arXiv:2303.15021v1 [math.LO] 27 Mar 2023

命题叠加逻辑

Athanassios Tzouvaras

数学系，亚里士多德塞萨洛尼基大学，541 24 塞萨洛尼基，希腊，电子邮件：tzouvara@math.auth.gr

摘要

我们通过添加一个新的基本二元联结词 $\varphi|\psi$ 扩展经典命题逻辑（PL），该联结词旨在表示句子 φ 和 ψ 的“叠加”。这一运算的动机源于量子力学中的相应概念，但并不旨在涵盖后者在物理学中所呈现的所有方面。为了解释这一新的联结词，我们通过采用形如 $\langle M、f\rangle$ 的模型扩展经典布尔语义，其中 M 是对 PL 句子的普通二值赋值，而 f 是针对所有经典句子对的选择函数。在新语义中，$\varphi|\psi$ 严格地插值于 $\varphi\wedge\psi$ 与 $\varphi\vee\psi$ 之间。通过对选择函数施加若干约束，我们获得相应的逻辑后承关系概念以及相应的重言式系统；对于这些关系和系统，$|$ 满足结合律、在逻辑等价下封闭以及对其对偶联结词满足分配律等自然的代数性质。由此产生了各种作为 PL 扩展的命题叠加逻辑（PLS）系统。本文给出了这些重言式系统的公理化，并证明了它们全部具有可靠性。对于其中最弱的系统，证明了完备性。对于其他系统，当且仅当每个一致句子集都可以扩展为一个一致且完备的句子集时，完备性才成立；这一条件是否成立，与演绎定理的有效性密切相关。

数学主题分类（2010）：03B60，03G12

关键词：叠加逻辑联结词。句子对的选择函数。结合的、正则的、$\neg$-递减的选择函数/序。命题叠加逻辑（PLS）。

1 引言

本文提出了对经典命题逻辑（PL）的一种扩展（更准确地说，是一系列强度递增的扩展）：在其中加入一种新的二元逻辑运算，称为“叠加”，并配以一种扩展标准语义的新语义。该运算及新语义受到量子力学中相应概念的启发，并以其为依据。叠加概念在量子力学中居于核心地位，这一点众所周知。为求完备，下面简要概述这一思想的核心。

量子系统 A（例如电子或光子）相对于某个物理量 Q （如自旋、电荷等）只能处于有限多个可能的“状态”之一（更准确地说是“纯态”，见 [3]）。为简单起见，假设 A 只能处于两种可能的状态，即“自旋向上”和“自旋向下”。我们知道，每当测量 A 的自旋时，结果必然是“自旋向上”或“自旋向下”中的一种，但事先无法精确预测，只能以某种概率来描述。在未被观测时，人们认为 A 处于这些状态的某种混合或组合之中，这称为态叠加。然而，一旦系统A 被扫描和测量，叠加便会根据量子力学的术语发生瓦解，或“坍缩”为其中一个组成态。因此，从某种意义上说，“自旋向上”和“自旋向下”这两种状态既共存，又彼此排斥。

量子力学从诞生之初就发展出了一套有效且灵活的形式体系，用于表示系统的状态（有关该主题的简要概述，请参见 [3] ），即将状态表示为希尔伯特空间中的向量。例如，纯态“自旋向上”和“自旋向下”分别由向量 $\vec{u}_0$、$\vec{u}_1$表示。于是，“叠加原理”指出，对于满足 $|c_0|^2+|c_1|^2=1$的任意复数 c_0、c_1，线性组合 $c_0\vec{u}_0+c_1\vec{u}_1$也是系统 A的合法状态。此外，测量时，$|c_0|^2$、$|c_1|^2$ 分别表示 A 处于状态 $\vec{u}_0$ 或 $\vec{u}_1$的概率。这种将叠加视为向量线性组合的处理方式主要归功于 P.A.M. Dirac[1], ，他认为叠加原理是量子力学最基本的性质之一。

后来，G. Birkhoff、J. von Neumann[2], G. Mackey[3]等人的工作发展出一种通过量子逻辑研究量子力学的新方法

[1]P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford U.P., 1958。[2]G. Birkhoff 和 J. von Neumann, 《量子力学的逻辑》, *Ann. Math.* **37**（1936）, 823-843。[3]G. Mackey, *The Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, W. A. Benjamin, 1963。

以及其他人的工作。在这种方法中，重点在于对不可分配性的形式化；不可分配性是量子力学的另一种特征现象，而不可分配性与叠加之间是否相关、如何相关，当时尚不明确。正如 S. Gudder 所说[4]，，问题在于如何在量子逻辑方法中表述叠加原理，使其大致等价于 Dirac 在向量空间方法中的表述。文献中可以找到多种这样的叠加表述。[5] 请注意，所有版本的量子逻辑都弱于经典逻辑，因为它们缺少分配律。

本研究的重要灵感来源之一，是 E. Schr¨odinger 于 1935年 发表的论文 [11] ，其中包含了“猫悖论”。作者通过著名的思想实验，展示了量子态的叠加如何（原则上）转化为宏观情境的叠加。尽管 Schr¨odinger 以嘲讽的口吻将这一实验称作“若注意到不确定性影响着宏观上可触及、可见之物，便会产生的严重疑虑”，但这或许是最早的迹象，表明这一现象可以在更广泛的意义上加以理解，甚至可以置于不同于原始情境的背景下。本文感兴趣并探讨的，正是叠加这一概念一般、抽象且纯粹逻辑的内容。[6]

具体而言，本文旨在为叠加提供一种简单的解释：它并非借助量子逻辑的某种变体，而是通过扩展经典逻辑来实现。这种解释完全立足于经典推理和常识，因为我们并未舍弃任何经典逻辑定律，只是在此基础上增添了有关叠加运算的新定律。使我们得以超越经典重言式的关键，是在每次真值评估中使用一个作用于句子对上的选择函数；这种工具源自集合论，而非逻辑。

令 φ_0, φ_1 分别表示陈述“A 处于状态 $\vec{u}_0$”和“A 处于状态 $\vec{u}_1$”，并令 $\varphi_0|\varphi_1$ 表示陈述“A 处于状态 $\vec{u}_0$ 和 $\vec{u}_1$的叠加态”。 φ_0, φ_1 是普通陈述，因此可以为它们赋予普通真值。但 $\varphi_0|\varphi_1$的真值又如何呢？显然

[4]S.P. Gudder，《物理学中的叠加原理》， *J. Math. Phys.* **11** (1970 3, 1037 1040), 第 - 期。[5]例如，参见上文 S.P.Gudder，以及 S. Pulmannov´a，《量子逻辑中的叠加原理》，*Commun. Math. Phys.* **49** (1976)，第 3 期，47-51。[6]如前所述，目前尚不清楚此处所提炼出的叠加的逻辑内容，是否与现有的量子力学和量子逻辑系统实际 *connections* 以及/或 *applications* 。最后一节将对此问题作进一步评论。

运算 $\varphi_0|\varphi_1$ 无法用经典逻辑表示，也就是说， $\varphi_0|\varphi_1$不可能逻辑等价于由 φ_0,φ_1构成的布尔组合 $S(\varphi_0,\varphi_1)$。[7] 然而， $\varphi_0|\varphi_1$ 的一个引人注目的特点是，它既与经典合取有共同之处，也与经典析取有共同之处。从某种意义上说，它是 $\varphi_0\wedge\varphi_1$与 $\varphi_0\vee\varphi_1$的“混合”，或者是介于两者之间的一种性质，因为它既包含合取成分，也包含析取成分。事实上， $\varphi_0|\varphi_1$ 一方面意味着性质 φ_0 和 φ_1 在非测量阶段同时（至少部分地）成立，这显然是 $\varphi_0|\varphi_1$的合取成分；另一方面，在测量过程中每当叠加态发生坍缩时， $\varphi_0|\varphi_1$ 都会化为 φ_0 或 φ_1，这便是该运算的析取成分。下文对$\varphi_0|\varphi_1$ 的解释，实际上印证了将 $\varphi_0|\varphi_1$ 理解为“介于 $\varphi_0\wedge\varphi_1$ 与 $\varphi_0\vee\varphi_1$之间的某种东西”。

设命题语言为 $L=\{p_0,p_1,\ldots\}\cup\{\wedge,\vee,\neg\}$，其中 p_i 是原子命题的符号，其解释是通常的二值真值赋值 $M:\ Sen(L)\rightarrow\{0,1\}$，并遵循经典真值表。我们将 L 扩展为 $L_s=L\cup\{|\}$，其中 $|$ 是一种新的原始二元联结词。对于 L_s 中的任意句子 φ、ψ， $\varphi|\psi$ 表示 φ 与 ψ 的叠加。于是，可以借助对 L 中句子的真值赋值 M，以及一个从 L_s 中的句子映射到 L 中句子的坍缩映射 c，为 L_s 中的句子给出一种解释。映射 c 旨在表示将叠加的 $\varphi|\psi$ 坍缩为其某个组成部分。

基本思想是，从纯逻辑的角度看，复合态 $c_0\vec{u}_0+c_1\vec{u}_1$坍缩为 $\vec{u}_0$、 $\vec{u}_1$ 中的一个，可以被视为从可能结果$\{\vec{u}_0,\vec{u}_1\}$集合中进行的一次（或多或少随机的）选择。这是因为，从纯逻辑的角度看，概率并不重要；换句话说，状态 $\vec{u}_0$ 和 $\vec{u}_1$ 被视为等概率的。在这种情况下， $\vec{u}_0$ 和 $\vec{u}_1$ 的叠加是唯一的，而坍缩的结果可以通过抛硬币来决定；更严格地说，可以由一个作用于可观测态对的选择函数来决定。在我们的例子中，这些可观测态对与 L的句子对相一致。当然，这与叠加的标准处理存在重大偏离。按照后者， $\vec{u}_0$ 和 $\vec{u}_1$ 并不只有一个叠加，而是有无穷多个，实际上，叠加的数量与线性组合 $c_0\vec{u}_0+c_1\vec{u}_1$ 的数量一样多，其中 $|c_0|^2+|c_1|^2=1$。因此，这里提出的逻辑很难称为

[7]众所周知，恰好存在 16 种经典二元运算 $S(\varphi_0,\varphi_1)$，它们可用 $\wedge$、 $\vee$ 和 $\neg$ 定义（包括 $\wedge$、$\vee$ 本身，以及 $\rightarrow$、 $\leftrightarrow$及其否定，还有其他一些平凡运算），但其中没有一种能够表达 $|$的逻辑内容。

叠加逻辑，因为叠加这一概念在当今物理学中正是这样被使用和理解的。更确切地说，它是叠加的逻辑，前提是将后者理解为相应物理学概念的“逻辑提取物”。至于它最终能否应用于量子力学领域，我们尚不得而知。

坍缩映射 c 的基本要求如下：(a) 它必须在经典句子上是恒等映射，也就是说，对于每个L句子 φ，$\mathsf{c}(\varphi) = \varphi$。(b) 它必须与标准联结词 $\wedge$、$\vee$ 和 $\neg$可交换，也就是说，$\mathsf{c}(\varphi \wedge \psi) = \mathsf{c}(\varphi) \wedge \mathsf{c}(\psi)$，$\mathsf{c}(\varphi \vee \psi) = \mathsf{c}(\varphi) \vee \mathsf{c}(\psi)$，且 $\mathsf{c}(\neg\varphi) = \neg\mathsf{c}(\varphi)$。(c) $\mathsf{c}(\varphi|\psi)$ 必须是句子 $\mathsf{c}(\varphi)$、$\mathsf{c}(\psi)$ 之一，并借助针对经典句子对的选择函数 f 来选定，即，

$$\mathsf{c}(\varphi|\psi) = f(\{\mathsf{c}(\varphi), \mathsf{c}(\psi)\}).$$

由于 L_s 中的每个句子都是由原子句构成的，而这些原子句全都属于初始经典语言 L，因此 c 完全由选择函数 f确定，以下我们将记作 $\mathsf{c} = \overline{f}$。因此，针对 L 中句子对的选择函数f 是新语义的基石。

给定 M 的真值赋值以及 f 的选择函数，对于 L_s的句子 φ，在选择函数 f 下于 M中为真，记作 $\langle M, f\rangle \models_s \varphi$，当且仅当 $\overline{f}(\varphi)$ 在 M中是（经典地）真的。即:

$$\langle M, f\rangle \models_s \varphi \text{ iff } M \models \overline{f}(\varphi).$$

由于 $\overline{f}$ 由 f生成，关于 f 的特殊条件会为 $\overline{f}$ 诱导出特殊性质，而这些性质又会影响 $\models_s$的性质。例如，为了使 $|$ 具有结合性，就需要这样的条件。

上述真概念 $\models_s$ 扩展了经典真概念，并诱导出 s-逻辑后承、$\varphi \models_s \psi$ 和 s-逻辑等价 $\sim_s$ 的概念，它们推广了相应的标准关系 $\models$ 和 $\sim$。新语义的一个优点是，对于所有句子 φ，ψ，

$$\varphi \wedge \psi \models_s \varphi|\psi \models_s \varphi \vee \psi, \tag{1}$$

其中两处的关系 $\models_s$ 都是严格的，也就是说，通常不能反过来（见下文定理 2.8）。这意味着 $\varphi|\psi$ 严格插值于 $\varphi\wedge\psi$和 $\varphi\vee\psi$之间，这一事实在某种意义上精确地表达了上述直觉，即 $\varphi|\psi$ 是 $\varphi \wedge \psi$ 和 $\varphi \vee \psi$的“混合体”。具体而言，

$$\varphi \wedge \neg\varphi \models_s \varphi|\neg\varphi \models_s \varphi \vee \neg\varphi,$$

这意味着，两个相互矛盾的情形叠加在一起——例如上文提到的薛定谔的猫实验 [11] 中的情形——完全既不是矛盾，也不是悖论（见下文推论 2.9）。

这种语义还有一个优点：要使 $|$ 相对于结构 $\langle M, f\rangle$ 满足结合律，也就是说，$\langle M, f\rangle \models_s \varphi|(\psi|\sigma) \leftrightarrow(\varphi|\psi)|\sigma$，$f$ 必须且只需与由 L 的句子集上的全序 $<$ 所诱导的函数 $\min_<$ 相一致。这样的 $f = \min_<$ 从每一对 $\{\alpha, \beta\}$ 中选出的并非“随机”元素，而是相对于 $<$ 最小的元素。这类选择函数将在本文中占据主导地位。

阅读本文不需要量子力学或量子逻辑方面的知识。唯一的先修要求只是掌握基础的命题逻辑（PL），即其语义、公理化以及可靠性与完备性定理，并了解一些关于有限集合之集合的选择函数、全序等初等集合论事实。例如，[4] 是许多包含所需材料的逻辑教材之一。不过，若熟悉非经典逻辑及其公理化和语义，将会非常有帮助。关于选择函数和选择原则，读者还可以参阅 [7]。

最后，我还应从逻辑视角提及目前对叠加的一些其他处理方式，尽管几乎无法在它们与本文方法之间找到重叠与趋同之处。这类逻辑方法包含于 [2], [8] 和 [1], 之中，这里只举出最新的几个例子。这些方法与本文方法的主要区别在于：它们都建立在某种非经典逻辑系统之上，而我们的出发点则是经典命题逻辑的坚实基础。例如，[2]在很大程度上依赖次协调逻辑，该逻辑允许容纳矛盾而不会导致系统崩溃。事实上，在 [2] 中，叠加被刻画为一种“矛盾情形”：如果量子系统 S 处于状态 s_1 和 s_2的叠加态，那么就借助一个二元谓词 K 以及以下公理的合取来表达：$K(S, s_1)$、$\neg K(S, s_1)$、$K(S, s_2)$和 $\neg K(S, s_2)$。（这里的否定 $\neg$ 是“弱的”，而这些断言的合取并不会导致灾难。）类似地，[8] 在一种扩展语言中使用模态逻辑的一个版本；该语言除了包含 $\neg$、$\wedge$、$\vee$ 和 $\diamond$（可能性算子）之外，还包含一个用于叠加运算的二元联结词 $\star$，以及一个表示“测量已经完成”的一元联结词 M。这里还使用了克里普克语义；据我的理解，其基本思想是：通过在测量之后将其“分裂”到两个不同的可能世界中，来避免例如由薛定谔¨的猫所产生的矛盾：其中一个世界包含一只活着的猫，另一个世界包含一只死去的猫。最后，[1] 在句法上更为取向。它处理

叠加的句法方式是采用一种称为“基本逻辑”的序列演算版本（在 [10]中发展起来），该版本涵盖了线性逻辑和量子逻辑的若干方面。

内容概要。第 2 节介绍基于选择函数的 $|$ 语义，该选择函数作用于 L 的句子对。具体而言，在小节 2.1 中，我们给出新语义的基本定义，以及相应的逻辑后承 $\models_s$ 和逻辑等价 $\sim_s$ 概念。 L_s 的句子的模型是形式为 $\langle M, f\rangle$ 的结构，其中 M 是对 L 的句子的真值赋值，而 f 是 L 的任意选择函数。我们证明了基本事实，其中包括 $\varphi \wedge \psi \models_s \varphi|\psi \models_s \varphi \vee \psi \models_s$。由这类一般结构所支持的 $|$ 性质只有 $\varphi|\varphi \leftrightarrow \varphi$ （幂等性）和 $\varphi|\psi \leftrightarrow \psi|\varphi$ （交换律）。若要为 $|$ 获得更多性质，我们需要对所采用的选择函数施加附加条件，由此得到越来越精细的真值概念。一般而言，若 $\mathcal{F}$ 是 L 的所有选择函数构成的集合，那么对于任意非空的 $X \subseteq \mathcal{F}$，关系 $\models_X$（ X-逻辑后承）和 $\sim_X$（ X-逻辑等价）可通过采用满足 $f \in X$ （而非 $f \in \mathcal{F}$）的模型 $\langle M, f\rangle$ 自然地定义。对于每个这样的 $X \subseteq \mathcal{F}$， X-重言式的集合 $Taut(X) = \{\varphi : \models_X \varphi\}$ 得以定义。

在§2接下来的小节中，我们将重点讨论若干类自然的此类子类$X \subseteq \mathcal{F}$及其相应的真值概念。

在小节2.2中，我们引入了 $Asso$结合的选择函数类，并给出了对它们的一种简单而优美的刻画：它们是关于集合 L-句子的全序 $<$ 的函数 $\min_<$。这一术语源于以下事实：如果 $f \in Asso$，那么 $|$ 相对于每个结构 $\langle M、 f\rangle$都是结合的。某种逆命题也成立：如果 $|$相对于 $\langle M、 f\rangle$是结合的，那么 f就是“本质结合的”。

在小节2.3中，我们引入正则选择函数类 Reg，以及更细的类 $Reg^* = Reg \cap Asso$。正则性保证了真关系 $\models_{Reg}$以及 $\models_{Reg^*}$是“逻辑闭合”的，也就是说，对于 φ 的任意子句 σ 以及任意 $\sigma' \sim_{Reg} \sigma$， $\varphi[\sigma'/\sigma]$ 和 φ 在$\langle M、 f\rangle$中等价，其中 $f \in Reg$。

在小节 2.4 中，我们引入了更细的类 Dec $\neg$-递减的正则结合的函数，即 $Dec \subset Reg^*$。$Sen(L)$ 的全序 $<$ 是 $\neg$-递减的，当且仅当对所有 α、 β、 $\alpha < \beta \Leftrightarrow \neg\beta < \neg\alpha$ 都有此性质。 f 是 $\neg$-递减的，当且仅当对于某个 $\neg$-递减的全序 $<$， $f = \min_<$。我们证明了 $Sen(L)$ 上 $\neg$-递减的正则全序的存在性，并给出了 $\neg$-递减性的句法刻画。

在小节 2.5 中，我们考察 $\varphi \circ \psi$ 的对偶联结词 $= \neg(\neg\varphi|\neg\psi)$

| ，并证明它与 | 可交换，当且仅当所涉及的选择函数是 $\rightarrow$-递减的。

第 3 节致力于命题叠加逻辑（PLS）的公理化。在一般部分中，我们给出了基于选择函数集合 $\mathcal{F}$、 Reg、 Reg^* 和 Dec 的逻辑的公理化。一般而言，对于每个选择函数集合 $X \subseteq \mathcal{F}$ 以及关于真值概念 $\models_X$ 的每个重言式集合 $K \subseteq Taut(X)$，定义逻辑 PLS（X， K），其公理是 PL 的公理加上 K，其语义是真值关系 $\models_X$。在 PLS（X， K）中定义 K-一致性，并对每个满足 $K \subseteq Taut(X)$ 的逻辑 PLS（X， K）证明可靠性定理。接下来，我们针对分别由类 $\mathcal{F}$、 Reg、 Reg^* 和 Dec 定义的真值关系，引入具体的公理化（通过有限多个公理模式） K_0、 K_1、K_2、 K_3 。逻辑 PLS（$\mathcal{F}$， K_0）、PLS（Reg， K_1）、PLS（Reg^*， K_2）、PLS（Dec， K_3）作为前述一般事实的推论，都是可靠的。 $\mathcal{F}$ 的公理化与其余系统 Reg、 Reg^* 和 Dec 的公理化之间存在本质差异。其差异在于， K_1-K_3 包含一条额外的推理规则（除肯定前件式之外），因此演绎定理（DT）的真值尚未确定。这对基于 K_1-K_3 的系统的完备性产生了重大影响。因此，我们将分别考察 PLS（$\mathcal{F}$， K_0）的完备性，以及其余系统的完备性。

在小节 3.1 中，我们证明系统 PLS($\mathcal{F}, K_0$) 具有（无条件的）完备性。

在小节 3.2 中，我们考察逻辑 PLS(Reg, K_1)、PLS(Reg^*, K_2) 和 PLS(Dec, K_3) 的完备性。DT 可能失效，因此有必要区分两种形式的完备性，即 CT1 和 CT2；在缺少 DT 的情况下，两者未必等价。CT1 蕴含 CT2，但反之是否成立尚无定论。对于系统 K_1-K_3，我们试图证明 CT2，而不是 CT1。我们表明，这些系统是有条件完备的，其含义是：当且仅当每个 K_i 满足某种可扩展性 $cext(K_i)$时，这些系统中的每一个都是 CT2-完备的；该可扩展性表明，每个K_i-一致句子集都可以扩展为一个 K_i-一致且完备的集合。对于满足 DT 的形式系统 K 而言，这一性质是平凡的；但对于 DT 尚未确定的系统而言，该性质仍是一个开放问题。假设 $cext(K_i)$ 成立，则上述逻辑的 CT2-完全性证明都是 PLS($\mathcal{F}, K_0$) 完备性证明的变体。另一方面，$cext(K_i)$ 的失效意味着相应系统的 CT2-完全性失效。

一般而言，逻辑 PLS(X, K) 的（CT2-）完备性证明，其中$K \subset Taut(X)$，大致如下：从一个 K一致且完备的集合 $\Sigma \subset Sen(L_s)$ 开始。为证明它是 X可验证的，选取 $\Sigma_1 = \Sigma \cap Sen(L)$。

那么， Σ_1 按照 PL 的意义，它是一个一致且完备的集合。因此，根据后者的完备性，存在一个二值赋值 M，使得 $M \models \Sigma_1$。接着，为证明 Σ 的 X 可验证性，只需定义一个选择函数 f，使得 $f \in X$ 和 $\langle M, f\rangle \models \Sigma$。

最后，在第4节中，我们简要介绍未来研究的两个目标，即：（1）为 PLS 逻辑寻找其他语义；（2）为一阶逻辑（FOL）发展一种叠置扩展，并为其建立恰当的语义和完备的公理化。

2 基于选择函数的命题叠加逻辑语义

2.1 定义和基本事实

设定一个命题语言 $L = \{p_0, p_1, \ldots\} \cup \{\neg, \wedge\}$，其中 p_i 是原子句的符号。其他联结词 $\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$ 按照通常方式用前述联结词定义。[8] 令 $Sen(L)$ 表示 L 的句子集合。下文中，M 表示 L 中句子的某个真值赋值，即一个映射 $M\colon Sen(L) \to \{0,1\}$，其定义遵循标准真值表。对于给定的 $\alpha \in Sen(L)$，为方便起见，我们分别用记号 $M \models \alpha$、$M \models \neg\alpha$ 代替 $M(\alpha) = 1$ 和 $M(\alpha) = 0$。具体而言，下文会频繁提及由 $\overline{f}(\varphi)$ 表示的句子的真值，因此写作 $M \models \overline{f}(\varphi)$ 比写作 $M(\overline{f}(\varphi)) = 1$ 更方便。

令 $L_s = L \cup \{|\}$，其中 $|$ 是一个新的原始二元逻辑联结词。L_s 的原子句集合与 L 的相同，而 L_s 的句子集合 $Sen(L_s)$ 按照以下显而易见的步骤递归定义：如果 $\varphi, \psi \in Sen(L_s)$，那么 $\varphi \wedge \psi$、$\varphi|\psi$、$\neg\varphi$ 都属于 $Sen(L_s)$。

基本记号约定。为了随时明确我们所指的是 L 还是 L_s 的句子，全文中，字母 φ、ψ、σ 将表示 L_s 的一般句子，而字母 α、β、γ 将仅表示 L 的句子。此外，我们也经常将 L 的句子称为“经典的”。

给定集合 A 时，我们始终令

$$[A]^2 = \{\{a, b\} : a, b \in A\}$$

[8] 下面定义的函数 $\overline{f}$ 将保持经典联结词，因而也保持经典等价式，所以例如，将 $\varphi \to \psi$ 定义为 $\neg(\varphi \wedge \neg\psi)$ 还是 $\neg(\neg\psi \wedge \phi)$ 并没有区别。

表示 A 的所有二元子集和单元素子集组成的集合。我们将 $[A]^2$ 的元素称为 A 的元素对。$[A]^2$ 的选择函数照常定义为一个映射 f: $[A]^2 \to A$，使得对每个 $\{a,b\} \in [A]^2$，都有 $f(\{a,b\}) \in \{a,b\}$。为节省括号，我们用 $f(a,b)$ 代替 $f(\{a,b\})$。因此，特别地，$f(a,b) = f(b,a)$，且 $f(a,a) = a$。[9]

定义 2.1 给定语言 L，$[Sen(L)]^2$, 中句子对的集合 L的选择函数，将称为 L 的选择函数。

Let

$$\mathcal{F}(L) = \{f : f \text{ is a choice function for } L\}.$$

下文中，我们将始终更简洁地写作 $\mathcal{F}$，而不是 $\mathcal{F}(L)$。除非另有说明，下面的字母f、g 将遍历 $\mathcal{F}$ 中的元素。特别地，对于所有 α、$\beta \in Sen(L)$，我们将用 $f(\alpha,\beta)$ 代替 $f(\{a,b\})$，因此 $f(\alpha,\beta) = f(\beta,\alpha)$，并且 $f(\alpha,\alpha) = \alpha$。

定义 2.2 设 f 是 L的选择函数。则 f 生成一个塌缩函数 $\overline{f}$: $Sen(L_s) \to Sen(L)$，其归纳定义如下:

(i) $\overline{f}(\alpha) = \alpha$ for every $\alpha \in Sen(L)$.
(ii) $\overline{f}(\varphi \wedge \psi) = \overline{f}(\varphi) \wedge \overline{f}(\psi)$.
(iii) $\overline{f}(\neg\varphi) = \neg\, \overline{f}(\varphi)$.
(iv) $\overline{f}(\varphi|\psi) = f(\overline{f}(\varphi), \overline{f}(\psi))$.

备注 2.3 (i) 由于联结词 $\vee$ 和 $\to$ 是根据 $\neg$和 $\wedge$定义的，$\neg$关于它们也可交换，即: $\overline{f}$

$\overline{f}(\varphi \vee \psi) = \overline{f}(\varphi) \vee \overline{f}(\psi)$.
$\overline{f}(\varphi \to \psi) = \overline{f}(\varphi) \to \overline{f}(\psi)$.

(ii) 定义中当然最关键的条款是 (iv)。它表明，对于任意句子 φ、ψ，$\overline{f}(\varphi|\psi)$ 是从集合 $\{\overline{f}(\varphi)\ \overline{f}(\psi)\}$中进行的一次选择。特别地，对于经典句子 α、β，我们有

$$\overline{f}(\alpha|\beta) = f(\alpha,\beta), \tag{2}$$

定义 2.4（主要真值定义）。设 M 是 L 的真值赋值，f 是 L 和 $\overline{f}$ 的选择函数: $Sen(L_s) \to Sen(L)$ 为相应的

[9]对于每个集合 A，都存在一个以集合 $[A]^2$ 为定义域的选择函数，这一断言是选择公理 (AC) 的弱形式，记作 C_2，见 [7]。一般而言，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，C_n 表示如下原理：每个由 n 元集合构成的集合都存在一个选择函数。感兴趣的读者可参阅 [7, 第 7.4] 节，了解这些原理之间以及它们与有限集选择公理之间的各种相互关系。有限集选择公理指出，每个由非空有限集构成的非空集合都存在一个选择函数。另请参见下文的注 2.16。

坍缩函数。 $\models_s$ 与 $\langle M$、 $f\rangle$ 以及 φ 中的句子之间的真关系定义如下:

$$\langle M, f\rangle \models_s \varphi \text{ iff } M \models \overline{f}(\varphi).$$

更一般地，对于集合 $\Sigma \subset Sen(L_s)$，如果对于每个 $\varphi \in \Sigma$ 都有 $\langle M, f\rangle \models_s \varphi$，我们记作 $\langle M, f\rangle \models_s \Sigma$。

以下事实都是前述定义的直接推论。

事实 2.5 (i) 真关系 $\models_s$ 扩展了布尔真关系 $\models$，也就是说，对于每个 $\alpha \in Sen(L)$ 以及每个 $\langle M, f\rangle$, $\langle M, f\rangle \models_s \alpha \Leftrightarrow M \models \alpha$，都有此性质。

(ii) $\models_s$ 是二值真理概念，也就是说，对于每个 $\langle M, f\rangle$ 以及每个句子 φ，要么 $\langle M, f\rangle \models_s \varphi$，要么 $\langle M, f\rangle \models_s \neg\varphi$。

(iii) 对于 L_s 中的每个句子 φ、每个结构 M 以及每个坍缩函数 $\overline{f}$，$\langle M, f\rangle \models_s \varphi|\varphi$ 当且仅当 $\langle M, f\rangle \models_s \varphi$。

(iv) 对于所有 $\varphi, \psi \in Sen(L_s)$，$M$ 且 f, $\langle M, f\rangle \models_s \varphi|\psi$ 当且仅当 $\langle M, f\rangle \models_s \psi|\varphi$。

证明。（i）由以下事实可立即得到：根据 2.2 的第（i）条，对于每个句子 $\alpha \in Sen(L)$，$\overline{f}(\alpha) = \alpha$。因此，$\langle M, f\rangle \models_s \alpha$ 当且仅当 $M \models \alpha$。

（ii）设 $\langle M, f\rangle \not\models_s \varphi$。则 $M \not\models \overline{f}(\varphi)$，即 $M \models \neg\overline{f}(\varphi)$。根据 2.2 的第（iii）条，$\neg\overline{f}(\varphi) = \overline{f}(\neg\varphi)$，所以 $\langle M, f\rangle \not\models_s \varphi$ 蕴含 $M \models \overline{f}(\neg\varphi)$，或 $\langle M, f\rangle \models_s \neg\varphi$。

（iii）：根据定义 2.1，对于每个 α，$f(\alpha, \alpha) = \alpha$。因此，$\langle M, f\rangle \models_s \varphi|\varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models f(\overline{f}(\varphi)\ \overline{f}(\varphi)) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \overline{f}(\varphi) \Leftrightarrow \langle M, f\rangle \models_s \varphi$。

(iv)：再次由 2.1 可得 $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$。因此 $\langle M, f\rangle \models_s \varphi|\psi \Leftrightarrow M \models f(\overline{f}(\varphi)\ \overline{f}(\psi)) \Leftrightarrow M \models f(\overline{f}(\psi)\ \overline{f}(\varphi)) \Leftrightarrow \langle M, f\rangle \models_s \psi|\varphi$。⊣

令 $\Sigma \models \alpha$, $\alpha \models \beta$（针对 $\Sigma \subset Sen(L)$）和 $\alpha \sim \beta$ 分别表示经典句子的经典逻辑后承关系和逻辑等价关系。将这些关系扩展为关系 $\varphi \models_s \psi$, $\Sigma \models_s \varphi$ （针对 $\Sigma \subset Sen(L_s)$）以及针对 L_s-句子的 $\varphi \sim_s \psi$，如下所示。

定义 2.6 令 $\Sigma \subset Sen(L)$、$\varphi, \psi \in Sen(L_s)$。若 φ 是 Σ的 s-逻辑后承，记作 $\Sigma \models_s \varphi$，则对每个结构 $\langle M, f\rangle$,$\langle M, f\rangle \models_s \Sigma$ 都蕴含 $\langle M, f\rangle \models_s \varphi$。特别地，我们用 $\varphi \models_s \psi$代替$\{\varphi\} \models_s \psi$。若 φ 和 ψ 是 s-逻辑等价的，记作 $\varphi \sim_s \psi$，则对每个 $\langle M, f\rangle$,

$$\langle M, f\rangle \models_s \varphi \Leftrightarrow \langle M, f\rangle \models_s \psi.$$

最后，如果对于每个 $\langle M, f\rangle$, $\langle M, f\rangle \models_s \varphi$，则 φ 是一个 s-重言式，记作 $\models_s \varphi$。

事实 2.7 (i) $\varphi \models_s \psi$ 当且仅当 $\models_s \varphi \to \psi$。

(ii) $\varphi \sim_s \psi$ 当且仅当 $\models_s \varphi \leftrightarrow \psi$。

(iii) 对于 $\alpha, \beta \in Sen(L)$，$\alpha \models_s \beta$ 当且仅当 $\alpha \models \beta$，且 $\alpha \sim_s \beta$ 当且仅当 $\alpha \sim \beta$。

(iv) $\varphi \sim_s \psi$ 当且仅当对于所有选择函数 f，$\overline{f}(\varphi) \sim \overline{f}(\psi)$。

(v) 设 $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$是 L的一个句子，由原子句$p_1, \ldots, p_n$构成；设 $\psi_1, \ldots, \psi_n$ 是 L_s 的任意句子，并设 $\alpha(\psi_1, \ldots, \psi_n)$是将 α 中的每个 p_i 替换为 ψ_i后得到的句子。那么：

$$\models \alpha(p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow \models_s \alpha(\psi_1, \ldots, \psi_n).$$

(vi) 对所有 φ，ψ，$\varphi|\varphi \sim_s \varphi$ 和 $\varphi|\psi \sim_s \psi|\varphi$。

(vii) 如果 $\varphi \sim_s \psi$，那么 $\varphi|\psi \sim_s \varphi$。

证明。（i）：设 $\varphi \models_s \psi$。这意味着对于每个 $\langle M, f\rangle$、$\langle M, f\rangle \models_s \varphi$，$\langle M, f\rangle \models_s \psi$ 成立。等价地，$M \models \overline{f}(\varphi)$ 蕴含 $M \models \overline{f}(\psi)$，或者 $M \models (\overline{f}(\varphi) \to \overline{f}(\psi))$，或者 $M \models \overline{f}(\varphi \to \psi)$。这意味着对于每个 M 以及每个 $\overline{f}$，$\langle M, f\rangle \models_s \varphi \to \psi$ 成立。因此 $\models_s \varphi \to \psi$。逆向论证类似。

（ii）和（iii）由（i）推出。

（iv）：注意，$\varphi \sim_s \psi$ 成立，当且仅当对所有 $\langle M, f\rangle$、$\langle M, f\rangle \models_s \varphi$ 成立，当且仅当 $\langle M, f\rangle \models_s \psi$ 成立；等价地，$M \models \overline{f}(\varphi)$ 当且仅当 $M \models \overline{f}(\psi)$。但这意味着对于每个 f，$\overline{f}(\varphi) \sim \overline{f}(\psi)$。

(v)：设 $\models \alpha(p_1, \ldots, p_n)$。对于任意选择函数 f，显然

$$\overline{f}(\alpha(\psi_1, \ldots, \psi_n)) = \alpha(\overline{f}(\psi_1), \ldots, \overline{f}(\psi_n)),$$

因为 α 是经典的，且 $\overline{f}$ 与标准联结词可交换。此外，$\models \alpha(\overline{f}(\psi_1) \ldots, \overline{f}\psi_n)$，因为根据假设，$\models \alpha(p_1, \ldots, p_n)$ 和 $\overline{f}(\psi_i)$ 都是标准句子。因此，对于每个 M，都有 $M \models \alpha(\overline{f}(\psi_1) \ldots, \overline{f}(\psi_n))$，或者 $M \models \overline{f}(\alpha(\psi_1, \ldots, \psi_n))$。这意味着，对于每个结构 $\langle M, \langle M, f\rangle \models_s \alpha(\psi_1, \ldots, \psi_n)$，所以 $\models_s \alpha(\psi_1, \ldots, \psi_n)$。

(vi) 这可由事实 2.5 的条款 (iii) 和 (iv) 立即得出。

(vii) 设 $\varphi \sim_s \psi$，且令 $\langle M, f\rangle \models \varphi|\psi$。则 $M \models f(\overline{f}(\varphi)\ \overline{f}(\psi))$。根据上面的条款 (iv)，$\overline{f}(\varphi) \sim \overline{f}(\psi)$，因为 $\varphi \sim_s \psi$。因此，无论在 $\overline{f}(\varphi)$ 和 $\overline{f}(\psi)$ 之间选择 f 的结果如何，我们都有 $M \models \overline{f}(\varphi)$。因此，$\langle M, f\rangle \models_s \varphi$。⊣

新语义的下述插值性质或许最为引人注目。请注意，它对一般的选择函数也成立，无需满足后续各节中将要讨论的任何附加条件。

定理 2.8 对所有 $\varphi, \psi \in Sen(L_s)$,

$$\varphi \wedge \psi \models_s \varphi|\psi \models_s \varphi \vee \psi,$$

而一般来说

$$\varphi \vee \psi \not\models_s \varphi|\psi \not\models_s \varphi \wedge \psi.$$

证明。假设 $\langle M, f\rangle \models_s \varphi \wedge \psi$。则 $M \models \overline{f}(\varphi) \wedge \overline{f}(\psi)$，也就是说，$M \models \overline{f}(\varphi)$ 且 $M \models \overline{f}(\psi)$。但是，无论 f从 $\{\overline{f}(\varphi)\ \overline{f}(\psi)\}$ 中选择什么，它在 M 中都为真，也就是说，$M \models f(\overline{f}(\varphi)\ \overline{f}(\psi))$。这恰好意味着 $\langle M, f\rangle \models_s \varphi|\psi$。因此 $\varphi \wedge \psi \models_s \varphi|\psi$。

另一方面，如果 $\langle M, f\rangle \models_s \varphi|\psi$，那么 $M \models f(\overline{f}(\varphi)\ \overline{f}(\psi))$。如果 $f(\overline{f}(\varphi)\ \overline{f}(\psi)) = \overline{f}(\varphi)$，那么 $M \models \overline{f}(\varphi)$。如果 $f(\overline{f}(\varphi)\ \overline{f}(\psi)) = \overline{f}(\psi)$，那么 $M \models \overline{f}(\psi)$。因此，要么 $M \models \overline{f}(\varphi)$，要么 $M \models \overline{f}(\psi)$。所以 $M \models \overline{f}(\varphi) \vee \overline{f}(\psi)$。但显然，$\overline{f}(\varphi) \vee \overline{f}(\psi) = \overline{f}(\varphi \vee \psi)$，因为 $\overline{f}$ 与所有标准联结词可交换。因此 $M \models \overline{f}(\varphi \vee \psi)$，或者等价地，$\langle M, f\rangle \models_s \varphi \vee \psi$。因此 $\varphi|\psi \models_s \varphi \vee \psi$。

为说明逆向关系不成立，取 $\alpha \in Sen(L)$ 以及一个真值赋值 M 使得 $M \models \alpha$。再为 L 取一个选择函数，使得 $f(\alpha, \neg\alpha) = \neg\alpha$。由于 $\overline{f}(\alpha \vee \neg\alpha) = \alpha \vee \neg\alpha$, $\langle M, f\rangle \models_s \alpha \vee \neg\alpha$。另一方面，$M \not\models \neg\alpha$ 意味着 $M \not\models f(\alpha, \neg\alpha)$，因此 $\langle M, f\rangle \not\models_s \alpha|\neg\alpha$。所以 $\alpha \vee \neg\alpha \not\models_s \alpha|\neg\alpha$。类似地，如果 M, α 与之前相同，但我们取一个选择函数 g，使得 $g(\alpha, \neg\alpha) = \alpha$，那么 $\langle M, g\rangle \models_s \alpha|\neg\alpha$，而 $\langle M, g\rangle \not\models_s \alpha \wedge \neg\alpha$。因此 $\alpha|\neg\alpha \not\models_s \alpha \wedge \neg\alpha$。⊣

推论 2.9 若 α 既不是重言式也不是矛盾，那么 $\alpha|\neg\alpha$既不是 s-重言式，也不是 s-矛盾。

证明。若 α 如上所述，那么根据定理 2.8 $\alpha|\neg\alpha$ 的证明，$\alpha \wedge \neg\alpha$ 与 $\alpha \vee \neg\alpha$之间存在严格插值。⊣

在上文使用的语义 $\models_s$ 中，允许任意选择函数参与 L 。这实际上意味着，对于任意一对 $\{\alpha, \beta\}$, f都可以从 $\{\alpha, \beta\}$ 中相当随机地选取一个元素，例如通过抛硬币来决定。然而，如果我们希望 $\models_s$ 支持 $|$的附加性质，就必须通过对选择函数施加额外条件来细化$\models_s$。这种细化可以用一般方式定义如下。

定义 2.10 对于每个 $\emptyset \neq X \subseteq \mathcal{F}$，定义 X-逻辑后承关系 $\models_X$ 和 X-逻辑等价关系 $\sim_X$ 如下： $\Sigma \models_X \varphi$

当且仅当对于 L 的每个真值赋值 M 以及每个 $f \in X$,

$$\langle M, f\rangle \models_s \Sigma \;\Rightarrow \langle M, f\rangle \models_s \varphi.$$

此外，$\varphi \sim_X \psi$ 当且仅当 $\varphi \models_X \psi$ 且 $\psi \models_X \varphi$。

[条件 $X \neq \emptyset$ 的目的是排除平凡情形。因为如果 $X = \emptyset$，则显然有 $\varphi \models_\emptyset \psi$，并且对于所有 φ、$\psi \in Sen(L_s)$ 都有 $\varphi \sim_\emptyset \psi$。因此，下文提到的所有集合 X、$Y \subseteq \mathcal{F}$ 都假定为 $\neq \emptyset$。]

使用上述记号，关系 $\models_s$ 和 $\sim_s$ 也分别写作 $\models_\mathcal{F}$、$\sim_\mathcal{F}$。

下面这个简单事实将 $\sim_X$ 化简为标准 $\sim$。

引理 2.11 对于每个 $X \subseteq \mathcal{F}$，以及任意 φ、$\psi \in Sen(L_s)$，

$$\varphi \sim_X \psi \;\Leftrightarrow (\forall f \in X)(\overline{f}(\varphi) \sim \overline{f}(\psi)).$$

证明。根据定义，$\varphi \sim_X \psi$ 当且仅当对于每个 M 和每个 $f \in X$,

$$\langle M, f\rangle \models_s \varphi \;\Leftrightarrow\; \langle M, f\rangle \models_s \psi,$$

或者，等价地，如果对于所有 M 和 $f \in X$,

$$M \models \overline{f}(\varphi) \;\Leftrightarrow\; M \models \overline{f}(\psi).$$

后者成立，当且仅当对于所有 $f \in X$、$\overline{f}(\varphi)$，$\sim \overline{f}(\psi)$。 ⊣

下面的性质很容易验证。

事实 2.12 对于每个 X、$Y \subseteq \mathcal{F}$:

(i) $\varphi \models_X \psi$ 当且仅当 $\models_X \varphi \to \psi$。(ii) $\varphi \sim_X \psi$ 当且仅当 $\models_X \varphi \leftrightarrow \psi$。(iii) 如果 $X \subseteq Y$，那么 $\models_Y \subseteq \models_X$ 和 $\sim_Y \subseteq \sim_X$。(iv) 将 $\sim_X$ 限制在经典句子上所得的结果与 $\sim$ 一致，即对于所有 α、$\beta \in Sen(L)$，

$$\alpha \sim_X \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \sim \beta.$$

在结束本节之前，我应感谢 [6] 提出了上文介绍的一些概念。直到一位审稿人提醒我注意 [6], ，我才（惊讶地）得知，公式对的选择函数这一概念，以及上文 2.4 中定义的满足关系的基本雏形，并非全然新颖；它们早已被独立定义，而且在表述风格上有着显著的相似之处。事实上，在 [6] 第 479 页的例 3.24.14 中，我们读到:

“在集合 U 上的成对选择函数，是指满足以下条件的函数 f：对于所有 a、$b \in U$、 f，有（$\{a,b\}$） $\in \{a,b\}$。我们用 f（a， b）表示‘f（$\{a,b\}$)’，并允许 $a = b$ 成立；此时f（a， b）$= a = b$。（.....）因此，成对选择函数是一种交换幂等二元运算，此外还是拟投影或保守运算，也就是说，对于给定的一对参数，其值总是其中一个参数。就当前应用而言，考虑 f 作为语言公式集合上的成对选择函数；该语言由实际给定的命题变元集合借助二元联结词 $\circ$生成。考虑由满足以下条件的所有赋值 v 构成的类所确定的广义后承关系（gcr）：存在某个成对选择函数 f，使得对于所有公式 A、B、 v，有（$A \circ B$） $= v$（f（A， B））。那么，若 $\succ$ 表示这个 gcr，它满足以下规则：（I） A， $B \succ A \circ B$；（II） $A \circ B \succ A$， B；以及（IV） $A \circ B \succ B \circ A$。”

请注意，规则 (I) 和 (II) 本质上是定理 2.8 的“插值性质”，而规则 (IV) 是事实 2.7 的交换性质 (vi)。

在下一节中，我们将考察第一个自然子类 $X \subset \mathcal{F}$，即结合选择函数类。这些函数恰好支持联结词 $|$的结合性。显然，从代数观点来看，结合律是一种非常理想的性质。然而，正如一位审稿人在此处颇有见地地指出的，我们必须区分代数上理想的性质与量子力学上理想的性质，也就是说，后者应当接近量子系统的真实行为。在他看来，具有不太吸引人且不够平滑的性质的选择函数类，也可能值得单独划分出来并加以审视。

2.2 结合选择函数

根据事实 2.7 的第 (vi) 条， $\varphi|\varphi \sim_s \varphi$ 和 $\varphi|\psi \sim_s \psi|\varphi$。这两个性质——关于逻辑等价的幂等性和交换律——与运算 $|$的预期直观含义相符。与 $|$ 的含义相符的另一个理想性质是结合律，即 $(\varphi|\psi)|\sigma$ 与 $\varphi|(\psi|\sigma)$ 逻辑等价。相对于 $\sim_s$，这是否成立？答案是：一般而言并不成立。为了确保这一点，我们需要对选择函数施加某个条件。该具体条件与 $Sen(L)$ 中元素的性质无关，因此我们将在一般情形下证明它。

设 A 为一个无限集，并设 $f: [A]^2 \to A$ 是对 A 的元素对所作的选择。可以将其扩展到集合 $[A]^3$——由至多含有 3 个元素的非空集合组成——例如令

$$f(a,b,c) := f(\{a,b,c\}) = f(f(a,b),c).$$

但这并不能保证 $f(a,b,c) = f(b,c,a) = f(c,b,a)$ 等等，而这显然是必需的；除非对于所有的 a、b、c，都有 $f(f(a,b),c) = f(a,f(b,c))$。这正是所需的条件。

定义 2.13 设 f 是 $[A]^2$的一个选择函数。若对于所有的 a、b、$c \in A$，f 满足下式，则称其为结合的：

$$f(f(a,b),c) = f(a,f(b,c)).^{10}$$

下文将证明，$[A]^2$ 上的结合选择函数本质上就是函数 $\min_<$，其中 $<$ 是 A上的一个全序。我不知道下一个定理是新结果还是已知结果。无论如何，我在现有的参考文献中都没能找到证明。

定理 2.14 (i) 若 $<$ 是 A上的一个全序，则映射 $\min_<(a,b)$ 从 $[A]^2$ 映射到 A 是结合的。

(ii) 反过来，如果 $f: [A]^2 \to A$ 是一个结合选择函数，那么它定义了 A 上的一个全序 $<$，使得对于所有 $a,b \in A$，$f(a,b) = \min_<(a,b)$。

证明。(i) 设 $<$ 是 A 上的一个全序。令 $Fin(A)$ 表示 A 的所有非空有限子集组成的集合，并令 $\min_<$ 为一个函数，它对每个 $x \in Fin(A)$ 选取 x 中按 $<$序排列最靠前的元素。我们用 $\min$ 代替 $\min_<$。显然，$\min$ 是 $Fin(A)$ 的一个选择函数。特别地，对于所有 $a,b,c \in A$，

$$\min(a,b,c) = \min(\min(a,b),c) = \min(a,\min(b,c)).$$

因此，限制在 $[A]^2$ 上的 $\min$ 是结合的。

(ii) 设 $f: [A]^2 \to A$ 为一个结合选择函数。在 A 上定义关系 $<$ 如下：对于任意 a、$b \in A$，当且仅当 $a \neq b$且 $f(a,b) = a$时，令 $a < b$。显然，$<$是全序且反自反的（即，对于每个 $a \in A$，都有 $a \not< a$）。因此，为使 $<$ 成为全序，只需它还满足

[10]如果我们用 $a \star b$ 代替 $f(a,b)$，那么条件 $f(f(a,b),c) = f(a,f(b,c))$ 可改写为 $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$，这也说明了“结合的”这一术语的由来。

传递性。设 $a < b$ 和 $b < c$。我们证明 $a < c$。根据假设，有 $a \neq b$、$f(a,b) = a$、$b \neq c$以及 $f(b,c) = b$。由此可得 $a \neq c$；否则将有 $b = f(b,c) = f(b,a) = f(a,b) = a$，这与矛盾相矛盾。还需证明 $f(a,c) = a$。根据 f 的结合律和交换律，有 $f(a,f(b,c)) = f(b,f(a,c))$。由于 $f(a,f(b,c)) = f(a,b) = a$，因此 $f(b,f(a,c)) = a$也成立。若 $f(a,c) = c$，则会有 $f(b,f(a,c)) = f(b,c) = b \neq a$，这与矛盾相矛盾。因此，$f(a,c) = a$，证明完毕。于是，$<$是 A 上的全序，并且根据定义，对于所有 a、$b \in A$，$f(a,b) = \min_{<}(a,b)$。⊣

作为定理 2.14 的直接推论，我们得到如下结果。

推论 2.15 若 $f: [A]^2 \to A$ 是一个结合选择函数，则它唯一确定 $<$上的一个全序 A，使得 $f(a,b) = \min_{<}(a,b)$。因此，f唯一延拓为选择函数 $f^+: Fin(A) \to A$，使得对于每个 $x \in Fin(A)$，都有 $f^+(x) = \min_{<}(x)$。于是 $f = f^+ \restriction [A]^2$。

鉴于前面的推论，在不造成严重失真的情况下，我们可以将 $[A]^2$ 上的结合选择函数 f 与整个 $Fin(A)$上的生成选择函数 f^+等同起来，并用 $f = \min_{<}$代替 $f^+ = \min_{<}$，其中 $<$是由 f定义的序。

注 2.16 从集合论的观点来看，结合函数的存在是一个远强于 $[A]^2$存在简单选择函数的陈述。正如脚注 9 中所指出的，后者等同于原理 C_2。另一方面，由 2.14 和 2.15 可知，对每个集合 A，$[A]^2$存在结合选择函数，等价于 A 上存在全序；也就是说，等价于序原理：“每个集合都可以赋予全序”，而这远强于 C_2。具体而言，[9] 中证明了序原理严格强于有限集选择公理。后者又严格强于所有公理 C_n的合取（对于 $n \geq 2$，参见 [7, 定理 7.11]）。

现在让我们回到 $Sen(L)$ 中的 L 句子集合。特别地，如果对于所有 α、β、$\gamma \in Sen(L)$，选择函数 $f$for L 被称为结合的，

$$f(f(\alpha,\beta),\gamma) = f(\alpha,f(\beta,\gamma)). \tag{3}$$

如果 f 具有结合性，我们通常也称偶对 $\langle M, f\rangle$ 具有结合性。由定理 2.14、推论 2.15 以及后者之后的评论可立即得到以下结论。

推论 2.17 选择函数 f 对于 L 是结合的，当且仅当在 $Sen(L)$ 上存在一个全序 $<$，使得 $f = \min_{<}$。

Let

$$Asso = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ is associative }\},$$

表示 L 的所有结合选择函数的集合。我们还将由 $Asso$ 导出的逻辑后承关系 $\models_{Asso}$ 和逻辑等价关系 $\sim_{Asso}$（参见上一节的定义 2.10）分别简记为 $\models_{Asso}$ 和 $\sim_{Asso}$。由一般事实 2.12 (iii)，我们立即得到以下结论。

事实 2.18 对所有 φ、ψ、Σ,

(i) $\Sigma \models_s \varphi \Rightarrow \Sigma \models_{Asso} \varphi$。

(ii) $\varphi \sim_s \psi \Rightarrow \varphi \sim_{Asso} \psi$。

很容易验证，前述事实中的蕴含通常不可逆。结合律的主要推论如下。

定理 2.19 设 $X \subseteq \mathcal{F}$ 是一个选择函数类。若 $X \subseteq Asso$，则 $|$ 关于真值概念 $\models_X$ 是结合的，也就是说，对于所有 φ、ψ、σ、$\varphi|(\psi|\sigma) \sim_X (\varphi|\psi)|\sigma$。

证明。设 $X \subseteq Asso$。只需证明，对于每个 M 和每个 $f \in X$，以及 L_s、$\langle M、f\rangle$ 中任意句子 φ、ψ、σ，

$$\langle M, f\rangle \models_s (\varphi|\psi)|\sigma \text{ iff } \langle M, f\rangle \models_s \varphi|(\psi|\sigma).$$

固定某个 M 和某个 $f \in X$。根据定义，我们有：

$$\langle M, f\rangle \models_s (\varphi|\psi)|\sigma \Leftrightarrow M \models f(\overline{f}(\varphi|\psi), \overline{f}(\sigma)) \Leftrightarrow M \models f(f(\overline{f}(\varphi), \overline{f}(\psi)), \overline{f}(\sigma)).$$

根据假设 $f \in Asso$，由结合性 (3) 可得

$$f(f(\overline{f}(\varphi), \overline{f}(\psi)), \overline{f}(\sigma)) = f(\overline{f}(\varphi), f(\overline{f}(\psi), \overline{f}(\sigma))).$$

因此，

$$\langle M, f\rangle \models_s (\varphi|\psi)|\sigma \Leftrightarrow M \models f(\overline{f}(\varphi), \overline{f}(\psi|\sigma)) \Leftrightarrow \langle M, f\rangle \models_s \varphi|(\psi|\sigma).$$

⊣

如果我们稍微削弱结合律这一性质，2.19 的逆命题也成立。

定义 2.20 如果一个选择函数满足：将 $=$ 替换为 $\sim$ 后，(3) 仍成立，即对所有 α、β、$\gamma \in Sen(L)$，我们称其为本质结合的，

$$f(f(\alpha,\beta),\gamma) \sim f(\alpha, f(\beta,\gamma)). \tag{4}$$

令 $Asso'$ 表示本质结合的选择函数类。

定理 2.21 若 $X \subseteq \mathcal{F}$ 且 $|$ 关于 $\models_X$是结合的，则$X \subseteq Asso'$。

证明。令 $X \nsubseteq Asso'$。我们必须证明 $|$ 关于 $\models_X$不是结合的。取 $f \in X - Asso'$。只需找到 M 和 α, β, γ，使其属于$Sen(L)$，满足

$$\langle M, f\rangle \models_s (\alpha|\beta)|\gamma \nRightarrow \langle M, f\rangle \models_s \alpha|(\beta|\gamma).$$

由于 f 不是本质结合的，存在 α, β, γ，它们属于 $Sen(L)$，使得$f(f(\alpha,\beta)\ \gamma) \not\sim f(\alpha, f(\beta,\gamma))$。不失一般性，我们可以假设

$$f(f(\alpha,\beta),\gamma) = \gamma \not\sim \alpha = f(\alpha, f(\beta,\gamma)).$$

由于 $\alpha \not\sim \gamma$，存在 M，使得 $M \models \alpha\wedge\neg\gamma$ 或 $M \models \neg\alpha\wedge\gamma$。不失一般性，假设第一种情况成立。于是 $M \models \alpha = f(\alpha, f(\beta,\gamma))$，因此$M \models \overline{f}(\alpha|(\beta|\gamma))$，故 $\langle M, f\rangle \models_s \alpha|(\beta|\gamma)$。另一方面 $M \not\models \gamma = f(f(\alpha,\beta)\ \gamma)$，这意味着 $\langle M, f\rangle \not\models_s (\alpha|\beta)|\gamma$。定理得证。 $\dashv$

显然 $Asso \subseteq Asso'$。这两个类是否不同? 答案是肯定的，但 $Asso' - Asso$ 中的函数仅在满足 $\alpha \sim \beta \sim \gamma$的句子 α、β、γ上表现出非结合性。更准确地说，如果 $f(f(\alpha,\beta)\ \gamma) \neq f(\alpha, f(\beta,\gamma))$，或 $f(f(\alpha,\beta)\ \gamma) \neq f(\beta, f(\alpha,\gamma))$，或 $f(f(\alpha,\gamma)\ \beta) \neq f(\alpha, f(\beta,\gamma))$，则称句子三元组 α、β、γ见证了 f的非结合性。于是有如下结论。

引理 2.22 (i) $Asso \subsetneq Asso'$。

(ii) 如果 $f \in Asso'$以及 α、β、γ是满足 $\alpha \not\sim \beta$、$\beta \not\sim \gamma$和$\alpha \not\sim \gamma$的句子，那么 f在 α、β、γ上是结合的，即 $f(f(\alpha,\beta)\ \gamma) = f(\alpha, f(\beta,\gamma)) = f(f(\alpha,\gamma)\ \beta)$。

（iii）若 $f \in Asso' - Asso$，且 α、β、γ见证了f的非结合性，则 α、β、γ彼此均不相同，此外，f（α、β）、f（α、γ）、f（β、γ）也彼此均不相同。

（iv）因此，若 $f \in Asso' - Asso$且 α、β、γ见证了 f的非结合性，则 $\alpha \sim \beta \sim \gamma$。

(v) 此外，若 $f \in Asso' - Asso$，则 f 在满足 $\alpha \sim \beta \not\sim \gamma$ 的每组三元组 α、β、γ 上都是结合的。

证明。(i) 设 $\alpha \sim \beta \sim \gamma$，且 α、β、γ 两两不同。设 $f \in \mathcal{F}$ 满足 $f(\alpha,\beta) = \beta$、$f(\alpha,\gamma) = \alpha$、$f(\beta,\gamma) = \gamma$。显然，$f(f(\alpha,\beta)\ \gamma)$、$f(f(\alpha,\gamma)\ \beta)$、$f(f(\beta,\gamma)\ \alpha)$ 都等价，因此 $f \in Asso'$。另一方面，例如，$f(f(\alpha,\beta)\ \gamma) \neq f(\alpha, f(\beta,\gamma))$，因此 $f \notin Asso$。

(ii) 如果 $\alpha \not\sim \beta$、$\beta \not\sim \gamma$、$\alpha \not\sim \gamma$，那么除非 $f(f(\alpha,\beta)\ \gamma) = f(\alpha, f(\beta,\gamma))$，否则不可能有 $f(f(\alpha,\beta)\ \gamma) \sim f(\alpha, f(\beta,\gamma))$。

(iii) 容易看出，对于每个 $f \in \mathcal{F}$ 以及每个 α、β，都有 $f(f(\alpha,\beta)\ \alpha) = f(f(\alpha,\beta)\ \beta)$。这表明，如果三元组 α、β、γ 中任意两个元素相等，那么该三元组就不可能见证任何函数的非结合性。令 $f \in Asso' - Asso$，并假设 α、β、γ 见证了 f 的非结合性。我们刚刚已经看到，它们彼此 distinct。我们证明 $f(\alpha,\beta)$、$f(\alpha,\gamma)$、$f(\beta,\gamma)$ 也彼此 distinct。事实上，假设 $f(\alpha,\beta)$、$f(\alpha,\gamma)$、$f(\beta,\gamma)$ 中有两个值相同。那么将推出

$$f(f(\alpha,\beta),\gamma) = f(\alpha, f(\beta,\gamma)) = f(f(\alpha,\gamma),\beta), \tag{5}$$

这与以下事实相矛盾：α、β、γ证明了 f的非结合性。不失一般性，假设 $f(\alpha,\beta) = f(\beta,\gamma)$。由于 f是一个选择函数，且 α、β、γ彼此不同，因此必然有 $f(\alpha,\beta) = f(\beta,\gamma) = \beta$。因此

$$f(f(\alpha,\beta),\gamma) = f(\beta,\gamma) = f(\alpha,\beta) = f(\alpha, f(\beta,\gamma)) = \beta.$$

因此，(5)中的两个成员相等。至于第三个成员，注意到 $f(\alpha,\gamma)$要么是 α，要么是 γ。在这两种情况下，$f(f(\alpha,\gamma)\ \beta) = \beta$，正如所要求的那样。

(iv) 令 $f \in Asso' - Asso$，并令 α、β、γ证明 f的非结合性。根据上面的(iii)，$f(\alpha,\beta)$、$f(\alpha,\gamma)$、$f(\beta,\gamma)$取遍所有值 α、β、γ，因此 $f(f(\alpha,\beta)\ \gamma)$、$f(\alpha, f(\beta,\gamma))$、$f(f(\alpha,\gamma)\ \beta)$也取遍这些值。但由于$f \in Asso'$，后面这些式子在逻辑上都是等价的。因此 $\alpha \sim \beta \sim \gamma$。

（v）如果 $f \in Asso' - Asso$、$\alpha \sim \beta \not\sim \gamma$ 和 f 在 α、β、γ 上不满足结合律，那么后一个三元组就会见证 f 的非结合性，因此，根据（iv），$\alpha \sim \beta \sim \gamma$。矛盾。⊣

由前面的引理可知，每个 $f \in Asso'$ 本质上都为 $Sen(L)/{\sim} = \{[\alpha] : \alpha \in Sen\}$ 中的元素对定义了一个结合选择函数（从而定义了一个全序），而非 $Sen(L)$。

由事实 2.5、2.18 和定理 2.19，可得如下结论。

推论 2.23 运算 $|$ 相对于 $\sim_{Asso}$是幂等、交换且结合的。也就是说：

(i) $\varphi|\varphi \sim_{Asso} \varphi$.

(ii) $\varphi|\psi \sim_{Asso} \psi|\varphi$。 (iii)
$\varphi|(\psi|\sigma) \sim_{Asso} (\varphi|\psi)|\sigma$。

由此可见，当限定于结合结构中的真值时，可以省略 $(\varphi|\psi)|\sigma$ 中的括号，直接写作 $\varphi|\psi|\sigma$ （正如经典命题逻辑中 $\wedge$ 和$\vee$ 的情形），更一般地，对于任意句子 φ_i ofL_s，都可以写作 $\varphi_1|\cdots|\varphi_n$。

此外，根据定理 2.14 和推论 2.23，当选择函数 f 是结合的时，对于 $Sen(L)$ 上的全序 $<$，有 $f = \min_<$。也就是说，以下结论可通过简单的归纳证明:

推论 2.24 设 $\langle M, f\rangle$ 是结合的，且对于 $Sen(L)$ 上的全序 $<$，有 $f = \min_<$。那么，对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 及任意 $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \subset L_s$,

$$\langle M, f\rangle \models_s \varphi_1|\cdots|\varphi_n \textit{ iff } M \models f(\overline{f}(\varphi_1), \ldots, \overline{f}(\varphi_n)) \textit{ iff } M \models \min_<(\overline{f}(\varphi_1), \ldots, \overline{f}(\varphi_n)),$$

其中，$f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ 是 $f(\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\})$ 的简写。特别地，对于经典句子 α_1,... , α_n,

$$\langle M, f\rangle \models_s \alpha_1|\cdots|\alpha_n \quad \textit{iff } M \models \min_<(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

2.3 正则性

对于每个 $\varphi \in Sen(L)$，令 $Sub(\varphi)$ 表示 φ 的子句子集合。给定 φ、 $\sigma \in Sub(\varphi)$ 和任意 σ'，令 $\varphi[\sigma'/\sigma]$ 表示将 σ 替换为 σ' 并遍及 φ 所得的结果。

定义 2.25 对于 $X \subseteq \mathcal{F}$，如果对所有 φ、$\sigma \in Sub(\varphi)$ 以及 σ'，则称其为逻辑闭合的,

$$\sigma \sim_X \sigma' \;\Rightarrow\; \varphi \sim_X \varphi[\sigma'/\sigma].$$

经典逻辑等价 $\sim$ 当然是逻辑闭合的，但 $\sim_s$ 和$\sim_{Asso}$ 通常并非如此。问题在于，需要对 X 施加什么进一步条件，才能使 $\sim_X$ 逻辑闭合。下面将介绍的正是正则性条件。

正则性是一个独立于结合律的条件，但与结合律相容。因此，将其独立于结合律引入是合理的。

定义 2.26 若选择函数 f 关于 L 满足对于所有的 α,α', β,, 则称其为正则的。

$$\alpha \sim \alpha' \;\Rightarrow\; f(\alpha, \beta) \sim f(\alpha', \beta).$$

以下性质是该定义的直接推论。

事实 2.27 设 f 为正则。则对所有 α、 α'、 β、 β':
(i) 如果 $\alpha \sim \alpha' \not\sim \beta \sim \beta'$ 且 $f(\alpha、\beta) = \alpha$，那么 $f(\alpha'、\beta') = \alpha'$; 而如果 $f(\alpha、\beta) = \beta$，那么 $f(\alpha'、\beta') = \beta'$。
(ii) 如果 $\alpha \sim \alpha' \sim \beta \sim \beta'$，则 $f(\alpha、\beta)$ 和 $f(\alpha'、\beta')$ 分别可以是集合 $\{\alpha, \beta\}$、 $\{\alpha', \beta'\}$ 中的任意元素。

Let

$$Reg = \{f \in \mathcal{F} : \ f \text{ is regular}\}$$

记正则选择函数的集合为 $\models_{Reg}$，并令 $\sim_{Reg}$ 、 $\models_{Reg}$ 分别简写关系 $\sim_{Reg}$、$\sim_{Reg}$ 。正则性不仅保证 是逻辑闭合的，反之亦然。

定理 2.28 $\sim_X$ 当且仅当 $X \subseteq Reg$ 时是逻辑闭合的。

证明。“$\Leftarrow$”: 我们假设 $X \subseteq Reg$，并证明 $\sim_X$ 是逻辑闭合的。对于 $\sigma \in Sub(\varphi)$， $\varphi[\sigma'/\sigma]$ 通常按 φ 的长度归纳定义，因此我们证明

$$\sigma \sim_X \sigma' \ \Rightarrow \ \varphi[\sigma'/\sigma] \sim_X \varphi \tag{6}$$

按照 $\varphi[\sigma'/\sigma]$定义中的步骤进行。实际上，只有在处理情形 $\varphi = \varphi_1|\varphi_2$时才需要正则性，因为 $\overline{f}$ 与标准联结词可交换，所以我们只处理归纳的这一步。也就是说，设$\varphi = \varphi_1|\varphi_2$，于是

$$\varphi[\sigma'/\sigma] = \varphi_1[\sigma'/\sigma]|\varphi_2[\sigma'/\sigma],$$

并假设断言对 φ_1、 φ_2成立。为便于阅读，令 $\varphi' =\varphi[\sigma'/\sigma]$、 $\varphi'_1 = \varphi_1[\sigma'/\sigma]$、 $\varphi'_2 = \varphi_2[\sigma'/\sigma]$。于是 $\varphi' = \varphi'_1|\varphi'_2$，并根据归纳假设 $\varphi'_1 \sim_X \varphi_1$、 $\varphi'_2 \sim_X \varphi_2$。我们需要证明 $\varphi'_1|\varphi'_2 \sim_X \varphi_1|\varphi_2$。取 $f \in X$。根据我们的假设 $f \in Reg$。归纳假设变为

$$\overline{f}(\varphi'_1) \sim \overline{f}(\varphi_1) \text{ and } \overline{f}(\varphi'_2) \sim \overline{f}(\varphi_2), \tag{7}$$

只需证明 $\overline{f}(\varphi'_1|\varphi'_2) \sim \overline{f}(\varphi_1|\varphi_2)$，或者等价地，

$$f(\overline{f}(\varphi'_1), \overline{f}(\varphi'_2)) \sim f(\overline{f}(\varphi_1), \overline{f}(\varphi_2)). \tag{8}$$

但是，由于 $f \in Reg$，根据事实 2.27，(8) 可由 (7) 立即推出。这就完成了方向 $\Leftarrow$ 的证明。

“$\Rightarrow$”: 假设 $X \not\subseteq Reg$。我们必须证明 $\sim_X$ 并非逻辑闭合。取 $f \in X - Reg$。由于 f 不是正则的，因此存在 α、 α' 和 β，属于

$Sen(L)$，使得 $\alpha \sim \alpha'$ 且 $f(\alpha,\beta) \not\sim f(\alpha',\beta)$。特别地，这意味着 $\alpha \not\sim \beta$。此外，要么 $f(\alpha,\beta) = \alpha$ 且 $f(\alpha',\beta) = \beta$，要么 $f(\alpha,\beta) = \beta$且 $f(\alpha',\beta) = \alpha'$。

假设 $f(\alpha,\beta) = \alpha$且 $f(\alpha',\beta) = \beta$，另一种情况的处理方式类似。由于 $\alpha \not\sim \beta$ 存在一个针对 L 的真值赋值 M，使得$M \models \alpha\wedge\neg\beta$ 或 $M \models \neg\alpha\wedge\beta$。不失一般性，假设 $M \models \alpha\wedge\neg\beta$。那么 $M \models f(\alpha,\beta)$，这意味着 $\langle M, f\rangle \models \alpha|\beta$。另一方面，由于$f(\alpha',\beta) = \beta$且 $M \models \neg\beta$，我们有 $M \models \neg f(\alpha',\beta)$，即 $M \not\models f(\alpha',\beta)$，这意味着 $\langle M, f\rangle \not\models \alpha'|\beta$。因此，对于某个 M以及某个 $f \in X$，有$\langle M, f\rangle \models \alpha|\beta$和 $\langle M, f\rangle \not\models \alpha'|\beta$。于是 $\alpha'|\beta \not\sim_X \alpha|\beta$，而 $\alpha' \sim \alpha$，因此 $\alpha' \sim_X \alpha$。由此可知，$\sim_X$ 不是逻辑闭合的。⊣

一般而言，如果 $X \subseteq Y \subseteq \mathcal{F}$ 和 $\sim_X$ 是逻辑闭合的，似乎不太可能由此推断出 $\sim_Y$ 是逻辑闭合的（反之亦然）。然而，我们有如下对 2.28 的推广。

推论 2.29 若 $X \subseteq Reg \subseteq Y \subseteq \mathcal{F}$，则对于所有 $\varphi, \sigma \in Sub(\varphi)$ 和 σ'，

$$\sigma \sim_Y \sigma' \;\Rightarrow\; \varphi[\sigma'/\sigma] \sim_X \varphi.$$

证明。根据事实 2.12 (iii)，$X \subseteq Y$蕴含 $\sim_Y \subseteq \sim_X$。因此，给定 $X \subseteq Reg \subseteq Y$，我们有 $\sim_Y \subseteq \sim_{Reg} \subseteq \sim_X$。于是，若 $\sigma \sim_Y \sigma'$，则 $\sigma \sim_{Reg} \sigma'$。根据定理 2.28，这意味着 $\varphi[\sigma'/\sigma] \sim_{Reg} \varphi$，因此 $\varphi[\sigma'/\sigma] \sim_X \varphi$。⊣

利用选择公理，可以很容易地为 L 构造正则选择函数。对于每个 $\alpha \in Sen(L)$，令 $[\alpha]$ 表示 $\sim$-等价类 α，即

$$[\alpha] = \{\beta : \beta \sim \alpha\}.$$

命题 2.30（选择公理）存在 L 的正则选择函数。

证明。利用 AC，从每个等价类 $[\alpha]$ 中选取一个代表元 ξ_α，并令 $D = \{\xi_\alpha : \alpha \in Sen(L)\}$。每个 $\alpha \in Sen(L)$ 都与 $\xi_\alpha \in D$ 逻辑等价。令 $f_0 : [D]^2 \to D$ 为 D 的所有元素对任意给定的选择函数。然后将 f_0 延拓为 L 的正则选择函数 f，定义如下：

$f(\alpha,\beta) = \alpha$，如果 $\alpha \not\sim \beta$ 且 $f_0(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \xi_\alpha$。如果 $\alpha \sim \beta$，我们任意定义 $f(\alpha,\beta)$（准确地说，令 $f(\alpha,\beta) = g(\alpha,\beta)$，其中 g 是满足 $\alpha \sim \beta$ 的所有句子对上的选择函数）。⊣

接下来我们讨论结合正则选择函数。

定义 2.31 如果对于所有的 α、β，全序 $<$ （L） Sen 都满足下述条件，则称其为正则的，

$$\alpha \not\sim \beta \ \& \ \alpha < \beta \ \Rightarrow \ [\alpha] < [\beta],$$

（其中 $[\alpha] < [\beta]$ 表示对于所有 $\alpha' \in [\alpha]$ 和 $\beta' \in [\beta]$，都有 $\alpha' < \beta'$。）

以下结论是前述定义的直接推论。

事实 2.32 设 $<$ 是 $Sen(L)$ 的全序。那么，当且仅当相应的结合选择函数 $f = \min_<$ 是正则的时，$<$ 才是正则的。

因此，下面针对 $Sen(L)$ 构造正则全序的简单方法，是对上述命题 2.30 的补充。

命题 2.33（选择公理） (i) $Sen(L)$ 存在正则全序。

(ii) 此外，对于由两两不等价的句子构成的任意集合 $A \subset Sen(L)$，以及 A 上的任意偏序 R，都存在 $Sen(L)$ 上的正则全序 $<$，使得 $R \subseteq <$。

证明。(i) 令 $Sen(L)/\sim$ 为等价类的集合 $[\alpha], \alpha \in Sen(L)$。对每个 $[\alpha] \in Sen(L)/\sim$，利用 AC 选取 $[\alpha]$ 的一个全序 $<_{[\alpha]}$。另选取 $Sen(L)/\sim$ 的一个全序 $<_1$。这些序生成 $Sen(L)$ 上的一个正则全序 $<$，定义如下:

$\alpha < \beta$ 当且仅当 $\alpha \not\sim \beta$ 且 $[\alpha] <_1 [\beta]$，或 $\alpha \sim \beta$ 且 $\alpha <_{[\alpha]} \beta$。(ii) 由于 A 的元素两两不等价，我们可以将 A 视为 $Sen(L)/\sim$ 的子集。由于 R 已经是 A 上的一个偏序，只需借助 AC 选取前述情形中的全序 $<_1$，使得 $R \subset <_1$。⊣

结合律和正则性对于一种合理的真值概念 $\models_X$ 都不可或缺，因为它必须能刻画 $|$ 的行为。一方面，缺少结合律会导致难以处理的复杂性，例如由形如 $((\alpha|\beta)|\gamma)|\delta$、$(\alpha|\beta)|(\gamma|\delta)$、$\alpha|((\beta|\gamma)|\delta)$ 等不可比句子所造成的复杂性。另一方面，正则性意味着逻辑接近性；若没有这一点，我们甚至无法证明例如 $\alpha|\beta$ 和 $\alpha|\neg\neg\beta$ 这些句子本质上相同。因此，适合采用的一类自然的选择函数是

$$Reg^* = Reg \cap Asso.$$

我们分别将相应的语义概念 $\models_{Reg^*}$、$\sim_{Reg^*}$缩写为 $\models_{Reg^*}$和$\sim_{Reg^*}$。

注意，鉴于正则性（也仅仅是鉴于正则性），我们可以写成例如 $\varphi|\top$ 和 $\varphi|\bot$，其中 $\top$ 和 $\bot$ 分别表示经典重言式和矛盾式的类。

接下来的问题是，标准联结词如何作用于 $|$，反过来又如何。具体来说，我们将考察：

(a) $\neg$能否与 $|$交换；(b) $\wedge$ 和 $\vee$ 能否对 $|$分配；(c) $|$ 能否对 $\wedge$ 和 $\vee$分配。

我们将看到，对于真值关系 $\models_{Reg^*}$，这三个问题的答案都是否定的。

关于第一个问题，可以构造一个选择函数 f，使得对于每个真值赋值 M 以及任意句子 φ、ψ，

$$\langle M, f\rangle \models_s \neg(\varphi|\psi) \leftrightarrow \neg\varphi|\neg\psi.$$

为此，只需定义 f，使得 $\overline{f}(\neg\varphi|\neg\psi) = \overline{f}(\neg(\varphi|\psi))$，或等价地，

$$f(\neg\overline{f}(\varphi), \neg\overline{f}(\psi)) = \neg f(\overline{f}(\varphi), \overline{f}(\psi)).$$

这可以通过沿着序 $\langle r(\alpha)\ r(\beta)\rangle$ 对 $f(\alpha,\beta)$ 进行归纳来实现，其中 $r(\alpha)$ 是 α 的通常秩。

然而，这样的 f supporting $\neg(\varphi|\psi) \leftrightarrow \neg\varphi|\neg\psi$ 只能作为一个反例或奇闻轶事，绝不可能刻画出一个自然的函数类。具体而言，很容易看出，这样的 f 不可能是正则的。

事实 2.34 如果 f是正则的，那么对于每个 M，都存在 φ、ψ，使得 $\langle M$、$f\rangle \not\models \neg(\varphi|\psi) \leftrightarrow \neg\varphi|\neg\psi$。因此，对于正则的 f，模式 $\neg(\varphi|\psi) \leftrightarrow \neg\varphi|\neg\psi$ 在 $\langle M$、$f\rangle$中总是假的。

证明。设 f是正则的。那么对于每个 α，$f(\neg\alpha, \neg\neg\alpha) \sim f(\neg\alpha, \alpha) = f(\alpha, \neg\alpha)$，因此 $\neg f(\alpha, \neg\alpha) \leftrightarrow f(\neg\alpha, \neg\neg\alpha)$ 是一个矛盾。因此，对于每个 M，$M \not\models \neg f(\alpha, \neg\alpha) \leftrightarrow f(\neg\alpha, \neg\neg\alpha)$，这意味着 $M \not\models \overline{f}(\neg(\alpha|\neg\alpha) \leftrightarrow \neg\alpha|\neg\neg\alpha)$，或 $\langle M, f\rangle \not\models \neg(\alpha|\neg\alpha) \leftrightarrow \neg\alpha|\neg\neg\alpha$。$\dashv$

对于上述问题 (b)，就语义 $\models_X$ 而言，答案是否定的，适用于任意 $X \subseteq Reg^*$。下面给出一些定义，以便稍后证明它们是空洞的。

定义 2.35 设 $<$ 是 $Sen(L)$ 的一个正则全序。$<$ 称为：

(a) $\wedge$-单调的，当且仅当对于所有满足 $\alpha\wedge\gamma \not< \beta\wedge\gamma$ 的 α、β、$\gamma \in Sen(L)$,

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\wedge\gamma < \beta\wedge\gamma.$$

(b) $\vee$-单调的：如果对于所有满足 $\alpha\vee\gamma \not< \beta\vee\gamma$ 的 α、β、$\gamma \in Sen(L)$，

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha\vee\gamma < \beta\vee\gamma.$$

相应地，如果 $f = \min_<$ 且 $<$ 是 $\wedge$-单调的（分别为 $\vee$-单调的），则称选择函数 $f \in Reg^*$ 是 $\wedge$-单调的（分别为 $\vee$-单调的）。

引理 2.36 (i) 如果 $<$ 是 $\wedge$-单调的，则

$$\min(\alpha\wedge\gamma, \beta\wedge\gamma) \sim \gamma \wedge \min(\alpha,\beta).$$

(ii) 如果 $<$ 是 $\vee$-单调的，则

$$\min(\alpha\vee\gamma, \beta\vee\gamma) \sim \gamma \vee \min(\alpha,\beta).$$

证明。(i) 如果 $\alpha\wedge\gamma \sim \beta\wedge\gamma$，则显然 $\min(\alpha\wedge\gamma, \beta\wedge\gamma) \sim \gamma\wedge\min(\alpha,\beta)$。因此假设 $\alpha\wedge\gamma \not< \beta\wedge\gamma$。于是 $\alpha \not< \beta$ 也成立。不失一般性，设 $\alpha < \beta$，所以 $\min(\alpha,\beta) = \alpha$。根据 $\wedge$-单调性，$\alpha\wedge\gamma < \beta\wedge\gamma$，因此 $\min(\alpha\wedge\gamma, \beta\wedge\gamma) = \alpha\wedge\gamma = \gamma\wedge\min(\alpha,\gamma)$。

（ii）类似。 ⊣

很容易给出 $\wedge$-单调性和 $\vee$-单调性的句法刻画。下面命题的证明留给读者。

引理 2.37 设 $f \in Reg^*$。则：

（i） f是 $\wedge$-单调的，当且仅当对所有 M以及所有 φ、ψ、$\sigma \in Sen(L_s)$：

$$\langle M, f\rangle \models \varphi \wedge (\psi|\sigma) \leftrightarrow (\varphi\wedge\psi)|(\varphi\wedge\sigma).$$

（ii） f是 $\vee$-单调的，当且仅当对所有 M以及所有 φ、ψ、$\sigma \in Sen(L_s)$：

$$\langle M, f\rangle \models \varphi \vee (\psi|\sigma) \leftrightarrow (\varphi\vee\psi)|(\varphi\vee\sigma).$$

由前面的引理可知，$\wedge$-单调性和 $\vee$-单调性恰好分别是 $\wedge$ 和 $\vee$在|上满足分配律的条件。然而，通过一个反例可以很容易地看出，不存在 $\wedge$-单调或 $\vee$-单调的正则函数（或序）。

命题 2.38 不存在对 $Sen(L)$ 的正则全序 $<$，使其满足 $\wedge$-单调或 $\vee$-单调。因此，不存在 $X \subseteq Reg^*$，使得模式 $\varphi\wedge(\psi|\sigma) \leftrightarrow (\varphi\wedge\psi)|(\varphi\wedge\sigma)$ 和 $\varphi\vee(\psi|\sigma) \leftrightarrow (\varphi\vee\psi)|(\varphi\vee\sigma)$ 不是 $\models_X$-重言式。

证明。假设存在对 $Sen(L)$ 的正则全序 $<$，且满足 $\wedge$-单调。令 p, q r 为原子句，使得 $p < q < r$。考虑公式 $\alpha = p \wedge r \wedge \neg q$。那么，根据 $\wedge$-单调性，$p < q$ 蕴含 $p \wedge r \wedge \neg q < q \wedge r \wedge \neg q$；或者根据正则性，$\alpha < \bot$。同理，$q < r$ 蕴含 $p \wedge q \wedge \neg q < p \wedge r \wedge \neg q$，或者 $\bot < \alpha$，这就产生了矛盾。对于 $\beta = p \vee r \vee \neg q$，我们可以类似地证明，不存在对 $<$ 的正则全序满足 $\vee$-单调。
⊣

在解决了关于 $\wedge$ 和 $\vee$ 对 $|$的分配律问题之后，我们转而讨论逆向问题：对于某个选择函数 X 类，是否有可能 $|$ 对 $\wedge$ 和/或$\vee$ 满足分配律，使得 $X \subseteq Reg^*$。关于 Reg^*，答案再次是否定的。具体如下：

命题 2.39 不存在 $Sen(L)$的正则全序 $<$，使得当 $f = \min_<$时，对每个 M，$\langle M$满足该模式

$$(*) \quad \varphi|(\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\varphi|\psi) \wedge (\varphi|\sigma).$$

因此，不存在 $X \subseteq Reg^*$ 使得（*）成为 $\models_X$-重言式。对偶模式同样如此

$$(**) \quad \varphi|(\psi \vee \sigma) \leftrightarrow (\varphi|\psi) \vee (\varphi|\sigma).$$

证明。为导出矛盾，假设存在 $Sen(L)$的正则全序 $<$，使得当 $f = \min_<$时，（$*$）在所有模型 $\langle M, f\rangle$中都为真。固定一个原子句子 p，其属于 L。根据正则性，我们有 $p < \bot$ 或 $\bot < p$。下面分别考察这两种情形的一些推论。

(i) 令 $p < \bot$。选取某个 $q \neq p$ 和一个 M，使得 $M \models p \wedge q$。然后

$$\langle M, f\rangle \models_s p|(q \wedge \neg q) \leftrightarrow (p|q) \wedge (p|\neg q),$$

or

$$\langle M, f\rangle \models_s p|\bot \leftrightarrow (p|q) \wedge (p|\neg q). \tag{9}$$

由于 $p < \bot$ 和 $M \models p$，等价式 (9) 的左侧在$\langle M, f\rangle$中为真。因此，等价式的右侧也为真。由于 $M \models p \wedge q$，合取项 $p|q$ 为真；而合取项 $p|\neg q$ 为真的话，必然意味着 $p < \neg q$，因为 $M \models q$。接着选取 N使得 $N \models p \wedge \neg q$。我们还得到

$$\langle N, f\rangle \models_s p|\bot \leftrightarrow (p|q) \wedge (p|\neg q). \tag{10}$$

同样，等价式 (10) 的左侧在 $\langle N, f\rangle$中为真。因此右侧也为真。由于 $N \models p \wedge \neg q$，合取项 $p|\neg q$ 成立。若要使合取项 $p|q$ 也成立，我们必须有 $p < q$，因为 $N \models \neg q$。综合以上两点，我们得出：如果字母 p, q 取遍原子句，那么

$$(\forall p \neq q)(p < \bot \Rightarrow p < q \ \& \ p < \neg q). \tag{11}$$

(ii) 现在令 $\bot < p$。再次选取某个 $q \neq p$ 和一个 M，使得 $M \models p \wedge q$。于是（9）再次成立，但这次等价式（9）的左端为假 $\langle M, f\rangle$。因此右端也为假；由于 $M \models p$，这必然意味着 $\neg q < p$。然后选取 N，使得 $N \models p \wedge \neg q$。（10）再次成立，且其中等价式的左端为假。右端也为假，而这只有在 $q < p$ 时才成立，因为 $N \models \neg q$。因此，由这两个事实我们得出

$$(\forall p \neq q)(\bot < p \Rightarrow q < p \ \& \ \neg q < p). \tag{12}$$

现在，由于至少存在三个不同的原子 p、q、r，并且 p、q、r、$\bot$ 按照 $<$ 线性有序，所以其中至少有两个位于 $\bot$ 的左侧，或位于 $\bot$ 的右侧。也就是说，存在 p、q，使得 p、$q < \bot$，或者 $\bot < p$、q。如果 p、$q < \bot$，则（11）推出 $p < q$、$p < \neg q$、$q < p$ 和 $q < \neg p$，这就产生了矛盾。如果 $\bot < p$、q，则（12）推出 $q < p$、$\neg q < p$、$p < q$ 和 $\neg p < q$，再次产生矛盾。这就完成了证明：对于任意 $X \subseteq Reg^*$，(*) 都不可能是一个 $\models_X$-重言式。至于模式（**），我们考察以下实例

$$p|(q \vee \neg q) \leftrightarrow (p|q) \vee (q|\neg q),$$

即，

$$p|\top \leftrightarrow (p|q) \vee (q|\neg q),$$

对于原子句 p、q，并通过考察 $p < \top$ 和 $\top < p$ 的情况，采用与之前类似的论证。⊣

2.4 ¬-递减性

关于 $\neg$ 相对于 $|$的行为，仍有一个问题。正如我们在事实 2.34 中所见，在具有正则 f 的模型 $\langle M$ 中，$\neg$ 不能与 $|$ 交换。等价地，若 $f \in Reg^*$ 且 $f = \min_<$，则对于所有 α、β，$\neg$ 不能是“递增”的，也就是说，不能满足 $\alpha < \beta \Leftrightarrow \neg\alpha < \neg\beta$。不过它可以是“递减”的，而事实证明这是一种有用的性质。

定义 2.40 $<$ 称为 $\neg$-递减的，若对于所有满足 $\alpha \not\sim \beta$ 的 α、$\beta \in Sen(L)$，

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \neg\beta < \neg\alpha.$$

因此，若选择函数 $f \in Reg^*$ 满足 $\neg$-递减，即称其为 $\neg$-递减的，当且仅当 $f = \min_<$ 且 $<$ 是 $\neg$-递减的。

引理 2.41 $<$ 是 $\neg$-递减的，当且仅当对所有 $\alpha \not\sim \beta$，

$$\neg \min(\neg\alpha, \neg\beta) \sim \max(\alpha, \beta).$$

证明。设 $<$ 是 $\neg$-递减的。则对于任意 $\alpha \not\sim \beta$，$\alpha < \beta \Leftrightarrow \neg\beta < \neg\alpha$，因此，$\min(\neg\alpha, \neg\beta) = \neg \max(\alpha, \beta)$，从而 $\neg \min(\neg\alpha, \neg\beta) \sim \max(\alpha, \beta)$。

反之，假设 $<$ 不是 $\neg$-递减的。那么存在 α、β 使得 $\alpha \not\sim \beta$、$\alpha < \beta$ 且 $\neg\alpha < \neg\beta$。但此时 $\neg \min(\neg\alpha, \neg\beta) = \neg\neg\alpha \not\sim \beta = \max(\alpha, \beta)$。⊣

我们还可以给出 $\neg$-递减性的句法刻画。

定理 2.42 设 $f \in Reg^*$。则 f 是 $\neg$-递减的，当且仅当对于每个 M 以及任意 φ、ψ，

$$\langle M, f\rangle \models_s \varphi \wedge \neg\psi \to (\varphi|\psi \leftrightarrow \neg\varphi|\neg\psi).$$

证明。“⇒”：设 f 是 $\neg$-递减的，且 $f = \min_<$。设 M 和 φ、ψ满足 $\langle M$、$f\rangle \models_s \varphi \wedge \neg\psi$，即 $M \models \overline{f}(\varphi) \wedge \neg\overline{f}(\psi)$。只需证明 $\langle M$、$f\rangle \models_s (\varphi|\psi \leftrightarrow \neg\varphi|\neg\psi)$，或等价地，

$$M \models f(\overline{f}(\varphi), \overline{f}(\psi)) \leftrightarrow f(\neg\overline{f}(\varphi), \neg\overline{f}(\psi)).$$

如果令 $\overline{f}(\varphi) = \alpha$，并令 $\overline{f}(\psi) = \beta$，那么上述内容相当于假设$M \models \alpha \wedge \neg\beta$，并得出 $M \models f(\alpha, \beta) \leftrightarrow f(\neg\alpha, \neg\beta)\}$，或

$$M \models \min(\alpha, \beta) \leftrightarrow \min(\neg\alpha, \neg\beta).$$

但由于 $M \models \alpha \wedge \neg\beta$，$M \models \min(\alpha, \beta)$ 蕴含 $\min(\alpha, \beta) = \alpha$。然后，由于$<$是 $\neg$-递减的，$\min(\neg\alpha, \neg\beta) = \neg\beta$。因此 $M \models \min(\neg\alpha, \neg\beta)$。所以$M \models \min(\alpha, \beta) \to \min(\neg\alpha, \neg\beta)$。逆向蕴含的证明类似。

“⇐”：设 f 为非 $\neg$ 递减的，且 $f = \min_<$，并设 $\alpha \not\sim \beta$ 满足 $\alpha < \beta$ 和 $\neg\alpha < \neg\beta$。不失一般性，存在 M 使得 $M \models \neg\alpha \wedge \beta$。于是 $M \not\models \min(\alpha, \beta)$，因此 $\langle M, f\rangle \not\models_s \alpha|\beta$，而

$M \models \min(\neg\alpha, \neg\beta)$，或者 $\langle M, f\rangle \models_s \neg\alpha|\neg\beta$。所以 $\langle M, f\rangle \not\models (\alpha|\beta \leftrightarrow \neg\alpha|\neg\beta)$，因此

$$\langle M, f\rangle \not\models \neg\alpha \wedge \beta \rightarrow (\alpha|\beta \leftrightarrow \neg\alpha|\neg\beta).$$

因此 $\langle M$、 $f\rangle$ 不满足模式 $\varphi \wedge \neg\psi \rightarrow (\varphi|\psi \leftrightarrow \neg\varphi|\neg\psi)$。 $\dashv$

接下来，让我们确认 $\neg$-递减的全序确实存在。

定理 2.43 存在 $Sen(L)$ 的正则 $\neg$-递减全序，因此存在 L 的正则 $\neg$-递减选择函数。

证明。存在一种构造 $Sen(L)$ 的正则且 $\neg$-递减全序的一般方法，该方法使用选择公理。具体如下。令 $P = \{\{[\alpha], [\neg\alpha]\} : \alpha \in Sen(L)\}$。利用选择公理为 P 选取一个选择函数 F，并令 $A = \bigcup F$“P以及 $B = Sen(L) - A$。 A、 B 都是$\sim$-饱和的，即 $\alpha \in A \Rightarrow [\alpha] \subset A$，对 B 也同样如此。如命题 2.33 的证明中那样，选取 A 的一个正则全序 $<_1$。根据 A 的定义，对于每个 $\alpha \in Sen(L)$，显然有 B。

$$\alpha \in A \Leftrightarrow \neg\alpha \in B,$$

因此， $<_1$ 通过以下设置在 B 上诱导出一个正则全序 $<_2$

$$\alpha <_2 \beta \Leftrightarrow \neg\beta <_1 \neg\alpha.$$

然后将 $<$ 定义为 $Sen(L)$，如下所示：当且仅当 $\alpha < \beta$：

$\alpha \in A$ 和 $\beta \in B$，或α、

$\beta \in A$ 和 $\alpha <_1 \beta$，或α、

$\beta \in B$ 和 $\alpha <_2 \beta$。

容易验证， $<$是 $Sen(L)$ 上的一个全正则且 $\neg$-递减序。$\dashv$

我们还可以进一步证明，每个正则的 $\neg$-递减全序都是通过定理 2.43 的一般方法构造的。下面给出一些定义。若集合 $X \subset Sen(L)$ 对每一对相反句子 $\{\alpha, \neg\alpha\}$ X 恰好包含其中一个，则称其为选择性的。还记得，若对每个 α， $\alpha \in X \Rightarrow [\alpha] \subset X$，则 X 是$\sim$-饱和的。请注意，选择性且 $\sim$-饱和集合的常见例子是一致且完备的集合 $\Sigma \subset Sen(L)$（以及它们的补集 $Sen(L) - \Sigma$）。然而，并非每个选择性且 $\sim$-饱和的集合都属于这类。例如，证明 2.43 中的集合 A， B 是选择性且 $\sim$-饱和的，并构成 $Sen(L)$ 的一个划分。

此外， A 是 $\langle Sen(L)\ <\rangle$ 的初始段，而 B 是其末段。我们将看到，对于每个正则的 $\neg$-递减全序，都存在这样的划分。

命题 2.44 设 $<$ 是 $Sen(L)$ 上一个正则的 $\neg$-递减全序。那么 $Sen(L)$ 可分成两个 $\sim$-饱和集合 I 和 J，它们是选择性的，因此

$$\alpha \in I \Leftrightarrow \neg\alpha \in J,$$

以及 $I < J$，也就是说， I 是 $<$的初始段，而 J 是其末段。

证明。设 $<$ 是 $Sen(L)$ 上一个正则且 $\neg$-递减的全序。若初始段中任意一对 $\{\alpha, \neg\alpha\}$， I至多包含一个元素，我们就称 $<$ 的这个初始段是弱选择性的。我们首先断言， $<$存在弱选择性的初始段。注意，如果对某个 α，$(\forall\beta)(\alpha < \beta \vee \alpha < \neg\beta)$ 成立，那么初始段 $\{\beta\colon\ \beta \leq \alpha\}$ 是弱选择性的。因此，反设不存在弱选择性的初始段，则

$$\forall\alpha\exists\beta(\beta \leq \alpha \wedge \neg\beta \leq \alpha). \tag{13}$$

假设 (13) 成立，并固定某个 α。取 β 使得 $\beta \leq \alpha$ 且 $\neg\beta \leq \alpha$。由 $\neg$-递减性可知，$\neg\alpha \leq \neg\beta$。因此 $\neg\alpha < \alpha$。现在将 (13) 应用于 $\neg\alpha$，得到 γ 使得 $\gamma \leq \neg\alpha$ 且 $\neg\gamma \leq \neg\alpha$。由 $\neg$-递减性可知， $\neg\neg\alpha \leq \neg\gamma$。于是 $\neg\neg\alpha \leq \neg\alpha$，并且由正则性可知， $\alpha \leq \neg\alpha$。但这与 $\neg\alpha < \alpha$ 矛盾。

因此， $<$存在弱选择性初始段。取所有此类初始段的并集，我们得到最大弱选择性初始段I。显然， I 是选择性的，也就是说，对于每一对 $\{\alpha, \neg\alpha\}$，其中恰有一个元素属于它。事实上，反设不然。那么存在 α，使得要么 $I < \alpha < \neg\alpha$，要么 $I < \neg\alpha < \alpha$。假设前者成立，后者的证明类似。但此时存在 β，使得 $I < \{\beta, \neg\beta\} < \alpha < \neg\alpha$，因为否则，段 $\{\gamma\colon\ \gamma \leq \alpha\}$ 就会是一个大于 I的弱选择性段，这与 I的极大性矛盾。现在，$\{\beta, \neg\beta\} < \alpha < \neg\alpha$意味着 $\beta < \alpha$ 且 $\neg\beta < \neg\alpha$，这与$<$的 $\neg$-递减性矛盾。

此外，设 $J = \{\neg\alpha\colon\ \alpha \in I\}$。则 J 是一个最大选择性末段，$I < J$ 且 $I \cap J = \emptyset$。为证明 I（从而 J）是 $\sim$-饱和的，设 $\alpha \in I$。首先假设 α 不是 I的最大元素，于是存在 $\beta \in I$ 使得 $\alpha < \beta$。根据正则性， $[\alpha] < \beta$。因此 $[\alpha] \subset I$。接下来假设 α 是 I的最大元素。那么 α 必然也是 $[\alpha]$ 的最大元素；否则， $I \cup [\alpha] \supsetneq I$ 且 $I \cup [\alpha]$ 是选择性的，这与 I 的极大性相矛盾。因此同样地， I 是 $\sim$- 饱和的。

剩下需要证明 $I \cup J = Sen(L)$。假设 $\alpha \notin I$。由于 I 是选择性的，$\neg\alpha \in I$，因此 $\neg\neg\alpha \in J$。由于 J 是 $\sim$-饱和的，$\alpha \in J$。于是 $I \cup J = Sen(L)$。⊣

因此，正则 $\neg$-递减函数构成了一个比 Reg^* 更强的自然选择函数类。令

$$Dec = \{f \in Reg^* : f \text{ is } \neg\text{-decreasing}\}.$$

我们分别用 $\models_{Dec}$ 和 $\sim_{Dec}$ 缩写相应的语义概念 $\models_{Dec}$ 和 $\sim_{Dec}$。

2.5 对偶联结词

每个二元或一元逻辑运算与否定结合时，都会产生一个对偶运算。$|$ 的对偶是

$$\varphi \circ \psi := \neg(\neg\varphi|\neg\psi)$$

对所有 φ，$\psi \in Sen(L_s)$。

一个自然的问题是：对于真关系 $\models_X$，运算 $|$ 和 $\circ$ 是否分别对其对偶运算满足分配律；也就是说，是否存在一个函数类 X，使得

$$\models_X \varphi \circ (\psi|\sigma) \leftrightarrow (\varphi \circ \psi)|(\varphi \circ \sigma) \tag{14}$$

and

$$\models_X \varphi|(\psi \circ \sigma) \leftrightarrow (\varphi|\psi) \circ (\varphi|\sigma) \tag{15}$$

是 X-重言式。(14) 和 (15) 互为对偶且彼此等价，因为对 (14) 两边取否定即可得到 (15)，反之亦然。

命题 2.45 存在 α、β、γ、M 和 $f \in Reg^*$（f 非-$\neg$-递减），使得

$$\langle M, f\rangle \not\models_s \alpha \circ (\beta|\gamma) \leftrightarrow (\alpha \circ \beta)|(\alpha \circ \gamma).$$

证明。取 α, β, γ，使得 $\alpha \not\models \gamma, \gamma \not\sim \neg\alpha$，并取 M，使得 $M \models \alpha \wedge \neg\gamma$。然后，我们很容易找到 $Sen(L)$ 的一个正则全序，使得$\neg\alpha < \neg\beta$，$\neg\gamma < \neg\alpha, \gamma < \alpha$ 和 $\beta < \gamma$。令 $f = \min_< = \min$。根据定义，$\alpha \circ(\beta|\gamma) = \neg(\neg\alpha|\neg(\beta|\gamma))$，且 $(\alpha \circ \beta)|(\alpha \circ \gamma) = \neg(\neg\alpha|\neg\beta)|\neg(\neg\alpha|\neg\gamma))$。因此

$$\overline{f}(\alpha \circ (\beta|\gamma)) = \overline{f}(\neg(\neg\alpha|\neg(\beta|\gamma)) = \neg\overline{f}(\neg\alpha|\neg(\beta|\gamma)) = \neg f(\neg\alpha, \neg f(\beta, \gamma)) =$$

$$\neg\min(\neg\alpha, \neg\min(\beta,\gamma)) = \neg\min(\neg\alpha,\neg\beta) = \neg\neg\alpha.$$

另一方面，

$$\overline{f}((\alpha\circ\beta)|(\alpha\circ\gamma)) = \overline{f}(\neg(\neg\alpha|\neg\beta)|\neg(\neg\alpha|\neg\gamma)) = f(\neg f(\neg\alpha,\neg\beta),\neg f(\neg\alpha,\neg\gamma)) =$$

$$\min(\neg\min(\neg\alpha,\neg\beta),\neg\min(\neg\alpha,\neg\gamma)) = \min(\neg\neg\alpha,\neg\neg\gamma) = \neg\neg\gamma,$$

其中最后一个等式是由于 $\min(\alpha,\gamma) = \gamma$ 和 $<$ 是正则的。因此 $M \models \overline{f}(\alpha\circ(\beta|\gamma))$ 且 $M \not\models \overline{f}((\alpha\circ\beta)|(\alpha\circ\gamma))$。因此 $\langle M、 f\rangle \models_s \alpha\circ(\beta|\gamma)$ 和 $\langle M、 f\rangle \not\models_s (\alpha\circ\beta)|(\alpha\circ\gamma)$。⊣

注意，在前面的反例中，我们有 $\gamma < \alpha$ 和 $\neg\gamma < \neg\alpha$，因此序 $<$ 不是 $\neg$-递减的。下面我们将看到，如果 f 是 $\neg$-递减的，那么在 $\langle M、 f\rangle$ 中 $|$ 和 $\circ$，它们彼此都满足分配律。

命题 2.46 如果 $f \in Reg^*$ 是 $\neg$-递减的，那么对于所有的 $M、\ \varphi、\ \psi、\ \sigma$，

$$\langle M,f\rangle \models_s \varphi\circ(\psi|\sigma) \leftrightarrow (\varphi\circ\psi)|(\varphi\circ\sigma),$$

and

$$\langle M,f\rangle \models_s \varphi|(\psi\circ\sigma) \leftrightarrow (\varphi|\psi)\circ(\varphi|\sigma).$$

证明。上述等价关系彼此对偶，因此只需证明其中第一个。具体而言，只需证明：如果 $f \in Reg^*$ 和f 是 $\neg$-递减的，那么

$$\overline{f}(\varphi\circ(\psi|\sigma)) \sim \overline{f}((\varphi\circ\psi)|(\varphi\circ\sigma)).$$

固定这样一个 f，并令 $<$ 为正则的、 $\neg$-递减序，使得$f = \min_< = \min$。若设 $\overline{f}(\varphi) = \alpha$、 $\overline{f}(\psi) = \beta$、 $\overline{f}(\sigma) = \gamma$，将 $\circ$ 用 $|$ 表示，并用 $<$ 替换 f，则上述等价式可写为：

$$\neg\min(\neg\alpha,\neg\min(\beta,\gamma)) \sim \min(\neg\min(\neg\alpha,\neg\beta),\neg\min(\neg\alpha,\neg\gamma)). \qquad (16)$$

若 $\alpha \sim \beta \sim \gamma$，显然 (16) 成立。假设 $\alpha \sim \beta$ 且 $\alpha \not\sim \gamma$。于是，根据正则性，(16) 化为

$$\neg\min(\neg\alpha,\neg\min(\alpha,\gamma)) \sim \min(\alpha,\neg\min(\neg\alpha,\neg\gamma)).$$

为验证这一点，我们考虑 $\alpha < \gamma$ 和 $\gamma < \alpha$ 的情形。例如，设 $\alpha < \gamma$。根据 $\neg$-递减性， $\neg\gamma < \neg\alpha$，因此上述关系的两边都 $\sim$ 于 α。同样地，如果 $\gamma < \alpha$。

因此，只需在 $\alpha \not\sim \beta$ 和 $\alpha \not\sim \gamma$ 时证明 (16)。由引理 2.41， $\neg\min(\neg\alpha)$、$\neg\beta \sim \max(\alpha)$、$\beta$，所以 (16) 可写为

$$\max(\alpha, \min(\beta, \gamma)) \sim \min(\max(\alpha, \beta), \max(\alpha, \gamma)). \tag{17}$$

我们不知道是否存在某种更优雅的直接证明（也就是说，不用分类讨论）来证明（17）。因此，我们通过分类讨论来验证它。

情况 1。假设 $\alpha \leq \min(\beta, \gamma)$。那么 $\max(\alpha, \min(\beta, \gamma)) = \min(\beta, \gamma)$。此外， $\alpha \leq \min(\beta, \gamma)$ 意味着 $\max(\alpha, \beta) = \beta$，并且 $\max(\alpha, \gamma) = \gamma$。因此，（17）的两边都 $\sim$ 等于 $\min(\beta, \gamma)$。

情况 2。假设 $\min(\beta, \gamma) < \alpha$。那么 $\max(\alpha, \min(\beta, \gamma)) = \alpha$。要确定（17）的右边，假设 $\beta \leq \gamma$，于是我们得到以下几个子情况。

（2*a*） $\beta < \alpha \leq \gamma$：那么 $\max(\alpha, \beta) = \alpha$，$\max(\alpha, \gamma) = \gamma$，因此 $\min(\max(\alpha, \beta), \max(\alpha, \gamma)) = \alpha$，故（17）成立。

(2*b*) $\beta \leq \gamma < \alpha$：则 $\max(\alpha, \beta) = \max(\alpha, \gamma) = \alpha$。因此

$$\min(\max(\alpha, \beta), \max(\alpha, \gamma)) = \alpha,$$

从而（17）再次成立。

情形 3。假设 $\min(\beta, \gamma) < \alpha$，因此 $\max(\alpha, \min(\beta, \gamma)) = \alpha$，但现在假设 $\gamma < \beta$。于是我们有以下子情形：

(3*a*) $\gamma < \alpha \leq \beta$：则 $\max(\alpha, \beta) = \beta$ 且 $\max(\alpha, \gamma) = \alpha$。因此 $\min(\max(\alpha, \beta), \max(\alpha, \gamma)) = \alpha$，即（17）成立。

(3*b*) $\gamma < \beta \leq \alpha$：则 $\max(\alpha, \beta) = \alpha$ 且 $\max(\alpha, \gamma) = \alpha$。因此

$$\min(\max(\alpha, \beta), \max(\alpha, \gamma)) = \alpha.$$

命题的证明至此完成。 ⊣.

推论 2.47 模式

$$\varphi \circ (\psi|\sigma) \leftrightarrow (\varphi \circ \psi)|(\varphi \circ \sigma) \tag{18}$$

（或其对偶）以及

$$\varphi \wedge \psi \rightarrow (\varphi|\psi \leftrightarrow \neg\varphi|\neg\psi) \tag{19}$$

是等价的，并且其中每一个都是正则 $\neg$-递减序（以及相应选择函数）的句法刻画。

证明。(18) 与 (19) 作为模式的等价性，可由命题 2.45、2.46 得出；也可由引理 2.41 得出，因为引理 2.41 表明 (19) 刻画了正则 $\neg$-递减序。⊣

在句子中交换 | 和 ∘，便得到 L_s 中句子的对偶性，也就是说，得到一个按如下方式归纳定义的映射 $\varphi \mapsto \varphi^d$：

$\varphi^d = \varphi$, for classical φ,
$(\varphi \wedge \psi)^d = \varphi^d \wedge \psi^d$,
$(\neg\varphi)^d = \neg\varphi^d$,
$(\varphi|\psi)^d = \varphi^d \circ \psi^d$.

借助对偶序 $<^d$ 和对偶选择函数 f^d，可以毫不费力地证明以下"对偶定理"，它是布尔对偶性的类比：

定理 2.48 对于每个 $\varphi \in Fml(L_s)$，$\models_{Reg^*} \varphi$ 当且仅当 $\models_{Reg^*} \varphi^d$。

3 公理化。可靠性与完备性结果

A 命题叠加逻辑（简称 PLS）通常由两部分组成：语法部分，即一个形式系统 K，由公理模式和推理规则组成；以及语义部分，主要由定义在 $Sen(L)$ 上的一个选择函数集合 $X \subseteq \mathcal{F}$ 组成。[11] 让我们从后者开始。

语义部分 X 诱导出真关系 $\models_X$，即结构类 $\langle M, f\rangle$，其中 M：$Sen(L) \to \{0,1\}$ 和 $f \in X$，相对于该关系定义了 X- 重言式和 X- 逻辑后承。对于每个$X \subseteq \mathcal{F}$，令

$$Taut(X) = \{\varphi \in Sen(L_s) : \models_X \varphi\}$$

是关于 $\models_X$ 的 L_s 重言式集合。再令 $Taut$ 为经典重言式的集合。则对于任意的 X、$Y \subseteq \mathcal{F}$,

$$X \subseteq Y \;\Rightarrow\; Taut \subseteq Taut(Y) \subseteq Taut(X).$$

下面这个简单事实将在后文用到，但它本身也显然值得关注。

[11]对于每个逻辑系统，例如命题逻辑，情况或多或少都是如此。尽管我们常常将命题逻辑等同于其逻辑公理集合和肯定前件式这一推理规则，但我们默认将其一方面视为一组公理模式 Ax(PL) 及推理规则 MP，另一方面视为自然布尔语义。具体而言，Ax(PL) 将由以下模式构成：(i) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ (ii) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ (iii) $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \alpha)$。

引理 3.1 对每个 $X \subseteq \mathcal{F}$，集合 $Taut(X)$ 都是可判定的（即可计算的）。

证明。根据定义，$\models_s$, $\varphi \in Taut(X)$ 当且仅当 $(\forall f \in X)(\overline{f}(\varphi) \in Taut)$（其中 $Taut$ 是命题逻辑的重言式集合），即,

$$\varphi \in Taut(X) \Leftrightarrow \{\overline{f}(\varphi) : f \in X\} \subset Taut.$$

现在给定 φ 和 f，坍缩 $\overline{f}(\varphi)$ 可由 φ 得到：通过归纳地将 φ 的每个子公式 $\psi_1|\psi_2$ 替换为 $\overline{f}(\psi_1)$ 或 $\overline{f}(\psi_2)$。因此显然，对于每个 φ，所有可能的坍缩 $\{\overline{f}(\varphi) : f \in X\}$ 构成的集合都是有限的。因此，由于 $Taut$ 是可判定的，$\{\overline{f}(\varphi) : f \in X\} \subset Taut$ 是否成立也是可判定的。⊣

我们尤其关注以下集合

$$Taut(\mathcal{F}) \subseteq Taut(Reg) \subseteq Taut(Reg^*) \subseteq Taut(Dec), \tag{20}$$

（以及 $Taut(Asso) \subseteq Taut(Reg^*)$），它们对应于上文讨论的真值关系。由 3.1 可知，这些集合是可判定的。问题在于，这些重言式集合是否都能由递归集的公理和推理规则公理化。我们将看到答案是肯定的。

下面来介绍形式系统 K。每个 K 都由一组公理 $\mathsf{Ax}(K)$ 和一组推理规则 $\mathsf{IR}(K)$ 构成。此外，K 的公理和规则扩展了命题逻辑 PL 的公理和规则，即,

$$\mathsf{Ax}(K) = \mathsf{Ax}(\mathrm{PL}) + \{S_i : i \leq n\}, \text{ and } MP \in \mathsf{IR}(K),$$

其中，S_i 是下面将要讨论的、用于表达 $|$ 基本性质的一些模式。给定 $X \subseteq \mathcal{F}$，为了通过形式系统 K 对 $Taut(X)$ 进行公理化，显然，K 的公理必须是 X-重言式，即,

$$\mathsf{Ax}(K) \subseteq Taut(X).$$

对于任意这样的 $X \subseteq \mathcal{F}$ 和 K，我们得到一个扩展命题逻辑 PL 的逻辑，称为关于 X 和 K 的命题叠加逻辑，记作

$$\mathrm{PLS}(X, K).$$

给定如上所述的形式系统 K 以及 $\Sigma \cup \{\varphi\} \subset Sen(L)$，$K$ 的（希尔伯特式）证明 φ 从 Σ 开始的定义与 PL 中的证明相同（作相应修改），即，它是一个句子序列 σ_1、.....、σ_n，使得 $\sigma_n = \varphi$ 并且

每个 σ_i 要么属于 Σ，要么属于 Ax(K)，要么根据 IR(K) 中的推理规则由此前的句子推导得到。我们记作

$$\Sigma \vdash_K \varphi$$

存在一个从 Σ出发的 K证明 φ 这一事实。特别是对于经典语句，即 $\Sigma \cup \{\alpha\} \subseteq Sen(L)$，显然

$$\Sigma \vdash_{PL} \alpha \;\Leftrightarrow\; \Sigma \vdash_K \alpha,$$

其中$\vdash_{PL}$表示 PL 中的可证明性。若满足 $\Sigma \nvdash_K \bot$，则称 Σ 是 K一致的。对于 $\Sigma \subset Sen(L)$，同样有，

$$\Sigma \text{ is } K\text{-consistent} \;\Leftrightarrow\; \Sigma \text{ is consistent.}$$

回顾一下，形式系统 K （或其证明关系 $\vdash_K$）满足演绎定理（DT），是指对于所有 Σ、 φ 和 ψ,

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_K \psi \;\Rightarrow\; \Sigma \vdash_K \varphi \to \psi. \tag{21}$$

众所周知，如果 K 的唯一推理规则是肯定前件规则（或许还包括全称化规则），那么 DT 对 $\vdash_K$成立。但在包含其他推理规则的系统中，DT 往往不成立。下面我们将考虑添加了一个额外推理规则的形式系统 K 。因此，之后我们需要考察 DT 的有效性。

定义 3.2 若存在某个针对 L 的真值赋值 M以及某个 $f \in X$，使得 $\langle M, f\rangle \models_s \Sigma$, 则称集合 $\Sigma \subset Sen(L_s)$是 X可满足的。

众所周知，某种逻辑的可靠性与完备性定理有两种不同的表述形式；根据其语义以及演绎定理的有效性，这两种形式并不总是等价。对于逻辑 PLS(X, K)，这两种形式分别记为可靠性的 ST1 和 ST2，以及完备性的 CT1 和 CT2，具体如下:

(ST1) $$\Sigma \vdash_K \varphi \;\Rightarrow\; \Sigma \models_X \varphi,$$

(ST2) $$\Sigma \text{ is } X\text{-satisfiable} \;\Rightarrow\; \Sigma \text{ is } K\text{-consistent}$$

(CT1) $$\Sigma \models_X \varphi \;\Rightarrow\; \Sigma \vdash_K \varphi,$$

(CT2) $$\Sigma \text{ is } K\text{-consistent} \;\Rightarrow\; \Sigma \text{ is } X\text{-satisfiable.}$$

关于 PLS(X, K) 中 ST1 与 ST2 以及 CT1 与 CT2 之间的关系，以下结论成立。

事实 3.3 (i) 对于每个 X

$$\Sigma \not\models_X \varphi \ \Rightarrow \Sigma \cup \{\neg\varphi\} \ \textit{is } X\textit{-satisfiable.} \tag{22}$$

因此，对于每个 PLS(X, K)，(ST1) $\Leftrightarrow$ (ST2) 都成立。

(ii) 对于每个 PLS(X, K)，(CT1) $\Rightarrow$ (CT2) 都成立。若 $\vdash_K$ 满足 DT，则逆命题也成立，即 (CT1) $\Leftrightarrow$ (CT2)。

证明。(i) (22) 由 $\models_X$ 的定义以及真值具有二值性这一事实立即得出。现在，(ST1) $\Rightarrow$(ST2) 显然成立。反过来，假设 ST2 且 $\Sigma \not\models_X \varphi$。由 (22)，$\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ 是 X-可满足的。由 ST2，$\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ 是 K-相容的，因此 $\Sigma \not\vdash_K \varphi$。

(ii) (CT1) $\Rightarrow$ (CT2) 也显然成立。反过来，假设 CT2、DT 和 $\Sigma \not\vdash_K \varphi$。众所周知，由 DT 可知，后者等价于 $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$的 K-相容性。由 CT2，$\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ 是 X-可满足的。因此 $\Sigma \not\models_X \varphi$。⊣

鉴于事实 3.3 (i)，我们不再需要区分 ST1 和 ST2，而可以简单地称其为“可靠”逻辑。

然而，CT1 与 CT2 之间的区别仍然存在。考虑 DT 的语义对应物即可说明这一点。给定一个类 $X \subseteq \mathcal{F}$，我们将以下蕴涵称为：

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \models_X \psi \ \Rightarrow \ \Sigma \models_X \varphi \to \psi \tag{23}$$

关于 X 的语义演绎定理（或简称 SDT）。下面通过 CT1 给出 DT 与 SDT 之间的关系。

事实 3.4 对于每个 $X \subseteq \mathcal{F}$，关于 X 的 SDT 都成立。这意味着，如果逻辑 PLS(X, K) 是可靠的并满足 CT1，那么 K 满足 DT。

证明。对于每个 $X \subseteq \mathcal{F}$，SDT 成立是语义 $\models_X$ 的一个易于验证的推论。现在假设 PLS(X, K) 是可靠的（即满足（等价地）ST1 和 ST2），满足 CT1，并且 $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_K \psi$。由 ST1 可得 $\Sigma \cup \{\varphi\} \models_X \psi$。根据 SDT (23)，我们有 $\Sigma \models_X \varphi \to \psi$。于是 CT1 蕴含 $\Sigma \vdash_K \varphi \to \psi$，正如所要求的。⊣

接下来，我们将列出关于 $|$的一些具体公理模式（也简称为公理）。其中某些嵌套组合将公理化上一节中讨论的真值关系 $\models_{\mathcal{F}}$、$\models_{Reg}$、$\models_{Reg^*}$ 和 $\models_{Dec}$。

(S_1) $\varphi \wedge \psi \to \varphi|\psi$ (S_2)
$\varphi|\psi \to \varphi \vee \psi$ (S_3) $\varphi|\psi \to \psi|\varphi$
(S_4) $(\varphi|\psi)|\sigma \to \varphi|(\psi|\sigma)$ (S_5)
$\varphi \wedge \neg\psi \to (\varphi|\psi \leftrightarrow \neg\varphi|\neg\psi)$

我们将把上一节讨论的四种基本真值关系的公理化分为两个部分。首先考虑依赖于全部函数类 $\mathcal{F}$ 的基本真值关系 $\models_{\mathcal{F}}$，然后再考虑其余更严格的关系 $\models_{Reg}$、$\models_{Reg^*}$ 和 $\models_{Dec}$。原因在于，关系 $\models_{\mathcal{F}}$ 可以通过一个仅以 MP 作为唯一推理规则的形式系统来公理化，而其余系统则需要加入第二条规则的形式系统。这一要求使这些系统复杂得多。

3.1 真关系 $\models_{\mathcal{F}}$ 的公理化

本节讨论关系 $\models_{\mathcal{F}}$，并证明使用上文列出的前三条公理 S_1-S_3 以及肯定前件式（MP），可以对其进行可靠且完备的公理化。我们将这一形式系统称为 K_0。即

$$\mathsf{Ax}(K_0) = \mathsf{Ax}(\mathrm{PL}) + \{S_1, S_2, S_3\} \text{ and } \mathsf{IR}(K_0) = \{MP\}. \tag{24}$$

注意，S_1 和 S_2 与 PL 的公理相结合，可以在 K_0 中证明 $\varphi|\varphi \leftrightarrow \varphi$。

很容易看出，逻辑 PLS($\mathcal{F}, K_0$) 是可靠的。也就是说，我们有以下更一般的事实。

定理 3.5 设 $X \subseteq \mathcal{F}$。如果 K 是一个系统，使得 Ax(K) $\subset Taut(X)$ 且 IR(K) = { 肯定前件规则 }，那么 PLS(X, K) 是可靠的。

证明。设 X, K 如所述，并且 $\Sigma \vdash_K \varphi$。设 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$，其中 $\varphi_n = \varphi$，是一个 K-证明，证明 φ。按照惯例，我们通过对 i 进行归纳，证明对于每个 $1 \leq i \leq n$ 都有 $\Sigma \models_X \varphi_i$。给定 i，假设该断言对所有 $j < i$ 都成立，并设 $\langle M, f\rangle \models_s \Sigma$，其中某个赋值 M 和 $f \in X$。我们证明 $\langle M, f\rangle \models_s \varphi_i$。如果 $\varphi_i \in \Sigma$，这是显然的。如果 $\varphi_i \in$ Ax(K)，那么 $\langle M, f\rangle \models_s \varphi_i$，因为根据假设，Ax($K$) $\subset Taut(X)$ 且 $f \in X$。否则，由于肯定前件规则是 K 的唯一推理规则，φ_i 可由肯定前件规则从句子 φ_j, $\varphi_k = (\varphi_j \to \varphi_i)$ 推出，其中某些 $j, k < i$。根据归纳假设，$\langle M, f\rangle \models_s \varphi_j$ 以及 $\langle M, f\rangle \models_s \varphi_k$。因此，$\langle M, f\rangle \models_s \varphi_i$。 ⊣

推论 3.6 逻辑 PLS($\mathcal{F}, K_0$) 是可靠的。

证明。根据定理 2.8 和事实 2.5 (iv)， S_1、 S_2、 S_3 是在 $\langle M、 f\rangle$ 中对所有 $f \in \mathcal{F}$ 均成立的模式，因此 Ax(K_0) $\subset Taut(\mathcal{F})$。所以该断言由 3.5 得出。⊣

PLS($\mathcal{F}, K_0$) 的完备性 我们现在讨论逻辑 PLS($\mathcal{F}, K_0$) 的完备性。按照惯例，如果对于每个$\varphi \in Sen(L_s)$， $\varphi \in \Sigma$ 或 $\neg\varphi \in \Sigma$，则称集合 $\Sigma \subseteq Sen(L_s)$ 是完备的。如果 Σ 是 K-一致且完备的，那么对于每个 $\varphi \in Sen(L_s)$， $\varphi \in \Sigma \Leftrightarrow \neg\varphi \notin \Sigma$。此外，如果 $\Sigma \vdash_K \varphi$，那么 $\varphi \in \Sigma$。

在讨论上一小节引入的逻辑之前，我们先给出一个一般可满足性判据。固定一个选择函数类 $X \subseteq \mathcal{F}$ 和一个公理集 $K \subseteq Taut(X)$。设 Σ 是 L_s 中一个 K-一致且完备的句子集，并设 $\Sigma_1 = \Sigma \cap Sen(L)$ 是Σ 的子集，其中包含 Σ的经典句子。那么显然， Σ_1 是 L的一个一致且完备的句子集。根据命题逻辑的完备性定理，存在一个真值赋值 M，其定义域为 L，使得对于每个 $\alpha \in Sen(L)$

$$\alpha \in \Sigma_1 \ \Leftrightarrow \ M \models \alpha. \tag{25}$$

给定满足 (25) 的 Σ、 Σ_1、 M，以及一个选择函数的 $X \subseteq \mathcal{F}$，问题在于: 在什么条件下，可以将 M 与某个函数 $f \in X$ 配对，使得 $\langle M、 f\rangle \models_s \Sigma$。下面我们给出这一事实的一个简单刻画，它是 X-可满足性的关键刻画。

引理 3.7 设 $X \subseteq \mathcal{F}$ 和 $K \subset Taut（X）$。再设 Σ 是 L_s 的一个 K-一致且完备的句子集，并且 $\Sigma_1 = \Sigma \cap Sen（L）$ 与 M 满足 (25)。那么，对每个 $f \in X$， $\langle M， f\rangle \models \Sigma$ 当且仅当对每个 $\varphi \in Sen（L_s）$ 时，

$$\varphi \in \Sigma \ \Rightarrow \overline{f}(\varphi) \in \Sigma. \tag{26}$$

（实际上，(26) 等价于

$$\varphi \in \Sigma \ \Leftrightarrow \overline{f}(\varphi) \in \Sigma,$$

但另一个方向由 (26)、 Σ 的一致性与完备性，以及 $\overline{f}（\neg\varphi） = \neg\overline{f}（\varphi）$ 这一事实推出。）

证明。取一个 $f \in X$，并设 $\langle M、 f\rangle \models_s \Sigma$。于是，根据 Σ 的完备性和 $\models_s$ 的定义，对每个 $\varphi \in Sen（L_s）$，

$$\varphi \in \Sigma \ \Leftrightarrow \ \langle M, f\rangle \models_s \varphi \Leftrightarrow M \models \overline{f}(\varphi).$$

现在根据（25），$M \models \overline{f}(\varphi) \Rightarrow \overline{f}(\varphi) \in \Sigma_1 \subset \Sigma$。因此， $\varphi \in \Sigma \Rightarrow \overline{f}(\varphi) \in \Sigma$。所以（26）成立。

反之，假设（26）为真。为证明 $\langle M, f\rangle \models_s \Sigma$，取某个$\varphi \in \Sigma$。由（26）$\overline{f}(\varphi) \in \Sigma$。然后 $\overline{f}(\varphi) \in \Sigma_1$，因为 $\overline{f}(\varphi)$ 是经典的，所以根据（25） $M \models \overline{f}(\varphi)$。这意味着 $\langle M, f\rangle \models_s \varphi$，正如所要求的那样。⊣

接下来讨论 PLS($\mathcal{F}, K_0$) 的完备性。证明的关键步骤是下面这个引理。

引理 3.8 设 Σ 是 K_0 一致且完备的 L_s 句子集。那么 Σ 是 $\mathcal{F}$ 可满足的。

证明。设 Σ 是 K_0 一致且完备的。那么对于任意 φ， $\psi \in Sen(L_s)$，Σ 的可能子集（其元素为 $\varphi|\psi$、 φ、 ψ 或它们的否定）如下:

(a1) $\{\varphi|\psi, \varphi, \psi\} \subset \Sigma$(a2) $\{\varphi|\psi, \varphi, \neg\psi\} \subset \Sigma$(a3) $\{\varphi|\psi, \neg\varphi, \psi\} \subset \Sigma$(a4) $\{\neg(\varphi|\psi) \neg\varphi, \neg\psi\} \subset \Sigma$(a5) $\{\neg(\varphi|\psi)\ \varphi, \neg\psi\} \subset \Sigma$(a6) $\{\neg(\varphi|\psi)\ \neg\varphi, \psi\} \subset \Sigma$

其余情况,

(a7) $\{\varphi|\psi, \neg\varphi, \neg\psi\} \subset \Sigma$

(a8) $\{\neg(\varphi|\psi), \varphi, \psi\} \subset \Sigma$

都不可能成立，因为它们与 K_0的一致性以及Σ的完备性相矛盾。事实上，在情况 (a7) 中，我们有 $\neg\varphi \wedge \neg\psi \in \Sigma$。又因为 $\varphi|\psi \in \Sigma$，所以根据 S_2 和完备性， $\varphi \vee \psi \in \Sigma$，这就产生了矛盾。在情况 (a8) 中， $\varphi \wedge \psi \in \Sigma$。又因为$\neg(\varphi|\psi) \in \Sigma$，所以根据 S_1 和完备性， $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma$，这就产生了矛盾。

给定一对 $\{\alpha, \beta\}$，若对于 $\varphi = \alpha$ 和$\psi = \beta$，上述针对 $1 \leq i \leq 6$的相应情况 (ai) 成立，我们就说“$\{\alpha, \beta\}$ 满足 (ai)”。我们将 L的选择函数 g 定义如下:

$$g(\alpha, \beta) = \begin{cases} (i)\ \alpha, \text{ if } \{\alpha, \beta\} \text{ satisfies (a2) or (a6)} \\ (ii)\ \beta, \text{ if } \{\alpha, \beta\} \text{ satisfies (a3) or (a5)} \\ (iii) \text{ any of the } \alpha, \beta, \text{ if } \{\alpha, \beta\} \text{ satisfies (a1) or (a4).} \end{cases} \tag{27}$$

断言。 $\overline{g}$ 满足前一个引理中的蕴含式 (26)。

断言的证明。我们通过对 φ 的长度进行归纳来证明 (26)。对于$\varphi = \alpha \in Sen(L)$，$\overline{g}(\alpha) = \alpha$，因此 (26) 显然成立。类似地，关于 $\wedge$ 和 $\neg$ 的归纳步骤可直接由以下事实推出: $\overline{g}$ 与

这些联结词可交换，且 Σ 具有完备性。因此，归纳中唯一非平凡的步骤是关于 $\varphi|\psi$ 的步骤。只需假设

$$\varphi \in \Sigma \ \Rightarrow \overline{g}(\varphi) \in \Sigma, \tag{28}$$

$$\psi \in \Sigma \ \Rightarrow \overline{g}(\psi) \in \Sigma, \tag{29}$$

并证明

$$\varphi|\psi \in \Sigma \ \Rightarrow \overline{g}(\varphi|\psi) \in \Sigma. \tag{30}$$

假设 $\varphi|\psi \in \Sigma$。那么， φ、 ψ 及其否定中可能属于 Σ 的组合，只有上文情形 (a1)、(a2) 和 (a3) 中的那些。要证明 (30)，只需检查在这些情形中，$\overline{g}(\varphi|\psi) \in \Sigma$ 。注意， $\overline{g}(\varphi|\psi) = g(\overline{g}(\varphi)\ \overline{g}(\psi)) = g(\alpha, \beta)$，其中 $\overline{g}(\varphi) = \alpha$ 和 $\overline{g}(\psi) = \beta$都是 L的句子，因此 (27) 适用。

情形 (a1)：那么 $\varphi \in \Sigma$ 且 $\psi \in \Sigma$。由 (28) 和 (29)， $\overline{g}(\varphi) \in \Sigma$ 且$\overline{g}(\varphi) \in \Sigma$。根据定义 (27)， $\overline{g}(\varphi|\psi) = g(\overline{g}(\varphi)\ \overline{g}(\psi))$ 可以是 $\overline{g}(\varphi)$ 或$\overline{g}(\psi)$。因此，无论哪种情况， $\overline{g}(\varphi|\psi) \in \Sigma$。

情形（a2）：于是 $\varphi \in \Sigma$ and $\neg\psi \in \Sigma$。根据（28）和（29）， $\overline{g}(\varphi) \in \Sigma$, $\overline{g}(\psi) \notin \Sigma$。此外，根据（27）， $\overline{g}(\varphi|\psi) = g(\overline{g}(\varphi)\ \overline{g}(\psi)) = \overline{g}(\varphi)$，因此 $\overline{g}(\varphi|\psi) \in \Sigma$。

情形（a3）：于是 $\neg\varphi \in \Sigma$， $\psi \in \Sigma$。根据（28）和（29）， $\overline{g}(\varphi) \notin \Sigma$， $\overline{g}(\psi) \in \Sigma$。根据（27）， $\overline{g}(\varphi|\psi) = g(\overline{g}(\varphi)\ \overline{g}(\psi)) = \overline{g}(\psi)$，因此 $\overline{g}(\varphi|\psi) \in \Sigma$。这就完成了该断言的证明。

由此可知，条件（26）成立，因此根据引理 3.7，如果 $M \models \Sigma_1$ where $\Sigma_1 = \Sigma \cap Sen(L)$，那么 $\langle M,\ g\rangle \models \Sigma$，所以 Σ 是 $\mathcal{F}$-可满足的。⊣

这里要指出，由于 $\vdash_{K_0}$ 满足演绎定理，根据事实 3.3，PLS($\mathcal{F}, K_0$) 的完备性定理的两种形式 CT1 和 CT2 是等价的。因此，对于系统 PLS($\mathcal{F}, K_0$)，证明哪一种形式并无区别。

定理3.9（PLS($\mathcal{F}, K_0$) 的完备性）逻辑 PLS($\mathcal{F}, K_0$) 是完备的。也就是说，如果 Σ 是 K_0-一致的，那么 Σ 是 $\mathcal{F}$-可满足的。

证明。设 Σ 是 K_0-一致的。将 Σ 扩展为一个 K_0-一致且完备的 $\Sigma^* \supseteq \Sigma$。根据引理 3.8， Σ^* 是 $\mathcal{F}$-可满足的。因此 Σ也是如此。⊣

推论 3.10 集合 $\{\varphi\colon\ \vdash_{K_0} \varphi\}$ 是可判定的。

证明。根据 PLS($\mathcal{F}, K_0$) 的可靠性和完备性， $\{\varphi\colon\ \vdash_{K_0}\varphi\} = Taut(\mathcal{F})$。但根据引理 3.1， $Taut(\mathcal{F})$ 是可判定的。⊣

3.2 为类 Reg、 Reg^* 和 Dec 公理化真值关系

接下来的系统 K_1-K_3 旨在进一步刻画第 2.3 节中讨论的正则性这一语义性质。我们需要定义 K_1 ，使得如果 $\vdash_{K_1} \varphi$ ，那么 $\varphi \in Taut(Reg)$，反之亦然（如果可能的话）。具体而言，如果 $\alpha \sim \alpha'$，我们需要 K_1 来证明，对于每个 β， $\alpha|\beta \leftrightarrow \alpha'|\beta$，即，

$$\vdash_{K_1} (\alpha|\beta \leftrightarrow \alpha'|\beta).$$

这无法通过公理模式来刻画，因为没有任何模式能够表达 $\sim$ 逻辑等价的关系。不过，可以通过一条新的推理规则来刻画它。大致而言，我们需要一条规则来保证：如果 φ 与 ψ 逻辑等价，那么在包含 $|$ 的表达式中， φ 和 ψ 可以进行保真替换，也就是说，对于每个 σ，其中一个蕴涵 $\varphi|\sigma \leftrightarrow \psi|\sigma$。[12] 这就是以下规则，记作 SV（取自保真替换）：

$$(SV) \qquad from \ \varphi \leftrightarrow \psi \ \ infer \ \varphi|\sigma \leftrightarrow \psi|\sigma,$$

如果 $\varphi \leftrightarrow \psi$ 在 K_0. 中是可证的

我们看到， SV 是一种“条件规则”，在约束条件下应用，这与一阶逻辑的全称化规则非常相似（由 $\varphi(x)$ 推出 $\forall x\varphi(x)$，如果 x 不在前提中自由出现），也与模态逻辑的必然化规则相似（由 φ 推出 $\Box\varphi$，如果 $\vdash \varphi$）。由此可见， SV 按照以下方式运作：

事实 3.11 设 K 是一个形式系统，使得 $SV \in$IR(K)。如果 $\vdash_{K_0} (\varphi \leftrightarrow\psi)$，那么对于每个 σ， $\vdash_K (\varphi|\sigma \leftrightarrow \psi|\sigma)$。

注意，根据推论 3.10，给定 φ，可以判定 $\vdash_{K_0} \varphi$；因此，给定一个递归句子集 Σ，也可以判定句子序列 φ_1、.....、 φ_n 是否是从 Σ 出发在 K 中的证明。

定理 3.12 设 $X \subseteq Reg$。如果 K 是一个系统，使得 Ax(K) $\subset Taut(X)$ 且 IR(K) $=$ {MP SV}，那么 PLS(X, K) 是可靠的。

[12]当然，逻辑等价句子的保真替换在经典逻辑中同样成立，也就是说，如果 $\alpha \sim \alpha'$，且 α 是 β 的子公式，那么 $\beta[\alpha] \sim \beta[\alpha']$; 其中， $\beta[\alpha']$ 是在 β 中将 α 替换为 α' 所得到的结果。不过，这只是经典逻辑的组合语义的一个简单推论。相比之下，PLS 的选择语义绝不是组合的。

证明。设 $X \subseteq Reg$，$\mathsf{Ax}(K) \subset Taut(X)$ 且 $\mathsf{IR}(K) = \{\mathrm{MP}\ SV\}$，并设 $\Sigma \vdash_K \varphi$。设 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$，其中 $\varphi_n = \varphi$，是 K-证明，证明 φ。我们通过对 i 进行归纳，证明对于所有 $i = 1, \ldots, n$，$\Sigma \models_X \varphi_i$。设 $\langle M, f\rangle \models_s \Sigma$，其中$f \in X$。证明 $\langle M, f\rangle \models_s \varphi_i$ 的过程与定理 3.5 的证明完全相同，唯一不同的是 φ_i 由句子 φ_j 推出且 $j < i$ 的情形，此时依据 SV。这意味着 $\varphi_i = (\sigma|\tau \leftrightarrow \rho|\tau)$，而 $\varphi_j = (\sigma \leftrightarrow \rho)$，其中 $\vdash_{K_0} (\sigma \leftrightarrow \rho)$。现在，$K_0$ 是一个系统，对于 $X = \mathcal{F}$ 满足上述 3.5 的条件，因此$\models_{\mathcal{F}} (\sigma \leftrightarrow \rho)$。这意味着对于每个赋值 N 以及每个 $g \in \mathcal{F}$，$\langle N, g\rangle \models_s (\sigma \leftrightarrow \rho)$，即 $N \models \overline{g}(\sigma) \leftrightarrow \overline{g}(\rho)$，也就是说，$\overline{g}(\sigma) \leftrightarrow \overline{g}(\rho)$ 是一个经典重言式，或者 $\overline{g}(\sigma) \sim \overline{g}(\rho)$，对于每个 $g \in \mathcal{F}$。特别地，$\overline{f}(\sigma) \sim \overline{f}(\rho)$。现在，由于 $X \subseteq Reg$，$f \in X$ 蕴含 f 是正则的。因此，$\overline{f}(\sigma) \sim \overline{f}(\rho)$ 蕴含 $f(\overline{f}(\sigma)\ \overline{f}(\tau)) \sim f(\overline{f}(\rho)\ \overline{f}(\tau))$，或者 $\overline{f}(\sigma|\tau) \sim \overline{f}(\rho|\tau)$，因此$M \models \overline{f}(\sigma|\tau) \leftrightarrow \overline{f}(\rho|\tau)$，或者 $\langle M, f\rangle \models_s (\sigma|\tau \leftrightarrow \rho|\tau)$，即 $\langle M, f\rangle \models_s \varphi_i$，得证。证明完毕。⊣

我们接下来定义系统 K_1-K_3 如下：

$$\mathsf{Ax}(K_1) = \mathsf{Ax}(K_0) = \{S_1, S_2, S_3\}, \qquad \mathsf{IR}(K_1) = \{MP, SV\}, \tag{31}$$

$$\mathsf{Ax}(K_2) = \mathsf{Ax}(K_1) + S_4, \qquad \mathsf{IR}(K_2) = \{MP, SV\}, \tag{32}$$

$$\mathsf{Ax}(K_3) = \mathsf{Ax}(K_2) + S_5, \qquad \mathsf{IR}(K_3) = \{MP, SV\}. \tag{33}$$

定理 3.13（可靠性）逻辑 PLS(Reg, K_1)、PLS(Reg^*, K_2) 和 PLS(Dec, K_3) 是可靠的。

证明。此结论基本上由一般可靠性定理 3.12 得出。我们有 $Dec \subseteq Reg^* \subseteq Reg$，因此这些选择函数类都满足 3.12 的条件 $X \subseteq Reg$。此外，对于 $i = 1$，2、3，有 $\mathsf{IR}(K_i) = \{$肯定前件规则 $SV\}$。由推论 3.6，$\mathsf{Ax}(K_0) \subset Taut(\mathcal{F})$，且 $Taut(\mathcal{F}) \subseteq Taut(Reg) \subseteq Taut(Reg^*) \subseteq Taut(Dec)$。由于 $\mathsf{Ax}(K_1) = \mathsf{Ax}(K_0)$，我们有 $\mathsf{Ax}(K_1) \subseteq Taut(Reg)$，因此 PLS($Reg, K_1$) 是可靠的。接下来 $\mathsf{Ax}(K_2) = \mathsf{Ax}(K_0) + S_4$，所以要证明 PLS($Reg^*, K_2$) 可靠，只需证明 $S_4 \in Taut(Reg^*)$。但根据定理 2.19 $S_4 \in Taut(Asso) \subset Taut(Reg^*)$。因此 $\mathsf{Ax}(K_2) \subseteq Taut(Reg^*)$，证明完毕。最后，$\mathsf{Ax}(K_3) = \mathsf{Ax}(K_2) + S_5$，且根据定理 2.42，模式 S_5 刻画了¬递减性，故 $S_5 \in Taut(Dec)$。因此 $\mathsf{Ax}(K_3) \subset Taut(Dec)$，由 3.12 可知 PLS($Dec, K_3$) 是可靠的。⊣

下一个引理对于上述逻辑的完备性至关重要，将在下一节证明。

引理 3.14 若对于某个 i =1、2、3， $\Sigma \subset Sen(L_s)$ 关于$\vdash_{K_i}$是封闭的，且 α、α' 是一阶逻辑的句子，并且 $\alpha \sim \alpha'$，那么对于每个 β，$(\alpha|\beta \leftrightarrow \alpha'|\beta) \in \Sigma$。

证明。令 $\alpha \sim \alpha'$。于是 $\vdash_{PL} \alpha \leftrightarrow \alpha'$，因此也有 $\vdash_{K_0} \alpha \leftrightarrow \alpha'$。由$SV \in$ IR(K_i)可知，对于每个 β，都有 $\vdash_{K_i} \alpha|\beta \leftrightarrow \alpha'|\beta$。因此 $(\alpha|\beta \leftrightarrow\alpha'|\beta) \in \Sigma$，因为 Σ 是 $\vdash_{K_i}$-闭的。⊣

问题3.15 形式系统 K_1-K_3 是否满足演绎定理（DT）？

我们猜想这个问题的答案是否定的，但尚未给出证明。对于 $\vdash_{K_i}$，证明 DT 的标准方法是假设 $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_{K_i} \psi$，取 ψ的一个证明 ψ_1，……，ψ_n，其中 $\psi_n = \psi$，并通过对 i进行归纳，证明对于每个 $i = 1$，……，n，都有 $\Sigma \vdash_{K_i} \varphi \rightarrow \psi_i$。归纳中唯一关键的步骤是关于规则 SV的步骤，即证明：对于任意 σ、σ'、τ，如果$\Sigma \vdash_{K_i} \varphi \rightarrow (\sigma \leftrightarrow \sigma')$且 $\vdash_{K_0} (\sigma \leftrightarrow \sigma')$，那么 $\Sigma \vdash_{K_i} \varphi \rightarrow (\sigma|\tau \leftrightarrow \sigma'|\tau)$。现在显然

$$\vdash_{PL} (\sigma \leftrightarrow \sigma') \rightarrow (\varphi \rightarrow (\sigma \leftrightarrow \sigma')),$$

同样

$$\vdash_{K_0} (\sigma \leftrightarrow \sigma') \rightarrow (\varphi \rightarrow (\sigma \leftrightarrow \sigma')).$$

将此与 $\vdash_{K_0} (\sigma \leftrightarrow \sigma')$ 及肯定前件规则结合，可得

$$\vdash_{K_0} \varphi \rightarrow (\sigma \leftrightarrow \sigma')),$$

因此，再次通过命题逻辑可得

$$\vdash_{K_0} (\varphi \rightarrow \sigma) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \sigma').$$

由 SV 可推出

$$\Sigma \vdash_{K_i} ((\varphi \rightarrow \sigma)|\tau) \leftrightarrow ((\varphi \rightarrow \sigma')|\tau).$$

然而，尚不清楚是否能够从后者得到所需的推导 $\Sigma \vdash_{K_i} \varphi \rightarrow (\sigma|\tau \leftrightarrow \sigma'|\tau)$，以及该如何得到。

由前面的讨论可知，对于形式系统 K_i、 $i = 1$、2、3，DT 尚未解决。根据事实 3.4，如果 DT 对 K_i 不成立，那么 PLS(Reg、 K_1)、PLS(Reg^*、 K_2) 和 PLS(Dec、 K_3) 这些逻辑的 CT1 必然也不成立。这意味着，对于前述逻辑，CT1 同样尚未解决。（关于 DT 的状态，需要指出的是，令人颇感意外的是，关于

这一命题有效性的问题，即使对于像模态逻辑这样历史悠久的逻辑理论而言，仍基本上没有定论，参见 [5]。）

完备性 我们现在讨论基于系统 K_1-K_3 的上述逻辑的完备性。首先，鉴于系统 K_1-K_3 中 DT 的开放状态以及事实 3.3(ii)，我们无法对这些系统区分完备性的两种形式 CT1 和 CT2。我们只知道 (CT1)⇒(CT2)。因此，我们可以希望证明 K_1-K_3 的 CT2。

然而，缺乏 DT 还会产生另一个严重的副作用，即我们不知道每个一致句子集是否都能扩展为一致且完备的集合。显然，每个一致句子集 Σ都可以扩展（例如通过佐恩引理）为极大一致集 $\Sigma' \supseteq \Sigma$。但是，在没有 DT 的情况下， Σ' 的极大性并不能保证完备性（尽管反之成立）。因为从理论上说， Σ' 可能是极大一致的，但仍存在某个 φ 使得 $\varphi \notin \Sigma'$ 和 $\neg\varphi \notin \Sigma'$，在这种情况下， $\Sigma' \cup \{\varphi\}$和 $\Sigma' \cup \{\neg\varphi\}$ 都会是不一致的。这看起来很奇怪，但如果没有 DT，我们看不出如何证明这种情况不可能发生。对于形式系统 K，将一致集扩展为一致且完备的集合这一可扩展性，在证明 K （相对于给定语义）的完备性时发挥着关键作用，因此我们将其作为 K 的性质单独提出，记作 $cext(K)$。也就是说，我们令

($cext(K)$) 每个 K-一致句子集都可以扩展为

一个 K-一致且完备的集合。

鉴于 $cext(K_i)$ 的真值未知，对于 $i = 1$、2、3，我们将仅证明这些系统的 CT2-完全性的条件版本。实际上，已经证明 CT2-完全性等价于 $cext(K_i)$。

定理 3.16（PLS(Reg, K_1) 的条件 CT2-完备性）逻辑 PLS(Reg, K_1) 是 CT2-完备的，当且仅当 $cext(K_1)$ 为真。

证明。其中一个方向很容易。假设 $cext(K_1)$为假。于是存在一个极大的 K_1-一致句子集 Σ ，它无法扩展为一个 K_1-一致且完备的句子集。这意味着存在一个句子 φ，使得 $\Sigma\cup\{\varphi\}$和 $\Sigma\cup\{\neg\varphi\}$ 都 K_1-不一致。但这样一来， Σ 就不是 Reg-可满足的。因为如果存在 M和 $f \in Reg$使得 $\langle M、 f\rangle \models_s \Sigma$，那么 $\langle M、 f\rangle$ 也满足 φ 或 $\neg\varphi$中的至少一个。因此， $\Sigma \cup \{\varphi\}$ 或 $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ 至少有一个是 Reg-可满足的。然而这是一个矛盾，因为 $\Sigma\cup\{\varphi\}$和 $\Sigma\cup\{\neg\varphi\}$都不一致，并且根据定理 3.5，PLS($Reg, K_1$)是可靠的。因此， Σ 是一致的且不是Reg-可满足的，所以PLS(Reg, K_1)不是CT2-完备的。

现在我们来讨论等价关系的主要方向，假设 $cext(K_1)$为真。给定一个 K_1-一致集合 Σ，不失一般性，我们可以假设它也是完备的。我们需要找到 M 和 $g \in Reg$，使得 $\langle M、\ g\rangle \models_s \Sigma$。事实证明，引理 3.8中关于选择函数 g的定义所使用的主要论证，经过必要的调整后，同样适用于上一节定义的其他逻辑。也就是说，只需找到一个选择函数 $g \in Reg$ ，使得 $\langle M、\ g\rangle \models \Sigma$，其中 M是 $\Sigma_1 = \Sigma \cap Sen(L)$的一个模型。 g的定义完全遵循引理 3.8证明中 g 的定义模式，只是现在需要注意使 g 成为正则的。回忆一下，如果对于所有 α、α'、 β， g 是正则的，

$$\alpha' \sim \alpha \ \Rightarrow\ g(\alpha', \beta) \sim g(\alpha, \beta).$$

在 (27) 中， g 由三个子句定义：(i) (a2) 或 (a6)；(ii) (a3) 或 (a5)；(a1) (iii) 或 (a4)。

断言。每当 g 由上述子句 (i) 和 (ii) 定义时，正则性约束都得到满足。

断言的证明。取 α、 α'、 β 使得 $\alpha \sim \alpha'$。我们证明在 $g(\alpha, \beta)$ 根据子句 (i)-(a2) 定义的情况下，该断言成立。其他所有情况均可类似验证。 $g(\alpha, \beta)$ 根据 (27) 的情形 (i)-(a2) 定义，意味着 $\alpha|\beta \in \Sigma$、 $\alpha \in \Sigma$、 $\neg\beta \in \Sigma$ 以及 $g(\alpha, \beta) = \alpha$。只需说明 $g(\alpha', \beta)$ 必然 $= \alpha' \sim g(\alpha, \beta)$。

由于 Σ 是完备的，因此相对于 $\vdash_{K_1}$ 是封闭的，所以根据引理 3.14，$\alpha \sim \alpha'$ 意味着 $(\alpha|\beta \leftrightarrow \alpha'|\beta) \in \Sigma$。此外根据假设， $\alpha|\beta \in \Sigma$，因此 $\alpha'|\beta \in \Sigma$。另外， $\alpha' \in \Sigma$，因为 $\alpha \in \Sigma$，并且 $\neg\beta \in \Sigma$。因此，对于 $\alpha'|\beta$、 α' 和 β，情形 (i)-(a2) 也成立。所以，根据 (27)， $g(\alpha', \beta) = \alpha'$，因此 $g(\alpha', \beta) \sim g(\alpha, \beta)$。这就证明了该断言。

由该断言可知，如果按照（27）定义 g ，则除非 $g(\alpha, \beta)$ 由条款（iii）给出，即除非情况 (a1) 或 (a4) 成立，否则正则性都能得到保证。在这种情况下，要么 α、 β 都属于 Σ，要么 $\neg\alpha$、$\neg\beta$ 都属于 Σ，而（27）允许将 $g(\alpha, \beta)$ 取为 α、 β 中的任意一个元素。因此，此时我们必须通过一个新的条件加以干预，以保证正则性。具体如下。

如命题 2.30 的证明中所述，从每个 $\sim$-等价类$[\alpha]$中选取一个代表元 $\xi_\alpha \in [\alpha]$。回顾一下，根据完备性，集合 $\Sigma_1 =\Sigma \cap Sen(L)$ 及其补集 $\Sigma_2 = Sen(L) - \Sigma_1$ 相对于 $\sim$都是饱和的，也就是说，对于每个 α，要么 $[\alpha] \subset \Sigma_1$ 要么 $[\alpha] \subset \Sigma_2$。令$D_1 = \{\xi_\alpha :\ \alpha \in \Sigma_1\}$， $D_2 = \{\xi_\alpha :\ \alpha \in \Sigma_2\}$。令 $[D_i]^2$ 为 D_i的元素对集合，其中 $i = 1$、2，并任取一个选择函数 g_0 ：

$[D_1]^2 \cup [D_2]^2 \to D_1 \cup D_2$。然后，只需对定义 (27) 稍作修改，将 g 定义如下：

$$g(\alpha,\beta) = \begin{cases} (i)\ \alpha, \text{ if } \{\alpha,\beta\}, \text{ satisfies (a2) or (a6)} \\ (ii)\ \beta, \text{ if } \{\alpha,\beta\} \text{ satisfies (a3) or (a5)} \\ (iii)\ \sim g_0(\xi_\alpha,\xi_\beta), \text{ if } \{\alpha,\beta\} \text{ satisfies (a1) or (a4).} \end{cases} \tag{34}$$

（第三个子句只是以下内容的简写： $g(\alpha,\beta) = \alpha$ 当且仅当 $g_0(\xi_\alpha,\xi_\beta) = \xi_\alpha$，并且 $g(\alpha,\beta) = \beta$ 当且仅当 $g_0(\xi_\alpha,\xi_\beta) = \xi_\beta$。参见 2.30 的证明中类似的表述。）鉴于该断言以及由（34）给出的 g 的具体定义，可以立即推出：如果 $\alpha \sim \alpha'$，那么对于每个 β， $g(\alpha,\beta) \sim g(\alpha',\beta)$。因此， g 是正则的。此外，完全按照引理 3.8 的推理，可以得到 $\langle M, g\rangle \models_s \Sigma$。证明完毕。⊣

下面讨论逻辑 PLS(Reg^*, K_2)。 K_2-一致性与 K_1-一致性的区别在于，由于公理 S_4，如果 Σ 是 K_2-一致的，并且 $\varphi|(\psi|\sigma) \in \Sigma$，那么 $(\varphi|\psi)|\sigma \in \Sigma$，或者更简单地说， $\varphi|\psi|\sigma \in \Sigma$。我们通过一个例子来概述这一差异。

例 3.17 设

$$\Sigma = \{\alpha, \neg\beta, \neg\gamma, \alpha|\beta, \neg(\alpha|\gamma), \alpha|(\beta|\gamma)\},$$

其中 α、 β、 γ两两不等价，且 $\alpha \wedge \neg\beta \wedge \neg\gamma$可满足。那么 Σ 是 Reg-可满足的，因此是 K_1-一致的，但不是 K_2-一致的。特别地， Σ 不是 $Asso$-可满足的。

证明。根据假设，存在一个真值赋值 M，使得 $M \models \alpha \wedge \neg\beta \wedge \neg\gamma$。选取 L的一个（部分）选择函数，使得 $f(\alpha,\beta) = \alpha$、$f(\alpha,\gamma) = \gamma$，且 $f(\beta,\gamma) = \beta$。由于 α、 β、 γ两两不等价，很容易看出， f 可扩展为整个 L的一个正则选择函数。于是$\overline{f}(\alpha|\beta) = \alpha$、 $\overline{f}(\alpha|\gamma) = \gamma$，且 $\overline{f}(\beta|\gamma) = \beta$。因此 $\overline{f}(\neg(\alpha|\gamma)) = \neg\gamma$。由此可得，$\langle M$、 $f\rangle \models_s \{\alpha|\beta, \neg(\alpha|\gamma)\}$。此外，$\overline{f}(\alpha|(\beta|\gamma)) = f(\alpha, f(\beta,\gamma)) = f(\alpha,\beta) = \alpha$，这意味着 $\langle M$、 $f\rangle \models_s \alpha|(\beta|\gamma)$ 也成立。因此 $\langle M$、 $f\rangle \models_s \Sigma$，所以 Σ是Reg-可满足的。

现在根据 K_2 的公理 S_4，由于 $\alpha|(\beta|\gamma) \in \Sigma$，因此可得 $\Sigma \vdash_{K_2} \alpha|\beta|\gamma$。根据 S_2 和 S_3，后者意味着 $\Sigma \vdash_{K_2} (\alpha|\gamma) \vee \beta$。另一方面，$\neg(\alpha|\gamma) \in \Sigma$ 且 $\neg\beta \in \Sigma$，所以 $\Sigma \vdash_{K_2} \neg(\alpha|\gamma) \wedge \neg\beta$，或者 $\Sigma \vdash_{K_2} \neg((\alpha|\gamma) \vee \beta)$。因此 $\Sigma \vdash_{K_2} \bot$，所以它是 K_2-不一致的。

最后假设在 $\langle N$、 $f\rangle$ 中满足 Σ，其中存在某个赋值 N 和某个结合的 f。令 $f = \min_< = \min$，其中采用某个全序

$<$之 Sen（L）。现在，$\langle N,\ f\rangle \models_s \{\alpha, \neg\beta, \alpha|\beta\}$ 蕴含 $\min(\alpha,\beta) = \alpha$，即$\alpha < \beta$，而 $\langle N,\ f\rangle \models_s \{\alpha, \neg\gamma, \neg(\alpha|\gamma)\}$ 蕴含 $\min(\alpha,\gamma) = \gamma$，因此 $\gamma <\alpha$。所以 $\gamma < \alpha < \beta$。另一方面，$\langle N,\ f\rangle \models_s \alpha|(\beta|\gamma)$ 蕴含$N \models \min(\alpha, \min(\beta,\gamma)) = \min(\alpha,\beta,\gamma)$，因此 $\min(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha$，因为$N \models \neg\beta \wedge \neg\gamma$。因此 $\alpha < \gamma$，一个矛盾。$\dashv$

定理3.18（PLS(Reg^*, K_2) 的条件 CT2-完备性）逻辑 PLS(Reg^*, K_2) 是 CT2-完备的，当且仅当 $cext(K_2)$ 为真。

证明。等价关系的一个方向，完全按照定理 3.16 中对应的方向证明。因此，下面证明另一方向，并假设 $cext(K_2)$ 为真。设 Σ 是一个 K_2-一致集合，因此我们可以再次假设它也是完备的。我们必须构造一个正则且结合的选择函数 g，使得 $\langle M, g\rangle \models \Sigma$，其中 $M \models \Sigma_1$。如前所述，$\alpha|(\beta|\gamma) \in \Sigma$ 蕴含 $(\alpha|\beta)|\gamma \in \Sigma$。我们将基本按照引理 3.8 的定义 (27) 来定义 $\overline{g}$，但现在我们希望 g 在 $Sen(L)$ 上诱导一个正则全序。因此，设 h 是 L 上的一个部分选择函数，使得

$$dom(h) = \{\{\alpha,\beta\} : \{\alpha,\beta\} \text{ satisfies some of the cases (a2), (a3), (a5) and (a6) of Lemma 3.8}\},$$

and

$$h(\alpha,\beta) = \begin{cases} (i)\ \alpha, \text{ if } \{\alpha,\beta\} \text{ satisfies (a2) or (a6)}, \\ (ii)\ \beta, \text{ if } \{\alpha,\beta\} \text{ satisfies (a3) or (a5)}. \end{cases} \tag{35}$$

断言1：对于任意 α、β、γ，只要 $h(\alpha, h(\beta,\gamma))$、$h(\beta, h(\alpha,\gamma))$、$h(\gamma, h(\alpha,\beta))$ 中的任意两个有定义，它们就相等。

断言1的证明。任取一些 α、β、γ。那么它们中至少有两个要么属于 Σ，要么属于其补集。不失一般性，假设 $\alpha \in \Sigma$、$\beta \notin \Sigma$、$\gamma \notin \Sigma$。那么根据 K_2-一致性和 Σ 的完备性，

$$A = \{\alpha, \neg\beta, \neg\gamma, \neg(\beta|\gamma)\} \subset \Sigma.$$

此外，根据 K_2-一致性和完备性，我们可以根据 $\alpha|(\beta|\gamma)$ 与 $(\alpha|\beta)|\gamma$ 对 Σ 的包含关系，将它们区分开来，并有两种可能：要么$\alpha|\beta|\gamma \in \Sigma$，要么 $\neg(\alpha|\beta|\gamma) \in \Sigma$。现在我们考虑句子 $\alpha|\beta|\gamma$、$\alpha|\beta$、$\alpha|\gamma$ 及其否定与 A中的元素一起属于 Σ 的各种组合。我们将这些组合写成集合 B_i的形式。容易看出，满足 $A \cup B_i \subset \Sigma$的这类集合 B_i 只有以下这些：

$B_1 = \{\alpha|\beta|\gamma, \alpha|\beta, \alpha|\gamma\}$
$B_2 = \{\neg(\alpha|\beta|\gamma), \alpha|\beta, \alpha|\gamma\}$
$B_3 = \{\neg(\alpha|\beta|\gamma), \alpha|\beta, \neg(\alpha|\gamma)\}$
$B_4 = \{\neg(\alpha|\beta|\gamma), \neg(\alpha|\beta), \alpha|\gamma\}$
$B_5 = \{\neg(\alpha|\beta|\gamma), \neg(\alpha|\beta), \neg(\alpha|\gamma)\}$

其余集合:

$B'_1 = \{\alpha|\beta|\gamma, \alpha|\beta, \neg(\alpha|\gamma)\}$
$B'_2 = \{\alpha|\beta|\gamma, \neg(\alpha|\beta), \alpha|\gamma\}$
$B'_3 = \{\alpha|\beta|\gamma, \neg(\alpha|\beta), \neg(\alpha|\gamma)\}$

不能与 A 一起包含在 Σ 中。 [例如，假设

$$A \cup \{\alpha|\beta|\gamma, \alpha|\beta, \neg(\alpha|\gamma)\} = \{\alpha, \neg\beta, \neg\gamma, \neg(\beta|\gamma), \alpha|\beta|\gamma, \alpha|\beta, \neg(\alpha|\gamma)\} \subset \Sigma.$$

于是 $\alpha|\beta|\gamma$ 写作 $\beta|\alpha|\gamma$, 因此由 S_2 可推出 $\beta \vee (\alpha|\gamma) \in \Sigma$。根据完备性， $\beta \in \Sigma$ 或 $\alpha|\gamma \in \Sigma$ 必有其一。但 $\neg\beta$ 和 $\neg(\alpha|\gamma)$ 已经属于 Σ，这就产生了矛盾。]

由于 β、 $\gamma \notin \Sigma$、 $h(\beta, \gamma)$，因此 $h(\alpha, h(\beta, \gamma))$ 并未由 (27) 的 (i) 或 (ii) 定义。因此，只需验证对于每个 $1 \leq i \leq 5$，在 $A \cup B_i \subset \Sigma$ 的各个情形下， $h(\beta, h(\alpha, \gamma)) = h(\gamma, h(\alpha, \beta))$。

1) $A \cup B_1 \subset \Sigma$: 我们有 $h(\alpha, \beta) = \alpha$， $h(\alpha, \gamma) = \alpha$。于是

$$h(\beta, h(\alpha, \gamma)) = h(\beta, \alpha) = \alpha = h(\alpha, \gamma) = h(\gamma, h(\alpha, \beta)),$$

因此断言成立。

2) $A \cup B_2 \subset \Sigma$: 与之前相同。

3) $A \cup B_3 \subset \Sigma$: 我们有 $h(\alpha, \beta) = \alpha$, $h(\alpha, \gamma) = \gamma$。因此 $h(\beta, h(\alpha, \gamma)) = h(\beta, \gamma)$，所以 $h(\beta, h(\alpha, \gamma))$ 也未定义。我们看到只有 $h(\gamma, h(\alpha, \beta)) = \gamma$ 有定义，因此断言自然成立。

4) $A \cup B_4 \subset \Sigma$: 我们有 $h(\alpha, \beta) = \beta$, $h(\alpha, \gamma) = \alpha$。因此 $h(\gamma, h(\alpha, \beta)) = g(\gamma, \beta)$ 未定义，断言也像之前一样自然成立。

5) $A \cup B_5 \subset \Sigma$: 我们有 $h(\alpha, \beta) = \beta$, $h(\alpha, \gamma) = \gamma$。因此 $h(\beta, h(\alpha, \gamma)) = g(\beta, \gamma)$ 未定义，我们再次完成了证明。至此，断言1的证明完成。

命题 2。设

$$S = \{\langle \alpha, \beta \rangle : \{\alpha, \beta\} \in dom(h) \wedge h(\alpha, \beta) = \alpha\},$$

并令 $<_1$ 为 S的传递闭包。则 $<_1$ 是 $Sen(L)$上的正则偏序。

命题 2 的证明。根据断言1， h 是一个结合偏选择函数，因此如定理 2.14 的证明所示，我们可以看出， S 的传递闭包 $<_1$是一个偏序。此外，根据定理 3.16 的断言可知， $<_1$ 是一个正则序。至此，命题 2 的证明完成。

现在显然，断言 2 的偏序 $<_1$ 可扩展为 $Sen(L)$上的正则全序 $<$ 。因此，只需令 $g = \min_<$来定义 g 。由于对于每个 $\alpha, \beta \in Sen(L)$，若有序对 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 满足情形 (a2)、(a3)、(a5)、(a6) 中的某一种，则 $\alpha < \beta$ 当且仅当 $h(\alpha, \beta) = \alpha$，显然 g 扩展了 h。此外

$$g(\alpha,\beta) = \begin{cases} (i)\ \alpha, \text{ if } \langle \alpha,\beta\rangle \text{ satisfies (a2) or (a6)}, \\ (ii)\ \beta, \text{ if } \langle \alpha,\beta\rangle \text{ satisfies (a3) or (a5)}, \\ (iii)\ \min_<(\alpha,\beta), \text{ if } \langle \alpha,\beta\rangle \text{ satisfies (a1) or (a4)}. \end{cases} \tag{36}$$

因此，如引理 3.8 中那样可得 $\langle M, g\rangle \models_s \Sigma$，也就是说， Σ 是 Reg^*-可满足的。定理的证明至此完成。⊣

最后，我们来讨论 PLS(Dec, K_3) 的条件完备性。

定理 3.19（PLS(Dec, K_3) 的条件 CT2-完备性）逻辑 PLS(Dec, K_3) 是 CT2-完备的，当且仅当 $cext(K_3)$ 为真。

证明。等价关系的一个方向与定理 3.16 中相应的方向完全相同。现在假设 $cext(K_3)$ 为真，来证明另一个方向。固定一个 K_3-一致的集合 Σ。根据 $cext(K_3)$，不妨设 Σ 也是完备的。令 $M \models \Sigma_1$，其中 $\Sigma_1 = \Sigma \cap Sen(L)$。我们将证明存在一个选择函数 g ，使得 $g = \min_<$，其中 $<$ 是 $Sen(L)$ 上的一个 $\neg$-递减正则全序，并且 $\langle M、 g\rangle \models \Sigma$。 g 的定义基本上与前一个定理中的定义相同，只是额外进行了调整，以保证 $\neg$-递减性。具体而言，令 h 为在定理3.18的证明中所定义的函数。

断言。 h 是 $\neg$-递减的，即每当定义了 $h(\alpha, \beta)$ 和 $h(\neg\alpha, \neg\beta)$ 时，

$$h(\alpha,\beta) = \alpha \ \Leftrightarrow h(\neg\alpha,\neg\beta) = \neg\beta. \tag{37}$$

断言的证明。我们必须检查，只要 $\{\alpha, \beta\}$ 和 $\{\neg\alpha, \neg\beta\}$满足情形 (a2)、(a3)、(a5) 和 (a6) 中的某些情形，(37) 就成立。因此，我们必须考察 α、 β、 $\alpha|\beta$、$\neg\alpha|\neg\beta$ 及其

否定可以属于 Σ的情形。这些句子总共有 16 种可能的组合。其中，这些组合

$$U_1 = \{\alpha|\beta, \neg(\neg\alpha|\neg\beta), \alpha, \beta\}$$
$$U_2 = \{\neg(\alpha|\beta), \neg\alpha|\neg\beta, \neg\alpha, \neg\beta\}$$

不允许定义 h ，因为在这些情况下，要么 α、 β 都属于 Σ，要么 $\neg\alpha$、 $\neg\beta$ 都属于 Σ。接下来有 10 种组合会与 K_3 一致且完备的 Σ 相矛盾。这些组合是:

$$F_1 = \{\alpha|\beta, \neg\alpha|\neg\beta, \alpha, \beta\}$$
$$F_2 = \{\alpha|\beta, \neg\alpha|\neg\beta, \neg\alpha, \neg\beta\}$$
$$F_3 = \{\alpha|\beta, \neg(\neg\alpha|\neg\beta), \neg\alpha, \neg\beta\}$$
$$F_4 = \{\alpha|\beta, \neg(\neg\alpha|\neg\beta), \neg\alpha, \beta\}$$
$$F_5 = \{\alpha|\beta, \neg(\neg\alpha|\neg\beta), \alpha, \neg\beta\}$$
$$F_6 = \{\neg(\alpha|\beta), \neg\alpha|\neg\beta, \alpha, \beta\}$$
$$F_7 = \{\neg(\alpha|\beta), \neg\alpha|\neg\beta, \neg\alpha, \beta\}$$
$$F_8 = \{\neg(\alpha|\beta), \neg\alpha|\neg\beta, \alpha, \neg\beta\}$$
$$F_9 = \{\neg(\alpha|\beta), \neg(\neg\alpha|\neg\beta), \alpha, \beta\}$$
$$F_{10} = \{\neg(\alpha|\beta), \neg(\neg\alpha|\neg\beta), \neg\alpha, \neg\beta\}.$$

请注意，在前述集合中， F_4、 F_5、 F_7 和 F_8 会因公理 S_5 而产生矛盾。例如，考虑 $F_4 = \{\alpha|\beta, \neg(\neg\alpha|\neg\beta)\ \neg\alpha, \beta\}$。它包含 $\neg\alpha$、 β，因此可以证明 $\neg\alpha\wedge\beta$。根据 S_5， F_4 可以证明 $(\alpha|\beta \leftrightarrow \neg\alpha|\neg\beta)$。 F_4 也包含 $\alpha|\beta$，因此可以证明 $\neg\alpha|\neg\beta$。但它还包含 $\neg(\neg\alpha|\neg\beta)$，所以 $F_4 \vdash_{K_3} \bot$。因此， Σ 中可能包含的组合只有以下这些:

$$C_1 = \{\alpha|\beta, \neg\alpha|\neg\beta, \alpha, \neg\beta\} \subset \Sigma$$
$$C_2 = \{\alpha|\beta, \neg\alpha|\neg\beta, \neg\alpha, \beta\} \subset \Sigma$$
$$C_3 = \{\neg(\alpha|\beta), \neg(\neg\alpha|\neg\beta), \alpha, \neg\beta\} \subset \Sigma$$
$$C_4 = \{\neg(\alpha|\beta), \neg(\neg\alpha|\neg\beta), \neg\alpha, \beta\} \subset \Sigma.$$

根据 h 的定义 (35)，不难验证，在每种情况 $C_i \subset \Sigma$ 下，对于 $1 \leq i \leq 4$，(37) 都成立。例如，在情况 $C_4 \subset \Sigma$ 下，必有 $h(\alpha、\ \beta) = \alpha$，而 $h(\neg\alpha、\ \neg\beta) = \neg\beta$。至此，断言1得证。

与定理 3.18 的证明中一样，令

$$S = \{\langle\alpha, \beta\rangle : \{\alpha, \beta\} \in dom(h) \wedge h(\alpha, \beta) = \alpha\},$$

并令 $<_1$ 为 S的传递闭包。如 3.18 所示， $<_1$ 是一个正则偏序。此外，根据该断言， $<_1$ 是 $\neg$-递减的。

因此，通过对佐恩引理的标准应用，$<_1$ 可扩展为 $Sen(L)$上的一个正则、$\neg$-递减的全序 $<$。若令 $g = \min_<$，则 g 满足前一定理中的 (36)，从而 $\langle M, g\rangle \models_s \Sigma$。因此，$\Sigma$ 是 Dec-可满足的。$\dashv$

下面的问题尚未解决。

问题 3.20 如果对于 $i = 1$、2、3，$cext(K_i)$ 为真，那么逻辑 PLS(Reg, K_1)、PLS(Reg^*, K_2) 和 PLS(Dec, K_3) 是否满足完备性定理的 CT1 形式?

3.3 关于公理化的几点结语

在结束本节关于叠加逻辑公理化的讨论之前，我们注意到，以上介绍的所有公理 S_1-S_5 对联结词 $\wedge$ 和 $\vee$ 也成立。也就是说，这些 S_i 都不能用来区分 $|$ 与 $\wedge$ 和 $\vee$。这看起来有些奇怪，因为我们在语义上证明了 S_1 和 S_2 的逆命题不是重言式。然而，这一点无法以直接的方式表述，即不能表述为模式 $\varphi|\psi \not\to \varphi \wedge \psi$ 和 $\varphi \vee \psi \not\to \varphi|\psi$（后者在 $\varphi = \psi$ 下是假的）。这意味着，对于 $i = 0$、1、2、3，以上介绍的公理系统 K_i 都可以通过显然的解释 $I_\wedge$ 和 $I_\vee$ 解释到标准命题逻辑 PL 中；这些解释分别将 $|$ 解释为 $\wedge$ 或 $\vee$。对于标准联结词，它们以显然的方式归纳定义；而对于 $|$，我们有 $(\varphi|\psi)^{I_\wedge} = \varphi \wedge \psi$ 和 $(\varphi|\psi)^{I_\vee} = \varphi \vee \psi$。于是，显然，对于任意 φ，以及令 I 为这些解释中的某一个，

$$\vdash_{K_i} \varphi \ \Rightarrow \vdash \varphi^I,$$

也就是说，对于每个 Dec—重言式 φ（考虑选择函数的最强系统 Dec），φ^I 都是经典重言式。然而，前面提到的两种解释都不是“忠实”的，这意味着上述蕴含的逆命题并不成立。例如，对于经典句子 α、β，$(\alpha|\beta)^{I_\wedge} = \alpha \wedge \beta$，因此 $(\alpha|\beta \to \alpha)^{I_\wedge} = \alpha \wedge \beta \to \alpha$。于是，$\alpha \wedge \beta \to \alpha$ 是经典重言式，而 $\alpha|\beta \to \alpha$ 不是 K_i—重言式。

问题在于，是否存在适用于某个更细的类 $X \subset Dec$ 的其他公理，能够区分 $|$ 与 $\wedge$ 和/或 $\vee$。答案是肯定的。例如，可以对 $\neg$-递减序施加一项进一步条件，规定特殊类 $\bot$ 和 $\top$在此序中的位置。比如，我们可以要求递减序$<$ 满足条件 $\top < \bot$。令 $Dec_{\top<\bot}$ 表示这些全序的类

$Sen(L)$。很容易看出，刻画 $Dec_{\top<\bot}$ 所需的附加公理是（S_6） $\bot|\top$。因此， $\bot|\top$ 是一个 $Dec_{\bot}$-重言式，而（$\bot|\top$）$^{I_\wedge} = \bot \wedge \top$ 不是经典重言式，这意味着与 $Dec_{\top<\bot}$ 对应的逻辑无法通过 $I_\wedge$ 在 PL 中解释。我们也可以要求 $\top$ 是 $<$的最小元素。若将这一序类记作 $Dec_{\top}$，刻画 $Dec_{\top}$ 所需的附加模式是（S_6'） $\alpha|\top$。同样， $Dec_{\top<\bot}$ 无法通过 $I_\wedge$在 PL 中解释。类似地，若 $Dec_{\bot<\top}$、$Dec_{\bot}$ 分别表示满足 $\bot < \top$ 和$\bot < \alpha$（对每个 α均成立）的递减序 $<$ 的类，则相应所需的公理分别为（S_7） $\neg$（$\bot|\top$）和（S_7'） $\neg$（$\alpha|\bot$）。这些逻辑无法通过 $I_\vee$在 PL 中解释。

4 未来工作

我们的未来工作将聚焦于两个目标。第一个目标是为叠加逻辑发展一些替代语义。我们已经找到了第二种同样基于选择函数的语义，但这一次选择的对象不是句子对，而是布尔代数$\mathcal{B}$的元素对；PL 的标准句子在其中取真值。我们可以将其称为“布尔值选择语义”（BCS），以区别于本文所使用的“句子选择语义”（SCS）。

第二个目标是将 PLS 扩展到一阶叠加逻辑（缩写为 FOLS）。这种扩展可能有助于我们从句子/公式的叠加过渡到对象的叠加。给定两个对象（常元） a 和 b，让我们考虑公式（含一个自由变量）$(x = a)|(x = b)$。如果我们的逻辑能够证明存在唯一对象c 满足该公式，那么我们就可以令 $c = a \uparrow b$，并称 c 为 a 和 b的叠加。因此，为了使这一运算能够对所有对象 x、y定义，句子 $(\forall x, y)(\exists! z)((z = x)|(z = y))$ 必须是重言式。所以问题在于，是否存在一种合适的 FOLS 形式化，使得该句子能够被陈述并证明。

致谢 衷心感谢两位匿名审稿人提出的宝贵意见和建议。

参考文献

[1] G. Battilotti, 《通过序列演算式解释量子并行性》, 《国际理论物理学杂志》49（2010）, 第12期, 3022–3029。[2] N. da Costa 和 C. de Ronde, 《量子叠加的次协调逻辑》, 《基础物理学》43（2013）, 第7期, 845–858。[3] M.L. Dalla Chiara 和 R. Giuntini, 《量子逻辑》, 载于《哲学逻辑手册》, D. Gabbay 和 F. Guenthner（编）, Kluwer, 2002。[4] H. Enderton, 《逻辑学数学导论》, 第2版, Harcourt/Academic Press, 2002。[5] R. Hakli 和 S. Negri, 《演绎定理对于模态逻辑是否失效? 》, 《Synthese》187（2012）, 第3期, 849–867。[6] L. Humberstone, 《联结词》, 麻省理工学院出版社, 剑桥, 2011。[7] T. Jech, 《选择公理》, North Holland, 1973。[8] D. Krause 和 J.R.B. Arenhart, 《量子叠加的逻辑论述》, arXiv:1510.08023。[9] H. L¨auchli, 《序原理独立于受限选择公理》, 《Fundamenta Mathematicae》54（1964）, 31–43。[10] G. Sambin、G. Battilotti 和 C. Faggian, 《基本逻辑: 反射、对称性与可见性》, 《符号逻辑杂志》65（2000）, 979–1013。[11]E. Schr¨odinger, 《量子力学的现状: Schr¨odinger〈猫悖论论文〉的译文》, 《美国哲学学会会刊》124（1980）, 323–338。亦可在线获取: http://www.tuhh.de/rzt/rzt/it/QM/cat.html#sect5。