^*(X,E)$ 上的 Spin^c-狄拉克算子 $\not{D}_{J_\zeta}$ 定义为以下复合

$$\Omega^*(X,E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(X, T^*X_{\mathbb{C}} \otimes \bigwedge T^*X_{\mathbb{C}} \otimes E) \xrightarrow{c_\zeta} \Omega^*(X,E), \tag{3.2}$$

其中，c_ζ 是按（2.5）给出的纤维上的克利福德作用。

我们可以对 $\not{D}_{J_\zeta}$给出另一种描述。记 d 为由 ∇诱导的 $\Omega^*(X,E)$ 上的外协变导数。一般而言，$d^2 \neq 0$。任取一个 $\zeta \in \mathbb{S}^2$。在 $\Omega^*(X,E)$ 上定义$\overline{\partial}_{J_\zeta} = \frac{1}{2}(d - \sqrt{-1}d^{J_\zeta})$，其中对于任意 $\mathbb{C}$-线性映射 $\Phi : \Omega^*(X,E) \to \Omega^*(X,E)$，有 $\Phi^{J_\zeta} = \rho(\zeta) \circ \Phi \circ \rho(\zeta^{-1})$，且$\rho = \rho^{\mathrm{Sp}(1)}$按（2.2）给出。当限制在 $\Omega^0(X,E)$ 上时，$\overline{\partial}_{J_\zeta}$是相对于复结构 J_ζ而言的联络∇ 的（0, 1）部分。事实上，我们有

$$\not{D}_{J_\zeta} = \sqrt{2}(\overline{\partial}_{J_\zeta} + \overline{\partial}^*_{J_\zeta}), \tag{3.3}$$

因此 对任意 $p \in \mathbb{N}$, $\not{D}_{J_\zeta}$，都保持空间 $\Omega^{p,*}_{J_\zeta}(X,E)$ 不变，即 $\not{D}_{J_\zeta}(\Omega^{p,*}_{J_\zeta}(X,E)) \subset \Omega^{p,*}_{J_\zeta}(X,E)$.

现在，我们准备证明主要结果。在第 3.1 小节中，我们给出定理 1.1 和推论 1.2 的证明。在第 3.2 小节中，我们进一步讨论任意厄米向量丛 E 上的酉联络 ∇ 所对应的 $\not{D}_J$ 与 $\not{D}_{-J}$ 之间的关系。

3.1. 定理 1.1 的证明。

我们的主要结果涉及一种 Sp(1) 对称性，它交织了 Spin^c-Dirac 拉普拉斯算子的 $\mathbb{S}^2$-指标族 $\{\not{D}^2_{J_\zeta}\}_{\zeta\in\mathbb{S}^2}$，其中 ∇ 的曲率 F_E 满足 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_E = \omega_J \mathrm{Id}_E$。

定理 3.3.（= 定理 1.1）设 X 是一个超K¨ahler 流形， E 是其上的厄米向量丛，并配备曲率为 F_E 、满足 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_E = \omega_J \mathrm{Id}_E$ 的酉联络。那么存在一个 Sp(1) 作用

$$\chi : \mathrm{Sp}(1) \times \Omega^*(X,E) \to \Omega^*(X,E), \quad (\eta, s) \mapsto \eta \cdot s,$$

使得对于所有 $\eta \in$Sp(1) 和 $\zeta \in \mathbb{S}^2$，以下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{0,*}_{J_\zeta}(X,E) & \xrightarrow{\not{D}^2_{J_\zeta}} & \Omega^{0,*}_{J_\zeta}(X,E) \\ {\scriptstyle \eta\cdot}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta\cdot} \\ \Omega^{0,*}_{J_{\eta\cdot\zeta}}(X,E) & \xrightarrow[\not{D}^2_{J_{\eta\cdot\zeta}}]{} & \Omega^{0,*}_{J_{\eta\cdot\zeta}}(X,E) \end{array}$$

其中 $\not{D}_{J_\zeta}$ 是 $\Omega^{0,*}_{J_\zeta}(X,E)$ 上的 Spin^c-狄拉克算子，其定义见定义 3.2。

对于定理 1.1 所需的 Sp(1) 对称性，一个直观的猜测是采用 (2.2) 中的 Sp(1) 作用 $\rho^{\mathrm{Sp}(1)}$，因为定理 3.1 中出现的正是这一作用。事实证明，这并不成立。不过，我们发现，这个“错误的” Sp(1) 作用 $\rho^{\mathrm{Sp}(1)}$ 在定理 1.1 的证明中很有用——它将由 $\mathbb{S}^2$ 索引的二阶微分算子族 $\{\not{D}^2_{J_\zeta}\}_{\zeta\in\mathbb{S}^2}$ 变换为另一个由 $\mathbb{S}^2$ 索引的算子族 $\{\Delta_\zeta\}_{\zeta\in\mathbb{S}^2}$，因此更容易写出一种 Sp(1) 对称性，使其交织这些算子 $\tilde{\Delta}_\zeta$，并保持空间 $\Omega^{0,*}_J(X,E)$ 不变。

定义 3.4。令 $\zeta \in \mathbb{S}^2$。定义微分算子 $\tilde{\Delta}_\zeta$，作用于 $\Omega^{0,*}_J(X,E)$ 上，定义为

$$\tilde{\Delta}_\zeta = \nabla^*\nabla - 2\pi\sqrt{-1}c_{\mathbf{j}}(\omega_\zeta). \tag{3.4}$$

引理 3.5. 设 $\rho := \rho^{\mathrm{Sp}(1)}$ 为式 (2.2) 中给出的作用。设 $\zeta \in \mathbb{S}^2 \subset \mathfrak{sp}(1)$ 和 $\alpha \in$ Sp(1) 满足 $\alpha \cdot \zeta = \mathbf{j}$。则下图可交换:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{0,*}_{J_\zeta}(X,E) & \xrightarrow{\not{D}^2_{J_\zeta}} & \Omega^{0,*}_{J_\zeta}(X,E) \\ {\scriptstyle \rho(\alpha)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho(\alpha)} \\ \Omega^{0,*}_{J}(X,E) & \xrightarrow[\tilde{\Delta}_\zeta]{} & \Omega^{0,*}_{J}(X,E) \end{array}$$

其中， $\not{D}_{J_\zeta}$ 是定义 3.2 中定义在 $\Omega^{0,*}_{J_\zeta}(X,E)$ 上的狄拉克算子，而 $\tilde{\Delta}_\zeta$ 由定义 3.4 定义。

为了证明引理 3.5，我们还需要另一个有用的引理。

引理 3.6. 设 E 是 X 上带有酉联络 ∇ 的厄米向量丛。协变拉普拉斯算子 $\nabla^*\nabla$ 与命题 2.1 中 $\Omega^*(X,E)$ 上的作用 $\rho^{\mathrm{Sp}(4,\mathbb{C})}$ 可交换。

证明. 固定 $\zeta\in\mathbb{S}^2$。我们将看到，只需证明 $\nabla^*\nabla$ 与 L_{ω_ζ} 可交换。回想一下，$\nabla^*\nabla$ 可按如下方式计算。令

$$\mathrm{tr}_g:\Gamma(X,T^*X\otimes T^*X)\to\mathcal{C}^\infty(X)$$

为同构 $\Gamma(X,T^*X\otimes T^*X)\xrightarrow{\cong}\Gamma(X,$ 自同态空间$(TX))$ 与迹映射的复合，该同构由 X 的超K¨ahler 度量 g 诱导。令 $E_0=\bigwedge T^*X_{\mathbb{C}}\otimes E$ 和 $\nabla^{(2)}\colon\Gamma(X,E_0)\to\Gamma(X,T^*X\otimes T^*X\otimes E_0)$ 为与 ∇ 相关的二阶协变导数:

$$\nabla^{(2)}_{u,v}s=\nabla_u\nabla_v s-\nabla_{\nabla^g_u v}s,$$

对所有的 $u,v\in\Gamma(X,TX)$ 和 $s\in\Gamma(X,E_0)$ 均成立。因此 $\nabla^*\nabla=-(\mathrm{tr}_g\otimes\mathrm{Id}_{E_0})\circ\nabla^{(2)}$。

现在考虑任意的 $s\in\Gamma(X,E_0)$ 以及 $u,v\in\Gamma(X,TX)$。由于 X 是超K¨ahler， $\nabla^g\omega_\zeta=0$。于是

$$\nabla_u L_{\omega_\zeta}s=\nabla_u(\omega_\zeta\wedge s)=\omega_\zeta\wedge\nabla_u s=L_{\omega_\zeta}\nabla_u s,$$

由此得到 $\nabla^{(2)}_{u,\ v}L_{\omega_\zeta}s=L_{\omega_\zeta}\nabla^{(2)}_{u,\ v}s$。因此， $[\nabla^*\nabla,L_{\omega_\zeta}]=0$。

接下来，取厄米伴随后可知 $[\nabla^*\nabla,\Lambda_{\omega_\zeta}]=0$。由于 $H=[L_{\omega_\zeta},\Lambda_{\omega_\zeta}]$, $[\nabla^*\nabla,H]=0$。最后注意到 $\mathsf{ad}(K)=[L_{\omega_I},\Lambda_{\omega_J}]$。由雅可比恒等式， $[\nabla^*\nabla,\mathsf{ad}(K)]=0$，类似地$[\nabla^*\nabla,\mathsf{ad}(I)=[\nabla^*\nabla,\mathsf{ad}(J)]=0$。因此， $\nabla^*\nabla$ 也与 $\rho^{\mathfrak{sp}(4,\mathbb{C})}$ 和 $\rho^{\mathrm{Sp}(4,\mathbb{C})}$ 对易。□

与算子 $\tilde{\Delta}_\zeta$, $\not{D}^2_{J_\zeta}$ 类似， $\not{D}^2_{J_\zeta}$ 与 $\nabla^*\nabla$ 的差是一个零阶项。

引理 3.5 的证明。由于 X 是超 K¨ahler 流形，因此它是里奇平坦的，标量曲率也为零。由 Lichnerowicz 公式,

$$\not{D}^2_{J_\zeta}=\nabla^*\nabla-2\pi\sqrt{-1}c_\zeta(\omega_J).$$

由引理 3.6， $\nabla^*\nabla$ 在 Sp(1) 作用 ρ 下保持不变，因此 $\rho(\alpha)\circ\nabla^*\nabla=\nabla^*\nabla\circ\rho(\alpha)$。于是由命题 2.6 可知， $\rho(\alpha)$ 将空间 $\Omega^{0,\ *}_{J_\zeta}(X,E)$ 变换为 $\Omega^{0,\ *}_{\ J}(X,E)$，并将算子 $\not{D}^2_{J_\zeta}$ 变换为 $\tilde{\Delta}_\zeta$。□

下面的引理表明，存在一个 Sp(1) 对称性，它继承自由 Lefschetz 三元组 $(L_{\overline{\Omega}},\Lambda_{\overline{\Omega}},H_{\overline{\Omega}})$ 生成的 $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ 作用，其中 $\Omega=\frac{1}{2}(\omega_K+\sqrt{-1}\omega_I)$ 交织了 $\tilde{\Delta}_\zeta$'s。

引理 3.7. 命题 2.5 中给出的 $\Omega^{0,\ *}_{\ J}(X,E)$ 上的 Sp(1) 作用 $\rho:=\rho^{\mathrm{Sp}(1)}{}_{\mathbf{j}}$ 满足以下条件：对于所有 $\eta\in$Sp(1) 和 $\zeta\in\mathbb{S}^2$， 下图交换:

$$\begin{array}{ccc}\Omega^{0,*}_J(X,E) & \xrightarrow{\tilde{\Delta}_\zeta} & \Omega^{0,*}_J(X,E)\\ {\scriptstyle\rho(\eta)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho(\eta)}\\ \Omega^{0,*}_J(X,E) & \xrightarrow[\tilde{\Delta}_{\eta\cdot\zeta}]{} & \Omega^{0,*}_J(X,E)\end{array}$$

˜其中 Δ_ζ 如定义 3.4 所定义。

证明。任取 $\eta\in$Sp(1) 和 $\zeta=\zeta_I\mathbf{i}+\zeta_J\mathbf{j}+\zeta_K\mathbf{k}\in\mathbb{S}^2\subset\mathfrak{sp}(1)$。注意到

$$\tfrac{1}{2}c_{\mathbf{j}}(\omega_\zeta)=\zeta_J\cdot\sqrt{-1}H_{\overline{\Omega}}+\zeta_K\cdot(L_{\overline{\Omega}}-\Lambda_{\overline{\Omega}})+\zeta_I\cdot\sqrt{-1}(L_{\overline{\Omega}}+\Lambda_{\overline{\Omega}}).$$

由命题 2.5 可得 $\rho(\eta)\circ c_{\mathbf{j}}(\omega_\zeta)=c_{\mathbf{j}}(\omega_{\eta\cdot\zeta})\circ\rho(\eta)$。另一方面，由引理 3.6 可得 $\rho(\eta)\circ\nabla^*\nabla=\nabla^*\nabla\circ\rho(\eta)$。证毕。□

我们将完成定理 1.1 的证明。

定理 1.1 的证明。由 Sp(1) 作用在 $\mathbb{S}^2 \subset \mathfrak{sp}(1)$ 上的传递性，对每个 $\zeta \in \mathbb{S}^2$，我们可以选取 $\alpha_\zeta \in$ Sp(1)，使得 $\alpha_\zeta \cdot \zeta = \mathrm{j}$。然后，对所有 $\eta \in$ Sp(1}，定义 $\chi(\eta)$ 为以下复合

$$\Omega^{*,*}_{J_\zeta}(X,E) \xrightarrow{\rho(\alpha_\zeta)} \Omega^{*,*}_{J}(X,E) \xrightarrow{\rho_{\mathrm{j}}(\eta)} \Omega^{*,*}_{J}(X,E) \xrightarrow{(\rho(\alpha_{\eta\cdot\zeta}))^{-1}} \Omega^{*,*}_{J_{\eta\cdot\zeta}}(X,E)$$

其中 $\rho := \rho^{\mathrm{Sp}(1)}$ 且 $\rho_{\mathrm{j}} = \rho^{\mathrm{Sp}(1)}{}_{\mathrm{j}}$。于是我们很容易看出，$\chi$: Sp(1) $\to$ End($\Omega^*(X,E)$) 是一个作用，并且对所有 $\eta \in$ Sp(1) 及 $\zeta \in \mathbb{S}^2$, $\chi(\eta)(\Omega^{0,}{}_{J_\zeta}{}^{*}(X,E))$，都有 $= \Omega^{0,}{}_{J_{\eta\cdot\zeta}}{}^{*}(X,E)$。最后，由引理 3.5 和 3.7，对所有 $\eta \in \mathbb{S}^2$ 和 $\eta \in$Sp(1)，我们有

$$\chi(\eta) \circ \not{D}^2_{J_\zeta} = \not{D}^2_{J_{\eta\cdot\zeta}} \circ \chi(\eta).$$

□

注 3.8。证明定理 1.1 时采用的方法也可用于重新证明定理 3.1。下面简要说明。设 E 是 X 上的一个超全纯丛。同样，我们可以应用 Lichnerowicz 公式，将 $\not{D}^2_{J_\zeta}$ 表示为协变拉普拉斯算子 $\nabla^*\nabla$ 及其 Weitzenb¨ock 余项的形式。由引理 3.6，$\nabla^*\nabla$ 在 Sp(1) 作用 $\rho^{\mathrm{Sp}(1)}$ 下保持不变，该作用如 (2.2) 所示。$\not{D}^2_{J_\zeta}$ 的 Weitzenb¨ock 余项涉及曲率 F_E，根据 [37] 中的命题 1.2，曲率在 $\rho^{\mathrm{Sp}(1)}$ 下也保持不变。由此，根据命题 2.6，$\rho^{\mathrm{Sp}(1)}$ 交织算子 $\not{D}^2_{J_\zeta}$。

由定理 1.1 可得以下消失定理。

推论 3.9。（= 推论 1.2）在与定理 1.1 相同的假设下，对所有 $\zeta \in \mathbb{S}^2$，有

$$\ker \not{D}^-_{J_\zeta} = 0,$$

其中，$\not{D}^-_{J_\zeta}$ 是 $\not{D}_{J_\zeta}$ 在奇数次分量 $\Omega^{0\ 2*+1}_{J_\zeta}{}_{,}(X,E)$ 上的限制。

证明。根据秋月-中野证明 [1] Kodaira消失定理的方法，当 $q > 0$ 时，$\not{D}^2_J$ 在 $\Omega^{2n}{}_{,J}{}^{q}(X,E)$ 上的限制的核为零。将在第 3.2 小节证明的引理 3.14 指出，$e^{-\frac{\pi}{2}(L_\Omega - \Lambda_\Omega)}$: $\Omega^{0}{}_{,J}{}^{q}(X,E) \to \Omega^{2n}{}_{,J}{}^{q}(X,E)$ 与 $\not{D}^2_J$ 可交换，其中 $\Omega = \frac{1}{2}(\omega_K + \sqrt{-1}\omega_I)$。因此，ker $\not{D}^2_J \cap \Omega^{0}{}_{,J}{}^{q}(X,E) = 0$。

现在固定 $\zeta \in \mathbb{S}^2$。由于定理 1.1 中出现的 Sp(1) 作用保持 $\mathbb{Z}_2$分次，$\not{D}^2_{J_\zeta}$ 在 $\Omega^{0\ 2*+1}_{J_\zeta}{}_{,}(X,E)$ 上的限制的核为零。由于 ker $\not{D}_{J_\zeta}$ = ker $\not{D}^2_{J_\zeta}$，我们有 ker $\not{D}^-_{J_\zeta} = 0$。□

3.2. Hodge 星算子 intertwining $\not{D}_J$ 和 $\not{D}_{-J}$。A

n 个观察 from 定理 1.1 可知，存在一个 $\mathbb{S}^1$以 - 为指标的同构族

$$\chi(\mu) : \Omega^{0,*}_J(X,E) \to \Omega^{0,*}_{-J}(X,E)$$

由 $\mu \in$ Sp(1) 中满足 $\mu \cdot \mathrm{j} = -\mathrm{j}$ 的元素参数化，即与 j 正交的单位四元数 $\mu \in \mathfrak{sp}(1)$，使得 $\chi(\mu) \circ \not{D}^2_J = \not{D}^2_{-J} \circ \chi(\mu)$。在本小节中，我们将证明，即使对于配备酉联络 ∇、定义在 X 上的任意厄米向量丛 E，仍存在一个以 $\mathbb{S}^1$ 为指标、由这类 μ 自然参数化的同构族，该族交织 $\not{D}_J$ 与 $\not{D}_{-J}$，且这些同构由超 K¨ahler 流形 X 上的 Hodge 星算子诱导。

定理 3.10. 设 X 是一个超K¨ahler流形，E 是其上的厄米向量丛，并配备酉联络 ∇。那么对所有 $p \in \mathbb{N}$，下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{p,*}_J(X,E) & \xrightarrow{\not{D}_J} & \Omega^{p,*}_J(X,E) \\ {\scriptstyle \chi(\mathbf{k})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \chi(\mathbf{k})} \\ \Omega^{p,*}_{-J}(X,E) & \xrightarrow[\not{D}_{-J}]{} & \Omega^{p,*}_{-J}(X,E) \end{array}$$

其中 $\chi(\mathrm{k}) := \rho^{\mathrm{Sp}(1)}(\mathrm{k}) \circ \rho^{\mathrm{Sp}(1)}{}_{\mathrm{j}}(\mathrm{k})$，而 $\rho^{\mathrm{Sp}(1)}$, $\rho^{\mathrm{Sp}(1)}{}_{\mathrm{j}}$ 分别是如 (2.2) 和命题 2.5 中所给出的 Sp(1) 作用。

Cl早先，这个定理在将 k 替换为任意 $\mu \in \mathrm{Sp}(1)$ 且满足 $\mu \cdot \mathbf{j} = -$ 时仍然成立 $\mathbf{j}$.

设 $\rho := \rho^{\mathrm{Sp}(1)}$ 和 $\rho_{\mathbf{j}} := \rho^{\mathrm{Sp}(1)}\,\mathbf{j}$。由于 $\chi(\mathbf{k})$ 可写为两个作用的复合 $\Omega^{p,q}_J$，(X,E) $^{\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{k})}\longrightarrow \Omega^{p,2n-q}_J$，$(X,E)$ $^{\rho(\mathbf{k})}\longrightarrow \Omega^{p,2n-q}_{-J}$，$(X,E)$，人们可能会期望通过声称 $\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{k})$ 与 $\not{D}_J$ 可交换，且 $\rho(\mathbf{k})$ 交织 $\not{D}_J$ 和 $\not{D}_{-J}$，来证明定理 3.10。然而，这一说法的前半部分和后半部分一般都不成立。相反，我们将把 $\chi(\mathbf{k})$ 表示为另外两个算子的复合。为此，我们需要考虑另一个作用于 $\Omega^*(X,E)$ 的算子 $*$。它本质上是 (X,g) 上的 Hodge 星算子 $\star$，但在 $\Omega^*(X,E)$ 的不同次数分量上相差一些符号。其定义如下。对于 $k \in \mathbb{N}$ 和 $s \in \Omega^k(X,E)$,

$$* s = (-1)^{\frac{1}{2}k(k+1)} \star s. \tag{3.5}$$

$*$ 的几何意义源于广义 K¨ahler 几何——$*$ 是 $\star$的一种推广。感兴趣的读者请参阅 [9, 20]。

现在我们给出以下引理。

引理 3.11。对于所有的 p、$q \in \mathbb{N}$，以下图交换：

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{p,q}_J(X,E) & \xrightarrow{\ *\ } & \Omega^{2n-q,2n-p}_J(X,E) \\ {\scriptstyle \rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{k})}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{k})} \\ \Omega^{p,2n-q}_J(X,E) & \xrightarrow[\rho(\mathbf{k})]{} & \Omega^{2n-q,p}_J(X,E) \end{array} \tag{3.6}$$

换言之，令 $\Omega = \frac{1}{2}(\omega_K + \sqrt{-1}\omega_I)$，则有

$$* = e^{\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}} - \Lambda_{\overline{\Omega}})} \circ \rho(\mathbf{k}) \circ e^{\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}} - \Lambda_{\overline{\Omega}})}.$$

证明。我们首先检验图 (3.6) 中出现的映射是否按图示方式改变 $\Omega^{*\,*}_J(X,E)$ 上的双次数。显然，$*(\Omega^{p,q}_J(X,E)) = \Omega^{2n-q,2n-p}_J(X,E)$，且 $\rho(\mathbf{k})(\Omega^{p,q}_J(X,E)) = \Omega^{q,p}_J(X,E)$。由命题 2.5 可知，$\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{k}) = e^{\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}} - \Lambda_{\overline{\Omega}})}$。根据命题 2.4 和 (B.4)，可检验 $\rho_{\mathbf{j}}(\mathbf{k})(\Omega^{p,q}_J(X,E)) = \Omega^{p,2n-q}_J(X,E)$。N

ow the 我们证明中的关键点是广义 K¨ahler 几何中的一个结果（ [11] 中的引理 1.6） ：

$$* = e^{\frac{\pi}{2}(L_{\omega_K} - \Lambda_{\omega_K})} \circ \rho(\mathbf{k}). \tag{3.7}$$

事实上，(3.7) 是魏尔公式 [42] 的另一种表述（参见 [8] 中的公式（2））。由于我们很容易看出 $\rho(\mathbf{k}) \circ e^{\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}} - \Lambda_{\overline{\Omega}})} = e^{\frac{\pi}{2}(L_{\Omega} - \Lambda_{\Omega})} \circ \rho(\mathbf{k})$，最终得到

$$e^{\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}} - \Lambda_{\overline{\Omega}})} \circ \rho(\mathbf{k}) \circ e^{\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}} - \Lambda_{\overline{\Omega}})} = e^{\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}} - \Lambda_{\overline{\Omega}})} \circ e^{\frac{\pi}{2}(L_{\Omega} - \Lambda_{\Omega})} \circ \rho(\mathbf{k}) = e^{\frac{\pi}{2}(L_{\omega_K} - \Lambda_{\omega_K})} \circ \rho(\mathbf{k}) = *.$$

□

根据上述引理，我们可以将 $\chi(\mathbf{k})$ 改写为

$$\chi(\mathbf{k}) = \rho_{\mathbf{j}}(-\mathbf{k}) \circ * = e^{-\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}} - \Lambda_{\overline{\Omega}})} \circ *.$$

于是，定理 3.10 的证明分为两个步骤。第一步是证明 $*$ 与 $\not{D}_J$ 和 $\not{D}_{-J}$ 交织。为简便起见，我们记 $\overline{\partial} := \overline{\partial}_J$，$\partial := \overline{\partial}_{-J}$。

引理 3.12。对于所有 $p \in \mathbb{N}$，以下图表可交换：

$$\begin{array}{ccc} \Omega^{p,*}_J(X,E) & \xrightarrow{\not{D}_J} & \Omega^{p,*}_J(X,E) \\ {\scriptstyle *}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle *} \\ \Omega^{2n-p,*}_{-J}(X,E) & \xrightarrow[\not{D}_{-J}]{} & \Omega^{2n-p,*}_{-J}(X,E) \end{array}$$

证明 由 (3.5) 可容易验证 $\partial^* = *\overline{\partial}*^{-1}$ 和 $\partial = *\overline{\partial}^**^{-1}$。于是我们得到

$$\not{D}_J = \sqrt{2}(\overline{\partial} + \overline{\partial}^*) \quad \text{and} \quad \not{D}_{-J} = \sqrt{2}(\partial + \partial^*).$$

□

第二步是证明 $e^{-\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}}-\Lambda_{\overline{\Omega}})}$与 $\not{D}_J$ 对易。我们还需要一个引理来证明这一结论。

引理 3.13。我们在 $\Omega^*(X,E)$ 上有 $[L_{\overline{\Omega}},\not{D}_{-J}]=[\Lambda_{\overline{\Omega}},\not{D}_{-J}]=0$。

证明。回忆 $\not{D}^*_{-J}=\sqrt{2}(\partial+\partial^*)$。由于 $\not{D}^*_{-J}=\not{D}_{-J}$, $[L_{\overline{\Omega}},\not{D}_{-J}]=0$推出 $[\Lambda_{\overline{\Omega}},\not{D}_{-J}]=0$。因此，只需证明如下断言： $[L_{\overline{\Omega}},\partial]=0$ 且 $[L_{\overline{\Omega}},\partial^*]=0$。事实上，关键恒等式为

$$[L_{\omega_\zeta},d^*]=d^{J_\zeta},\quad \text{for all } \zeta\in\mathbb{S}^2,$$

即使 E 不是 J_ζ-全纯的，这个恒等式仍然成立。受 Verbitsky 关于四元数 Dolbeault 复形 [37], 的工作的类似思路启发，我们如下证明上述断言。

$$\begin{aligned}[L_{\omega_K},\partial^*]=&\tfrac{1}{2}[L_{\omega_K},d^*-\sqrt{-1}(d^*)^J]=\tfrac{1}{2}(d^K-\sqrt{-1}[(L_{\omega_K})^{J^{-1}},d^*]^J)\\ =&\tfrac{1}{2}(d^K+\sqrt{-1}[L_{\omega_K},d^*]^J)=\tfrac{1}{2}(d^K+\sqrt{-1}(d^K)^J)=\tfrac{1}{2}(d^K+\sqrt{-1}d^I).\end{aligned}$$

同理，$[L_{\omega_I},\partial^*]=\frac{1}{2}(d^I-\sqrt{-1}d^K)$。因此， $[L_{\overline{\Omega}},\partial^*]=\frac{1}{2}[L_{\omega_K}-\sqrt{-1}L_{\omega_I},\partial^*]=0$。另一方面，由于 Ω 是 ∂-闭的， $[L_{\overline{\Omega}},\partial]=0$ 在 $\Omega^*(X,E)$ 上。□

接着，我们通过证明以下引理来完成第二步。

引理 3.14。对于所有 $p\in\mathbb{N}$，以下图交换：

$$\begin{array}{ccc}\Omega^{2n-p,*}_{-J}(X,E) & \xrightarrow{\not{D}_{-J}} & \Omega^{2n-p,*}_{-J}(X,E)\\ \Big\downarrow{\scriptstyle e^{-\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}}-\Lambda_{\overline{\Omega}})}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle e^{-\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}}-\Lambda_{\overline{\Omega}})}}\\ \Omega^{p,*}_{-J}(X,E) & \xrightarrow[\not{D}_{-J}]{} & \Omega^{p,*}_{-J}(X,E)\end{array}$$

证明。由引理 3.13， $[L_{\overline{\Omega}},\not{D}_{-J}]=[\Lambda_{\overline{\Omega}},\not{D}_{-J}]=0$。于是， $\not{D}_{-J}$在由 $L_{\overline{\Omega}}-\Lambda_{\overline{\Omega}}$生成的 $\mathfrak{u}(1)$ 作用下保持不变，因而在积分该 $\mathfrak{u}(1)$ 作用所得的 U(1) 作用下也保持不变。因此，

$$e^{-\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}}-\Lambda_{\overline{\Omega}})}\not{D}_{-J}=\not{D}_{-J}e^{-\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}}-\Lambda_{\overline{\Omega}})}.$$

□

有了上述引理，定理 3.10 的证明就变得直接明了。

定理 3.10 的证明。我们有

$$\begin{aligned}\chi(\mathbf{k})\circ\not{D}_J=&e^{-\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}}-\Lambda_{\overline{\Omega}})}\circ *\circ\not{D}_J=e^{-\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}}-\Lambda_{\overline{\Omega}})}\circ\not{D}_{-J}\circ *\\ =&\not{D}_{-J}\circ e^{-\frac{\pi}{2}(L_{\overline{\Omega}}-\Lambda_{\overline{\Omega}})}\circ *=\not{D}_{-J}\circ\chi(\mathbf{k}).\end{aligned}$$

第一个等式和最后一个等式由引理 3.11 得出。第二个等式由引理 3.12 得出，第三个等式则由引理 3.14 得出。□

4. Sp(1)-symmetries for Morphism Spaces between Hyperbranes

本节最后将讨论主要结果在物理上的意义。如第 1.1 小节所述，定理 1.1 和 3.1 分别对 (A, B, A) 膜和 (B, B, B) 膜具有物理意义。我们将通过广义超复几何统一这两个概念。附录 A 回顾了相关背景框架，供不熟悉广义几何的读者参考。

定义 4.1. 广义超复流形 $(M,\mathcal{J})$ 上的（秩为 1）超膜，是指子流形 $S\subset M$，连同一个带有酉联络的厄米线丛 L；该线丛称为其 Chan-Paton 丛，并满足对所有 $\zeta\in\mathbb{S}^2$，(S,L) 都是 $(M,\mathcal{J}_\zeta)$ 上的膜（见定义 A.3），其中 $\{\mathcal{J}_\zeta\}_{\zeta\in\mathbb{S}^2}$ 是 M 上广义复结构的扭子族。

如果光滑流形 M 上的广义超复结构 $\mathcal{J}$ 是由例 A.7 中的超复结构（分别由例 A.8 中的全纯辛结构）诱导的，那么我们称 $(M,\mathcal{J})$ 上的超膜为 (B, B, B) 膜（分别称为 (A, B, A) 膜）。

在本节余下部分中，除非另有说明，设 $\mathcal{B}_0 = (S_0, L_0)$ 和 $\mathcal{B}_1 = (S_1, L_1)$ 是 X 上的超膜，其中 X 配备了由其上的超K¨ahler 结构诱导的广义超K¨ahler 结构（如注 A.12 所述），且 S_0 与 S_1 的交 S 是干净且紧致的，并定义 $L = \mathrm{Hom}(L_0|_S, L_1|_S)$。我们预期，相对于以 $\mathbb{S}^2$ 为指标的广义复结构族，从 $\mathcal{B}_0$ 到 $\mathcal{B}_1$ 的态射空间由 Sp(1) 对称性相互交织。我们将在以下不同情形中探讨这一预期是否成立。

4.1. (B, B, B) 膜之间态射空间的 Sp(1) 对称性。

设 $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ 是 X 上的 (B, B, B) 膜。作为示例，假设 $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ 是充满空间的。对于每个 $\zeta \in \mathbb{S}^2$，相对于扭子族中的复结构 J_ζ 的态射空间 $\mathrm{Hom}^{J_\zeta}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$，可计算为 $\Omega^{0,*}_{J_\zeta}(X, \widetilde{L})$ 的 $\overline{\partial}_{J_\zeta}$-上同调；根据霍奇理论，它同构于 Dolbeault 拉普拉斯算子 $\Delta_{\overline{\partial}_{J_\zeta}}$ 的核。随后，我们可以应用定理 3.1，建立使 $\mathrm{Hom}^{J_\zeta}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ 相互交织的 Sp(1) 对称性。

现在考虑一般情形，此时 $\mathcal{B}_0$、$\mathcal{B}_1$ 不一定是充满空间的。我们先说明，对于固定的 $\zeta \in \mathbb{S}^2$，如何将 $\mathrm{Hom}^{J_\zeta}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ 计算为 Dolbeault 上同调。此处我们将“全纯”指作“J_ζ-全纯”，并在相关记号中省略后缀 J_ζ。在导出范畴的意义下，$\mathrm{Hom}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ 定义为 $\mathrm{Ext}^*_{\mathcal{O}_X}(\iota_{0*}\mathcal{L}_0, \iota_{1*}\mathcal{L}_1)$ [2]，其中 ι_i: $S_i \hookrightarrow X$ 是包含映射，而 $\mathcal{L}_i$ 是 $i \in \{0,1\}$ 上 L_i 的全纯截层。根据[13], 中的定理 A.1，我们得到以下局部到整体 Ext 谱序列

$$E_2 = H^{0,p}_{\overline{\partial}}\left(S, (\widetilde{N}^{1,0})^{\wedge(q-m)} \otimes \det N^{1,0}(S/S_1) \otimes \widetilde{L}\right) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{\mathcal{O}_X}(\iota_{0*}\mathcal{L}_0, \iota_{1*}\mathcal{L}_1), \tag{4.1}$$

~其中 N 是 S_0 与 S_1 的交的超额丛，即

$$\widetilde{N} = \frac{TX|_S}{TS_0|_S + TS_1|_S},$$

并且 m 是 S 在 S_1 中的全纯法丛 $N^{1,0}(S/S_1)$ 的秩。注意，S、S_0 和 S_1 都是 X 的超 Kähler 子流形。类似于 [38], 中命题 5.1 的证明，我们可以~证明 $TX|_S$、$TS_0|_S + TS_1|_S \cong (TS_0|_S \oplus TS_1|_S)/TS$ 和 N 都是超全纯丛。于是，S 上全纯向量丛的以下短正合列分裂:

$$0 \longrightarrow T^{1,0}S_0|_S + T^{1,0}S_1|_S \longrightarrow T^{1,0}X|_S \longrightarrow \widetilde{N}^{1,0} \longrightarrow 0$$

根据 [38] 中的命题 5.2。结合 [4] 中的定理 1.8 以及同一参考文献第 1.4 节中的论证可知，式 (4.1) 中的局部到整体 Ext 谱序列在 E_2 页退化。因此，我们可以将 $\mathrm{Hom}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ 视为 Dolbeault 上同调

$$H^{0,*}_{\overline{\partial}}\left(S, \left(\bigwedge \widetilde{N}^{1,0}\right) \otimes \det N^{1,0}(S/S_1) \otimes \widetilde{L}\right).$$

接下来，我们概述在这种情况下如何出现所期望的 Sp(1) 对称性。我们很容易看出，X 上的超复结构交织了这些厄米向量丛

$$E_\zeta := \left(\bigwedge T^{*(0,1)}_{J_\zeta} S\right) \otimes \left(\bigwedge \widetilde{N}^{1,0}_{J_\zeta}\right) \otimes \det N^{1,0}_{J_\zeta}(S/S_1) \otimes \widetilde{L}.$$

按照注 3.8 中所述的方法，我们可以证明它也交织了 $\Gamma(S, E_\zeta)$ 上的 Dolbeault 拉普拉斯算子 $\Delta_{\overline{\partial}_{J_\zeta}}$，因为涉及的所有向量丛都是超全纯的。因此，存在一个交织 $\mathrm{Hom}^{J_\zeta}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ 的 Sp(1) 对称性。

最后补充一点，Verbitsky [41] 针对扭子族中的每个复结构，定义了紧致超K¨ahler 流形上的多稳定超全纯反身层张量范畴

[2]更准确地说，根据 [29], ，按照我们的定义，B 膜 $\mathcal{B}_i = (S_i, L_i)$ 应对应于层 $\iota_{i*}\widetilde{\mathcal{L}}_i$，而非 $\iota_{i*}\mathcal{L}_i$；其中 $\widetilde{\mathcal{L}}_i$ 是 $L_i \otimes \sqrt{K_{S_i}}$ 的全纯截层，前提是 S_i 的典范丛存在平方根 $\sqrt{K_{S_i}}$。当 S_i 是超凯勒流形时，$\sqrt{K_{S_i}}$ 可以取为平凡丛。

，应将其理解为 (B, B, B) 膜的范畴。他证明，这些张量范畴中的任意两个之间都存在自然等价。这表明，即使在范畴层面上，超膜也可能具有 Sp(1) 对称性。

4.2. (A, B, A) 膜之间态射空间的 Sp(1) 对称性。S

相对于 $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ 全纯辛形式 Ω_J 与膜位于 $\sqrt{-1}\omega$ 即确定的 $\mathcal{B}_1$ 膜上的广义复结构的扭子族 $\{\mathcal{J}_\zeta\}_{\zeta\in\mathbb{S}^2}$，如例 A.8 所示。虽然我们尚不清楚这一预期是否普遍成立，但我们将某些情形下关于态射空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{J}_\zeta}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ 上的 Sp(1) 对称性的观察列于下表。

假设 $\mathcal{B}_0$ 与 $\mathcal{B}_1$ 是 (M, ω, B) 上的 A-膜，其中 $\mathcal{B}_1$ 由全纯辛结构 Ω_J 诱导，且 $\mathcal{B}_0$ 是 $\mathcal{B}_1$ 的 st 变换。

$\mathcal{B}_0$	$\mathcal{B}_1$	$\mathrm{Hom}_{\mathcal{J}_\zeta}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$	Sp(1) 对称性	证明思路
$\mathcal{B}_{\mathrm{cc}}$	$\mathcal{B}_{\mathrm{cc}}$	$H^{0,*}_{\overline{\partial}_{J_{-\kappa\cdot\zeta}}}(X)$	存在	定理 3.1
$\overline{\mathcal{B}}_{\mathrm{cc}}$	$\mathcal{B}_{\mathrm{cc}}$	$\mathrm{ind}\ \not{D}_{J_{-\kappa\cdot\zeta}}$	存在	定理 1.1
Ω_J-拉格朗日	Ω_J-拉格朗日	$H^*_d(S, \widetilde{L})$ 如果 $\zeta \neq \mp\mathbf{j}$; $H^{0,*}_{\overline{\partial}_{\pm J}}(S, \bigwedge^{0,1}_{\pm J}\otimes\widetilde{L})$ 如果 $\zeta = \mp\mathbf{j}$	存在	霍奇-德拉姆定理
Ω_J-拉格朗日	$\mathcal{B}_{\mathrm{cc}}$	若 $\zeta \neq \mp\mathbf{j}$，则未定义 $H^{0,*}_{\overline{\partial}_{\pm J}}$ 若 $\zeta = \mp\mathbf{j}$，则为 $(S, \widetilde{L}\otimes\sqrt{K_{\pm J}})$	未知	未知

请注意，基于以下两个事实，我们将在上述情形中进行观察时忽略瞬子修正：

(1) 当 $\mathcal{B}_0$ 和 $\mathcal{B}_1$ 中任意一个是充满空间的时，不存在瞬子修正 [23]；(2) 当 X 上的超K¨ahler 度量完备时，对于一般的 $\theta \in [0, 2\pi$ 取值，作为 A-膜的 Ω_J-拉格朗日子流形对在 $(X, \omega_{\cos\theta I+\sin\theta K})$ 上不存在瞬子修正 [35]。

现在，我们对上表中出现的态射空间作更详细的说明。

4.2.1. $(\mathcal{B}_{\mathrm{cc}}, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$-系统。

回顾一下，充满空间的 A-膜 $\mathcal{B}_{\mathrm{cc}}$ 在 X 上的 Chan-Paton 丛 L 的曲率 F_L 满足 $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_L = \omega_J$。我们采用 Kapustin-Li [26] 的方法，即该系统中由 $\mathbb{S}^2$ 索引的态射空间族由与底层广义复子流形相关联的李代数丛上同调 [3] 计算得出。经过仔细计算可知，对于 $\zeta \in \mathbb{S}^2$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{J}_\zeta}(\mathcal{B}_{\mathrm{cc}}, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}}) = H^{0,*}_{\overline{\partial}_{J_{-\kappa\cdot\zeta}}}(X),$$

where $\kappa = e^{-\frac{\pi}{4}\mathbf{j}}$。例如，$\mathrm{Hom}_J(\mathcal{B}_{\mathrm{cc}}, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}}) = H^{0,*}_{\overline{\partial}_J}(X)$ 和 $\mathrm{Hom}_{\omega_K}(\mathcal{B}_{\mathrm{cc}}, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}}) = H^{0,*}_{\overline{\partial}_I}(X)$.

4.2.2. $(\overline{\mathcal{B}}_{\mathrm{cc}}, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$-系统。

回想一下，$\overline{\mathcal{B}}_{\mathrm{cc}}$ 的 Chan-Paton 丛是 L 的对偶丛 $L^\vee$。对于 $\zeta = \mp\mathbf{j}$，态射空间由 $\mathrm{Hom}_{\pm J}(\overline{\mathcal{B}}_{\mathrm{cc}}, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}}) = H^{0,*}_{\overline{\partial}_{\pm J}}(X, \mathrm{Hom}(L^\vee, L)) = H^{0,*}_{\overline{\partial}_{\pm J}}(X, L^{\otimes 2})$ 给出；对于其他 ζ，虽然我们尚未找到态射空间的上同调描述，但我们提出通过选择一个厄米度量来作如下定义。

定义 4.2. 设 (M, ω) 为紧致辛流形， B 为M上的闭实二形式。设 $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ 为 (M, ω, B) 上的充满空间的A-膜，其 Chan-Paton 丛分别为 L_0, L_1。设 (I,Ω) 为由 $\mathcal{B}_1$诱导的 M 上的全纯辛结构。假设 g 是 (M, I) 上的厄米度量。定义

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{J}}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1) = \mathrm{ind}\,\not{D},$$

[3]按照我们的约定，我们将李代数丛视为广义切丛子丛中广义复结构的 $\sqrt{-1}$-特征丛。由于这一约定，广义复结构 $\mathcal{J}_{\mathbf{i}}$, $\mathcal{J}_{\mathbf{k}}$ 分别对应于辛形式 ω_I, ω_K ，而 $\mathcal{J}_{\mp\mathbf{j}}$ 对应于复结构 $\pm J$。

其中， $\mathcal{J}$ 是如例 A.4 中由 ω 和 B 诱导的 M 上的广义复结构，$\not{D}$ 是作用于 $\Omega^{0,*}_{J}(M, \mathrm{Hom}(L_0, L_1))$ 上的 Spin^c-狄拉克算子。

采用定义 4.2，由霍奇理论可得，对于所有 $\zeta \in \mathbb{S}^2$，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{J}_\zeta}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1) = \mathrm{ind}\ \not{D}_{J_{-\kappa\cdot\zeta}}$，其中 $\not{D}_{J_{-\kappa\cdot\zeta}}$ 是作用于 $\Omega^{0,*}_{J_{-\kappa\cdot\zeta}}(X, L^{\otimes 2})$ 上的 Spin^c-狄拉克算子。

4.2.3. 对于那些 S_0, S_1 为 Ω_J-拉格朗日子流形的情形，$(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$-系统。

设 S_0, S_1 是 X 中的 Ω_J-拉格朗日子流形。我们首先考虑 (X, J) 上的 B 模型（$(X, -J)$ 的情形类似）。对于每个 $i \in \{0, 1\}$，假设 S_i 是自旋的，因此它有一个平方根 $\sqrt{K_i}$，即 S 的典范丛 K_i 的平方根。于是，X 上的 B 膜 $\mathcal{B}_i$ 对应于将 $L_i \otimes \sqrt{K_i}$ 的全纯截层导出推前到 X。令 $N(S/S_i)$ 为 S 在 S_i 中的法丛。根据 [31], 中的引理 19，$\det N^{1,0}(S/S_0) \otimes \det N^{1,0}(S/S_0)$ 是全纯平凡的。接着， [29] 第 5.3 节中的论证表明

$$\mathrm{Hom}(K_0|_S, K_1|_S) \cong \det(N^{1,0}(S/S_1)^\vee)^{\otimes 2}.$$

因此，在假设 $\mathrm{Hom}(\sqrt{K_0}|_S, \sqrt{K_1}|_S) \cong \det(N^{1,0}(S/S_1)^\vee)$ 这一温和条件成立时，我们得到一个类似于 (4.1) 的局部到整体 Ext 谱序列，其 E_2 页为 $H^{0,p}_{\bar\partial}(S, (\widetilde{N}^{1,0})^{\wedge(q-m)} \otimes \widetilde{L})$，其中 N 是 S_0 与 S_1 之交的超额丛，m 是 $N^{1,0}(S/S_1)$ 的秩。如果 $S_0 = S_1$ 或 S_0 与 S_1 横截相交，则该局部到整体 Ext 谱序列在 E_2 页退化。为此，我们将 $\mathrm{Hom}_J(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ 定义为 $H^{0,*}_{\bar\partial}(S, \bigwedge \widetilde{N}^{1,0} \otimes \widetilde{L})$。

另一方面，考虑 $(X, \mathcal{J}_\zeta)$ 上的 A 模型，其中 $\zeta \in \mathbb{S}^2$ 与 $\zeta \neq \pm \mathrm{j}$。存在一个谱序列收敛到拉格朗日子流形对 (S_0, S_1) 的弗洛尔同调，其 E_2 页是 S 的奇异上同调，系数取自诺维科夫域 [17]。同样，为此我们将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{J}_\zeta}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ 定义为 $H^*_d(S, L)$，其中 d 是 L 上的外协变导数。按照上述定义，我们可以写出一个 Sp(1) 对称性，它交织 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{J}_\zeta}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$ 这一以 $\mathbb{S}^2$ 为指标的态射空间族，因为我们有如下同构

$$H^{0,*}_{\bar\partial_{\pm J}}(S, \bigwedge \widetilde{N}^{1,0}_{\pm J} \otimes \widetilde{L}) \cong H^{*,*}_{\bar\partial_{\pm J}}(S, \widetilde{L}) \cong H^*_d(S, \widetilde{L}),$$

其中第一个由同构 $\widetilde{N}^{1,0}_{\pm J} \cong T^{*(1,0)}_{\pm J} S$ 通过 $\pm J$-全纯辛形式 $\frac{1}{2}(\omega_K \pm \sqrt{-1}\omega_I)$ 诱导得到；第二个则来自西局部系统的霍奇-德拉姆定理（例如参见 [12]）。

4.2.4. 该 S_0 的 $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$-系统是一个 Ω_J-拉格朗日子流形。

设 S_0 是 X 和 $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_{\mathrm{cc}}$中的 Ω_J-拉格朗日子流形。假设 $S = S_0$ 具有自旋结构。同样，我们首先考虑 (X, J) 上的 B 模型，并选取 $\sqrt{K_J}$，其中 $\sqrt{}$是 S的典范丛。态射空间 $\mathrm{Hom}_J(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$ 定义为 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_X}(\iota_* \mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1)$，其中 $\iota : S \hookrightarrow X$ 是包含映射，$\mathcal{L}_0$ 和 $\mathcal{L}_1$ 分别是 $L_0 \otimes \sqrt{K_J}$和 L_1 的全纯截面层。由于 S是 X中的全纯拉格朗日子流形，它在 X中的全纯法丛同构于 $K_J^\vee$。因此，$\mathrm{Hom}_J(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}}) \cong H^{0,*}_{\bar\partial_J}(S, \widetilde{L} \otimes \sqrt{K_J})$。类似地，$\mathrm{Hom}_{-J}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}}) \cong H^{0,*}_{\bar\partial_{-J}}(S, \widetilde{L} \otimes \sqrt{K_{-J}})$，其中 $\sqrt{K_{-J}}$选为 $\sqrt{K_J}$的对偶。这两个 B 模型态射空间通过 S上的 Hodge 星算子同构。

对于 $\zeta \in \mathbb{S}^2$除 $\pm \mathrm{j}$ 以外的情形， [6] 中有人尝试在 X存在 I-全纯拉格朗日纤维化的情况下，对 $\mathrm{Hom}_{\omega_K}(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$ 进行数学定义。我们相信，存在一种恰当的 A 模态射空间数学定义，使得我们的预期对 $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_{\mathrm{cc}})$-系统成立，至少在满足关于 X中 S 的形式邻域的适当条件时如此。

Appendix A. Recollections in Generalized Geometry

在本附录中，我们将回顾广义几何中的一些相关基础知识。广义几何是由 Hitchin [24] 提出的学科，其基础理论最初由 Gualtieri [21]发展。

在本附录中，始终假设 M 是一个光滑流形。广义几何研究广义切丛 $\mathcal{T}M := TM \oplus T^*M$ 上的各种几何结构。此丛 $\mathcal{T}M$ 具有典范的

(1) 一个伪黎曼度量 $\langle\ ,\ \rangle$，由 $\langle u+\alpha, v+\beta\rangle = \frac{1}{2}(\alpha(v)+\beta(u))$ 给出，其中 $x\in M$ 和 $u,v\in T_xM$ 和 $\alpha,\beta\in T_x^*M$；以及 (2) 一个 $\mathbb{R}$-双线性映射 $[\ ,\ ]\colon \Gamma(M,\mathcal{T}M)\times\Gamma(M,\mathcal{T}M)\to\Gamma(M,\mathcal{T}M)$，由以下给出

$$[u+\alpha, v+\beta] = [u,v] + \mathcal{L}_u\beta - \iota_v d\alpha,$$

对于 $u,v\in\Gamma(M,TM)$ 和 $\alpha,\beta\in\Gamma(M,T^*M)$，其中 $[u,v]$ 是向量场的李括号。数据 $\mathcal{T}M, \langle\ ,\ \rangle, [\ ,\ ]$ 与典范投影 $\mathcal{T}M\to TM$ 一起构成了 M 上 Severa 类为零的正合 Courant algebroid。我们将 $\mathrm{O}(\mathcal{T}M)$ 记作纤维丛，其在 $x\in M$ 上的纤维 $\mathrm{O}(\mathcal{T}_xM)$ 是所有满足 $\langle\phi(e)\ \phi(e')\rangle = \langle e,e'\rangle$ 的 $\phi\in\mathrm{End}(\mathcal{T}_xM)$ 的集合，其中 $e,e'\in\mathcal{T}_xM$ 任意。若子丛 L 满足 $[\Gamma(M,L)\ \Gamma(M,L)]\subset\Gamma(M,L)$，则称其为对合的。

接下来的小节中，我们将介绍广义复结构、广义超复结构和广义超凯勒结构。

A.1. 广义复几何。

M上的复结构是 $\mathrm{End}(TM)$ 的一个光滑截面 J，满足 $J^2=-\mathrm{Id}_{TM}$，且 J 在 $TM_{\mathbb{C}}$ 中的$\sqrt{-1}$-特征丛是对合的。

定义 A.1. M 上的广义复结构是 $\mathrm{O}(\mathcal{T}M)$ 的一个光滑截面 $\mathcal{J}$，满足 $\mathcal{J}^2=-\mathrm{Id}_{\mathcal{T}M}$，且 $\mathcal{J}$在 $\mathcal{T}M_{\mathbb{C}}$ 中的 $\sqrt{-1}$-特征丛是对合的。广义复流形是配备了广义复结构的光滑流形。

接下来，我们将介绍复子流形的一种推广。

定义 A.2. 广义复流形 $(M,\mathcal{J})$ 的广义复子流形 [4] 是一个有序对 (S,F)，其中 S是 M的一个光滑子流形，且 $F\in\Omega^2(S)$，使得 (S,F) 的广义切丛子丛

$$\mathcal{T}^FS := \{u+\alpha\in T_xS\oplus T_x^*M : x\in M, \alpha|_{T_xS}=\iota_uF\}$$

在 $\mathcal{J}$ 下保持不变，即 $\mathcal{J}(\mathcal{T}^FS)=\mathcal{T}^FS$。

作为二维 σ 模型中边界条件的膜，其靶空间是一个广义复流形；它们是广义复子流形，且其底层二形式代表整上同调类。

定义 A.3. 广义复流形 $(M,\mathcal{J})$ 上的（秩一）膜，是指子流形S of M，连同其上的厄米线丛 L S，该丛配备酉联络 ∇，称为其 Chan-Paton 丛；并且 (S,F) 是 $(M,\mathcal{J})$ 的广义复子流形，其中$F=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_L$，而 F_L 是 ∇ 的曲率。

以下是广义复结构的两个基本例子。

例 A.4. 设 ω 是 M 上的辛形式， B 是 M 上的闭实二形式。那么，以下向量丛自同态是 M 上的广义复结构:

$$\mathcal{J}_{\omega,B} := \begin{pmatrix}\mathrm{Id}_{TM} & 0\\ B_\sharp & \mathrm{Id}_{T^*M}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -(\omega^{-1})^\sharp\\ \omega_\sharp & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{Id}_{TM} & 0\\ -B_\sharp & \mathrm{Id}_{T^*M}\end{pmatrix} : \mathcal{T}M\to\mathcal{T}M.$$

$(M,\mathcal{J}_{\omega,\ B})$上的膜称为$(M,\omega,B)$上的 A-膜。具体而言，$(M,\omega,B)$上的 A-膜是 M 的一个余各向同性子流形 S，其上配备了厄米线丛 L，以及曲率为 F_L 的酉联络，并满足以下条件：令 $F=\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}F_L$, $\mathcal{L}S$ 为 S 的特征叶状结构，且 $\mathcal{F}S=TS/\mathcal{L}S$,

- $F-B|_S\in\Omega^2(S)$下降为一个光滑截面 $\tilde{F}\in\Gamma(S,\bigwedge^2\mathcal{F}^*S)$；并且
- 复合映射 $I:=\tilde{\omega}^{-1}\circ\tilde{F}$: $\mathcal{F}S\to\mathcal{F}S$ 在向量丛$\mathcal{F}S$上定义了一个复结构，其中 $\tilde{\omega}\in\Gamma(S,\bigwedge^2\mathcal{F}^*S)$由 $\omega|_S$诱导。

特别地，当 M 上的一个 A-膜是充满空间的，即其底层子流形为 M时，它会在 M 上诱导出一个全纯辛结构（I，Ω），其中 $\Omega:=F-B+\sqrt{-1}\omega$。

[4]这里我们采用 Gualtieri 对广义复子流形的定义 [21] 。不过，在一些文献中，广义复子流形指的是其他类型的子流形，而广义拉格朗日子流形则指与我们定义中出现的二形式结合在一起的这类子流形。

例 A.5. 假设 J是 M上的一个复结构，且 σ是 M上的一个 $\overline{\partial}$-闭 (0, 2)-形式。那么下列向量丛自同态是 M上的一个广义复结构：

$$\mathcal{J}_{J,\sigma} := \begin{pmatrix} -J & 0 \\ \omega_\sharp & J^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} : \mathcal{T}M \to \mathcal{T}M, \quad where\ \omega = 2\sqrt{-1}(\sigma - \overline{\sigma}).$$

$(M, \mathcal{J}_{J,\ \sigma})$上的膜称为$(M, J, \sigma)$上的 B 膜。具体而言，$(M, J, \sigma)$上的 B 膜是$(M, J)$的一个复子流形 S，其上配备一个厄米线丛 L，并带有曲率为 F_L 的酉联络，且满足 $F = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} F_L$ 的(0,2)部分为 $\sigma|_S$这一条件。

A.2. 广义超复几何。A

M 上的超复结构等价于一个代数同态

$$\mathfrak{J} : \mathbb{H} \to \Gamma(M, \mathrm{End}(TM))$$

使得对于所有 $\zeta \in \mathbb{S}^2$, $J_\zeta := \mathfrak{J}(\zeta)$都是 M上的复结构，其中 $\mathbb{S}^2$ 表示四元数代数 $\mathbb{H}$的虚部的单位球面。我们有广义超复结构的类似定义。

定义 A.6. M 上的广义超复结构是一个代数同态

$$\mathcal{J} : \mathbb{H} \to \Gamma(M, \mathrm{End}(\mathcal{T}M)) \quad \zeta \to \mathcal{J}_\zeta$$

使得对于所有的 $\zeta \in \mathbb{S}^2$, $\mathcal{J}_\zeta$， M 都是一个广义复结构。广义超复流形是配备了广义超复结构的光滑流形。

对于广义超复流形 $(M, \mathcal{J})$，我们称以 $\mathbb{S}^2$ 为指标的族 $\{\mathcal{J}_\zeta\}_{\zeta \in \mathbb{S}^2}$ 为 $(M, \mathcal{J})$ 的广义复结构的扭子族。与广义复几何类似，以下是广义超复结构的两个基本例子 [25]。令 (1, i, j, k) 为 $\mathbb{H}$ 的标准基。

例 A.7. M 上的超复结构 (I, J, K) 诱导出一个广义超复结构 $\mathcal{J}$，由下式确定

$$\mathcal{J}_{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & -K^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}.$$

例 A.8. 设 M 上的 J 是一个复结构，且 Ω 是 (M, J) 上的全纯辛形式。那么这些结构诱导出一个广义超复结构 $\mathcal{J}$，由下式确定

$$\mathcal{J}_{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 0 & -(\omega_I^{-1})^\sharp \\ (\omega_I)_\sharp & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} 0 & -(\omega_K^{-1})^\sharp \\ (\omega_K)_\sharp & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\omega_K = \mathrm{Re}\ \Omega$，且 $\omega_I = \mathrm{Im}\Omega$。

A.3. 广义超 K¨ahler 几何。

我们首先介绍黎曼度量的一种推广。

定义 A.9. M 上的广义黎曼度量是指 M 的光滑截面 $\mathcal{G}$，满足 $\mathcal{G}^2 = \mathrm{Id}_{\mathcal{T}M}$，并且 $\langle \mathcal{G}(\ ) \quad \rangle$ 是 $\mathcal{T}M$上的正定度量。

M 上的广义黎曼度量 $\mathcal{G}$ 与数对 (g, B) 之间存在一一对应，其中 g是 M上的黎曼度量， B是 M上的实闭 2-形式；该对应关系由下式给出：

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{TM} & 0 \\ B_\sharp & \mathrm{Id}_{T^*M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (g^{-1})^\sharp \\ g_\sharp & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{TM} & 0 \\ -B_\sharp & \mathrm{Id}_{T^*M} \end{pmatrix}.$$

此外， $\mathcal{G}$ 决定了一个代数同态

$$\mathbb{D} \to \Gamma(M, \mathrm{End}(\mathcal{T}M)), \quad a + b\mathbf{r} \mapsto a\,\mathrm{Id}_{\mathcal{T}M} + b\mathcal{G},$$

其中 $\mathbb{D}$ 是分裂复数代数，即定义在 $\mathbb{R}$ 上的二维代数，单位元为 1，且含有一个元素 r，使得 $\mathbf{r}^2 = 1$，并且 (1,r) 构成一组基。这启发我们将 M 上的广义超K¨ahler 结构定义为从分裂双四元数代数 $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D}$到 $\Gamma(M, \mathrm{End}(\mathcal{T}M))$ 的某个代数同态。

Defi义 A.10. M 上的广义超K ¨ahler 结构是一个代数同态

$$\mathcal{K} : \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D} \to \Gamma(M, \mathrm{End}(\mathcal{T}M)), \quad \mu \mapsto \mathcal{K}_\mu,$$

使得 $\mathcal{G} := \mathcal{K}_{1\otimes \mathbf{r}}$ 是 M 上的广义黎曼度量，并且对于所有 $\zeta \in \mathbb{S}^2$， $\mathcal{J}_\zeta := \mathcal{K}_{\zeta\otimes 1}$ 以及 $\mathcal{J}_\zeta$:
$= \mathcal{K}_{\zeta\otimes \mathbf{r}} = \mathcal{J}_\zeta\mathcal{G} = \mathcal{G}\mathcal{J}_\zeta$都是 M上的广义复结构。广义超K ¨ahler 流形是配备了广义超K¨ahler 结构的光滑流形。

我们称 $\mathcal{K} \circ \iota$: $\mathbb{H} \to \Gamma$(M, 自同态空间($\mathcal{T}M$)) 为 $\mathcal{K}$的底层广义超复结构，其中 ι: $\mathbb{H} \hookrightarrow \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D}$ 由 $\zeta \mapsto \zeta \otimes 1$给出。

为了了解超K¨ahler 结构如何产生广义超K¨ahler 结构，我们引用以下命题。

命题 A.11。（ [14]中的命题 8）广义超K ¨ahler 结构 $\mathcal{K}$ 与 M 上的数据集之间存在一一对应关系

$$(g, B, \mathfrak{J}^+, \mathfrak{J}^-),$$

其中， B是 M上的实闭 2-形式， $\mathfrak{J}^+$是 M上的超复结构，而 g是关于 $\mathfrak{J}^+$ 和 $\mathfrak{J}^-$的 M 上的超K ¨ ahler 度量。

我们知道，与 SO(3) 同构的 $\mathbb{R}$-代数 $\mathbb{H}$的自同构群通过旋转复结构的扭子族，自然地作用于 M 上的超K¨ahler 结构空间。事实上，存在一个 $\mathbb{R}$-代数同构

$$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \to \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D}, \quad (\zeta_+, \zeta_-) \mapsto \zeta_+ \otimes \mathbf{r}_+ + \zeta_- \otimes \mathbf{r}_-,$$

其中 $\mathbf{r}_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \mathbf{r})$，而命题 A.11 表明，SO(3)×SO(3) 对 $\mathbb{H}\oplus\mathbb{H} \cong \mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{D}$的作用在 M上的广义超K¨ahler 结构空间上诱导出一个自然的 SO(3) × SO(3) 作用：若 (ϕ_+, ϕ_-) ∈SO(3) × SO(3)，且 $\mathcal{K}$ 对应于 $(g, B, \mathfrak{J}^+, \mathfrak{J}^-)$，则 $(\phi_+, \phi_-)\cdot\mathcal{K}$对应于 $(g, B, \phi_+ \cdot \mathfrak{J}^+, \phi_- \cdot \mathfrak{J}^-)$。因此，对于 M上的广义超K¨ ähler 结构 $\mathcal{K}$， $\mathcal{K}$在 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} \cong \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{D}$上的限制是一个以 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$为指标的广义复结构族。

注 A.12. M 上的单个超凯勒结构（$g, \mathfrak{J}$）会诱导出一个广义超凯勒结构 $\mathcal{K}$，它与（g, 0, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}$）相关联。在这种情况下，上述以 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ 为指标的族称为 [19], 中超凯勒流形（$M, g, \mathfrak{J}$）的广义扭子族，而 SO(3)×SO(3) 在 $\mathcal{K}$ 上的作用会产生 M 上的一族广义超凯勒结构；其底层广义超复结构由 M 上的超复结构或全纯辛形式诱导，并且允许进行 B 场变换和度量重标度。

Appendix B. Irreducible Representations of $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$

在本附录中，我们将回顾如何用两个变量的多项式来描述 SL(2, $\mathbb{C}$) 的每个有限维不可约复表示。任取一个 $m \in \mathbb{N}$。令 U_m 为 $\mathbb{C}$ 上两个变量 x, y 的 m 次齐次多项式构成的向量空间。该向量空间 U_m 的一组基为（$x^m, x^{m-1}y, ..., xy^{m-1}, y^m$）。在 U_m 上定义三个线性算子:

$$L_m := x\tfrac{\partial}{\partial y}, \quad \Lambda_m := y\tfrac{\partial}{\partial x}, \quad \text{and} \quad H_m := x\tfrac{\partial}{\partial x} - y\tfrac{\partial}{\partial y}. \tag{B.1}$$

Then (L_m, Λ_m, H_m) 构成 Lefschetz 三元组，并给出一个不可约复表示

$$\rho_m^{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})} : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(U_m)$$

$\mathfrak{sl}$(2, $\mathbb{C}$) 的一个不可约复表示，它可积分为 SL(2, $\mathbb{C}$) 的一个不可约复表示:

$$\rho_m^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})} : \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(U_m).$$

将 $\mathfrak{sp}$(1) 视为四元数代数的虚部，它由 i,j,k 张成。存在 $\mathfrak{sp}$(1) 的一个复表示:

$$\rho_m^{\mathfrak{sp}(1)} : \mathfrak{sp}(1) \to \mathfrak{gl}(U_m)$$

由 $\rho_m^{\mathfrak{sp}(1)}$(j) $= \sqrt{-1}H_m$, $\rho_m^{\mathfrak{sp}(1)}$(k) $= L_m - \Lambda_m$和 $\rho_m^{\mathfrak{sp}(1)}$(i) $= \sqrt{-1}(L_m + \Lambda_m)$ 定义。它可积分为 Sp(1) 的复表示:

$$\rho_m^{\mathrm{Sp}(1)} : \mathrm{Sp}(1) \to \mathrm{GL}(U_m) \tag{B.2}$$

且对所有 $i \in \{0, ..., m\}$,

$$\rho_m^{\mathrm{Sp}(1)}(\mathbf{j})(x^i y^{m-i}) = \sqrt{-1}^{2i-m} x^i y^{m-i}, \tag{B.3}$$

$$\rho_m^{\mathrm{Sp}(1)}(\mathbf{k})(x^i y^{m-i}) = (-1)^i x^{m-i} y^i, \tag{B.4}$$

$$\rho_m^{\mathrm{Sp}(1)}(\mathbf{i})(x^i y^{m-i}) = \sqrt{-1}^{m} x^{m-i} y^i. \tag{B.5}$$

References

1. Y. Akizuki 和 S. Nakano, *Note on Kodaira-Spencer's proof of Lefschetz theorems*, 《日本学士院院刊》30（1954 66694 2 266 272），–。MR。M. Aldi 和 E. Zaslow, *Coisotropic branes, noncommutativity, and the mirror correspondence*, 《高能物理杂志》（ 2005 6, 019, 14 2158557 ），第。MR。J. E. Andersen、A. Malusa 和 G. Rembado, Sp(1)-*symmetric hyper-Kähler quantisation*, （2022）。4. D. Arinkin、A. C˘ald˘araru 和 M. Hablicsek, *Formality of derived intersections and the orbifold HKR isomor- phism* **540** 2019 100 120 4003476 , 《代数杂志》（），–。MR。O. Ben-Bassat 和 M. Boyarchenko, *Submanifolds of generalized complex manifolds*, 《辛几何杂志》2（2004 2131639 6 3，309 355），第–。MR。F. Bischoff 和 M. Gualtieri, *Brane quantization of toric Poisson varieties*, 《数学物理通讯》391（2022），第2期，357–400。MR 4397176 7. H.D. Cao 和 J. Zhou, *Supersymmetries in Calabi-Yau geometry*, 《亚洲数学杂志》9（2005），第2期，167–176。MR 2176599 8. A. Cattaneo, N. Tardini 和 A. Tomassini, *Primitive decompositions of Dolbeault harmonic forms on compact almost-Kähler manifolds* 2201 09273 2022 , arXiv 预印本 arXiv:。（）。9. G. Cavalcanti, *The decomposition of forms and cohomology of generalized complex manifolds*, 《几何物理杂志》57 2265463 10 2006 1，121 132（），第–。MR。, *Introduction to generalized complex geometry*, Publica.c˜oes Matem´aticas do IMPA。[IMPA 数学出版物], 巴西纯数学与应用数学研究所（IMPA），里约热内卢，2007年，第26届巴西数学讨论会。第届巴西数学讨论会。MR。, *Hodge theory and deformations of SKT manifolds*, arXiv 预印本 arXiv:。（2012）。12. Y. Chen 和 S. Yang, *On the blow-up formula of twisted de Rham cohomology*, 《全球分析与几何年刊》56（ 2019 2, 277 290 3995366 ），第–。MR。A. Caldararu、S. Katz 和 E. Sharpe, *D-branes, B fields, and Ext groups*, 《高等理论数学物理》7（2003），第3期，381–404。MR 2030054 14. G. Deschamps, *Twistor space of a generalized quaternionic manifold*, 《印度科学院院刊·数学科学》131（2021 4216401 15 1，1，20），第。论文编号：。MR。P. Etingof、E. Frenkel 和 D. Kazhdan, *An analytic version of the Langlands correspondence for complex curves* , 《可积性、量子化与几何 II。量子理论与代数几何》，《纯数学专题讨论会论文集》，第 103, [2021] 2021, 137 202 4285697 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，©，第–页。MR。A. Fujiki, *On the de Rham cohomology group of a compact Kähler symplectic manifold*, 《代数几何》，仙台，1985，946237 17 10，1987，105 165，《纯数学高级研究》，第卷，北荷兰，阿姆斯特丹，第–页。MR。K. Fukaya、Y. Oh、H. Ohta 和 K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory: anomaly and obstruction. Part I* , 《高级数学研究 AMS/IP 丛书》，第46卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州；国际出版社，萨默维尔，马萨诸塞州，2009年。MR 2553465 18. D. Gaiotto 和 E. Witten, *Probing quantization via branes*, 《2019 微分几何综述》。微分几何、卡拉比–丘理论与广义相对论。第2部分，《微分几何综述》，第24卷，国际出版社，波士顿，马萨诸塞州， [2022] 2022, 293 402 4479724 ©，第–页。MR。R. Glover 和 J. Sawon, *Generalized twistor spaces for hyperkähler manifolds*, 《伦敦数学会杂志》（第2辑）91（ 2015 3355104 20 2，321 342），第–。MR。M. Gualtieri, *Generalized geometry and the hodge decomposition*, arXiv 预印本 math/0409093（2004）。

———. *Generalized complex geometry* 2 **174** 2011 1, 75 123 2811595 。, , 《数学年刊》（）（），第–。MR。S. Gukov 和 E. Witten, , 《高等理论数学物理》（），第5期，1445–1518。MR 2672467

Branes and quantization **13** 2009 *On higher rank coisotropic A-branes* **62** 2012 2, 156 169 2864468 。M. Herbst, , 《几何物理杂志》（），第–。MR。N. Hitchin, *Generalized Calabi-Yau manifolds* **54** 2003 308 3, 281 2013140 , 《季刊数学杂志》（），第–。MR。W. Hong 和 M. Stienon, *From hypercomplex to holomorphic symplectic structures*, 《几何物理杂志》96（ 2015），187–203。MR 3372028 26. A. Kapustin 和 Y. Li, *Open-string BRST cohomology for generalized complex branes*, 《高等理论数学物理》 **9** 2005 4, 559 574 2201105 （），第–。MR。A. Kapustin 和 D. Orlov, , *Remarks on A-branes mirror symmetry, and the Fukaya category*, 《几何物理杂志》48 2006226 28 2003 1，84 99（），第–。MR。, *Lectures on mirror symmetry, derived categories, and D-branes*, 《数学科学进展》59（2004），第5(359)期，101–134。MR 2125928

29. S. Katz 和 E. Sharpe, *D-branes, open string vertex operators, and Ext groups*, 《高等理论数学物理》6（2002 1982692 30 6，979 1030 2003），第–（）。MR。B. Kostant, *On the definition of quantization*, G´eom´etrie symplectique et physique math´ematique（Colloq. Internat. CNRS，第237号，普罗旺斯地区艾克斯，1974）， ´法国国家科学研究中心出版社，巴黎，1975年，第187–210页。MR 0488137 31. N. C. Leung, *Lagrangian submanifolds in hyperKähler manifolds, Legendre transformation*, 《微分几何杂志》61 1949786 32 2002 1，107 145（），第–。MR。N. C. Leung 和 C. Li, *Hard Lefschetz actions in Riemannian geometry with special holonomy*, 《数学研究快报》15 2424905 33 2008 4，683 698（），第–。MR。Y. Qin, *Coisotropic Branes on Tori and Homological Mirror Symmetry*, ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，2020年，博士论文——加利福尼亚大学伯克利分校，MR4197590 34 ´。A. Quintero Velez, *Boundary coupling of Lie algebroid Poisson sigma models and representations up to homotopy* **102** 2012 1, 31 64 ，《数学物理快报》（），第–。MR 2964801 35. J. P. Solomon 和 M. Verbitsky, *Locality in the Fukaya category of a hyperkähler manifold*, 《组合数学》 **155** 2019 10, 1924 1958 4010429（），第–。MR。M. Verbitsky，SO(5) 36 *Action of the Lie algebra of on the cohomology of a hyper-Kähler manifold*, 《功能分析及其应用》24 1082036 37 1990 3，70 71（），第–。MR。, *Hyperholomorphic bundles over a hyper-Kähler manifold*, 《代数几何杂志》5（1996），第4期，633–669。MR 1486984 38., *Deformations of trianalytic subvarieties of hyper-Kähler manifolds*, 《Selecta Mathematica》（新系列）4（1998），第3期，447–490。MR 1654589 39., *HyperKähler manifolds with torsion supersymmetry and Hodge theory* **6** 2002 4, , ，《亚洲数学杂志》（），第–。MR 40., *Quaternionic Dolbeault complex and vanishing theorems on hyperkähler manifolds*, 《组合数学》143 2371383 41 2007 6，1576 1592（），第–。MR。M. Verbitsky 和 D. Kaledin, *Hyperkahler manifolds*, 《数学物理》（萨默维尔），第12卷，国际出版社，萨默维尔，马萨诸塞州，1999年。MR 1815021 42. A. Weil, *Introduction à l'étude des variétés kählériennes*, 《南卡戈大学数学研究所出版物》，VI。《科学与工业时事》，第1267号，Hermann，巴黎，1958年。MR 0111056

The Institute of Mathematical Sciences and Department of Mathematics,
The Chinese Universityof Hong Kong, Shatin, Hong Kong*Email address*: leung@math.cuhk.edu.hk

The Institute of Mathematical Sciences and Department of Mathematics,
The Chinese Universityof Hong Kong, Shatin, Hong Kong*Email address*: ytyau@math.cuhk.edu.hk