arXiv:2303.15031v1 [math.LO] 27 Mar 2023

一阶叠加逻辑的语义

Athanassios Tzouvaras

塞萨洛尼基亚里士多德大学数学系，希腊塞萨洛尼基 541 24，电子邮件：tzouvara@math.auth.gr

摘要

我们探讨如何将 [9] 中提出的命题叠加逻辑（PLS）的句子选择语义（SCS）加以扩展，使其能够成功应用于一阶叠加逻辑（FOLS）。这类扩展有两种方案。表面上更自然的方案是公式选择语义（FCS），它基于对基语言中任意公式对定义的选择函数。然而，我们证明，相对于 FCS，一阶逻辑（FOL）的全称实例化方案 $(\forall v)\varphi(v) \rightarrow \varphi(t)$ 作为重言式方案并不成立。这使得 FCS 完全无法作为候选语义。随后，我们转向另一种方案，它是 SCS 的一种变体，因为它同样只对句子对使用选择函数。然而，这种语义预设联结词 | 的适用范围仅限于无量词句子，因此语言中合式公式和句子的类别也受到限制。在这些句法限制的前提下，FOLS 的常见公理化相对于这种第二种语义是可靠且条件完备的，正如 PLS 中相应的系统一样。

数学主题分类（2010年）：03B60, 03G12

关键词：叠加逻辑。句子/公式对的选择函数。句子选择语义。公式选择语义。

1 引言

在 [9] 中，我们介绍并研究了多种命题叠加逻辑（PLS）系统。PLS 系统扩展了经典命题

逻辑（PL）。它们的语言是在 PL 的语言中加入一个新的二元联结词 $|$，用于表示“叠加运算”；而它们的公理则由 PL 的公理以及关于 $|$的若干公理组成。其背后的动机大致如下：如果 $\varphi|\psi$ 表示“两个状态的叠加”（或者更准确地说，表示这些状态的命题），如同量子力学（QM）目前对它的理解，那么这一运算纯粹逻辑上的内容是什么？也就是说，不脱离经典逻辑的基础，我们能对 $\varphi|\psi$ 的真值说些什么？基本直觉是，$\varphi|\psi$ 奇特地同时表达了某种对性质 φ 和 ψ 的合取（测量之前），以及对同样性质的某种析取（测量之后，也就是叠加态“坍缩”之后）。这种坍缩可以借助一个选择函数形式化，该函数作用于句子对 $\{\varphi, \psi\}$，将每个公式 $\varphi|\psi$转化为经典公式。这类函数构成了新逻辑的一种语义的基础，称为句子选择语义（简称 SCS）；它允许 $\varphi|\psi$ 同时呈现合取和析取的特征，这些特征体现于“插值性质”中，即 $\varphi|\psi$ 能够在逻辑上严格地插值于 $\varphi \wedge \psi$ 和 $\varphi \vee \psi$之间这一性质。

尽管量子力学是引入叠加这一逻辑联结词的动因，但 PLS 并不是建立在正交模格之上的量子逻辑（有关此类结构的完整信息，见 [6] ），因为这类逻辑例如在 [7]中有所讨论。它也与 [1], [2], 的内容以及 [10], 中引用并讨论的其他论文所涉及的方向并不相同；后者属于可称为研究量子现象的标准方法。正如上文所述，PLS 逻辑只打算探究叠加现象本身的逻辑内涵。引用 [9, 第 151]页的话：

> “因此，这里提出的逻辑很难说是叠加逻辑，因为如今这一概念在物理学中的使用和理解并非如此。更确切地说，它是这样一种叠加逻辑：其中的叠加被理解为相应物理学概念的‘逻辑提炼’。它最终能否应用于量子力学领域，我们不得而知。”

应一位审稿人的提问，我再补充一些评论。PLS（以及本文所讨论的一阶扩展 FOLS）与量子力学的标准处理几乎没有共同之处，这一点可以直接从它并非概率理论这一事实推断出来。在这个逻辑系统（就其现状而言）中，概率毫无立足之地，我也看不出该如何修改它，才能使其与概率的运用相容。这就是为什么对叠加句子 $\varphi|\psi$ 的“坍缩”是通过

在 φ 和 ψ 之间作出选择来实现的。据我所知，还没有任何真正的理论能将选择函数与概率有效地联系起来。正如我们在 [9, 第 151] 页所说：

> “基本思想是，从纯逻辑的角度来看，复合态 $c_0\vec{u}_0+c_1\vec{u}_1$ 坍缩为状态 $\vec{u}_0$、$\vec{u}_1$ 中的一个，只不过是从可能结果集合 $\{\vec{u}_0,\vec{u}_1\}$ 中进行一次（或多或少随机的）选择。这是因为从纯逻辑的角度来看，概率无关紧要；换句话说，状态 $\vec{u}_0$ 和 $\vec{u}_1$ 被视为等概率。在这种情况下，$\vec{u}_0$ 和 $\vec{u}_1$ 的叠加是唯一的，坍缩的结果可以通过抛硬币来决定；更严格地说，可以由一个作用于可观测状态对（在我们的例子中，这些状态对与L的句子对相一致）的选择函数来决定。当然，这与标准的叠加处理方式大相径庭；按照标准处理方式，$\vec{u}_0$ 和 $\vec{u}_1$ 的叠加并非只有一种，而是有无穷多种，实际上与线性组合 $c_0\vec{u}_0+c_1\vec{u}_1$的数量一样多，对于 $|c_0|^2+|c_1|^2=1$而言。”

当然，从理论上讲，我们可以从经典逻辑的 $\{0,1\}$ 值赋值转向非经典逻辑的 $[0,1]$ 值赋值。但这样一来，对叠加的解释就不再是“基于经典推理和常识”，这原本正是尝试这样做的目的。或许将来我们会尝试通过连续值逻辑对其作出某种非经典解释。

鉴于上述情况，与量子力学标准处理的概率特征相关的基本概念，例如全局相位与局部相位、情境性、科亨-施佩克定理、纠缠等，对我们的逻辑而言都毫无意义。尽管如此，PLS 系统似乎仍有其优点。正如第二位审稿人所写：“尽管从最初的量子力学动机出发来解释叠加逻辑或许并不可靠，但具有选择语义的联结词本身就足够有趣，值得研究；可以设想，这种逻辑还能找到其他解释，或许是某种认知论或可能性式的解释。”

现在让我们转向本文的内容。上一节 [9], 已经提出了一个自然的问题：叠加逻辑能否扩展到量化版本，也就是说，PLS 系统能否扩展为相应的一阶叠加逻辑系统

（简称 FOLS）。在句法层面，将 PLS 的相应系统扩展为 FOLS 系统非常容易定义。只需借助 PLS 中使用过的同一组 | 公理，将经典一阶逻辑（FOL）扩展即可。这是因为不存在涉及∀ 或 ∃的新的 | 公理，因为 | 与量词之间不存在合理的关联。但在语义层面，情况要复杂得多。首先，我们确保 FOLS 系统确实具有某种语义，其特征与 PLS 的 SCS 相当类似。事实上，我们期间为 PLS 开发的另一种语义—— [10], 布尔值选择语义（简称 BCS）——也被证明适用于 FOLS。

然而，能否构造一种将命题逻辑 PLS 的 SCS 推广到 FOLS 的语义，仍是一个悬而未决的问题。本文的目标之一是说明，对命题逻辑 PLS 的 SCS 语义作直接推广——即基于一阶语言 L 中所有公式对的选择函数的语义，称为公式选择语义（简称 FCS）——行不通。具体而言，我们表明，FOLS 的系统在 FCS 下并不可靠（即可靠性不成立），而且问题出在一个出人意料之处：使公理无法成为 FCS 重言式的，并非 | 的公理，而是一阶逻辑的一条基本公理，即全称实例化（UI）模式： $\forall v\varphi(v) \rightarrow \varphi(t)$。这当然会导致 FCS 本身无法成立，因为它无法容纳量化逻辑中最基本的逻辑常项——全称量词。第 3 节将证明这一结果。第 4 节将介绍一个相关事实，说明一致选择函数并不存在。

本文展示的第二个主要结果是，SCS 语义（仅使用作用于句子对的函数，而非任意公式）也可应用于 FOLS，前提是我们限制联结词 | 的适用范围，使其仅用于不含量词的公式（除非这些公式是经典公式），从而限制叠加逻辑语言$L_s = L \cup \{|\}$ 的合式公式类别。在这一限制下，本文证明 FOLS 相对于 SCS 是可靠且条件完备的。该结果将在第5节中介绍。

由于本文内容高度依赖 [9], 中所包含的材料，我们首先需要简要回顾其中确立的主要概念和事实。下一小节将对此进行介绍。

1.1 采用句子选择语义的 PLS 概述

本小节概述了 [9] 中包含的主要概念和事实。它与 [10] 中对应的导言小节 1.1 完全相同。在

一般而言，命题叠加逻辑（PLS）大致由一对 (X, K) 构成，其中 X 是该逻辑的语义部分，而 K 是句法部分。实际上， K 是通常意义上的形式系统，而 X 是一组函数，用于按照下文所述的方式为句子赋予意义。PLS(X, K) 表示语义部分为 X 、句法部分为 K 的命题叠加逻辑。PLS(X, K) 的精确定义将在下文给出。

虽然语义部分最符合直觉，但我们先描述句法部分 K。下文所有形式系统 K （或 PLS）的语言 L_s，都是在标准命题逻辑（PL） $L = \{p_0, p_1, \ldots\} \cup \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg\}$ 的基础上加入新的二元联结词“|”后得到的。也就是说， $L_s = L \cup \{|\}$。L_s的句子集合 Sen（L_s）按通常方式通过归纳法定义，并额外加入以下归纳步骤：只要 φ 和 ψ 是句子， $\varphi|\psi$ 就是句子。

在全文中，字母 α、 β、 γ 仅表示 L 的句子集合 Sen（L）中的句子，而 φ、 ψ、 σ 则一般表示 Sen（L_s）中的元素。

形式系统 K 由一组公理 Ax(K) 和一组推理规则 IR(K) 构成。 K 的公理总是包含 PL 的公理，而 IR(K) 则包含 PL 的推理规则。因此，我们先确定 PL 的公理化，它由以下公理模式组成（适用于语言 L_s）。

(P1) $\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$
(P2) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma))$
(P3) $(\neg\varphi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow ((\neg\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \varphi)$,

以及推理规则肯定前件式（MP）。因此，对于每个 K，{P1、P2、P 3} $\subset$ Ax(K) 和 $MP \in$ IR(K)。此外，每个 K 都包含新联结词 $|$的公理。这些方案如下所列（可以是其中部分，也可以是全部）。

（S_1）$\varphi \wedge \psi \rightarrow \varphi|\psi$ （S_2）
$\varphi|\psi \rightarrow \varphi \vee \psi$ （S_3）$\varphi|\psi \rightarrow \psi|\varphi$ （S_4）
（$\varphi|\psi$）$|\sigma \rightarrow \varphi|$（$\psi|\sigma$） （$S_5$）
$\varphi \wedge \neg\psi \rightarrow$ （$\varphi|\psi \leftrightarrow \neg\varphi|\neg\psi$）

在 K 中的可证性（`，希尔伯特式），记作 $\vdash_K \varphi$，按通常方式定义。显然，

$$\Sigma \vdash \alpha \;\Rightarrow\; \Sigma \vdash_K \alpha,$$

其中 $\vdash$ 表示命题逻辑中的可证性。若 $\Sigma \nvdash_K \bot$，则称 Σ 为 K-一致的。

令 K_0 表示如下所述的形式系统。

$$\mathsf{Ax}(K_0) = \{\mathrm{P1}, \mathrm{P2}, \mathrm{P3}\} + \{S_1, S_2, S_3\}, \qquad \mathsf{IR}(K_0) = \{MP\}.$$

K_0 的扩展还将包含以下定义的规则 SV （源自保真规则）。

$$(SV) \qquad \textit{from } \varphi \leftrightarrow \psi \textit{ infer } \varphi|\sigma \leftrightarrow \psi|\sigma,$$

$$\text{if } \varphi \leftrightarrow \psi \text{ is provable in } K_0.$$

规则 SV 保证：如果 α和 β 是经典逻辑上等价的句子，那么在包含 | 的表达式中用 α 替换 β 时，真值仍会得到保留（与标准联结词的情况相同）。形式系统 K_1、 K_2 和 K_3 定义如下。

$$\mathsf{Ax}(K_1) = \mathsf{Ax}(K_0), \qquad \mathsf{IR}(K_1) = \{MP, SV\},$$

$$\mathsf{Ax}(K_2) = \mathsf{Ax}(K_1) + S_4, \qquad \mathsf{IR}(K_2) = \{MP, SV\},$$

$$\mathsf{Ax}(K_3) = \mathsf{Ax}(K_2) + S_5, \qquad \mathsf{IR}(K_3) = \{MP, SV\}.$$

SV 的一个推论是：如果 $\vdash_{K_0}$ （$\varphi \leftrightarrow \psi$），那么对于任意 σ， $\vdash_{K_i}$ （$\varphi|\sigma \leftrightarrow \psi|\sigma$），对于 $i = 1$，2，3。

PLS 的句法就介绍到这里。现在我们转向语义。公理 S_i 的依据是上文提到的 | 的预期含义，以及基于选择函数、适用于 L_s 的句子之相应语义。这种语义由一对 $\langle v$、 $f\rangle$构成，其中 v： Sen（L） $\to \{0, 1\}$是对 L的句子所作的通常二值赋值，而 f 是 Sen（L）中元素对的一个选择函数，即 f： $[Sen$（L）$]^2 \to Sen$（L），满足 f（$\{\alpha, \beta\}$） $\in \{\alpha, \beta\}$；其中，对于任意集合 A， $[A]^2 = \{\{a, b\}$： a、 $b \in A\}$。（关于选择函数的基本事实，读者可参阅 [5]。）函数f 也定义在单元素集上，且 f（$\{\alpha\}$） $= \alpha$。为简化记号，我们用 f（α， β）代替 f（$\{\alpha, \beta\}$），因此按照约定， f（α， β） $= f$（β， α），且 f（α， α） $= \alpha$。 f引出一个函数 $\overline{f}$： Sen（L_s） $\to Sen$（L），其定义如下。

定义 1.1 (i) $\overline{f}(\alpha) = \alpha$，对于 $\alpha \in Sen(L)$，
(ii) $\overline{f}(\varphi \wedge \psi) = \overline{f}(\varphi) \wedge \overline{f}(\psi)$，(iii) $\overline{f}(\neg\varphi)$
$= \neg\overline{f}(\varphi)$，(iv) $\overline{f}(\varphi|\psi) = f(\overline{f}(\varphi)\ \overline{f}(\psi))$.

我们将 $\overline{f}$ 称为由 f 诱导的坍缩函数。接着，我们定义 φ 在 $\langle v, f\rangle$ 中的真值，记作 $\langle v, f\rangle \models_s \varphi$，如下所示。

$$\langle v, f\rangle \models_s \varphi :\Leftrightarrow v(\overline{f}(\varphi)) = 1. \tag{1}$$

（在 [9] 中，我们用 M 表示 L 的句子的二值赋值，并用 $\langle M$、$f\rangle$ 代替 $\langle v$、$f\rangle$。此外，我们用 $M \models \alpha$ 代替 $M(\alpha) = 1$。）

我们将由 (1) 定义的语义称为句子选择语义，简称 SCS。对于句子对，有一种非常相似的选择函数概念，并且也有人独立地将其解释为一种“保守的”二元联结词，见 [4]（参见例 3.24.14，第 479 页）。

我们使用四种形式系统 K_0-K_3，其强度依次递增，是因为它们分别对应于下文定义的四类不同的选择函数。

定义 1.2 设 $\mathcal{F}$ 表示 $Sen(L)$ 的所有选择函数构成的集合，并令 $X \subseteq \mathcal{F}$。

(i) 对于集合 $\Sigma \subseteq Sen(L_s)$ 和 $X \subseteq \mathcal{F}$，若存在 v 和 $f \in X$，使得 $\langle v$、$f\rangle \models_s \Sigma$，则称 Σ 是 X-可满足的。

(ii) 对于 $\Sigma \subseteq Sen(L_s)$ 和 $\varphi \in Sen(L_s)$，如果对于每个 v 以及每个 $f \in X$，都有 $\langle v\, f\rangle \models_s \Sigma \Rightarrow \langle v\, f\rangle \models_s \varphi$，则 φ 是 Σ 的 X 逻辑后承，记作 $\Sigma \models_X \varphi$。

(iii) 如果 $\emptyset \models_X \varphi$，则 φ 是一个 X 重言式，记作 $\models_X \varphi$。

iv) 如果 $\models_X (\varphi \leftrightarrow \psi)$，则 φ 和 ψ 在 X 下逻辑等价，记作 $\varphi \sim_X \psi$。另令

$$Taut(X) = \{\varphi \in Sen(L_s) : \models_X \varphi\}.$$

推动 PLS 发展的一个重要成果，是 $\varphi|\psi$ 关于 $\varphi \wedge \psi$ 和 $\varphi \vee \psi$ 的以下“插值性质”（参见 [9] 的定理 2.8）。

事实 1.3 对所有 φ，$\psi \in Sen(L_s)$，

$$\varphi \wedge \psi \models_{\mathcal{F}} \varphi|\psi \models_{\mathcal{F}} \varphi \vee \psi,$$

而一般而言

$$\varphi \vee \psi \not\models_{\mathcal{F}} \varphi|\psi \not\models_{\mathcal{F}} \varphi \wedge \psi.$$

现在，虽然很容易看出 K_0 的公理是 $\models_{\mathcal{F}}$ 重言式，但公理 S_4 和 S_5 并非如此。它们对应于下文所述的 $\mathcal{F}$ 的一些特殊子类。

定义 1.4 1) 若对所有 α、β、$\gamma \in$, $f \in \mathcal{F}$ 都满足 $Sen(L)$, 则称其为结合的。

$$f(f(\alpha,\beta),\gamma) = f(\alpha, f(\beta,\gamma)).$$

2) 如果对于所有 $\alpha, \alpha', \beta \in Sen(L)$, $f \in \mathcal{F}$ 就称为正则。

$$\alpha \sim \alpha' \Rightarrow f(\alpha,\beta) \sim f(\alpha',\beta)$$

其中 $\alpha \sim \beta$ 表示 PL 中的逻辑等价。

Let

$$Asso = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ is asociative}\},$$

$$Reg = \{f \in \mathcal{F} : f \text{ is regular}\},$$

我们对结合选择函数类中的函数有如下简单而优美的刻画。

引理1.5（[9, 推论2.17]） $f \in Asso$ 当且仅当 $Sen(L)$ 上存在一个全序$<$, 使得 $f = \min_<$, 即对于所有$\alpha, \beta \in Sen(L)$, $f(\alpha,\beta) = \min(\alpha,\beta)$。

（事实上，对于任意集合 A 上的结合选择函数，1.5 均成立，见 [9] 的定理2.14。）结合性和正则性这两种性质都非常理想，因此我们将二者结合起来。此外，鉴于上文通过全序刻画结合函数的方式，下面的定义是很自然的。

定义1.6 $Sen(L)$ 上的全序 $<$ 称为正则的，如果相应的选择函数 $f = \min_<$ 是正则的；或者等价地，对于所有 α, β，若它们属于 $Sen(L)$，则

$$\alpha \not\sim \beta \ \&\ \alpha < \beta \ \Rightarrow\ [\alpha] < [\beta],$$

其中 $[\alpha]$ 是 α的 $\sim$-等价类。

Let

$$Reg^* = Reg \cap Asso.$$

显然, $f \in \mathrm{Reg}^*$ 当且仅当对于 $Sen(L)$上的某个正则全序 $<$, $f = \min_<$。

定义1.7 设 $<$ 是 $Sen(L)$上的全序。若对于所有满足 $\alpha \not\sim \beta$的 $\alpha, \beta \in Sen(L)$,

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \neg\beta < \neg\alpha.$$

如果 $f \in \mathrm{Reg}^*$, 则称 f 为 $\neg$-递减的，当且仅当对于某个 $\neg$-递减的 $<$, 有 $f = \min_<$。

Let

$$Dec = \{f \in Reg^* : f \text{ is } \neg\text{-decreasing}\}.$$

由于 Dec $\subseteq$ Reg* $\subseteq$ Reg $\subseteq \mathcal{F}$，因此可得

$$Taut(\mathcal{F}) \subseteq Taut(Reg) \subseteq Taut(Reg^*) \subseteq Taut(Dec).$$

现在我们可以完整说明

$$\mathrm{PLS}(X, K)$$

本节开头已引入的记号的含义：给定集合 $X \subseteq \mathcal{F}$ 和形式系统 K with Ax(K) $\subseteq Taut(X)$，PLS(X, K) 是一种逻辑，其逻辑后承关系为 $\models_X$，由结构 $\langle v, f\rangle$ 确定，且具有 $f \in X$，其可证关系为 $\vdash_K$。给定逻辑 PLS(X, K)，关于它的可靠性和完备性定理，通常指关系 $\models_X$ 和 $\vdash_K$ 之间的联系，或 X-可满足性与 K-相容性之间的联系。

此处需要提醒一句。众所周知，一种逻辑的可靠性定理（ST）和完备性定理（CT）有两种不同的表述；这两种表述在经典逻辑中等价，但一般而言未必如此。对于逻辑 PLS(X, K)，这两种形式分别是可靠性的 ST1 和 ST2，以及完备性的 CT1 和 CT2，具体如下。

(ST1) $$\Sigma \vdash_K \varphi \;\Rightarrow\; \Sigma \models_X \varphi,$$

(ST2) $$\Sigma \text{ is } X\text{-satisfiable} \;\Rightarrow\; \Sigma \text{ is } K\text{-consistent}$$

(CT1) $$\Sigma \models_X \varphi \;\Rightarrow\; \Sigma \vdash_K \varphi,$$

(CT2) $$\Sigma \text{ is } K\text{-consistent} \;\Rightarrow\; \Sigma \text{ is } X\text{-satisfiable}.$$

很容易证明，对于每个系统 PLS(X, K)，ST1 和 ST2 都是等价的。此外，也很容易证明逻辑 PLS($\mathcal{F}, K_0$)、PLS(Reg, K_1)、PLS(Reg^*, K_2) 和 PLS(Dec, K_3) 各自的可靠性定理。但 CT1 和 CT2 的等价性基于演绎定理（DT），而当 K 包含推理规则 SV 时，我们尚不知 DT 对每个 PLS(X, K) 是否成立。回顾一下，DT 表示如下蕴含关系。对于所有 Σ、φ、ψ，

$$\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash_K \psi \;\Rightarrow\; \Sigma \vdash_K \varphi \to \psi. \tag{2}$$

关于 PLS(X, K) 中 CT1 与 CT2 的关系，有如下结论。

事实 1.8 对每个 PLS(X, K)，CT1 $\Rightarrow$ CT2 都成立。若 $\vdash_K$ 满足 DT，则反向结论也成立，即 CT1 $\Leftrightarrow$ CT2。

系统 PLS($\mathcal{F}, K_0$) 的唯一推理规则是 MP，因此根据 DT，它满足 CT1 $\Leftrightarrow$CT2。所以我们只需称其为“完备”，而不必称其为“CT1-完备”或“CT2-完备”。以下内容见 [9, §3.1])

定理 1.9 PLS($\mathcal{F}, K_0$) 是完备的。

然而，对于 K_i 上包含额外规则 SV 的系统 $i > 0$，DT 的情况尚无定论，因此 CT1 与 CT2 之间的区别依然存在。因此，对于逻辑 PLS(Reg, K_1)、PLS(Reg^*, K_2) 和 PLS(Dec, K_3)，尝试证明两种完备性形式中较弱的一种，即 CT2-完备性，是合理的。但即便如此，也只能有条件地证明，因为缺少 DT 还会造成另一个严重影响：我们不知道每个相容句子集是否都能扩展为相容且完备的句子集（也就是说，对每个 φ，该集合都包含 φ 和 $\neg\varphi$ 中的一个）。当然，每个相容集 Σ 都可以扩展为极大相容集 $\Sigma' \supseteq \Sigma$（例如，借助佐恩引理）。但没有 DT，极大性并不能保证完备性。因为 Σ' 可能是极大相容的，却存在一个 φ，使得 $\varphi \notin \Sigma'$和 $\neg\varphi \notin \Sigma'$，从而 $\Sigma \cup \{\varphi\}$和 $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$都不相容。这看起来很奇怪，但我们不知道如何在没有 DT 的情况下证明它不可能发生。将相容集扩展为相容且完备的集合这一性质，对于形式系统 K而言，是证明 K （相对于给定语义）完备性的关键，因此我们将其单独列为 K 的一项性质，记作 $cext(K)$。其表述如下。

($cext(K)$) 每个 K-相容句子集都可以扩展为

一个 K-相容且完备的集合。

接着，§3 中给出了以下条件 CT2 完备性结果[9, §3.2])。

定理 1.10 (i) 若且唯若 $cext(K_1)$ 为真，PLS(Reg, K_1) 是 CT2-完备的。

(ii) 当且仅当 $cext(K_2)$ 为真时，PLS(Reg^*, K_2) 是 CT2 完备的。(iii) 当且仅当 $cext(K_3)$ 为真时，PLS(Dec, K_3) 是 CT2 完备的。

2 一阶叠加逻辑及其语义

2.1 什么是一阶叠加逻辑

首先，我们来精确定义一阶叠加逻辑，简称 FOLS。在公理化层面上，FOLS 的形式系统扩展一阶逻辑（FOL）的形式系统，其方式与第 1.1 节概述的 PLS 的形式系统扩展命题逻辑（PL）的形式系统完全相同。因此，我们先固定一个 FOL 的公理化方案（例如见 [3]）。设 L 是一种一阶语言，含有逻辑常项 $\wedge$、 $\neg$、 $\forall$ 和等号 $=$，以及变量 v_i、 v、u 等。令 $L_s = L \cup \{|\}$，其中 $|$ 是表示叠加的新二元联结词。令 $Fml(L_s)$ 和 $Sen(L_s)$ 分别表示 L_s 的所有公式和句子所构成的集合，它们按照通常的递归方式定义，沿用 L 的定义，并加入联结词 $|$对应的步骤。我们特意强调“所有”一词，因为在下文讨论的某些形式化版本中，对 L_s 中公式的构成施加限制，规定 $|$的适用条件，可能是合理的。例如，在下文讨论的 FOLS 的一种语义中，允许形如 $\forall v \exists u(\alpha(v)|\beta(v)|\gamma(u))$ 的公式，但不允许 $(\forall v(\alpha(v)|\beta(v)))|(\exists u\gamma(u))$。因此，我们保留稍后仅讨论 $Fml(L_s)$、$Sen(L_s)$ 的某些子集的权利。

一阶逻辑的公理和推理规则如下。

$$\mathsf{Ax}(\mathrm{FOL}) = \mathsf{Ax}(\mathrm{PL}) + \{UI, D\} + \{I_1, \ldots, I_5\}, \quad \mathsf{IR}(\mathrm{FOL}) = \{MP, GR\},$$

其中， GR 是全称化规则， UI （全称实例化方案）和 D 是关于量词的一阶逻辑基本公理（适用于语言 L_s）， I_1、 I_2、 I_3 是关于 $=$ （自反性、对称性和传递性）的平凡公理，最后， I_4 和 I_5 分别是对项和公式进行等式替换的方案。具体而言：

（UI）$\forall v\varphi\ (v)\ \to \varphi\ (t)$，对于每个闭项 t，（D）$\forall v\ (\varphi \to \psi\ (v)\ )$ $\to\ (\varphi \to \forall v\psi\ (v)\ )$，如果 v 在 φ中不自由，（I_4）$(\forall v, u)\ ($ $v = u \to t\ (v)\ = t\ (u)\ )$，（$I_5$）$(\forall v, u)\ (v = u \to\ (\varphi\ (v)$ $\to \varphi\ (u)\ )$。

L 的句子将在 L-结构 $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ 中进行解释。

记号约定。我们继续采用上一节引入的记号约定：在全文中，字母 φ, ψ, σ 通常表示 L_s 的公式，而字母 α, β, γ 则专门用于表示 L 的公式。

FOLS 的额外公理将属于 1.1 中已经介绍过的公理模式，即：

$(S_1)\ \varphi \wedge \psi \to \varphi|\psi(S_2)$
$\varphi|\psi \to \varphi \vee \psi(S_3)\ \varphi|\psi \to \psi|\varphi(S_4)$
$(\varphi|\psi)|\sigma \to \varphi|(\psi|\sigma)\ (S_5)\ \varphi \wedge \neg\psi \to$
$(\varphi|\psi \leftrightarrow \neg\varphi|\neg\psi)$

下面我们将讨论的形式系统是 Λ_0、 Λ_1、 Λ_2 和Λ_3 ，定义如下

$$\mathsf{Ax}(\Lambda_0) = \mathsf{Ax}(\mathrm{FOL}) + \{S_1, S_2, S_3\}, \quad \mathsf{IR}(\Lambda_0) = \{MP, GR\}$$
$$\mathsf{Ax}(\Lambda_1) = \mathsf{Ax}(\Lambda_0), \quad \mathsf{IR}(\Lambda_1) = \{MP, GR, SV\}$$
$$\mathsf{Ax}(\Lambda_2) = \mathsf{Ax}(\Lambda_1) + S_4, \quad \mathsf{IR}(\Lambda_2) = \{MP, GR, SV\},$$
$$\mathsf{Ax}(\Lambda_3) = \mathsf{Ax}(\Lambda_2) + S_5, \quad \mathsf{IR}(\Lambda_3) = \{MP, GR, SV\},$$

其中， SV 是第 1.1 节中提到的保真规则，只不过用 Λ_0替换了 K_0。也就是说：

$$(SV) \qquad \textit{from}\ \ \varphi \leftrightarrow \psi\ \ \textit{infer}\ \varphi|\sigma \leftrightarrow \psi|\sigma,$$
$$\text{if } \varphi \leftrightarrow \psi \text{ is provable in } \Lambda_0.$$

请注意，在 FOLS 中， | 没有超出 PLS 公理范围的新公理，这意味着 | 与量词之间不存在自然的相互作用。事实上，人们可能会考虑 | 与 ∀之间的联系，例如（$\forall v$）（$\varphi|\psi$）↔（$\forall v\varphi$）|（$\forall v\psi$），或者（$\exists v$）（$\varphi|\psi$）↔（$\exists v\varphi$）|（$\exists v\psi$）；这些联系要么因涉及的公式不合法而没有意义，要么在允许这些公式的语义中根本不成立（例如，在 [10]的语义中）。

2.2 FOLS 的候选语义

在 [10] 中，我们为 PLS 构建了一种替代语义（以及略有不同的形式化方式）：它基于一种选择函数，该函数针对的不是句子对，而是布尔代数 $\mathcal{B}$ 中的元素对；经典句子在该代数中取真值。我们称之为“布尔值选择语义”，简称 BCS。结果表明，这种语义也可以直接应用于 FOLS；在这种语义下，FOLS 的形式系统满足一些自然的可靠性和完备性结果。

本文探讨的主要问题是：FOLS 是否能够拥有一种语义，自然而然地扩展并推广 [9] 的句子选择语义（SCS）（该语义基于上一节提到的真值定义（1））。“自然而然”是指，这种语义仍将由以下形式的有序对构成：

有序对 $\langle \mathcal{M}, f \rangle$，其中 $\mathcal{M}$ 是一个 L-结构，而 f 是针对 L 的公式／句子对的选择函数；并且仍将通过以下关系，遵循将真值归约为塔斯基式真值的基本方式：$\langle \mathcal{M}, f \rangle \models_s \varphi$ 当且仅当 $\mathcal{M} \models \overline{f}(\varphi)$。复杂的问题在于选择函数 f 的定义域。也就是说，f 是作用于 L 的所有公式对，还是仅作用于其中某些公式对，例如仅作用于句子对？上述问题的答案是：SCS 无法自然地扩展为“公式选择语义”，即不允许 f 作用于任意公式对。由于含有自由变量的公式与代入项对应的公式之间不相容，这种语义会彻底失效；其原因与联结词 $|$ 无关。另一方面，研究表明，若对公式的构造以及选择函数的适用范围都加以限制（只允许它们作用于句子对），这种语义便能顺利运作，并能针对 FOLS 的公理化得出令人满意的可靠性与完备性结果；该公理化本质上与 [10] 中所考察的公理化相同。

首先请注意，无论如何，无论 f 的定义域是什么，坍缩映射 $\overline{f}$ 都应满足定义 1.1 的条件 (i)-(iv)。因此，假设 f 对 L 的所有无量词句子对都有定义，那么条件 (i)-(iv) 与真值定义 (1) 结合起来，足以为 L_s 的每个无量词句子定义 $\langle \mathcal{M}, f \rangle \models_s \varphi$。所以，要完整定义 $\langle \mathcal{M}, f \rangle \models_s \varphi$，唯一缺少的一步就是定义 $\langle \mathcal{M}, f \rangle \models_s \forall v \varphi(v)$。对此有两种选择，分别称为公式选择语义（简称 FCS）和句子选择语义（SCS），因为它们分别基于对任意公式对和仅对句子对使用选择函数。为区分二者，我们将分别用符号 $\models_s^1$ 和 $\models_s^2$ 表示由此得到的真值关系。

选项 1. 公式选择语义（FCS）这里，L_s 的公式集合 $Fml(L_s)$ 按照通常的闭包步骤，依据联结词（包括 $|$）和量词来定义；每个选择函数 f 则定义在整个 $[Fml(L)]^2$ 上。因此，量化句子的真值定义应如下所示。

$$\langle \mathcal{M}, f \rangle \models_s^1 \forall v \varphi(v) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \overline{f}(\forall v \varphi(v)). \tag{3}$$

容易看出，当且仅当坍缩映射 $\overline{f}$ 与 $\forall$可交换时，该定义才有意义且有效；也就是说，若 $\overline{f}$ 除了满足定义 1.1 的条件 (i)-(iv) 外，还满足以下条件：

(v) $\overline{f}(\forall v\varphi) = \forall v\overline{f}(\varphi)$.[1]

[像往常一样将 $\exists$视为 $\neg\forall\neg$，由 1.1 的 (v) 和 (iii) 可得$\overline{f}(\exists v\varphi) = \exists v\overline{f}(\varphi)$。]

在本小节中，我们常常会把 1.1 的条件 (i)-(iv) 与上文的条件 (v) 一起称为关于 $\overline{f}$ 的"条件 (i)-(v)"。根据 (v)，(3) 可改写为

$$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models^1_s \forall v\varphi(v) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \forall v\overline{f}(\varphi(v)). \tag{4}$$

(4) 的右侧是塔斯基满足的一个实例，因此，当且仅当对于每个 $x \in M$， $\mathcal{M} \models \overline{f}(\varphi(v))(x)$ 都为真时，它才成立；其中， M 中的元素被用作添加到 L 中的参数。因此，(4) 等价地写作

$$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models^1_s \forall v\varphi(v) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \overline{f}(\varphi(v))(x), \text{ for every } x \in M. \tag{5}$$

因此，(4)（或 (5)）决定了相对于 $\models^1_s$， $L_s(M)$ 在 $\langle \mathcal{M}, f\rangle$ 中的每个句子 φ 的真值。我们将真值关系 $\models^1_s$ （显而易见，原因不言自明）称为公式选择语义，简称 FCS。我们将在下文看到，FCS 的严重缺陷并非在于对 $|$的解释，而是因为令人惊讶的是，它不满足全称实例化方案；这是由于 f 应用于含有自由变量的公式对。因此，一个合理的替代方案是将 f 限定为仅用于句子对。

选项 2。句子选择语义（SCS）现在假设选择函数 f 仅为 $L(M) = L \cup M$中的句子定义，其中后者通过加入将 M 视为参数的元素而由 L 扩充。我们令字母 x, y, a, c遍历 M中的元素。问题在于，在这种情况下，坍缩 $\overline{f}$ 如何定义，以及它适用于 L_s的哪些 φ 。例如，对于经典的 $\alpha(v)$ 和 $\beta(v)$， $\overline{f}(\forall v(\alpha(v)|\beta(v)))$ 会是什么？令 $\overline{f}(\forall v(\alpha(v)|\beta(v))) = \forall v\overline{f}(\alpha(v)|\beta(v)) = \forall v f(\alpha(v)\ \beta(v))$ 并不可行，因为 f 不适用于开放公式对。答案很简单：对于 $Q \in \{\forall, \exists\}$,

$$\overline{f}(Qv(\alpha(v)|\beta(v))) \text{ are not defined.} \tag{6}$$

然而，这未必是死路一条。这只会促使我们定义 $\forall v(\alpha(v)|\beta(v))$ 在 $\langle \mathcal{M}, f\rangle$ 中的真值，不通过 (4)，而是采用塔斯基式的方式：

$$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s \forall v(\alpha(v)|\beta(v))) \Leftrightarrow \langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s (\alpha(x)|\beta(x)),$$

[1]否则，就无法看出例如 $\overline{f}(\forall v(\alpha|\beta))$ 如何能够被定义。

对所有 $x \in M$ 均成立。因此，作为（4）的替代定义，我们对 L_s的每个全称良构公式 $\forall v\varphi(v)$ 定义如下：

$$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \forall v\varphi(v) \Leftrightarrow \langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi(x), \text{ for every } x \in M. \tag{7}$$

由（7）结合 1.1 的子句（iii），显然我们还有：

$$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \exists v\varphi(v) \Leftrightarrow \langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi(x), \text{ for some } x \in M. \tag{8}$$

（7）和（8）确定了关于以量词开头的句子的 $\models_s^2$ 定义。这也隐含地表明，对于不以量词开头的 φ，应通过坍缩映射$\overline{f}$ 来定义 $\langle \mathcal{M}$中 φ 的真值，即：$f\rangle$

$$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \overline{f}(\varphi). \tag{9}$$

但这会立刻带来问题，除非我们对 L_s中公式的构造加以限制。比如，考虑句子（$\forall v$（$\alpha|\beta$））|（$\exists u$（$\gamma|\delta$））。那么我们应有：

$$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 (\forall v(\alpha|\beta))|(\exists u(\gamma|\delta)) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \overline{f}[(\forall v(\alpha|\beta))|(\exists u(\gamma|\delta))] \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{M} \models f(\overline{f}(\forall v(\alpha|\beta)), \overline{f}(\exists u(\gamma|\delta))).$$

但根据上面的（6），$\overline{f}$（$\forall v$（$\alpha|\beta$））和 $\overline{f}$（$\exists u$（$\gamma|\delta$））都没有定义，因此上述等价关系的最后一部分没有意义。

结论是，如果我们只想对成对的句子使用选择函数，并且$\models_s^2$ 满足（7）和（8），那么就不应允许（$\forall v$（$\alpha|\beta$））|（$\exists u$（$\gamma|\delta$））这样的公式。也就是说，我们不采用公式的完整集合 Fml（L_s），而考虑受限的公式集合 $RFml$（L_s）。后者与 Fml（L_s）的区别在于，$\varphi|\psi$属于 $RFml$（L_s）当且仅当 φ和 ψ要么是经典的，要么是无量词的。我们将真值关系 $\models_s^2$ 称为句子选择语义，或 SCS，正如我们对 PLS 的相应语义所做的那样。我们将在第5节更详细地考察 $\models_s^2$。

显然，基于 $\models_s^1$ 和 $\models_s^2$ 的两种语义并不等价，因为它们适用于不同的句子集合。然而，存在一些句子φ，对于这些句子，两种真值定义 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^1 \varphi$ 和 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi$都有意义。但一般而言，即使对于这类句子，这些定义也并不一致。事实上，它们彼此都不能推出对方。只需观察（5）和（7）右侧针对 φ 那些不以量词开头的情形，就能轻易发现两者的差异。具体而言，$\overline{f}(\varphi(v))(x)$ 与 $\overline{f}(\varphi(x))$ 一般并不等价。为说明这一点，设 $\varphi(v) := \alpha(v)|\beta(v)$，其中 $\alpha(v)$ 和 $\beta(v)$ 是 L 的公式。

设 $\mathcal{M}$ 是一个 L-结构。为了比较这两种方法，我们必须使用一个在两者中都有意义的 f，也就是说，它适用于$L(M)$中的所有公式对。固定这样一个 f。于是 f 适用于 $\{\alpha(v)\ \beta(v)\}$，并令 $f(\alpha(v)\ \beta(v)) = \alpha(v)$。根据（5），对所有 $x \in M$，$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^1 \forall v(\alpha(v)|\beta(v))$ 当且仅当 $\mathcal{M} \models f(\alpha(v)\ \beta(v))(x)$，因此

$$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^1 \forall v(\alpha(v)|\beta(v)) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \alpha(x), \text{ for all } x \in M. \tag{10}$$

另一方面，根据 (7)，对所有 $x \in M$，$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \forall v(\alpha(v)|\beta(v))$ 当且仅当 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \alpha(x)|\beta(x)$，因此

$$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \forall v(\alpha(v)|\beta(v)) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models f(\alpha(x), \beta(x)), \text{ for all } x \in M. \tag{11}$$

(10) 和 (11) 的右侧可能相当不同，因为对于不同的 $x \in M$，从成对的 $\{\alpha(x)\ \beta(x)\}$ 中选取 f 的方式可能并不一致。例如，对于 $x_1 \neq x_2$，我们可能有 $f(\alpha(x_1)\ \beta(x_1)) = \alpha(x_1)$，而且 $f(\alpha(x_2)\ \beta(x_2)) = \beta(x_2)$。若要使定义 (10) 和 (11) 等价，$f$ 应当是一个一致的选择函数；也就是说，对于公式对 $\{\alpha(\vec{v})\ \beta(\vec{v})\}$，以及任何可代入 $\vec{v}$ 的项组 $\vec{t}$，$f(\alpha(\vec{v})\ \beta(\vec{v})) = \alpha(\vec{v})$ 应当蕴含 $f(\alpha(\vec{t})\ \beta(\vec{t})) = \alpha(\vec{t})$。然而，正如我们将在第 4 节证明的那样，没有任何选择函数 $f: [Fml(L)]^2 \to Fml(L)$ 能满足这一性质。

3 公式选择语义（FCS）与全称实例化的失效

由于 FOLS 扩展了 FOL，FOLS 的任何恰当语义首先都应满足 FOL 的量词公理，即全称实例化和 UI。本节将表明，遗憾的是（而且相当出乎意料），FCS 不满足 UI。

首先回顾一下，给定一种语言 L，每当我们写作 $\varphi(\vec{v})$ 时，对于 L_s 的一个公式，我们的意思是 φ 的自由变量都包含在元组 $\vec{v}$ 的变量之中。接下来可以通过对 φ 的长度作归纳法，轻易验证以下结论。

事实 3.1 对于任意一个定义在公式对上的选择函数 f，以及任意 $\varphi \in Fml(L_s)$，$\overline{f}(\varphi)$ 的自由变量都包含在 φ 的自由变量之中，即 $FV(\overline{f}(\varphi)) \subseteq FV(\varphi)$。特别地，若 φ 是 L_s 的一个句子，则 $\overline{f}(\varphi)$ 是 L 的一个句子。

[一般而言，$FV(\overline{f}(\varphi))\ FV(\varphi)$，因为，例如，我们可能有 $\varphi(v_1, v_2) = \alpha(v_1)|\beta(v_2)$，且 $f(\alpha(v_1)\ \beta(v_2)) = \alpha(v_1)$，因此 $\overline{f}(\varphi) = f(\alpha(v_1)\ \beta(v_2)) = \alpha(v_1)$。]

由此可知，事实表明，$\overline{f}(\varphi)$ 的变量属于 φ 的变量，因此我们可以对每个 $\varphi(\vec{v})$ 写出：

$$\overline{f}(\varphi(\vec{v})) = \overline{f}(\varphi)(\vec{v}). \tag{12}$$

事实 3.2 模式 D 相对于 FCS 是一个重言式。

证明。取 D的一个实例

$$\sigma : (\forall v)(\varphi \to \psi(v)) \to (\varphi \to (\forall v)\psi(v)),$$

其中 φ 不含自由出现的 v，并取任意满足条件 (i)-(v) 的选择函数。显然，应用这些条件可得

$$\overline{f}(\sigma) = [(\forall v)(\overline{f}(\varphi) \to \overline{f}(\psi(v))) \to (\overline{f}(\varphi) \to (\forall v)\overline{f}(\psi(v)))].$$

设 $\overline{f}(\varphi) = \alpha$ 且 $\overline{f}(\psi(v)) = \beta(v)$。那么，最后一个公式可写为

$$\overline{f}(\sigma) = [(\forall v)(\alpha \to \beta(v)) \to (\alpha \to (\forall v)\beta(v))].$$

根据假设，$v \notin FV(\varphi)$；根据事实 3.1，$FV(\overline{f}(\varphi)) \subseteq FV(\varphi)$，因此 $v \notin FV(\alpha)$。所以，$\overline{f}(\sigma)$ 是一阶逻辑模式 D的一个实例，故它在每个 L-结构 $\mathcal{M}$中都成立。因此，$\mathcal{M} \models \overline{f}(\sigma)$，或者等价地，$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models \sigma$。 ⊣

然而，模式 UI 的情况则大不相同。下一个定理表明，在对 L施加较弱条件的情况下，不存在任何选择函数 f，使得对于 L 而言，全称实例化 UI 成为一个重言式模式。

定理 3.3 设 L 是一种语言，其中至少有两个不同的闭项 t_1、t_2，并且有一个含一个自由变元的公式 $\alpha(v)$，使得 $\alpha(t_1) \wedge \neg\alpha(t_2)$ 和 $\neg\alpha(t_1) \wedge \alpha(t_2)$ 都是可满足的。那么，对于每个针对 $Fml(L)$ 的选择函数 f，都存在一个 L-结构 $\mathcal{M}$ 和一个 L_s 中含两个自由变元的公式 $\psi(v_1, v_2)$，使得全称实例化在 $\langle \mathcal{M}, f\rangle$ 中失效，即 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models^1_s (\forall v_1, v_2)\psi(v_1, v_2) \wedge \neg\psi(t_1, t_2)$。

证明。 [首先要注意，上述引理中对 L 的要求相当宽松。例如，任何含有三个不同常元 c_1、c_2、c_3 的 L 都满足这些要求。因为若令 $\alpha(v) = (v = c_3)$，那么 $\alpha(c_1) \wedge \neg\alpha(c_2)$ 和$\neg\alpha(c_1) \wedge \alpha(c_2)$ 在 L-结构中都可满足。]

现在令 L、t_1、t_2 和 $\alpha(v)$ 如上所述。则存在结构 $\mathcal{M}_1$、$\mathcal{M}_2$，使得 $\mathcal{M}_1 \models \alpha(t_1) \wedge \neg\alpha(t_2)$ 且 $\mathcal{M}_2 \models \neg\alpha(t_1) \wedge \alpha(t_2)$。为 $Fml(L)$ 选取一个选择函数 f。只需证明存在一个公式

$\psi(v_1, v_2)$，属于 L_s，满足以下二者之一：$\langle \mathcal{M}_1, f\rangle \models^1_s (\forall v_1, v_2)\psi(v_1, v_2) \wedge \neg\psi(t_1, t_2)$，或$\langle \mathcal{M}_2, f\rangle \models^1_s (\forall v_1, v_2)\psi(v_1, v_2) \wedge \neg\psi(t_1, t_2)$。令 $\alpha(v_2)$ 为由 $\alpha(v_1)$ 得到的公式，其中将 v_1 替换为新变量 v_2。我们考察 f 对公式对 $\{\alpha(v_1)\ \alpha(v_2)\}$ 和 $\{\alpha(t_1)\ \alpha(t_2)\}$ 的作用，并考虑四种可能的情况。

情形 1. $f(\alpha(v_1)\ \alpha(v_2)) = \alpha(v_1)$ 和 $f(\alpha(t_1)\ \alpha(t_2)) = \alpha(t_1)$。

根据假设 $\mathcal{M}_2 \models \neg\alpha(t_1) \wedge \alpha(t_2)$。在标准一阶逻辑中推理，可将其写为:

$$\mathcal{M}_2 \models (\forall v_1 v_2)[v_1 = t_2 \wedge v_2 = t_1 \rightarrow \alpha(v_1)] \wedge \neg[t_2 = t_2 \wedge t_1 = t_1 \rightarrow \alpha(t_1)],$$

or

$$\mathcal{M}_2 \models (\forall v_1 v_2)[v_1 = t_2 \wedge v_2 = t_1 \rightarrow f(\alpha(v_1), \alpha(v_2))] \wedge \neg[t_2 = t_2 \wedge t_1 = t_1 \rightarrow f(\alpha(t_1), \alpha(t_2))],$$

or

$$\langle \mathcal{M}_2, f\rangle \models^1_s (\forall v_1 v_2)[v_1 = t_2 \wedge v_2 = t_1 \rightarrow \alpha(v_1)|\alpha(v_2)] \wedge \neg[t_2 = t_2 \wedge t_1 = t_1 \rightarrow \alpha(t_1)|\alpha(t_2)],$$

或者，由于 $|$具有交换性,

$$\langle \mathcal{M}_2, f\rangle \models^1_s (\forall v_1 v_2)[v_1 = t_2 \wedge v_2 = t_1 \rightarrow \alpha(v_1)|\alpha(v_2)] \wedge \neg[t_2 = t_2 \wedge t_1 = t_1 \rightarrow \alpha(t_2)|\alpha(t_1)].$$

令

$$\psi(v_1, v_2) := [v_1 = t_2 \wedge v_2 = t_1 \rightarrow \alpha(v_1)|\alpha(v_2)],$$

最后一个关系写作

$$\langle \mathcal{M}_2, f\rangle \models^1_s (\forall v_1 v_2)\psi(v_1, v_2) \wedge \neg\psi(t_2, t_1),$$

因此，全称实例化在 $\langle \mathcal{M}_2, f\rangle$ 中失效。

情形 2。 $f(\alpha(v_1)\ \alpha(v_2)) = \alpha(v_1)$ 和 $f(\alpha(t_1)\ \alpha(t_2)) = \alpha(t_2)$。

现在我们使用事实 $\mathcal{M}_1 \models \alpha(t_1) \wedge \neg\alpha(t_2)$。和之前一样，这也可以等价地写成,

$$\mathcal{M}_1 \models (\forall v_1 v_2)[v_1 = t_1 \wedge v_2 = t_2 \rightarrow \alpha(v_1)] \wedge \neg[t_1 = t_1 \wedge t_2 = t_2 \rightarrow \alpha(t_2)],$$

or

$$\mathcal{M}_1 \models (\forall v_1 v_2)[v_1 = t_1 \wedge v_2 = t_2 \rightarrow f(\alpha(v_1), \alpha(v_2))] \wedge$$

$$\neg[t_1 = t_1 \wedge t_2 = t_2 \to f(\alpha(t_1), \alpha(t_2))],$$

or

$$\langle \mathcal{M}_1, f\rangle \models_s^1 (\forall v_1 v_2)[v_1 = t_1 \wedge v_2 = t_2 \to \alpha(v_1)|\alpha(v_2)] \wedge$$
$$\neg[t_1 = t_1 \wedge t_2 = t_2 \to \alpha(t_1)|\alpha(t_2)].$$

因此，令

$$\psi(v_1, v_2) := [v_1 = t_1 \wedge v_2 = t_2 \to \alpha(v_1)|\alpha(v_2)],$$

至此，证明完毕。

情况 3. $f(\alpha(v_1)\ \alpha(v_2)) = \alpha(v_2)$，且 $f(\alpha(t_1)\ \alpha(t_2)) = \alpha(t_1)$。

我们再次利用这一事实：$\mathcal{M}_2 \models \neg\alpha(t_1) \wedge \alpha(t_2)$，由此与前面一样得到

$$\mathcal{M}_2 \models (\forall v_1 v_2)[v_1 = t_1 \wedge v_2 = t_2 \to \alpha(v_2)] \wedge \neg[t_1 = t_1 \wedge t_2 = t_2 \to \alpha(t_1)],$$

or

$$\langle \mathcal{M}_2, f\rangle \models_s^1 (\forall v_1 v_2)[v_1 = t_1 \wedge v_2 = t_2 \to \alpha(v_1)|\alpha(v_2)] \wedge$$
$$\neg(t_1 = t_1 \wedge t_2 = t_2 \to \alpha(t_1)|\alpha(t_2)].$$

因此，令

$$\psi(v_1, v_2) := [v_1 = t_1 \wedge v_2 = t_2 \to \alpha(v_1)|\alpha(v_2)]$$

至此，证明完毕。

情况 4. $f(\alpha(v_1)\ \alpha(v_2)) = \alpha(v_2)$，且 $f(\alpha(t_1)\ \alpha(t_2)) = \alpha(t_2)$。

我们利用事实 $\mathcal{M}_1 \models \alpha(t_1) \wedge \neg\alpha(t_2)$，将其转换为

$$\mathcal{M}_1 \models (\forall v_1 v_2)[v_1 = t_2 \wedge v_2 = t_1 \to \alpha(v_2)] \wedge \neg[t_2 = t_2 \wedge t_1 = t_1 \to \alpha(t_2)],$$

or

$$\langle \mathcal{M}_1, f\rangle \models_s^1 (\forall v_1 v_2)[v_1 = t_2 \wedge v_2 = t_1 \to \alpha(v_1)|\alpha(v_2)] \wedge$$
$$\neg(t_2 = t_2 \wedge t_1 = t_1 \to \alpha(t_2)|\alpha(t_1)].$$

令

$$\psi(v_1, v_2) := [v_1 = t_2 \wedge v_2 = t_1 \to \alpha(v_1)|\alpha(v_2)]$$

这样就完成了。这就结束了证明。 ⊣

与全称实例化（在一阶逻辑中，因此在 FOLS 中也成立）等价的是存在概括（EG）的对偶公理:

$(EG)\quad \varphi(t) \to (\exists v)\varphi(v).$

因此，定理 3.3 等价地表述如下。

推论 3.4 给定任意如上所述的语言 L，对于 $Fml(L)$ 的每个选择函数f，存在 $\mathcal{M}$，使得 EG 在 $\langle \mathcal{M}, f\rangle$ 中不成立；也就是说，存在一个公式 $\varphi(v_1, v_2)$ 和闭项 t_1, t_2，使得 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models^1_s \varphi(t_1, t_2) \wedge \neg(\exists v_1, v_2)\varphi(v_1, v_2)$。

在定理 3.3 中，用于反驳全称实例化的公式 $\psi(v_1, v_2)$ 含有两个自由变元。我们不知道能否用只有一个自由变元的公式来反驳全称实例化。

在定理 3.3 的证明中，我们还用到了形如 $\alpha(v_1)|\alpha(v_2)$ 的叠加公式，这看起来有些牵强。我们能否用形如 $\alpha(\vec{v})|\beta(\vec{v})$ 的叠加来证明 UI 失效，其中 $\alpha(\vec{v})$ 和 $\beta(\vec{v})$ 是不同的公式？答案是肯定的。具体而言，我们基本上可以用相同的论证证明定理 3.3 的以下变体。

定理 3.5 设 L 为一种语言，并假设存在公式 $\alpha(\vec{v})$、$\beta(\vec{v})$ 及其对应的闭项元组 $\vec{t}$、$\vec{s}$，使得：

(a) $\alpha(\vec{s}) = \beta(\vec{t})$，(b) $\alpha(\vec{t}) = \beta(\vec{s})$，(c) $\alpha(\vec{t}) \wedge \neg\beta(\vec{t})$ 和 $\neg\alpha(\vec{t}) \wedge \beta(\vec{t})$ 均可满足。

那么，对每个选择函数 f，都存在一个结构 $\mathcal{M}$、一个公式 $\psi(\vec{v})$ 以及一些闭项 $\vec{t}$，使得 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models^1_s (\forall\vec{v})\psi(\vec{v}) \wedge \neg\psi(\vec{t})$。

证明。[例如，若 $<$ 是 L 的一个二元关系，且 $\alpha(v_1, v_2) := (v_1 < v_2)$，$\beta(v_1, v_2) := (v_1 > v_2)$，$\vec{t} = \langle t_1, t_2\rangle$ 和 $\vec{s} = \langle t_2, t_1\rangle$，那么 $\alpha, \beta, \vec{t}$ 和 $\vec{s}$ 满足上述条件 (a)-(c)。]

论证与定理 3.3 的证明完全相同。我们固定结构 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$，使得 $\mathcal{M}_1 \models \alpha(\vec{t}) \wedge \neg\beta(\vec{t})$ 且 $\mathcal{M}_2 \models \neg\alpha(\vec{t}) \wedge\beta(\vec{t})$。为 $Fml(L)$ 选取一个选择函数 f。只需证明存在一个公式 $\psi(\vec{v})$，其属于 L_s，并且满足以下二者之一：$\langle \mathcal{M}_1, f\rangle \models^1_s (\forall\vec{v})\psi(\vec{v}) \wedge \neg\psi(\vec{r})$，或$\langle \mathcal{M}_2, f\rangle \models^1_s (\forall\vec{v})\psi(\vec{v}) \wedge \neg\psi(\vec{r})$，其中 $\vec{r} = \vec{t}$ 或 $\vec{r} = \vec{s}$。与之前一样，我们考察 f 如何作用于公式对 $\{\alpha(\vec{v})\ \beta(\vec{v})\}$ 和 $\{\alpha(\vec{t})\ \beta(\vec{t})\} = \{\alpha(\vec{s})\ \beta(\vec{s})\}$，并像之前一样考察由此产生的四种可能情况。具体而言：

Case 1. $f(\alpha(\vec{v}), \beta(\vec{v})) = \alpha(\vec{v})$ and $f(\alpha(\vec{t}), \beta(\vec{t})) = \alpha(\vec{t})$.

Case 2. $f(\alpha(\vec{v}), \beta(\vec{v})) = \alpha(\vec{v})$ and $f(\alpha(\vec{t}), \beta(\vec{t})) = \beta(\vec{t})$.

Case 3. $f(\alpha(\vec{v}), \beta(\vec{v})) = \beta(\vec{v})$ and $f(\alpha(\vec{t}), \beta(\vec{t})) = \alpha(\vec{t})$.

Case 4. $f(\alpha(\vec{v}), \beta(\vec{v})) = \beta(\vec{v})$ and $f(\alpha(\vec{t}), \beta(\vec{t})) = \beta(\vec{t})$.

在上述每种情形中，我们都按照证明 3.3 中的相应情形处理。细节留给读者。⊣

作为本节的结尾，我们要指出，UI 的失效对任何类似于 Λ 的量化逻辑系统而言都是致命的：这意味着，不可能对 Λ 作出合理的“弱化”，使得在 UI 失效的同时仍然使用 $\forall$。这是因为，UI的失效与排中律（EM）的失效截然不同；后者催生了一种弱于经典逻辑、却仍颇有趣味的逻辑。原因在于，UI 恰好表达了“所有”的含义，而“所有”是一个基本的逻辑常项；排中律则并不表达任何逻辑常项的含义。

4 一致选择函数的不可能性

在第2.2节末尾比较真值关系 $\models_s^1$ 和 $\models_s^2$时，我们说过，即使对于在两种语义中都有定义的选择函数 f，两种真值概念也会出现偏差，因为 f 作为 FCS 中的选择函数时不可能是一致的。下面我们将这一断言精确表述。

定义4.1 若选择函数 f：$[Fml(L)]^2 \to Fml(L)$满足以下条件，则称其为一致的：对于任意两个公式 $\alpha(\vec{v})$、$\beta(\vec{v})$（其中 $\vec{v}$ 是自由的），以及任意一个可代入 α中 $\vec{v}$ 的项元组 $\vec{t}$，若$\beta(\alpha(\vec{v})\ \beta(\vec{v})) \sim \alpha(\vec{v})$，则$f(\alpha(\vec{t})\ \beta(\vec{t})) \sim \alpha(\vec{t})$；或者等价地，若以下等价成立：

$$[f(\alpha(\vec{v}), \beta(\vec{v}))](\vec{t}) \sim f(\alpha(\vec{t}), \beta(\vec{t})). \tag{13}$$

注。上文条件（13）中写作 $\sim$ 而非 $=$，是因为需要涵盖 $\alpha(\vec{v}) \sim \beta(\vec{v})$的情形。在这种情况下，$\alpha(\vec{t}) \sim \beta(\vec{t})$也成立，而且从 $\{\alpha(\vec{v})\ \beta(\vec{v})\}$中作出的选择，以及从 $\{\alpha(\vec{t})\ \beta(\vec{t})\}$中作出的选择，都是无关紧要的。因此，若 $f(\alpha(\vec{v})\ \beta(\vec{v})) = \alpha(\vec{v})$，而 $f(\alpha(\vec{t})\ \beta(\vec{t})) = \beta(\vec{t})$，那么$f(\alpha(\vec{t})\ \beta(\vec{t})) \neq \alpha(\vec{t})$，而 $f(\alpha(\vec{t})\ \beta(\vec{t})) \sim \alpha(\vec{t})$。

遗憾的是，对于任何一阶语言 L，都不存在统一的选择函数 f：$[Fml(L)]^2 \to Fml(L)$，因此定义4.1是空的。

命题4.2 对于任何语言 L，都不存在 L 的统一选择函数。

证明。设 L 是任意一阶语言。显然，我们可以选取一个公式 $\alpha(v)$ 和变量 v_1、v_2，使得 $\alpha(v_1) \not\sim \alpha(v_2)$。设 f 是 $[Fml(L)]^2$，的一个一致选择函数，也就是说，f 满足（13）。特别地，这对 $\{\alpha(v_1)\ \alpha(v_2)\}$ 这一对以及项组 $\vec{t} = \langle v_2, v_1\rangle$ 都成立。不失一般性，设 $f(\alpha(v_1)\ \alpha(v_2)) = \alpha(v_1)$。那么

$$[f(\alpha(v_1), \alpha(v_2))](\vec{t}) = \alpha(v_1)(\vec{t}) = \alpha(v_2).$$

由（13）

$$[f(\alpha(v_1),\alpha(v_2))](\vec{t}) \sim f(\alpha(v_1)(\vec{t}),\alpha(v_2)(\vec{t})) = f(\alpha(v_2),\alpha(v_1)),$$

因此，根据上述关系

$$f(\alpha(v_2),\alpha(v_1)) \sim \alpha(v_2). \tag{14}$$

但是，依据我们的假设，$f(\alpha(v_2)\ \alpha(v_1)) = f(\alpha(v_1)\ \alpha(v_2)) = \alpha(v_1)$。因此，$\alpha(v_1) \sim \alpha(v_2)$，这就产生了矛盾。⊣

5 一阶叠加逻辑的句子选择语义（SCS）

现在我们来考察基于真值关系 $\models_s^2$ 的 FOLS 的 SCS 语义，该关系在第 2 节中大致描述为选项 2。正如那里已经提到的，这种语义假定对 L_s 的句法施加限制，即除非量化公式是经典的，否则 $|$ 不应作用于它们。因此，下文将讨论 L_s 的一类公式，称为“受限公式/句子”。为定义它们，我们先定义“基本公式/句子”这一类。

定义 5.1 设 L 是一种一阶语言，且 $\mathcal{M} = \langle M、 \ldots\rangle$ 是一个 L 结构。

(i) $BFml(L_s(M))$ 中 $L_s(M)$ 的基本公式集合，是满足以下条件的最小公式集合 X：(a) $Fml(L(M)) \subset X$；(b) X 对联结词 $\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$、$|$ 和 $\neg$ 封闭（但对量词不封闭）。$BSen(L_s(M))$ 中 $L_s(M)$ 的基本句子集合，是 $BFml(L_s(M))$ 中不含自由变量的公式子集。

(ii) $RFml(L_s(M))$ 中 $L_s(M)$ 的受限公式集合，是满足以下条件的最小公式集合 X：(a) $BFml(L_s(M)) \subset X$；(b) X 对 $\wedge$、$\vee$、$\rightarrow$、$\leftrightarrow$、$\neg$ 和 $\forall$、$\exists$ 封闭（但对 $|$ 不封闭）。$RSen(L_s(M))$ 中 $L_s(M)$ 的受限句子集合，是$RFml(L_s(M))$ 中不含自由变量的公式子集。

接下来讨论选择函数。与 FCS 中使用的选择函数不同，SCS 的选择函数 f 仅适用于$L(M)$中的句子对，即 f: $[Sen(L(M))]^2 \rightarrow Sen(L(M))$。我们用 $\mathcal{F}_M$表示所有这类函数的集合。此外，SCS 与 FCS 的不同之处在于，由 f 诱导的坍缩函数 $\overline{f}$ 仅对基本句子定义，即对 $BSen(L_s(M))$中的元素定义。

定义 5.2 给定 $f: [Sen(L(M))]^2 \to Sen(L(M))$，函数 $\overline{f}: BSen(L_s(M)) \to Sen(L(M))$ 按照定义 1.1 的子句定义如下:

(i) $\overline{f}(\alpha) = \alpha$, for $\alpha \in Sen(L(M))$,
(ii) $\overline{f}(\varphi \wedge \psi) = \overline{f}(\varphi) \wedge \overline{f}(\psi)$,
(iii) $\overline{f}(\neg\varphi) = \neg\overline{f}(\varphi)$,
(iv) $\overline{f}(\varphi|\psi) = f(\overline{f}(\varphi), \overline{f}(\psi))$.

容易验证，该定义是良定义的，并且对每个$\varphi \in BSen(L_s(M)$都能得到$\overline{f}(\varphi)$。特别是关于步骤 (iv)，注意，如果 $\varphi|\psi$ 属于 $BSen(L_s(M))$，那么 φ和 ψ也属于其中，因此 $\overline{f}(\varphi)$和 $\overline{f}(\psi)$都有定义，并且是 $L(M)$中的句子。因此，$f(\overline{f}(\varphi)\ \overline{f}(\psi))$也有定义。

现在给出真值定义 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi$，其中 $\mathcal{M}$ 是一个 L-结构，$f \in \mathcal{F}_M$ 和 $\varphi \in RSen(L_s(M))$。

定义 5.3 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi$ 通过对 φ的长度进行归纳，按照以下子句定义。（我们将 $\wedge$、 $\neg$、 $|$ 和 $\forall$ 视为基本联结词，其他的则视为缩写。）

(i) 对于 $\alpha \in Sen(L(M))$，$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \alpha$当且仅当 $\mathcal{M} \models \alpha$。(ii) $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi \wedge \psi$当且仅当 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi$且 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \psi$。(iii) $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \neg\varphi$当且仅当 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \not\models_s^2 \varphi$。(iv) $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi|\psi$当且仅当 $\mathcal{M} \models f(\overline{f}(\varphi)\ \overline{f}(\psi))$。(v) 对每个 $x \in M$，$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 (\forall v)\varphi(v)$当且仅当 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi(x)$。

很容易验证，上述定义为每个 $\varphi \in RSen(L_s(M))$ 唯一赋予一个真值。具体而言，子句 (i)–(iv) 为所有基本句子赋予真值，而子句 (v) 则是量化句子（非经典句子）所必需的。

给定一个类 $X \subseteq \mathcal{F}$，X-逻辑后承关系 $\models_X^2$ 和 X-重言式的概念 $\models_X^2 \varphi$ 按照通常方式定义。我们用 $Taut_X^2$ 表示 $\models_X^2 \varphi$-重言式的集合。我们仍用 $Asso$、 Reg、 Reg^* 和 Dec 分别表示 $\mathcal{F}$ 中结合的、正则的、正则且结合的，以及正则、结合且 $\neg$-递减元素的类。特别地，我们有

$$Dec \subset Reg^* \subset Reg \subset \mathcal{F},$$

因此

$$Taut(\mathcal{F}) \subseteq Taut(Reg) \subseteq Taut(Reg^*) \subseteq Taut(Dec).$$

给定一个类 $X \subseteq \mathcal{F}$ 和一个形式系统 Λ，该系统由公理（集合 $\models_X^2 \varphi$- 重言式）和推理规则组成，我们将其记为

$$\mathrm{RFOLS}(X, \Lambda)$$

通常，具有语义部分 X 和句法部分 Λ的逻辑系统（前缀“R”表示提醒我们，所研究的是 L_s的受限句子类）。

5.1 可靠性

第 2.1 节中介绍的形式系统 Λ_0, Λ_1, Λ_2 和 Λ_3 将对选择函数类 $\mathcal{F}$, Reg, Reg^* 和 Dec 进行形式化。因此，我们将讨论以下逻辑：

$$\mathrm{RFOLS}(\mathcal{F},\Lambda_0),\ \mathrm{RFOLS}(Reg,\Lambda_1),\ \mathrm{RFOLS}(Reg^*,\Lambda_2),\ \mathrm{RFOLS}(Dec,\Lambda_3).$$

由于我们只处理受限公式，因此必须谨慎对待上述系统 Λ_i 的句法。具体来说，需要注意以下几点。

1) 代入上述公理模式 S_i 的公式必须是受限公式，也就是说 $S_i \subset RFml($$L_s$)。

2) 每当我们写下 $\Sigma \vdash_{\Lambda_i} \varphi$ 时，都隐含地假设 $\Sigma \cup \{\varphi\} \subset RFml(L_s)$

3) 接下来，规则 SV 表示，如果 $\varphi \leftrightarrow \psi$ 在 Λ_0 中可证，那么我们可以推导出 $\varphi|\sigma \leftrightarrow \psi|\sigma$。但是，由于 $|$ 只适用于非量化公式（除非它们是经典的），因此 φ 和 ψ，以及 $\varphi \leftrightarrow \psi$ 和 σ，都必须是基本公式。

4) 在满足上述条件的情况下，如果 φ_1,... , φ_n 是一个从 Σ出发、证明 φ 的 Λ_i-证明，那么每个 φ_i 都受到限制。

本小节及后续小节中的大多数结果，其证明都与 [10]中相应结果的证明相似。不过，所需的改动，尤其是完备性定理证明中的改动，相当多，因此我们在此给出完整的详细证明。

定理 5.4 设 $X \subseteq \mathcal{F}$。如果 Λ是一个满足 Ax(Λ) $\subset Taut(X)$ 且 IR(Λ) $=$ {MP,GR} 的系统，那么 RFOLS(X, Λ) 是可靠的。特别地，RFOLS($\mathcal{F}, \Lambda_0$) 是可靠的。

证明。设 X、 Λ 如上所述，并设 $\Sigma \vdash_\Lambda \varphi$，其中 Σ 是一组句子， φ是一个句子。设 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$，其中 $\varphi_n = \varphi$是 φ的一个 Λ-证明。照例，我们通过对 i进行归纳，证明对每个 $1 \le i \le n$都有 $\Sigma \models_X \varphi_i$。给定 i，假设对所有 $j < i$，断言都成立，并设 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \Sigma$，其中某个 L-结构 $\mathcal{M}$和 $f \in X$满足条件。我们证明 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi_i$。若 $\varphi_i \in \Sigma$，则显然。若$\varphi_i \in$Ax(Λ)，那么 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi_i$，因为根据假设，Ax($\Lambda$) $\subset Taut(X)$且 $f \in X$。接下来，假设 φ_i是借助 MP推导出来的。那么存在句子φ_j、 $\varphi_k = (\varphi_j \to \varphi_i)$，其中某些 j、$k < i$。根据归纳

假设，$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi_j$且 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi_k$。因此 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi_i$。最后，设 φ_i 是借助 GR推导出来的，即存在 $j < i$ 和$\varphi_j(v)$，使得 $\varphi_i = (\forall v)\varphi_j(v)$。（$\Sigma$ 是一组句子，因此 v 不会在Σ中自由出现。）根据归纳假设，对每个 $x \in M$都有 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi_j(x)$。于是根据 $\models_s^2$的定义，$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 (\forall v)\varphi_j(v)$。因此 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi_i$。⊣

与 Λ_0 不同，用于 $i = 1$、2、3 的形式系统 Λ_i 还包含规则 SV，该规则已在第1.1节和第2.1节中提及。不过，由于我们使用的是带有句法限制的语言，因此必须对它作出更具体的说明。回想一下，只有当 φ 和 ψ 是基本公式时，$\varphi|\psi$ 才有意义，因此这里 SV 的形式为：

$$(SV)\quad For\ \ \varphi, \psi, \sigma \in BFml(L_s),\ \text{if}\ \ \varphi \leftrightarrow \psi \ \text{is provable in}\ \Lambda_0$$

$$infer\ that\quad \varphi|\sigma \leftrightarrow \psi|\sigma.$$

定理5.5 设 $X \subseteq Reg$。若 Λ 是一个系统，满足 $\mathbf{Ax}(\Lambda) \subset Taut(X)$ 且 $\mathbf{IR}(\Lambda) = \{\mathrm{MP},\ GR, SV\}$，则 $\mathbf{RFOLS}(X, \Lambda)$ 是可靠的。特别地，$\mathbf{RFOLS}(Reg, \Lambda_1)$、$\mathbf{RFOLS}(Reg^*, \Lambda_2)$ 和 $\mathbf{RFOLS}(Dec, \Lambda_3)$ 都是可靠的。

证明。设 $X \subseteq Reg$，$\mathbf{Ax}(\Lambda) \subset Taut(X)$ 且 $\mathbf{IR}(\Lambda) = \{\mathrm{MP}, GR, SV\}$，并设 $\Sigma \vdash_\Lambda \varphi$。设 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$，其中 $\varphi_n = \varphi$，是 φ 的一个 Λ-证明。我们对 i 作归纳，证明对所有 $i = 1, \ldots, n$，都有 $\Sigma \models_X \varphi_i$。设 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \Sigma$，且 $f \in X$。给定 φ_i，证明 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi_i$（利用归纳假设）的过程与定理 5.4 的证明完全相同，除了一种情况：φ_i 是由某个句子 φ_j（其中 $j < i$）通过规则 SV 得出的。这意味着 $\varphi_i = (\sigma|\tau \leftrightarrow \rho|\tau)$，而 $\varphi_j = (\sigma \leftrightarrow \rho)$，其中 $\vdash_{\Lambda_0} (\sigma \leftrightarrow \rho)$。此外，$\sigma$, ρ 和 τ 都是基本句子。现在，Λ_0 是一个满足上述 5.4 中关于 $X = \mathcal{F}$ 的条件的系统，因此 $\models_{\mathcal{F}}^2 (\sigma \leftrightarrow \rho)$。这意味着，对每个 L-结构 $\mathcal{N}$ 和每个 $g \in \mathcal{F}$，都有 $\langle \mathcal{N}, g\rangle \models_s^2 (\sigma \leftrightarrow \rho)$。由于 σ, ρ 和 τ 都是基本句子，$\overline{f}(\sigma)$、$\overline{f}(\rho)$ 和 $\overline{f}(\tau)$ 均有定义；此外，$\langle \mathcal{N}, g\rangle \models_s^2 (\sigma \leftrightarrow \rho)$ 等价于 $\mathcal{N} \models \overline{g}(\sigma) \leftrightarrow \overline{g}(\rho)$。由于这对每个 $\mathcal{N}$ 都成立，$\overline{g}(\sigma) \leftrightarrow \overline{g}(\rho)$ 是一个经典重言式；或者说，对每个 $g \in \mathcal{F}$，都有 $\overline{g}(\sigma) \sim \overline{g}(\rho)$。特别地，$\overline{f}(\sigma) \sim \overline{f}(\rho)$。现在，由于 $X \subseteq Reg$，$f \in X$ 蕴含 f 是正则的，因此 $\overline{f}(\sigma) \sim \overline{f}(\rho)$ 蕴含 $f(\overline{f}(\sigma)\ \overline{f}(\tau)) \sim f(\overline{f}(\rho)\ \overline{f}(\tau))$，或者说 $\overline{f}(\sigma|\tau) \sim \overline{f}(\rho|\tau)$；因此 $\mathcal{M} \models \overline{f}(\sigma|\tau) \leftrightarrow \overline{f}(\rho|\tau)$，或者说 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 (\sigma|\tau \leftrightarrow \rho|\tau)$，即 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi_i$，如所需。另一断言由以下事实得出：所讨论的逻辑显然满足一般陈述的条件。证明完毕。⊣

5.2 逻辑 RFOLS($\mathcal{F}, \Lambda_0$) 的完备性

由于 Λ_0 的规则只有 MP 和 GR，演绎定理（DT）在 Λ_0 中成立，因此根据事实 1.8，完备性定理的两种形式 CT1 和 CT2 等价，所以我们可以统称为“完备性”，而不必区分 CT1-完备性或 CT2-完备性。此外，借助 DT 和标准证明，每个由 L_s 语言中的公式构成的相容集 Σ，都可以扩充为语言 L_s^+ 中的一个完备且 Henkin 完备的公式集 Σ^+，其中 $L^+\backslash L$ 由新常元组成。（回忆一下，若公式集 Σ 满足：只要 Σ 包含存在公式 $\exists v\varphi(v)$，它也包含 $\varphi(c)$，其中某个 $c \in L$ 可作为 $\exists v\varphi(v)$ 的见证，那么该集就是 Henkin完备集。）还要回忆，对于相容且完备的 $\Sigma \subseteq Sen(L_s)$，以下结论成立：(a) 对每个 $\varphi \in Sen(L_s)$，$\varphi \in \Sigma$ 当且仅当 $\neg\varphi \notin \Sigma$；(b) $\varphi \wedge \psi \in \Sigma$ 当且仅当 $\varphi \in \Sigma$ 且 $\psi \in \Sigma$；(c) 若 $\Sigma \vdash_K \varphi$，则 $\varphi \in \Sigma$。

在讨论上一小节引入的逻辑之前，我们先给出一个关于 L_s 中一致、完备且 Henkin 完备的句子集 Σ 的一般可满足性判据。给定这样的集合 Σ，若我们设 $\Sigma_1 = \Sigma \cap Sen(L)$（即包含 Σ 中经典句子的 Σ 的子集），显然 Σ_1 是 L 中一个一致、完备且 Henkin 完备的句子集。根据一阶逻辑完备性定理，存在一个 L 结构 $\mathcal{M}$，使得对于每个 $\alpha \in Sen(L)$，$\alpha \in \Sigma_1$ 当且仅当 $\mathcal{M} \models \alpha$。我们得到如下可满足性判据。

引理 5.6 设 $X \subseteq \mathcal{F}$ 和 $\Lambda \subset Taut(X)$。再设 Σ 是 L_s 中一个 Λ-一致、完备且 Henkin 完备的句子集，并设 $\Sigma_1 = \Sigma \cap Sen(L)$ 和 $\mathcal{M}$ 满足

$$\alpha \in \Sigma_1 \ \Leftrightarrow\ \mathcal{M} \models \alpha. \tag{15}$$

那么，给定 $f \in X$、$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \Sigma$，当且仅当对每个 $\varphi \in BSen(L_s)$（L_s 的基本句子集），

$$\varphi \in \Sigma \ \Rightarrow \overline{f}(\varphi) \in \Sigma. \tag{16}$$

（实际上，(16) 等价于

$$\varphi \in \Sigma \ \Leftrightarrow \overline{f}(\varphi) \in \Sigma,$$

但另一个方向可由 (16)、Σ 的相容性和完备性，以及 $\overline{f}(\neg\varphi) = \neg\overline{f}(\varphi)$ 这一事实推出。）

证明。取一个 $f \in X$，并假设 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \Sigma$。那么根据 Σ 的完备性和 $\models_s^2$ 的定义，对每个 $\varphi \in BSen(L_s)$，

$$\varphi \in \Sigma \ \Leftrightarrow\ \langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \varphi \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \overline{f}(\varphi).$$

现在由 (15)，$\mathcal{M} \models \overline{f}(\varphi) \Rightarrow \overline{f}(\varphi) \in \Sigma_1 \subset \Sigma$。因此 $\varphi \in BSen(L_s) \cap \Sigma \Rightarrow \overline{f}(\varphi) \in \Sigma$。于是 (16) 成立。

反过来，假设（16）为真。我们必须证明 $\langle \mathcal{M}, f \rangle \models_s^2 \Sigma$。取某个 $\varphi \in \Sigma$。先假设 φ 是基本的，即 $\varphi \in BSen(L_s)$。那么 $\overline{f}(\varphi)$ 有定义。由（16），$\overline{f}(\varphi) \in \Sigma$，因此 $\overline{f}(\varphi) \in \Sigma_1$，因为 $\overline{f}(\varphi)$ 是经典的。所以由（15），$\mathcal{M} \models \overline{f}(\varphi)$。这意味着 $\langle \mathcal{M}, f \rangle \models_s^2 \varphi$，正如所需。

因此，只需证明 $\langle \mathcal{M}, f \rangle \models_s^2 \varphi$，对于 $\varphi \in RSen(L_s) \backslash BSen(L_s)$。在这种情况下，$\varphi$ 是基本公式的布尔联结词与量词组合。因此，我们可以对其由基本公式构造而成的长度使用归纳法，证明 $\langle \mathcal{M}, f \rangle \models_s^2 \varphi$。由于 Σ 的完备性，关于布尔联结词的归纳步骤显然成立。因此，只需证明：只要 $\exists v \varphi(v) \in \Sigma$，就有 $\langle \mathcal{M}, f \rangle \models_s^2 \exists v \varphi(v)$，并假设这对 φ 成立。但是，如果 $\exists v \varphi(v) \in \Sigma$，那么由 Σ 的 Henkin 完备性，对于某个 $c \in L$，有 $\varphi(c) \in \Sigma$。根据归纳假设，$\langle \mathcal{M}, f \rangle \models_s^2 \varphi(c)$。因此，$\langle \mathcal{M}, f \rangle \models_s^2 \exists v \varphi(v)$。证明完毕。⊣

现在来讨论 RFOLS$(\mathcal{F}, \Lambda_0)$ 的完备性。证明的关键步骤是该引理。证明思路与 [9] 中引理 3.8 的证明非常相似。

引理 5.7 设 $\Sigma(\vec{v}) \subset RFml(L_s)$ 是 L_s 的一个 Λ_0-一致、完备且 Henkin 完备的受限公式集。那么 $\Sigma(\vec{v})$ 是 $\mathcal{F}$-可满足的。

证明。设 $\Sigma(\vec{v})$ 是 L_s 的一个 Λ_0-一致、完备且 Henkin 完备的公式集。令 $\Sigma_1(\vec{v}) = \Sigma(\vec{v}) \cap Fml(L)$。显然，$\Sigma_1(\vec{v})$ 是一个一致、完备且 Henkin 完备的经典 L 公式集。根据一阶逻辑完备性定理，存在一个 L 结构 $\mathcal{M} = \langle M, \ldots \rangle$ 和一个元组 $\vec{a} \in M$，使得

$$\alpha \in \Sigma_1(\vec{a}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \alpha. \tag{17}$$

设 $L(\vec{a})$ 是通过加入参数 $\vec{a} \in M$ 对 L 扩充所得的集合。不失一般性，且由于亨金完备性，我们可以假设 $L(\vec{a}) = L$。否则，我们可以用 $\Sigma_1^*(\vec{a}) = \{\alpha(\vec{a}) : \mathcal{M} \models \alpha(\vec{a})\}$ 替代 $\Sigma_1(\vec{a})$。由于序列 $\vec{a}$中的每个元素 a_i 都有 $\exists v(v = a_i)$ 属于 $\Sigma_1^*(\vec{a})$，且 a_i 是 $\exists v(v = a_i)$ 的（本质上）唯一见证参数，因此可得 $a_i \in L$。此外，如果从 $\Sigma_1^*(\vec{a})$ 开始，我们可以很容易地将其扩充为 $L_s(\vec{a})$ 的一个一致、完备且 Henkin 完备的句子集 $\Sigma^*(\vec{a})$，使得 $\Sigma(\vec{a}) \subseteq \Sigma^*(\vec{a})$。

现在 $\Sigma_1(\vec{a}) \subset \Sigma(\vec{a})$。因此，应用引理 5.6 的判据，为了证明 $\Sigma(\vec{a})$ 可满足，只需构造一个选择函数

g： $[Sen(L)]^2 \to Sen(L)$，使得对于每个 $\varphi \in BSen(L)$，

$$\varphi \in \Sigma(\vec{a}) \Rightarrow \overline{g}(\varphi) \in \Sigma(\vec{a}). \tag{18}$$

为此，我们针对任意 $\varphi, \psi \in BSen(L_s)$，考察 $\Sigma(\vec{a})$ 的可能子集，其中的元素为 $\varphi|\psi$, φ, ψ 或它们的否定。具体如下:

(a1) $\{\varphi|\psi, \varphi, \psi\} \subset \Sigma(\vec{a})$ (a2) $\{\varphi|\psi, \varphi, \neg\psi\} \subset \Sigma(\vec{a})$ (a3) $\{\varphi|\psi, \neg\varphi, \psi\} \subset \Sigma(\vec{a})$ (a4) $\{\neg(\varphi|\psi) \neg\varphi, \neg\psi\} \subset \Sigma(\vec{a})$ (a5) $\{\neg(\varphi|\psi) \varphi, \neg\psi\} \subset \Sigma(\vec{a})$ (a6) $\{\neg(\varphi|\psi) \neg\varphi, \psi\} \subset \Sigma(\vec{a})$

其余情况

(a7) $\{\varphi|\psi, \neg\varphi, \neg\psi\} \subset \Sigma(\vec{a})$

(a8) $\{\neg(\varphi|\psi), \varphi, \psi\} \subset \Sigma(\vec{a})$

都不可能，因为它们与 Λ_0-相容性以及$\Sigma(\vec{a})$的完备性相矛盾。事实上，在情况 (a7) 中，我们有 $\neg\varphi \wedge \neg\psi \in \Sigma(\vec{a})$。此外， $\varphi|\psi \in \Sigma(\vec{a})$，因此根据$S_2$ 和完备性，$\varphi \vee \psi \in \Sigma(\vec{a})$，这就产生了矛盾。在情况 (a8) 中， $\varphi \wedge \psi \in \Sigma(\vec{a})$。此外， $\neg(\varphi|\psi) \in \Sigma(\vec{a})$，因此根据 S_1 和完备性， $\neg(\varphi \wedge \psi) \in \Sigma(\vec{a})$，这就产生了矛盾。

给定一对 $\{\alpha, \beta\}$ L的句子，若对于 $\varphi = \alpha$ 和 $\psi = \beta$，上述对应的情形 (ai) 对 $1 \leq i \leq 6$成立，我们就称“$\{\alpha, \beta\}$ 满足 (ai)”。我们定义 L 的选择函数 g 如下:

$$g(\alpha, \beta) = \begin{cases} (i)\ \alpha, \text{ if } \{\alpha, \beta\} \text{ satisfies (a2) or (a6)} \\ (ii)\ \beta, \text{ if } \{\alpha, \beta\} \text{ satisfies (a3) or (a5)} \\ (iii) \text{ any of the } \alpha, \beta, \text{ if } \{\alpha, \beta\} \text{ satisfies (a1) or (a4).} \end{cases} \tag{19}$$

断言。 $\overline{g}$ 满足蕴含式 (18)。

断言的证明。我们对 φ 的长度使用归纳法来证明 (16)。对于 $\varphi = \alpha \in Sen(L)$， $\overline{g}(\alpha) = \alpha$，因此 (16) 显然成立。同理，关于 $\wedge$ 和 $\neg$ 的归纳步骤可直接由以下事实得出： $\overline{g}$ 与这些联结词可交换，且 $\Sigma(\vec{a})$具有完备性。因此，归纳中唯一不平凡的步骤是关于 $\varphi|\psi$的。只需假设

$$\varphi \in \Sigma(\vec{a}) \ \Rightarrow \overline{g}(\varphi) \in \Sigma(\vec{a}), \tag{20}$$

$$\psi \in \Sigma(\vec{a}) \ \Rightarrow \overline{g}(\psi) \in \Sigma(\vec{a}), \tag{21}$$

并证明

$$\varphi|\psi \in \Sigma(\vec{a}) \Rightarrow \overline{g}(\varphi|\psi) \in \Sigma(\vec{a}). \tag{22}$$

假设 $\varphi|\psi \in \Sigma(\vec{a})$。那么，$\Sigma(\vec{a})$ 中可能出现的 φ、ψ 及其否定的组合只有上述情形 (a1)、(a2) 和 (a3)。要证明 (22)，只需检验在这些情形下 $\overline{g}(\varphi|\psi) \in \Sigma(\vec{a})$。注意，$\overline{g}(\varphi|\psi) = g(\overline{g}(\varphi)\ \overline{g}(\psi)) = g(\alpha,\beta)$，其中 $\overline{g}(\varphi) = \alpha$ 和 $\overline{g}(\psi) = \beta$ 是 L 的句子，因此 (19) 适用。

情形 (a1)：此时 $\varphi \in \Sigma(\vec{a})$ 且 $\psi \in \Sigma(\vec{a})$。由 (20) 和 (21)，$\overline{g}(\varphi) \in \Sigma(\vec{a})$ 且 $\overline{g}(\varphi) \in \Sigma(\vec{a})$。根据定义 (19)，$\overline{g}(\varphi|\psi) = g(\overline{g}(\varphi)\ \overline{g}(\psi))$ 可以是 $\overline{g}(\varphi)$ 或 $\overline{g}(\psi)$。因此，无论哪种情形，$\overline{g}(\varphi|\psi) \in \Sigma(\vec{a})$。

情形 (a2)：于是 $\varphi \in \Sigma(\vec{a})$ 和 $\neg\psi \in \Sigma(\vec{a})$。由 (20) 和 (21)，$\overline{g}(\varphi) \in \Sigma(\vec{a})$，$\overline{g}(\psi) \notin \Sigma(\vec{a})$。又由 (19)，$\overline{g}(\varphi|\psi) = g(\overline{g}(\varphi)\ \overline{g}(\psi)) = \overline{g}(\varphi)$，因此$\overline{g}(\varphi|\psi) \in \Sigma(\vec{a})$。

情形 (a3)：于是 $\neg\varphi \in \Sigma(\vec{a})$，$\psi \in \Sigma(\vec{a})$。由 (20) 和 (21)，$\overline{g}(\varphi) \notin \Sigma(\vec{a})$，$\overline{g}(\psi) \in \Sigma(\vec{a})$。由 (19)，$\overline{g}(\varphi|\psi) = g(\overline{g}(\varphi)\ \overline{g}(\psi)) = \overline{g}(\psi)$，因此 $\overline{g}(\varphi|\psi) \in \Sigma(\vec{a})$。断言的证明至此完成。

由此可知条件 (18) 成立，因此根据引理 5.6，由于 $\mathcal{M} \models \Sigma_1(\vec{a})$，其中 $\Sigma_1(\vec{a}) = \Sigma(\vec{a}) \cap Sen(L)$，$\langle \mathcal{M}, g\rangle \models_s^2 \Sigma(\vec{a})$，所以 $\Sigma(\vec{a})$ 是$\mathcal{F}$-可满足的。⊣

定理 5.8（RFOLS($\mathcal{F}, \Lambda_0$) 的完备性）设 $\Sigma(\vec{v})$ 是 L_s 的受限公式相容集。那么 $\Sigma(\vec{v})$ 是 $\mathcal{F}$- 可满足的，也就是说，存在 $\mathcal{M}$, f：$[Sen(L)]^2 \to Sen(L)$，且 $\vec{a} \in M$ 满足 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s^2 \Sigma(\vec{a})$。

证明。设 $\Sigma(\vec{v})$ 是一个 Λ_0-相容公式集。将 $\Sigma(\vec{v})$ 扩充为 $L_s^+ \supseteq L_s$ 的一个Λ_0-相容、完备且 Henkin 完备的公式集，使得 $\Sigma(\vec{v}) \subseteq \Sigma^+(\vec{v})$。根据引理 5.7，$\Sigma^+(\vec{v})$ 是 $\mathcal{F}$-可满足的。因此 $\Sigma(\vec{v})$ 也可满足。⊣

5.3 其余系统的条件完备性

谈到完备性，与 PLS 的情形一样，SV 的存在使演绎定理（DT）的地位悬而未决。DT 的缺失又带来两个后果：(a) 我们不知道 CT1 和 CT2 是否等价（我们只知道 CT1 蕴含 CT2）；(b) 我们不知道一致公式集能否扩展为相容且完备的集合（更不用说能否扩展为相容、完备且 Henkin 完备的集合）。因此，关于基于 Λ_i 的系统的完备性，对于 $i = 1$、2、3，(a) 我们只能局限于较弱的形式 CT2；(b) 我们将

诉诸形式系统 Λ_i的可扩张性原理，这一原理已在 [10] 中使用。

（$cHext$（Λ））每个 L_s 的 Λ-相容公式集都可以扩展

为一个 Λ-相容、完备且 Henkin 完备的集合。

我们可以将 $cHext$（Λ）视为 $cext$（Λ）与 $Hext$（Λ）的合取，其中 $cext$（Λ）表示每个 Λ-相容集都可以扩展为一个完备的 Λ-相容集，而 $Hext$（Λ）表示每个 Λ-相容集都可以扩展为一个 Henkin 完备的 Λ-相容集。

下一个小节将证明的上述逻辑的完备性，将依赖于以下引理。

引理 5.9 若对于某个 i =1,2,3, $\Sigma \subset Sen(L_s)$ 关于 $\vdash_{\Lambda_i}$ 封闭，且 α、α' 是 L 的公式，并且 $\alpha \sim \alpha'$，那么对于每个 β，$(\alpha|\beta \leftrightarrow \alpha'|\beta) \in \Sigma$。

证明。令 $\alpha \sim \alpha'$。于是 $\vdash_{\mathrm{FOL}} \alpha \leftrightarrow \alpha'$，因此 $\vdash_{\Lambda_0} \alpha \leftrightarrow \alpha'$ 也成立。由 SV 可知，对每个 β，都有 $\vdash_{\Lambda_i} \alpha|\beta \leftrightarrow \alpha'|\beta$。因此，由于 Σ 是 $\vdash_{\Lambda_i}$-闭的，所以 ($\alpha|\beta \leftrightarrow \alpha'|\beta$) $\in \Sigma$。⊣

以下定理是 [9]，中定理 3.16 的对应定理，也是 [10] 中定理 4.9 的一部分。

定理 5.10（RFOLS(Reg, Λ_1) 的条件 CT2 完备性）逻辑 RFOLS(Reg, Λ_1) 是 CT2-完备的，当且仅当 $cHext$(Λ_1) 为真。

证明。我们先证明较容易的方向。假设 $cHext$(Λ_1) 为假。那么，要么 $cext$(Λ_1) 不成立，要么 $Hext$(Λ_1) 不成立。

首先假设 $cext$(Λ_1) 不成立。由此可知，存在一个极大 Λ_1-相容公式集 $\Sigma(\vec{v})$，无法扩展为一个 Λ_1-相容且完备的集合。这意味着存在一个公式 $\varphi(\vec{v})$，使得 $\Sigma(\vec{v}) \cup \{\varphi(\vec{v})\}$ 和 $\Sigma(\vec{v}) \cup \{\neg\varphi(\vec{v})\}$ 均不相容，因此不可满足。显然，$\Sigma(\vec{v})$ 在任何结构 $\mathcal{M}$ 中都不可满足；否则，该结构也会满足 $\varphi(\vec{v})$ 或 $\neg\varphi(\vec{v})$。因此 CT2-完备性不成立。

接下来假设 $Hext$(Λ_1) 不成立。由此可知，存在一个极大的 Λ_1-相容公式集 $\Sigma(\vec{v})$，无法扩展为一个 Λ_1-相容且具有 Henkin 完备性的集合。这意味着 $\Sigma(\vec{v})$ 含有一个公式 $\exists u\varphi(u, \vec{v})$，使得对于任意新常元 c， $\Sigma(\vec{v}) \cup \{\varphi(c, \vec{v})\}$ 是 Λ_1-不一致的。但这样一来，$\Sigma(\vec{v})$

就不可能是可满足的。因为如果 $\mathcal{M}$ 满足 $\Sigma(\vec{v})$，那么特别是 $\exists u\varphi(u,\vec{v})$ 在 $\mathcal{M}$ 中得到满足，因此对于某个 $c \in M$， $\varphi(c,\vec{v})$ 也在 $\mathcal{M}$ 中得到满足。因此，$\Sigma(\vec{v}) \cup \{\varphi(c,\vec{v})\}$ 是可满足的，这与 $\Sigma(\vec{v}) \cup \{\varphi(c,\vec{v})\}$ 是不一致的这一事实相矛盾。因此，确实，这个 Λ_1-相容集 $\Sigma(\vec{v})$ 不可满足，所以 CT2-完备性不成立。

现在假设 $cHext(\Lambda_1)$ 为真，我们来讨论等价关系的主要方向。于是，对于一个由受限公式构成的 Λ_1-相容集 $\Sigma(\vec{v}) \subset RFml(L_s)$，不失一般性，我们可以假设它也是完备且 Henkin 完备的。我们必须找到 $\mathcal{M}$ 和 $g \in Reg$，使得对于某个 $\vec{a} \in M$，有 $\langle \mathcal{M}, g\rangle \models^2_s \Sigma(\vec{a})$。事实证明，引理 5.7 的主要论证——关于选择函数 g 的定义——经必要调整后，在这里同样适用。具体而言，只需找到一个选择函数 $g \in Reg$，使得 $\langle \mathcal{M}, g\rangle \models^2_s \Sigma(\vec{a})$，其中 $\mathcal{M}$ 和 $\vec{a} \in M$ 分别是模型和参数，并且对于每个 $\alpha \in L(\vec{v})$，

$$\alpha \in \Sigma_1(\vec{a}) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \alpha,$$

其中 $\Sigma_1(\vec{a}) = \Sigma(\vec{a}) \cap Sen(L)$。$g$ 的定义完全遵循引理 5.7 证明中 g 的定义模式，但现在我们需要确保 g 是正则的。回想一下，若对于所有 α, α', β， g 都成立，则称 g 是正则的。

$$\alpha' \sim \alpha \;\Rightarrow\; g(\alpha', \beta) \sim g(\alpha, \beta).$$

在 (19) 中， g 由三个子句定义：(i) (a2) 或 (a6)，(ii) (a3) 或 (a5)，(a1) (iii) 或 (a4)。

断言。只要 g 由上述子句 (i) 和 (ii) 定义，正则性约束就成立。

断言的证明。取 α、 α'、 β，使得 $\alpha \sim \alpha'$。对于 $g(\alpha, \beta)$ 根据子句 (i)-(a2) 定义的情形，我们证明该断言。其他情形的验证类似。 $g(\alpha, \beta)$ 按照 (19) 的情形 (i)-(a2) 定义，这意味着 $\alpha|\beta \in \Sigma(\vec{a})$、 $\alpha \in \Sigma(\vec{a})$、 $\neg\beta \in \Sigma(\vec{a})$ 和 $g(\alpha, \beta) = \alpha$。只需证明必有 $g(\alpha', \beta) = \alpha' \sim g(\alpha, \beta)$。

由于 $\Sigma(\vec{a})$ 是完备的，它对 $\vdash_{\Lambda_1}$ 封闭，因此根据引理 5.9，$\alpha \sim \alpha'$ 意味着 ($\alpha|\beta \leftrightarrow \alpha'|\beta) \in \Sigma(\vec{a})$。此外，根据假设， $\alpha|\beta \in \Sigma(\vec{a})$，因此 $\alpha'|\beta \in \Sigma(\vec{a})$。又由于 $\alpha \in \Sigma(\vec{a})$，故 $\alpha' \in \Sigma(\vec{a})$，并且 $\neg\beta \in \Sigma(\vec{a})$。因此，对于 $\alpha'|\beta$、 α' 和 β，情形 (i)-(a2) 也成立。所以，根据 (19)， $g(\alpha', \beta) = \alpha'$，因此 $g(\alpha', \beta) \sim g(\alpha, \beta)$。断言得证。

由断言可知，如果我们按照 (19) 定义 g，那么除非 $g(\alpha, \beta)$ 由子句 (iii) 给出，也就是说，除非情形 (a1) 或

(a4) 成立，否则正则性就有保证。在这种情况下，要么 α, β 都属于 Σ，要么 $\neg\alpha,\neg\beta$ 都属于 Σ，而 (19) 允许 $g(\alpha,\beta)$ 取 α, β 中的任意一个。因此，此时我们必须引入一个新条件来保证正则性。具体如下。

从每个 $\sim$-等价类 $[\alpha]$ 中选取一个代表元 $\xi_\alpha \in [\alpha]$。回想一下，根据完备性，集合 $\Sigma_1 = \Sigma \cap Sen(L)$ 及其补集$\Sigma_2 = Sen(L) - \Sigma_1$ 关于 $\sim$ 都是饱和的，也就是说，对于每个 α，要么 $[\alpha] \subset \Sigma_1$，要么 $[\alpha] \subset \Sigma_2$。令 $D_1 = \{\xi_\alpha : \alpha \in \Sigma_1\}, D_2 = \{\xi_\alpha : \alpha \in \Sigma_2\}$。令 $[D_i]^2$ 为 D_i 中元素对的集合，其中 $i = 1、2$，并任取一个选择函数 $g_0 : [D_1]^2 \cup [D_2]^2 \to D_1 \cup D_2$。那么，只需稍作修改定义 (19)，如下定义 g：

$$g(\alpha,\beta) = \begin{cases} (i)\ \alpha, \text{ if } \{\alpha,\beta\} \text{ satisfies (a2) or (a6)} \\ (ii)\ \beta, \text{ if } \{\alpha,\beta\} \text{ satisfies (a3) or (a5)} \\ (iii)\ \sim g_0(\xi_\alpha,\xi_\beta), \text{ if } \{\alpha,\beta\} \text{ satisfies (a1) or (a4).} \end{cases} \tag{23}$$

（第三个子句只是以下说法的简写：若 $g_0(\xi_\alpha,\xi_\beta) = \xi_\alpha$，则 $g(\alpha,\beta) = \alpha$；若 $g_0(\xi_\alpha,\xi_\beta) = \xi_\beta$，则 $g(\alpha,\beta) = \beta$。）鉴于断言以及通过 (23) 对 g 的具体定义，立即可得，若 $\alpha \sim \alpha'$，则对于每个β，$g(\alpha,\beta) \sim g(\alpha',\beta)$。因此，$g$ 是正则的。此外，完全类似于引理 5.7，可得 $\langle M,g\rangle \models^2_s \Sigma(\vec{a})$。证明至此完成。⊣

接下来的两个定理只给出引用，不附证明。它们分别类似于 [9]，中的定理 3.18 和 3.19，其证明沿用后两者的思路，并作出与上文定理 5.8 和 5.10 的证明中所用的类似调整。

定理 5.11（RFOLS(Reg^*, Λ_2) 的条件 CT2 完备性）逻辑 RFOLS(Reg^*, Λ_2) 是 CT2-完备的，当且仅当 $cHext(\Lambda_2)$ 为真。

定理 5.12（RFOLS(Dec, Λ_3) 的条件 CT2 完备性）逻辑 RFOLS(Dec, Λ_3) 是 CT2-完备的，当且仅当 $cHext(\Lambda_3)$ 为真。

我们将以回答一个问题来结束本节及本文。这个问题是在 [9]（关于未来工作的第5节）中提出的，即将 PLS 扩展为 FOLS 是否有助于我们从句子的叠加过渡到对象的叠加。这样的概念听起来或许有些奇怪，但它与“析取对象”（更准确地说是“析取多重集”）密切相关；后者已在 [8] 中用于为增添了加法析取的乘法直觉主义线性逻辑（ILL）的 Horn 片段提供语义。下面这个简单的日常例子

足以说明引入这一概念的理由。餐厅菜单中会列出“牛排或鱼”（任选其一）作为主菜，以及“甜点或时令水果”（任选其一，视季节而定）作为餐后甜品。[2] 可以把“牛排或鱼”看作代表一种新型理论实体的术语，即由牛排和鱼叠加而成的对象。当然，在餐厅用餐的顾客不会吃“牛排或鱼”，他们吃的要么是牛排，要么是鱼；这两者是叠加对象的实现，也就是可能的坍缩。诚然，这类对象是否存在似乎值得怀疑。它们看起来不稳定且短暂，因为它们总会坍缩为各自的实现；它们也难以捉摸，因为我们无法直接处理它们本身，只能通过它们的实现来处理。然而，或多或少，所有理论实体都存在同样的情况：它们被认为独立存在，却难以被我们的心智把握，宛如柏拉图理念，只能通过具体的物理实现加以认知。尤其要注意，在菜单项目叠加的例子中，随附的“任选其一”一语明确表明，我们只能借助选择函数，才能接触到它们的物理实现。

获得对象叠加（的形式表示）的一种方式，是借助叠加逻辑（即FOLS）；前提是能够在该逻辑中证明，对于任意两个对象（常元） a 和 b，都存在唯一对象 c 满足公式（该公式只有一个自由变元）$(v = a)|(v = b)$，也就是说，句子 $(\forall v, u)(\exists! w)((w = v)|(w = u))$ 是一个重言式。如果确实如此，我们就可以用 $c = a \uparrow b$ 表示满足公式 $(v = a)|(v = b)$ 的唯一对象 c，并称 c 是 a 与 b 的叠加。

如果 FCS语义没有崩溃，那么很容易看出它满足上述要求；也就是说，对于每个 $\mathcal{M}$、每个用于公式对的选择函数 f，以及任意 a、$b \in M$，都有 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s (\exists! v)((v = a)|(v = b))$。这是因为 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models_s (\exists! v)((v = a)|(v = b))$ 成立，当且仅当 $\mathcal{M} \models (\exists! v) f(v = a, v = b)$；而无论 $f(v = a, v = b) = (v = a)$ 还是 $f(v = a, v = b) = (v = b)$，后者显然都成立。

然而，采用本节所述的 FOLS 的 SCS 语义时，我们会遇到以下情况。

命题5.13 设 L 是一阶语言，$\mathcal{M} = \langle M, \ldots\rangle$ 是一个 L-结构，且 $a \neq b \in M$。那么：

[2]在线性逻辑的常见阐述中，前一种析取被视为“乘法的”或确定性的，而后一种则被视为“加法的”或非确定性的。

(i) 存在选择函数 $f \in \mathcal{F}$，使得 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models^2_s (\exists! v)((v = a)|(v = b))$。

(ii) 然而，不存在 $f \in Reg$ 使得 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \models^2_s (\exists! v)((v = a)|(v = b))$。

证明。(i) 给定 $a \neq b$，显然，可能满足 $(v = a)|(v = b)$ 的 v 只有 a 或 b。取 f，使得 $f(a = a, a = b) = (a = a)$ 且 $f(b = b, a = b) = (a = b)$。那么显然，$\langle \mathcal{M}, f\rangle \models^2_s (a = a)|(a = b)$，而 $\langle \mathcal{M}, f\rangle \not\models^2_s (b = a)|(b = b)$。因此，在 $\langle \mathcal{M}, f\rangle$ 中，M 里满足 $(v = a)|(v = b)$ 的唯一元素是 a。类似地，若考虑 f'，使得 $f'(a = a, a = b) = (a = b)$ 且 $f'(b = b, a = b) = (b = b)$，那么在 $\langle \mathcal{M}, f'\rangle$ 中，M 里满足 $(v = a)|(v = b)$ 的唯一元素是 b。

(ii) 与 (i) 不同，如果 $f \in Reg$，那么由于 $(a = a) \sim (b = b)$，我们应有 $f(a = a, a = b) \sim f(b = b, a = b)$。因此，或者

$$f(a = a, a = b) = (a = a), \text{ and } f(b = b, a = b) = (b = b),$$

or

$$f(a = a, a = b) = f(b = b, a = b) = (a = b).$$

在第一种情况下，a, b 都在 $\langle \mathcal{M}, f\rangle$ 中满足 $(v = a)|(v = b)$；而在第二种情况下，a, b 均不满足，因此 M 中没有任何元素满足 $(v = a)|(v = b)$。无论哪种情况，$\langle \mathcal{M}, f\rangle \not\models^2_s (\exists! v)((v = a)|(v = b))$。⊣

前述结果表明，试图通过 FOLS 及其 SCS 语义来表示对象的叠加是行不通的。我们只能证明，对于任意两个对象 a, b，存在一个对象 c 满足性质 $(v = a)|(v = b)$，但该对象并不唯一。尽管如此，我们仍可通过另一种方式引入对象的叠加，即采用数学手段而非逻辑手段。具体而言，给定语言 L, T 中的一阶理论 T，可以将其扩展为语言 $L \cup \{|\}$ 中的理论 $T^|$，其中 $|$ 是一个新的二元运算（作用于 T 的对象上）。$T^|$（其底层逻辑为通常的一阶逻辑）由 T 的公理以及一些关于 $|$ 的合理公理组成；这些公理类似于第 1.1 节的公理 S_i，表达了 $|$ 的幂等性、对称性和结合性，并且可能还包括对象 $a|b$ 的一些其他性质。

顺便提一下，符号 $x|y$ 最早见于 [8, §3]。其中定义了运算 $x|y$（针对多重集及多重集的有限集），使其满足幂等性、对称性和结合性，并且使对象 $x|y$ 与 x 和 y 均不相同，即 $x|y \notin \{x, y\}$，除非 $x = y$。相比之下，如果 $x|y$ 要表示一个总是坍缩为

x 或 y 的实体，那么必然有 $x|y \in \{x, y\}$，也就是说，$|$ 必须表现为一个选择函数。因此，对对象上的运算 $x|y$ 至少可以有两种不同的实现：“投影的”实现满足 $x|y \in \{x, y\}$，“非投影的”实现满足 $x|y \notin \{x, y\}$。

致谢 感谢两位匿名审稿人提出多项修正意见和建议，使本文的表述得到了显著改善。

参考文献

[1] A. Baltag 和 S. Smets，《量子程序逻辑》，QPL 2004 论文集，39-56。[2] G. Battilotti，借助序列解释量子并行性，《国际理论物理学杂志》49（2010年），第12期，3022-3029。[3] H. Enderton，《逻辑数学导论》，第2版，Harcourt/Academic Press，2002。[4] L. Humberstone，《联结词》，麻省理工学院出版社，剑桥，2011。[5] T. Jech，《选择公理》，北荷兰出版社，1973。[6] G. Kalmbach，《正交模格》，Academic Press，1983。[7] M. Pavi˘ci´c 和 N. D. Megill，量子逻辑是一种逻辑吗？，载于：《量子逻辑与量子结构手册：量子逻辑》，K. Engesser、D. M. Gabbay 和 D. Lehmann（编），爱思唯尔，2009，第23-47页。[8] A. Tzouvaras，多重集逻辑续篇：析取的情形，《逻辑学研究》75（2003年），第3期，287-304。[9] A. Tzouvaras，命题叠加逻辑，《IGPL逻辑学杂志》26（2018年），第1期，149-190。[10]A. Tzouvaras，命题叠加逻辑的代数语义，即将在《应用非经典逻辑杂志》发表，网址：https://users.auth.gr/˜tzouvara/Texfiles.htm/superposition_algebraic.pdf