arXiv:2303.15054v1 [math.CT] 27 Mar 2023

拓扑生成结构与相关的态射族

Minani Iragi*, [a] 和 David Holgate[b]

[a]布尔诺理工大学机械工程学院数学研究所，Technick´a 2，

捷克共和国布尔诺 616 69。

[b]西开普大学数学与应用数学系，贝尔维尔 7535，

南非。

摘要

在一个具有真（$\mathcal{E},\mathcal{M}$）分解系统的范畴 $\mathcal{C}$ 中，我们研究相对于拓生序的严格、余严格、初始和终态射等概念。除了说明这些概念能够同时研究分别相对于闭包、内部和邻域算子得到的四类态射外，初始和终态射还引导我们研究由带点和余带点自函子诱导的拓生结构。我们还沿着一个 $\mathcal{M}$-纤维化提升拓生结构。这使我们能够沿着一个 $\mathcal{M}$-纤维化提升内部算子和邻域算子，并涵盖文献中已有的闭包算子提升。本文末尾给出的若干例子展示了我们的结果。

美国数学学会数学主题分类（2020）：18A05、18F60、54A15、54B30。

关键词：闭包算子；内部算子；范畴拓生结构；遗传性、（余）带点自函子、 $\mathcal{M}$-纤维化、严格、余严格、初态射和终态射。

电子邮箱地址： [a]Minani.Iragi@vutbr.cz [b]dholgate@uwc.ac.za

*通讯作者。第一作者感谢布尔诺理工大学（BUT）通过项目 MeMoV II（编号 CZ.02.2.69/0.0/0.0/18-053/0016962）给予的支持。

1 引言

Dikranjan 和 Giuli 引入的范畴闭包算子（[7]）概念，是在任意范畴中研究拓扑结构的出发点。这一方法最终促使人们引入范畴内部算子（[24]）和邻域算子（[15]）。虽然已证明范畴内部算子是左伴随邻域算子（[22]），但在范畴拓生结构（[14]）和（[16]）最近被引入之前，闭包算子与邻域算子之间一直缺少一种良好的联系。事实上，范畴拓生结构整体与所有邻域算子的整体序同构，并且同时包含所有内部算子和所有闭包算子构成的整体，分别作为反射子范畴。由邻域算子与拓生结构之间的这一序同构可见，使用邻域算子研究的所有概念都可以用拓生结构来描述。然而，使用拓生结构（尤其是处理起来更简便）能够统一研究许多此前分别针对闭包算子和内部算子进行研究的概念和想法。本文拟继续探究范畴拓生结构，并展示它们在提供统一框架、研究抽象范畴上分别针对闭包算子和内部算子得到的若干结果方面所发挥的关键作用。

关于闭包 c、内部 i 和邻域算子ν 的态射类，已有许多作者提出并加以研究（例如参见 [9]）。若态射$f: X \longrightarrow Y$ 保持闭包，即对 X的任意子对象m，都有 $f(c(m)) = c(f(m))$，则称其为 c-闭映射。一个重要问题是，哪些态射保持拓生序，即对 X的任意子对象 m、n，都有$m \sqsubset n \Rightarrow f(m) \sqsubset f(n)$。这种态射称为 $\sqsubset$-严格态射，事实证明，它同时涵盖了 c-闭映射和 i-开态射。由此引出反映拓生序的态射 $f: X \longrightarrow Y$的定义：对 Y的任意子对象 m、n，都有 $f^{-1}(m) \sqsubset f^{-1}(n) \Rightarrow m \sqsubset n$。我们称之为 $\sqsubset$-终态射，并证明它涵盖了 c-终态射、 i-终态射和 ν-终态射。我们还定义了 $\sqsubset$-余严格态射和 $\sqsubset$-初始态射。研究表明， $\sqsubset$-余严格态射（分别是 $\sqsubset$-初始态射）为统一研究 c-开态射与i-闭映射（分别是 c-初始态射与 i-初始态射）提供了框架。尽管这四类态射在拉回下不封闭，我们证明它们各自都沿 $\sqsubset$-初始态射上升，并沿 $\sqsubset$-终态射下降。我们还证明， $\sqsubset$-初始态射和 $\sqsubset$-态射与 $\sqsubset$-严格子对象具有良好的相互作用。

研究了由 $\mathcal{M}$-纤维化诱导的拓生结构。它们不仅将 D. Dikranjan 和 W. Tholen 对闭包的提升作为特例纳入其中，还允许沿该函子提升

内部算子。随后，我们定义了关于 $\mathcal{C}$ 上的两个拓扑生成序的 $\mathcal{C}$ -态射的连续性，并利用它从已有拓扑生成序构造新的拓扑生成序。我们证明，对于 $\mathcal{C}$的一个带点自函子 $(F;\eta)$ 以及 $\mathcal{C}$上的一个拓生序，存在一个最粗拓扑生成序 $\sqsubset^{F,\eta}$，使得 $\mathcal{C}$ 上的每个 η_X: $X \longrightarrow FX$ 都是 $(\sqsubset^{F,\eta}, \sqsubset)$-连续的；对偶地，对于 $\mathcal{C}$的一个余带点自函子，存在一个最细拓生序$_{\sqsubset^F,\eta}$，使得 $\mathcal{C}$ 上的每个 $\varepsilon_X: GX \longrightarrow X$ 都是 $(\sqsubset, \sqsubset^{G,\varepsilon})$-连续的。特别地，对于保交拓生序，$\sqsubset^{F,\eta}$ 和 $\sqsubset^{G,\varepsilon}$ 分别对应于 Dikranjan 和 W Tholen 在 $[5]$ 中得到的闭包算子；而对于保并拓生序，$\sqsubset^{F,\eta}$ 和 $\sqsubset^{G,\varepsilon}$ 则分别使我们能够构造由 F 和 G 诱导的内部算子。

2 预备知识

关于范畴概念，我们的通用参考文献是 $[1]$。本文所用的范畴闭包算子的基本事实可见于 $[5, 7]$。对于范畴拓生结构，我们采用 $[14, 16]$。全文中，我们考虑一个范畴 $\mathcal{C}$，它配备了一个适当的、针对态射的（$\mathcal{E}, \mathcal{M}$）分解系统。假设范畴 $\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{M}$-完备的，从而沿 $\mathcal{C}$-态射对 $\mathcal{M}$-态射作拉回，以及对 $\mathcal{M}$-态射作任意 $\mathcal{M}$-交，都存在且仍属于 $\mathcal{M}$。对于任意 $X \in \mathcal{C}$, 子$X = \{m \in \mathcal{M} \mid \mathsf{cod}(m) = X\}$。其序关系定义如下：当且仅当存在 j 使得 $m \circ j = n$ 时，$n \leq m$。若 $m \leq n$且 $n \leq m$，则二者同构。在这种情况下，我们简记为 $m = n$。$\mathsf{Sub}X$ 是一个（可能很大的）完备格，其最大元为 $1_X: X \longrightarrow X$，最小元为0_X: $O_X \longrightarrow X$。

任意的 $\mathcal{C}$-态射 $f: X \longrightarrow Y$ 都诱导一个像/逆像伴随 $f(m) \leq n$，当且仅当对于所有满足 $f(m)$ 是 $f \circ m$ 的 $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-分解的 $\mathcal{M}$-分量、而 $f^{-1}(n)$ 是沿 f 对 n 的拉回的 $n \in$子Y、$m \in$子X，都有 $m \leq f^{-1}(n)$。由像/逆像伴随可得，对于任意 $n \in$子Y 和 $m \in$子X，有 $f(f^{-1}(n)) \leq n$（若 $f \in \mathcal{E}$ 且 $\mathcal{E}$ 沿 $\mathcal{M}$-态射拉回稳定，则 $f(f^{-1}(n)) = n$），并且有 $m \leq f^{-1}(f(m))$（若 $f \in \mathcal{M}$，则 $m = f^{-1}(f(m))$）。

反复应用伴随性，我们得到下面的引理。

引理 2.1. 设

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

是一个交换图。那么对于任意子对象 $n \in \mathrm{sub}Y'$, $p'(f'^{-1}(n)) \leq f^{-1}(p(n))$。

定义 2.1. *Apointed endofunctor* 的 $\mathcal{C}$ 是由函子 $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ 和自变换 $\eta\colon 1_{\mathcal{C}} \longrightarrow F$ 组成的一对 (F, η)。

对于任意 $\mathcal{C}$-态射 $f\colon X \longrightarrow Y$，$(F, \eta)$ 导出下图中的交换图。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & FX \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Ff} \\ Y & \xrightarrow[\eta_Y]{} & FY \end{array}$$

如果每个 $\eta_X \in \mathcal{F}$ 满足其中 $\mathcal{F}$ 是一类 $\mathcal{C}$-态射，则 (F, η) 是 $\mathcal{F}$-带点的。$\mathcal{C}$ 的余带点自函子对偶地定义。

定义 2.2. $\mathcal{C}$ 上的拓生序 $\sqsubset$ 是由关系 $\{\sqsubset_X \mid X \in \mathcal{C}\}$ 组成的族，每个关系$\sqsubset_X$ 定义在子 X上，并满足：

$(T1)$ 对每个 $m, n \in$子X，都有 $m \sqsubset_X n \Rightarrow m \leq n$

$(T2)$ 对每个 $m, n, p, q \in$子X，都有 $m \leq n \sqsubset_X p \leq q \Rightarrow m \sqsubset_X q$，并且

（$T3$）每个态射 $f\colon X \longrightarrow Y$in $\mathcal{C}$都是 $\sqsubset$-连续的，$m \sqsubset_Y n \Rightarrow f^{-1}(m) \sqsubset_X f^{-1}(n)$ 对每个 $m, n \in \mathrm{sub}Y$ 都成立。

给定 $\mathcal{C}$上的两个拓生序 $\sqsubset$ 和 $\sqsubset'$，当且仅当 $m \sqsubset_X n \Rightarrow m \sqsubset'_X n$对所有 $m, n \in \mathrm{sub}X$ 都成立。$\mathcal{C}$上所有拓生序所构成的有序集合记作 $TORD(\mathcal{C}, \mathcal{M})$。若拓生序 $\sqsubset$ 满足（$\forall i \in I\colon m \sqsubset_X n_i$） $\Rightarrow m \sqsubset_X \bigwedge n_i$，则称其为 $\bigwedge$-保的。若（$\forall i \in I\colon m_i \sqsubset_X n$） $\Rightarrow \bigvee m_i \sqsubset_X n$，则称其为 $\bigvee$-保的。若对所有 $X \in \mathcal{C}$都有 $m \sqsubset_X n \Rightarrow \exists\, p \mid m \sqsubset_X p \sqsubset_X n$，则称其为可插值的。所有 $\bigwedge$-保和 $\bigvee$-保的拓生序构成的有序集合分别记作 $\bigwedge - TORD(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 和 $\bigvee - TORD(\mathcal{C}, \mathcal{M})$。$\bigwedge - INTORD(\mathcal{C}, \mathcal{M})$（分别地，$\bigwedge - INTORD(\mathcal{C}, \mathcal{M})$）表示所有插值且保交（分别地，保并）的拓生序所构成的集合。

定义 2.3. 关于 $\mathcal{M}$ 的 *A closure operator* c on $\mathcal{C}$ 由一族映射$\{c_X\colon \mathrm{sub}X \longrightarrow \mathrm{sub}X \mid X \in \mathcal{C}\}$ 给出，使得：

$(C1)$ 对所有 $m \in \mathrm{sub}X$，$m \leq c_X(m)$；

对所有 $m, n \in \mathrm{sub}X$，$(C2)$ $m \leq n \Rightarrow c_X(m) \leq c_X(n)$；

每个态射 f: $X \longrightarrow Y$ 都是 c-连续的：对所有 $m \in \mathrm{sub}X$，$(C3)$ $f(c_X(m)) \leq c_Y(f(m))$。

我们用 $CL(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{C}$ 上关于 $\mathcal{M}$的所有闭包算子的集合，其序定义如下：若对所有 $m \in \mathrm{sub}X$和 $X \in \mathcal{C}$，都有 $c \leq c'(m) \leq c'_X(m)$。若闭包算子 c作用于 $\mathcal{C}$，且对所有 $m \in \mathrm{sub}X$和 $X \in \mathcal{C}$，都有 $c_X(c_X(m)) = c_X(m)$，则称其为幂等的。 $ICL(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 表示 $\mathcal{C}$ 上所有幂等闭包算子的集合。

定义 2.4. *An interior operator* i 作用于 $\mathcal{C}$ 且关于 $\mathcal{M}$，由一族映射 $\{i_X$: sub$X \longrightarrow$ sub $X \mid X \in \mathcal{C}\}$ 给出，并满足：

$(I1)$ 对所有 $m \in \mathrm{sub}X$ 和 $X \in \mathcal{C}$，都有 $i_X(m) \leq m$；

$(I2)$ 对所有 m、$n \in \mathrm{sub}X$、$X \in \mathcal{C}$，都有 $m \leq n \Rightarrow i_X(m) \leq i_X(n)$;

$(I3)$ 每个态射 f: $X \longrightarrow Y$ 都是 i-连续的：对于所有 $n \in \mathrm{sub}Y$，$f^{-1}(i_Y(n)) \leq i_X(f^{-1}(n))$。

$INT(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 表示关于$\mathcal{M}$的 $\mathcal{C}$上所有内部算子构成的聚集体。其序如下定义：若对于所有 $m \in \mathrm{sub}X$、$X \in \mathcal{C}$，$i \leq i'(m) \leq i'_X(m)$，则 $\ddot{}i_X$。对象 $X \in \mathcal{C}$ 的子对象称为 i-开映射的，如果 $i_X(m) = m$。若对于每个 $m \in \mathrm{sub}X$ 和 $X \in \mathcal{C}$，$i_X(m)$ 都是 i-开映射的，则称内部算子 i 为幂等的。我们用$IINT(\mathcal{C}, \mathcal{M})$表示 $\mathcal{C}$上所有幂等内部算子构成的有序聚集体。

定义 2.5. 关于 $\mathcal{M}$，$\mathcal{C}$ 上的邻域算子 ν 由一族映射 $\{c_X$: sub$X \longrightarrow P(\mathrm{sub}X) \mid X \in \mathcal{C}\}$ 给出，满足：

$(N1)$ $n \in \nu_X(m) \Rightarrow m \leq n$对所有 $m, n \in \mathrm{sub}X$;

$(N2)$ $m \leq n \Rightarrow \nu_X(n) \leq \nu_X(m)$ 对所有 $m, n \in \mathrm{sub}X$;

$(N3)$ $p \in \nu_X(m)$ 且 $p \leq q$则 $q \in \nu_X(m)$ 对所有 $p, q, m \in \mathrm{sub}X$;

$(N4)$ 每个态射 f: $X \longrightarrow Y$都是 ν-连续的：$n \in \nu_Y(f(m)) \Rightarrow f^{-1}(n) \in \nu_X(m)$ 对所有 $m \in \mathrm{sub}X$ 和 $n \in \mathrm{sub}Y$。

关于 $\mathcal{M}$，$\mathcal{C}$ 上的所有邻域算子构成的集合记作 $NBH(\mathcal{C}, \mathcal{M})$。

尽管与之相关的闭包算子和内部算子为拓扑提供了一种等价描述，但这两个概念之间的自然对应关系在抽象的范畴论背景下不再成立，因为子对象格不一定是布尔代数。上文定义的范畴拓生结构（尤其便于处理）

使我们能够在范畴上建立闭包算子与内部算子之间的良好关系：许多针对范畴中的闭包算子和内部算子分别研究过的概念与定义，都可以借助拓生序证明完全相同（例如本文中定义并研究的态射类）。接下来我们回顾结果 (([14], [16]))，它清楚地展示了范畴中闭包、内部与拓生序之间的关系。

命题 2.2。

(1) $TORD(\mathcal{C},\mathcal{M})$ 与 $NBH(\mathcal{C},\mathcal{M})$ 序同构，其逆对应$\sqsubset \longrightarrow \nu^{\sqsubset}$ 和 $\nu \longrightarrow \sqsubset^{\nu}$ 由 $\nu_X^{\sqsubset}(m) = \{n \mid m \sqsubset_X n\}$ 以及 $m \sqsubset_X^{\nu} n \Leftrightarrow n \in \nu_X(m)$ 给出，对所有 $X \in \mathcal{C}$. 均成立。(2) $\bigvee -TORD(\mathcal{C},\mathcal{M})$ 与 $INT(\mathcal{C},\mathcal{M})$ 序同构。它们互为逆对应，由 $i_X^{\sqsubset}(m) = \bigvee\{p \mid p \sqsubset_X m\}$和 $m \sqsubset_X^{i} n \Leftrightarrow m \leq i_X(n)$ 给出，对所有 $X \in \mathcal{C}$. 均成立。(3) $\bigwedge -TORD(\mathcal{C},\mathcal{M})$ 与 $CL(\mathcal{C},\mathcal{M})$ 序同构。它们互为逆对应，由 $c_X^{\sqsubset}(m) = \bigwedge\{p \mid m \sqsubset_X p\}$和 $m \sqsubset_X^{c} n \Leftrightarrow c_X(m) \leq n$ 给出，对所有 $X \in \mathcal{C}$. 均成立。

3 态射族

命题 3.1. 假设对于任意 $f \in \mathcal{C}$, f^{-1} 都有一个右伴随。设 $f\colon X \longrightarrow Y$ 是一个 $\mathcal{C}$-态射，且 $\sqsubset \in TORD(\mathcal{C},\mathcal{M})$。以下条件等价于 f 的 $\sqsubset$-连续性。

(1) $m \sqsubset_Y n \Rightarrow f^{-1}(m) \sqsubset_X f^{-1}(n)\ m \in subY\ and\ n \in subX$;
(2) $m \sqsubset_Y f_*(n) n \Rightarrow f^{-1}(m) \sqsubset_X n, m \in subY\ and\ n \in subX$;
(3) $m \sqsubset_Y f_*(n) n \Rightarrow m \sqsubset_X n, m, n \in subY\ and\ n \in subX$;

证明. 若 $(T3)$ 成立，则 $m \sqsubset_X n \Rightarrow f(f^{-1}(m)) \leq m \sqsubset_X n \Rightarrow f(f^{-1}(m)) \sqsubset_X n \Rightarrow f^{-1}(m) \sqsubset_X f^{-1}(n)$。假设 (1) 成立，则 $m \sqsubset_Y f_*(n) \Rightarrow m \leq f^{-1}(f(m)) \sqsubset_X n \Rightarrow m \sqsubset_X n$。若 (2) 成立，则 $f(m) \sqsubset_Y f_*(n) \Rightarrow m \leq f^{-1}(f(m)) \sqsubset_X n \Rightarrow m \sqsubset_X n$。若 (3) 成立，则$f(m) \sqsubset_Y p \Rightarrow f(m) \sqsubset_X p \leq f_*(f^{-1}(p)) \Rightarrow f(m) \sqsubset_Y f_*(f^{-1}(p)) \Rightarrow m \sqsubset_X f^{-1}(p)$。 □

上述命题中，$(T3)$ 的每种等价描述都满足一个蕴含关系，这一点引出了满足另一蕴含关系的那类态射。

定义 3.1. 对任意 $f \in \mathcal{C}$ 和 $\sqsubset \in TORD$，令 f^{-1} 有一个右伴随。我们称 a$\mathcal{C}$-态射 $f\colon X \longrightarrow Y$ 为

(1) 若 $f(m) \sqsubset_Y p \Leftrightarrow m \sqsubset_X f^{-1}(p)$ $for\ all\ m \in subX\ and\ p \in sub$，则称其为 [(13)] $\sqsubset$-严格的 Y

(2) $\sqsubset -final$若对所有 $n, m \in subY$， $m \sqsubset_Y n \Leftrightarrow f^{-1}(m) \sqsubset_X f^{-1}(n)$，则称其为严格的；(3) 若对所有 $m \in subY\ and\ n \in subX$， $m \sqsubset_Y f_*(n)$ $f^{-1}(m) \sqsubset_X n$，则称其为 $\sqsubset$-余严格的；(4) 若对所有 $m, n \in subX$， $f(m) \sqsubset_Y f_*(n) \Leftrightarrow m \sqsubset_X n$，则称其为 $\sqsubset$-初始的。

由命题 2.2(1) 可立即得出，态射 $f: X \longrightarrow Y$ 是 $\sqsubset$-严格的（分别为 $\sqsubset$-余严格的、$\sqsubset$-终末的、 $\sqsubset$-初始的），当且仅当 $\nu_Y^{\sqsubset}(f(m)) = f(\nu_X^{\sqsubset}(m))$（分别为 $\nu_X^{\sqsubset}(f^{-1}(n)) = f^{-1}(\nu_Y^{\sqsubset}(n))$、 $f(\nu_X^{\sqsubset}(f(n))) = \nu_Y^{\sqsubset}(n)$、 $f^{-1}(\nu_Y^{\sqsubset}(f(m))) = \nu_X^{\sqsubset}(m)$）。这些态射是相对于邻域算子在 ([21]) 中定义的。回想一下，根据 ([16])，对象 $X \in \mathcal{C}$ 的子对象 m 若满足 $m \sqsubset_X m$，则称其为 $\sqsubset$-严格的。

命题 3.2. 设 $f: X \longrightarrow Y$ 是一个 $\mathcal{C}$-态射。

(1) 若 f 是 $\sqsubset$-终态的，则 Y 的子对象 n 是 $\sqsubset$-严格的，当且仅当 $if f f^{-1}(n)$ 在 X 中是 $\sqsubset$- 严格的。(2) 若 $\sqsubset \in INTORD(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 且 f 是 $\sqsubset$- 始态的，则对于每个 X 的 $\sqsubset$- 严格子对象 m，都存在 $p \in subY$ 使得 $m = f^{-1}(p)$。

证明。(1)显然。对于(2)，设 $\sqsubset \in INTORD(\mathcal{C}, \mathcal{M})$， f 是 $\sqsubset$-始态的，且 $m \in subX$ 是 $\sqsubset$-严格的。于是 $m \sqsubset_X m \Rightarrow f(m) \sqsubset_X f_*(m) \Rightarrow \exists\ p \in subX$ 使得 $f(m) \sqsubset_X p \sqsubseteq_X f_*(m) \Rightarrow m \sqsubset_X f^{-1}(p) \sqsubset_X f^{-1}(f_*(m)) \leq m \Rightarrow m \leq f^{-1}(p) \leq m \Rightarrow m = f^{-1}(p)$. □

下面这个容易证明的命题总结了定义 3.1 中引入的各类态射的性质。

命题 3.3. (1) 每一类态射都在复合下闭合，并且包含 $\mathcal{C}$ 的所有同构。

(2) $\sqsubset$-初始态射可左消去；而 $\sqsubset$-余严格、 $\sqsubset$-严格和 ¡-终态射相对于 $\mathcal{M}$ 可左消去。

(3) $\sqsubset$-终态射可右消去；而 $\sqsubset$-初始、 $\sqsubset$-余严格和 $\sqsubset$-严格态射相对于 ε 可右消去，前提是 ε 拉回稳定。

以下是关于各类态射之间关系的一项观察。

命题 3.4.

(1) 在 $\mathcal{M}$ 中，每个 $\sqsubset$-余严格态射都是 $\sqsubset$-初始态射。(2) 在 ε 中，每个 $\sqsubset$-初始态射都是 $\sqsubset$-余严格态射，前提是 ε 拉回稳定。(3) 在 $\mathcal{M}$ 中，任何 $\sqsubset$-严格态射都是 $\sqsubset$-初始态射。(4) 在 ε 中，每个 $\sqsubset$-严格态射都是 $\sqsubset$-终态射，前提是 ε 拉回稳定。(5) 在 $\mathcal{M}$ 中，任何 $\sqsubset$-终态射都是 $\sqsubset$-严格态射。(6) 在 ε 中，每个 $\sqsubset$-余严格态射都是 $\sqsubset$-终态射，前提是 ε 拉回稳定。(7) 若 $g \circ f = 1$ 属于 $\mathcal{C}$，则 f 是一个 $\sqsubset$- 初始态射，而 g 是 ε 中的一个 $\sqsubset$- 终态射

.

我们关注这些态射的拉回行为。我们证明，每个类沿着 $\sqsubset$-初始态射上升，并沿着 $\sqsubset$-终态射下降

命题 3.5. 设

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & Y' \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[f]{} & Y \end{array}$$

是一个满足 Beck–Chevalley 性质的拉回图。则以下陈述成立。

(i) 若 p' 是 $\sqsubset$-初始的，则 f' 是 $\sqsubset$-初始的（分别地，$\sqsubset$-严格、$\sqsubset$-余严格、$\sqsubset$-终的），前提是 f 是$\sqsubset$-初始的（分别地，$\sqsubset$-严格、$\sqsubset$-余严格、$\sqsubset$-终的）。

(ii) 若 p 是 $\sqsubset$-终的，则 f 是 $\sqsubset$-终的（分别地，$\sqsubset$-严格、$\sqsubset$-余严格、$\sqsubset$-初始的），前提是 f' 是$\sqsubset$-终的（分别地，$\sqsubset$-严格、$\sqsubset$-余严格、$\sqsubset$-初始的）。

证明。下面给出一部分计算。

(i) 设 p' be $\sqsubset$-initial，并假设 f 是 $\sqsubset$-strict。那么，利用图表的交换性、p 的 $\sqsubset$-continuity 以及 BCP，我们有 $m \sqsubset n \Rightarrow p'(m) \sqsubset_X p'_*(n) \Rightarrow f(p'(m)) \sqsubset_Y f(p'_*(n)) \Rightarrow p(f'(m)) \sqsubset_Y f(p'_*(n)) \Rightarrow f'(m) \sqsubset_Q p^{-1}(f(p'_*(n))) \Rightarrow f'(m) \sqsubset_Q f'(p'^{-1}(p'_*(n))) \leq f'(n) \Rightarrow f'(m) \sqsubset_Q f'(n)$。

(ii) 设 p 是终态且 f' $\sqsubset$是始态。那么利用 p' 的 $\sqsubset$-连续性和 BCP，我们有 $m \sqsubset_X n \Rightarrow p'^{-1}(m) \sqsubset_P p'^{-1}(m) \Rightarrow f'(p'^{-1}(m)) \sqsubset_Q f'_*(p'^{-1}(n)) \Rightarrow p^{-1}(f(m)) \sqsubset_Q p^{-1}(f_*(n)) \Rightarrow f(m) \sqsubset_Y f_*(n)$。

□

接下来的命题表明，当 $\sqsubset \in \bigwedge -TORD(\mathcal{C},\mathcal{M})$ 时， $\sqsubset$-始态态射（分别为 $\sqsubset$-余严格、 $\sqsubset$-终态、 $\sqsubset$-严格）对应于文献中研究过的 c-始态（分别为 c-开映射、 c-终态、c-闭映射）态射（例如参见 [5, 9]）。

命题 3.6. 设 $\sqsubset \in \bigwedge -TORD(\mathcal{C},\mathcal{M})$ 和 $c \in CL(\mathcal{C},\mathcal{M})$。设对于任意态射 $f \in \mathcal{C}$，逆像 f^{-1} 与子对象的并可交换。那么 $f: X \longrightarrow Y$ 是 $\sqsubset$- 初始的（分别地， $\sqsubset$- 余严格的、 $\sqsubset$- 终的、 $\sqsubset$-严格的），当且仅当它是 c-初始的（分别地， c-开映射、c-终的、 c-闭映射）。

证明. (1) 设 f 是 c-初始的。则 $f(m) \sqsubset_Y^c f_*(n) \Leftrightarrow c_Y^{\sqsubset}(f(m)) \leq f_*(n) \Leftrightarrow f^{-1}(c_Y^{\sqsubset}(f(m))) \leq n \Leftrightarrow c_X^{\sqsubset}(m) \leq n \Leftrightarrow m \sqsubset_X^c n$。反之，若 f 是 $\sqsubset$-初始的，则 $f^{-1}(c_Y^{\sqsubset}(f(m)) \leq n \Leftrightarrow c_Y^{\sqsubset}(f(m)) \leq f_*(n) \Leftrightarrow f(m) \sqsubset_Y f_*(n) \Leftrightarrow m \sqsubset_X n \Leftrightarrow c_Y^{\sqsubset}(m) \leq n$。

(2) 假设 f是 c-开映射，则 $m \sqsubset_Y^c f_*(n) \Leftrightarrow \sqsubset_Y^c(m) \leq f_*(n) \Leftrightarrow f^{-1}(c_Y^{\sqsubset}(m) \leq n \Leftrightarrow c_X^{\sqsubset}(f^{-1}(m)) \leq n \Leftrightarrow f^{-1}(m) \sqsubset_X^c n$。反之，若 $\sqsubset$-余严格，则 $c^{\sqsubset}(f^{-1}(m)) \leq n \Leftrightarrow f^{-1}(m) \sqsubset_X n \Leftrightarrow m \sqsubset_Y (n) \Leftrightarrow c_Y^{\sqsubset}(m) \geq f_*(n) \Leftrightarrow f^{-1}(c_Y^{\sqsubset}(m)) \leq n$。

(3) 若 f 是 c-终对象，则 $f^{-1}(m) \sqsubset_X^c f^{-1}(n) \Leftrightarrow c^{\sqsubset}(f^{-1}(m)) \leq f^{-1}(n) \Leftrightarrow f(c^{\sqsubset}(f^{-1}(m)) \leq n \Leftrightarrow c_Y(m) \leq n \Leftrightarrow m \sqsubset_Y^c n$。另一方面，若 f 是 $\sqsubset$- 终对象，则 $f(c^{\sqsubset}(f^{-1}(m)) \leq n \Leftrightarrow c_X^{\sqsubset}(f^{-1}(m)) \leq f^{-1}(n) \Leftrightarrow f^{-1}(m) \sqsubset_X f^{-1}(n) \Leftrightarrow m \sqsubset_Y n \Leftrightarrow c_Y^{\sqsubset}(m) \leq n$。

(4) 见（[14], 命题 3.5）。

□

相对于内部算子的开态射已在（[4]）中得到研究。假设原像与子对象的并可交换， i-初始态射和 i-终态射便在 [21] 中引入。最近， [2], 中定义了 i-闭映射，并系统研究了相对于内部算子的四类态射。在下一个命题中，我们证明若 $\sqsubset \in \bigvee -TORD(\mathcal{C},\mathcal{M})$，则 $\sqsubset$-严格态射（分别为 $\sqsubset$-余严格、 $\sqsubset$-初始、 $\sqsubset$-终态射）对应于 i-开映射（分别为 i-闭映射、 i-初始态射和i-终态射）。

命题 3.7. 设 $\sqsubset \in \bigvee -TORD(\mathcal{C},\mathcal{M})$，并且对任意态射 $f \in \mathcal{C}$，原像f^{-1} 与子对象的并可交换。则 $f: X \longrightarrow Y$ 是 $\sqsubset$-初始态射（分别为 $\sqsubset$-余严格、$\sqsubset$-终态射、 $\sqsubset$-严格态射）当且仅当它是 i-初始态射（分别为 i-闭映射、 i-终态射、 i-开映射）。

除了上文研究的四类态射外，较弱的¡-终态射概念也很有用。

定义 3.2. 设 $\sqsubset \in TORD$。若对任意 m、$n \in subY$，只要 $m \leq n$，就有 $m \sqsubset_Y n \Rightarrow f^{-1}(m) \sqsubset_X f^{-1}(n)$，则称 $\mathcal{C}$-态射 $f: X \longrightarrow Y$ 为弱 $\sqsubset$-终态射。

我们注意到，若 $f \in \varepsilon$，则 f 弱 $\sqsubset$-终的充要条件是它为 $\sqsubset$-终的。

命题 3.8. 设 $\sqsubset \in TORD$，且 $f: X \longrightarrow Y$ 是一个 $\mathcal{C}$-态射。
(1) 若 $\sqsubset \in \bigwedge -TORD$，则 f 弱 $\sqsubset$-终的充要条件是 $c_Y^{\sqsubset}(m) = m \vee f(c_X^{\sqsubset}(f^{-1}(m)))$。 (2) 若 $\sqsubset \in \bigvee -TORD$，则 f 弱 $\sqsubset$-终的充要条件是 $i_Y^{\sqsubset}(m) = m \wedge f_*(i_X^{\sqsubset}(f^{-1}(m)))$。

4 沿一个 $\mathcal{M}$-纤维化提升一个拓扑生成序

回顾 ([5])，对于一个 $\mathcal{M}$-纤维化 $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$，$(\varepsilon_F, \mathcal{M}_F)$，其中 $\varepsilon_F = F^{-1}\varepsilon = \{e \in \mathcal{C} | F_e \in \varepsilon\}$ 且 $\mathcal{M}_F = F^{-1}\mathcal{M} \bigcap$ IniF（IniF 是 F-初始态射类），在 $\mathcal{A}$ 中构成一个分解系统；$\mathcal{C}$ 中的 $\mathcal{M}$-子对象性质由 $\mathcal{A}$ 中的 $\mathcal{M}_F$-子对象继承。特别地，$\mathcal{M}_F$-像和 $\mathcal{M}_F$-原像可通过对 $\mathcal{M}$-像和 $\mathcal{M}$-逆像进行初始提升而得到。因此，对于任意 $f \in \mathcal{A}$ 及适当的子对象 n 和 m，$Ff^{-1}(n) = (Ff)^{-1}(Fn)$，且 $(Ff)(Fm) = Ff(m)$。设 $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个忠实的 $\mathcal{M}$-纤维化。对于任意 $X \in \mathcal{A}$，sub$X$ 和 subFX 序等价，其逆对应 $\gamma_X: subX \longrightarrow subFX$ 和 $\delta_X: subFX \longrightarrow subX$ 由 $\gamma_X(m) = Fm$ 及 $\delta_X(n) = p$ 给出，其中 $Fp = n$ 和 $p \in IniF$。对于任意 $f: X \longrightarrow Y \in \mathcal{A}$ 及适当的子对象 n、m、n' 和 m'，$\gamma_Y(f(m)) = (Ff)(\gamma_X(m))$，$f(\delta_X(n)) = \delta_Y(Ff)(n)$，$f^{-1}(\delta_Y(m')) = \delta_X((Ff)^{-1}(m'))$，且 $\gamma_X(f^{-1}(n')) = (Ff)^{-1}(\gamma_Y(n'))$。

命题 4.1. 设 $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ 是一个忠实的 $\mathcal{M}$-纤维化，且 $\sqsubset$ 是关于 $\mathcal{C}$ 的拓生序。定义 $\sqsubset^F$ 为 $m \sqsubset_X^F n \Leftrightarrow Fm \sqsubset_{FX} \gamma_X(n) = Fn.$。那么，$\sqsubset^F$ 是关于 $\mathcal{A}$ 的拓生序。此外，若 $\sqsubset$ 具有相同的性质，则 $\sqsubset^F$ 是可插值的，并满足 (T4)。

证明。(T1) 和 (T2) 显然。对于 (T3)，设 $f: X \longrightarrow Y$ 是一个 $\mathcal{A}$-态射，且 $f(m) \sqsubset_X^F n.$。那么 $Ff(m) \sqsubset_{FY} \gamma_Y(n) \Rightarrow (Ff)(Fm) \sqsubseteq_{FY} (Ff)^{-1}(\gamma_Y(n)) = \gamma_X(f^{-1}(n)) \Leftrightarrow m \sqsubset_X^F f^{-1}(n)$。若 $\sqsubset^F$ 是可插值的，则 $m \sqsubset_X^F n \Leftrightarrow Fm \sqsubset_{FX} \gamma_X(n) \Rightarrow \exists p \in subFX | Fm \sqsubset_{FX} p \sqsubset_{FX} \gamma_X(n) \Rightarrow Fm \sqsubset_{FX} \gamma_X(\delta_X(p))$，且 $F(\gamma_X(p)) \sqsubset_{FX} \gamma_X(n)$，因为 $F\delta_X(p) = p$ 且 $m' \sqsubset_X^F n'.$。这意味着 $Fm \sqsubset_{FX} \gamma_X(n)$ 且 $Fm' \sqsubset_{FX} (\gamma_X(n))$。

因此 $Fm \bigwedge Fm' \sqsubset_{FX} \gamma_X(n) \bigwedge \gamma_X(n') \Rightarrow F(m \bigwedge m') \sqsubset_{FX} \gamma_X(n \bigwedge n') \Leftrightarrow m \bigwedge m' \sqsubset_X^{FX} n \bigwedge n'.$ □

根据命题 2.3，我们可以证明如下结论。

命题 4.2. 1. $If\ \sqsubset\in\bigwedge -TORD$，则 $m\sqsubset_X^F n\Leftrightarrow\delta_X(\mathcal{C}_{FX}^{\sqsubset}(Fm))\leq n$

2. $If\ \sqsubset\in\bigvee -TORD$，则 $m\sqsubset_X^F n\Leftrightarrow m\leq\delta_X(i_{FX}^{\sqsubset}(\gamma_X(n)))$。

证明。1. $If\ \sqsubset\in\bigwedge -TORD$则$m\sqsubset_X^F n\Leftrightarrow Fm\sqsubset_{FX}\gamma_X(n)\Leftrightarrow c_{FX}(Fm)\leq\gamma_X\Leftrightarrow\delta_X c_{FX}^{\sqsubset}(Fm))\leq\delta_X(\gamma_X(n))\Leftrightarrow\delta_X(c_{FX}^{\sqsubset}(Fm))\leq n.$

2. $If\ \sqsubset\in\bigvee -TORD$，则 $m\sqsubset_X^F n\Leftrightarrow Fm\sqsubset_{FX}\gamma_X(n)\Leftrightarrow Fm\leq i_{FX}^{\sqsubset}(\gamma_X(n))\Leftrightarrow\delta_X(Fm)\leq\delta_X(i_{FX}^{\sqsubset}(\gamma_X(n)))\Leftrightarrow m\leq delta_X(i_{FX}^{\sqsubset}(\gamma_X(n)))$。

□

5 由（余）指点自函子诱导的拓生序

定义 5.1. 设 $\sqsubset,\sqsubset'\in TORD(\mathcal{C},\mathcal{M})$。若一个 $\mathcal{C}$-态射 $f\colon X\longrightarrow Y$ 满足：对所有 $n,p\in$ sub$Y$and$m\in$sub$X.$，$f(m)\sqsubset_Y' n\Rightarrow m\sqsubset_X f^{-1}(p)\sqsubset_X f^{-1}(n)$，则称其为 $(\sqsubset,\sqsubset')$-连续。

从定义可知，每个 $\mathcal{C}-$ 态射 $f\colon X\longrightarrow Y$ 都是 $(\sqsubset,\sqsubset)$-连续且 $(\sqsubset',\sqsubset')$-连续的；若 $\sqsubset'\subseteq\sqsubset$，则它是 $(\sqsubset,\sqsubset')$-连续的。若 $\sqsubset,\sqsubset'\in\bigwedge -TORD(\mathcal{C},\mathcal{M})$，则 $f\colon X\longrightarrow Y$ 是 $(\sqsubset,\sqsubset')$-连续的，当且仅当 $f^{-1}(c_X^{\sqsubset}(m))\leq c_X^{\sqsubset}(m)$（将称之为 $(c^{\sqsubset},c^{\sqsubset})$-连续）。若 $\sqsubset,\sqsubset'\in\bigvee -TORD(\mathcal{C},\mathcal{M})$，则 $f\colon X\longrightarrow Y$ 是 $(\sqsubset,\sqsubset')$-连续的，当且仅当 $f^{-1}(i_Y^{\sqsubset}(n))\leq i_X^{\sqsubset}(f^{-1}(n))$（将称之为 $(i^{\sqsubset},i^{\sqsubset'})$-连续）。

对于 $\mathcal{C}$ 的带点自函子 $(F;\eta)$ 以及 $\mathcal{C}$ 上的拓生序 $\sqsubset$，我们希望在 $\mathcal{C}$ 上构造最粗拓生序 $\sqsubset'$，使得 $\mathcal{F}=\{\eta_Y\colon X\in\mathcal{C}\}$ 中的每个态射都是 $(\sqsubset',\sqsubset)$-连续的，并考虑对偶情形。这种方法曾用于构造范畴闭包算子，见 [5]；在本文 ([18]) 中，我们将其用于范畴拟一致结构。有关范畴拟一致结构，感兴趣的读者可参阅 ([13, 17, 12, 20])。最近，[19]，在忠实且健忘的函子上引入了拓生序。

定理 5.1. 设 $(F;\eta)$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个 ε-带点自函子，且 $\sqsubset$ 是 $\mathcal{C}$ 上的拓生序。那么对于所有 $m,n\in subX,m\sqsubset^{F,\eta}{}_X n\Leftrightarrow\eta_X(m)\sqsubset_{FX}p$ 和 $\eta_X^{-1}(p)\leq n$ 都是 $\mathcal{C}$ 上的拓生序。它是使每个 $\eta_X\colon X\longrightarrow FX$ 都为 $(\sqsubset^{F,\eta},\sqsubset)$-连续的最小拓生序。此外，$\sqsubset^{F,\eta}$ 是可插值的，前提是 $\sqsubset$ 可插值。

证明. $(T1)$ 和 $(T2)$ 显然成立。为验证 $(T3)$，设 $X\longrightarrow Y$ 是一个 $\mathcal{C}$ 态射，且 $f(m)\sqsubset^{F,\eta}{}_Y n$。那么存在 $p\in subFY$ 使得 $\eta_Y(m)\sqsubset_{FY}p$

并且 $\eta_Y^{-1}(p) \leq n$。根据定义 2.1, $Ff \circ \eta_X = \eta_Y \circ f$。因此 $(Ff)(\eta_X(m)) \sqsubset_F Yp$ 且 $\eta_Y^{-1}(p) \leq n \Rightarrow (Ff)(\eta_X(m)) \sqsubset_F Yp$，并且 $f^{-1}(\eta_Y^{-1}(p)) \leq f^{-1}(n) \Rightarrow \eta_X(m) \sqsubset_X (Ff)^{-1}(p)$，且 $\eta_X^{-1}((Ff)^{-1}(p)) \leq f^{-1}(n) \Rightarrow \eta_X(m) \sqsubset_{FX} l$，并且 $\eta_X^{-1}(l) \leq f^{-1}(n \Leftrightarrow_m \sqsubset^F, {}_X{}^{\eta} f^{-1}(n)$。由于 $\eta_X(m) \sqsubset_{FX} n \Rightarrow \eta_X(m) \sqsubset_{FX} n \leq \eta_X(\eta_X^{-1}(n)) \Rightarrow \eta_X(m) \sqsubset_{FX} \eta_X(\eta_X^{-1}(n)) \Leftrightarrow m \sqsubset^F, {}_X{}^{\eta} \eta_X^{-1}(n)$ F 是 $(\sqsubset^F, ^{\eta}, \sqsubset)$- 连续的。如果 $\sqsubset'$ 是 $\mathcal{C}$ 上另一个拓生序，且 F 是 $(\sqsubset', \sqsubset)$-连续的，那么 $m \sqsubset^F, {}_X{}^{\eta} n \Leftrightarrow \eta_X(m) \sqsubset_{FX} p$ 且 $\eta_X^{-1}(p) \leq n \Rightarrow m \sqsubset_X \eta_X^{-1}(p) \leq n \Rightarrow m \sqsubset'_X n$。也不难看出，只要 $\sqsubset$ 具有相同的性质， $\sqsubset^F, {}^{\eta}$ 就是内插的。

□

由于反射函子可以视为带点自函子，因此可得以下命题，它将在例子中发挥作用。

命题 5.2. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个 ε-反射子范畴，且 $\sqsubset$ 是 $\mathcal{A}$ 上的一个拓生序。那么对于所有 $X \in \mathcal{C}$ 和 $m, n \in subX(m) \sqsubset_{FX} p$ 与 $\eta_X^{-1}(p) \leq n$ 在 $\mathcal{C}$ 上构成一个拓生序。它是使每个反射态射 $\eta_X : X \longrightarrow FX$ 都是 $(\sqsubset^{F,\eta}, \sqsubset)$-连续的最小拓生序。此外，若 $\sqsubset$ 可插值，则 $\sqsubset^{F,\eta}$ 可插值。

下一个命题由命题 2.3(b) 得出。

命题 5.3. 设 $(F; \eta)$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个带点自函子，且 $\sqsubset \in \bigwedge -TORD$。那么 $c^{\sqsubset^{F,\eta}}(m) = \eta^{-1}(c^{\sqsubset}_{FX}(\eta_X(m)))$ 是 $\mathcal{C}$ 上使每个 η_X: $X \longrightarrow FX$ 都是 $(c^{\sqsubset^{F,\eta}}, c^{\sqsubset})$-连续的最大闭包算子。此外，若 $\sqsubset$ 可插值，则 $c^{\sqsubset^{F,\eta}}$ 是幂等的。

证明。我们很容易验证 $(C1)$，而 $(C2)$ 显然成立。对于 $(C3)$，设 $f : X \longrightarrow Y$ 是一个 $\mathcal{C}$- 态射，且 $m \in subX$。那么，由 $\mathcal{C}^{\sqsubset}$- 连续性、引理 2.1 和定义 2.1，可得 $f(c^{\sqsubset^{F,\eta}}(m)) = f(\eta_X^{-1}(c^{\sqsubset}_{FX}(m))) \leq \eta_Y^{-1}((Ff)(c^{\sqsubset}_{FX}(\eta_X(m)))) \leq \eta_Y^{-1}(c^{\sqsubset}_{FX}((Ff)(\eta_X(m)))) \leq \eta_Y^{-1}(c^{\sqsubset}_{FX}(\eta_Y(f(m)))) \leq c^{\sqsubset^{F,\eta}}(f(m))$。由于 $\eta_X(c^{\sqsubset^{F,\eta}}(m)) \leq c^{\sqsubset}_{FX}(\eta_X(m))$ F 是 $(c^{\sqsubset^{F,\eta}}, c^{\sqsubset})$-连续的。若 c' 是另一个闭包算子，满足 $(c'; c^{\sqsubset})$-连续，则 $\eta_X(c'(m)) \leq c^{\sqsubset}(\eta_X(m)) \Leftrightarrow c'(m) \leq \eta_X^{-1}(c^{\sqsubset}_X(\eta_X(m))) = c^{\sqsubset^{F,\eta}}(m)$。若 $\sqsubset$ 是可插值的，则 $c^{\sqsubset^{F,\eta}}(c^{\sqsubset^{F,\eta}}(m)) = c^{\sqsubset^{F,\eta}}(\eta_X^{-1}(c^{\sqsubset}_{FX}(\eta_X(m)))) = \eta_X^{-1}(c^{\sqsubset}_{FX}(\eta_X(\eta_X^{-1}(c^{\sqsubset}_{FX}(\eta_X(m)))))) \leq \eta_X^{-1}(c^{\sqsubset}_{FX}(\eta_X(m))) = c^{\sqsubset^{F,\eta}}(m)$。

□

命题 5.4. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 和 $\sqsubset \in \bigwedge -TORD$ 的反射子范畴。那么 $c^{\mathcal{A}}(m) = \eta_X^{-1}(c^{\sqsubset}_{FX}(\eta_X(m)))$ 是 $\mathcal{C}$ 上最大的闭包算子，使得每个反射态射 $\eta_X : X \longrightarrow FX$ 都是 $(c^{\mathcal{A}}, c^{\sqsubset})$-连续的。此外，若 $\sqsubset$ 是可插值的，则 $c^{\mathcal{A}}$ 是幂等的。

上述闭包算子最初由 L. Stramaccia ([23]) 在拓扑空间范畴及其连续映射上、由 D. Dikranjan ([6]) 在拓扑范畴上进行研究，后来

由 D. Dikranjan 和 W. Tholen ([5]) 将其研究推广到任意范畴。它是 D. Holgate 在 [11, 10] 中研究的拉回闭包的一个特例。

命题 5.5. 设 f^{-1} 对任意 $f \in \mathcal{C}$ 都有一个左伴随，且 (F, η) 是 $\mathcal{C}$ 和 $\sqcap \in \bigvee -TORD$ 的一个有基点自函子。则 $i^{\sqcap^F,\ {}_X\ ^{\eta}}(m) = \eta_X^{-1}(i^{\sqcap}_{FX}(\eta_X)(m))$ 是 $\mathcal{C}$ 上使每个 $\eta_X\colon X \longrightarrow FX$ 都是 $(i^{\sqcap}, i^{\sqcap^F,\ {}^{\eta}})$-连续的最小内部算子。 $i^{F,\ \eta}$ 是幂等的，前提是 $\sqcap$ 可插值，且每个 $\eta_X \in \varepsilon$。

证明. (I1) 和 (I2) 显然成立。对于 (I3)，设 $f\colon X \longrightarrow Y$ 是一个 $\mathcal{C}$-态射，且 $m \in subY$。利用 $i^{\sqcap}$-连续性、定义 2.1 和引理 2.1，我们有， $f^{-1}(i^{\sqcap^F}{}_{,Y}\ {}^{\eta}(m)) = f^{-1}(\eta_X^{-1}(i^{\sqcap}_{FX}(\eta_X)(m))) = \eta_X^{-1}(Ff)^{-1}(i^{\sqcap}_{FY}(\eta_Y)(m)) \leq \eta_X^{-1}(i^{\sqcap}_{FY}((Ff)^{-1}(\eta_Y)(m))) \leq \eta_X i^{\sqcap}_{FX}(\eta_X)(f^{-1}(m)) = i^{\sqcap^F}{}_{,Y}\ {}^{\eta}(f^{-1}(m))$. 由于 $\eta_X^{-1}(i^{\sqcap}_{FX}(n)) \leq \eta_X^{-1}(i^{\sqcap}_{FX}(\eta_X)\eta_X(n)) = {}_{i^{\sqcap^F}}{}_{,X}\ {}^{\eta}(\eta_X^{-1}(n))$ η_X 对任意 $X \in \mathcal{C}$ 和 $n \in subX$ 都是 $(i^{\sqcap^F,\eta}, i^{\sqcap})$-连续的。若 i' 是 $\mathcal{C}$ 上的另一个内部算子，且 η_X 是 $(i', i^{\sqcap})$-连续的，则 $i^{\sqcap^F}{}_{,X}\ {}^{\eta}(m) = \eta_X^{-1}(i^{\sqcap}_{FX}((\eta_X)(m))) \leq i'_X(\eta_X^{-1}(\eta_X)(n)) \leq i'_X(n)$。若对所有 $X \in \mathcal{C}$, $\sqcap \in \bigvee -INTORD(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ 且 $\eta_X \in \varepsilon$，则 ${}_{i^{\sqcap^F}}{}^{,\eta}(i^{\sqcap^F,\eta}(m)) = i^{\sqcap^F,\eta}(\eta_X^{-1}(i^{\sqcap}_{FX}(\eta_X)(m))) = \eta_X^{-1}(i^{\sqcap}_{FX}(\eta_X)(\eta_X^{-1}(i^{\sqcap}_{FX}(\eta_X)(m)))) = \eta_X^{-1}(i^{\sqcap}_{FX}(i^{\sqcap}_{FX}(\eta_X)(m))) = \eta_X^{-1}(i^{\sqcap}_{FX}(\eta_X)(m))$。 □

虽然由带点自函子诱导的拓生序（定理 5.2）是借助 $\sqcap$-初始态射得到的，但 $\sqcap$-弱

终态射将在下一个定理中用于得到由余带点自函子诱导的拓生序。

定理 5.6. 设 (G, ε) 是 $\mathcal{C}$ 的一个余带点自函子，且 $\sqcap$ 是 $\mathcal{C}$上的一个拓生序，则对所有 $m \in subX$ 和 $n \geq m$， $m \sqcap^{G,\ \varepsilon} n \Leftrightarrow \varepsilon_X^{-1}(n) \sqcap_{GX} \varepsilon_X^{-1}(n)$ 都是 $\mathcal{C}$上的一个拓生序。它是使每个 $\varepsilon_X\colon GX \longrightarrow X$ 均为 $(\sqcap, \sqcap^{G,\ \varepsilon})$-连续的最大拓生序。

证明. 容易验证 $(T1)$ 和 $(T2)$ 成立。对于 $(T3)$，设 $f\colon X \longrightarrow Y$ 是一个 C态射。那么对所有满足 $f(m) \leq n$ 的 $m \in subX$和 $n \in subY$，有 $f(m) \sqcap^{G,\ \varepsilon} n \Leftrightarrow \varepsilon_Y^{-1}(f(m)) \sqcap_{GY} \varepsilon_Y^{-1}1(n) \Rightarrow (Gf)(\varepsilon_X^{-1}(m)) \sqcap GY\varepsilon_X^{-1}(n) \Rightarrow \varepsilon_X^{-1}(m) \sqcap_{GX} \varepsilon_X^{-1}(f^{-1}(n)) \Rightarrow \sqcap_X^{GX} f^{-1}(n)$。现在， $\varepsilon_X\colon GX \longrightarrow X$ 确实是 $(\sqcap, \sqcap^{G,\varepsilon})$-连续的；若 $\sqcap'$ 是 $\mathcal{C}$上的另一个拓生序，且 ε是 $(\sqcap, \sqcap')$-连续的，则对所有 $n \geq m$，有 $m \sqcap'_X n \Rightarrow \varepsilon_X(\varepsilon_X^{-1}(m)) \sqcap' n \Rightarrow \varepsilon_X^{-1}(m) \sqcap_X \varepsilon_X^{-1} \Leftrightarrow m \sqsubseteq^{G,\ {}_X\ {}^{\varepsilon}} n$。 □

将余反射函子视为余带点自函子，我们得到下一个命题。

命题 5.7. 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 的余反射子范畴，且 $\sqcap$ 是 $\mathcal{A}$ 上的拓生序，则对于所有 $m \in subX$ 和 $n \geq m$， $m \sqcap^{\mathcal{A}} n \Leftrightarrow \varepsilon_X^{-1}(n) \sqcap_{GX} \varepsilon_X^{-1}(n)$ 是 $\mathcal{C}$ 上的拓生序。它是使每个余反射态射 $\varepsilon_X\colon GX \longrightarrow X$ 都是 $(\sqcap, \sqcap^{\mathcal{A}})$-连续的最大拓生序。

命题 5.8. 设 (G,ε) 是 $\mathcal{A}$ 上的余带点自函子，且 $\sqsubset\in\bigwedge -TORD$，则对于所有 $m\in subX$，$c^{\sqsubset G,\varepsilon}(m) = m\vee\varepsilon_X(c^{\sqsubset}(\varepsilon_X^{-1}(m)))$ 是 $\mathcal{C}$ 上的闭包算子。它是使每个 $\varepsilon_X: GX\longrightarrow X$ 都是 $(c, c^{G,\varepsilon})$-连续的最小闭包算子。

证明。容易验证（$C1$）和（$C2$）成立。为验证（$C3$），设 $f: X\longrightarrow Y$是一个 $\mathcal{C}$-态射，且 $m\in subX, f(c^{\sqsubset G,\varepsilon}(m)) = f(m\vee\varepsilon_X(c^{\sqsubset}(\varepsilon_X^{-1}1(m)))) = f(m)\vee f(\varepsilon_X(c^{\sqsubset}(\varepsilon_X^{-1}(m)))) = f(m)\vee\varepsilon_Y(Gf)(c^{\sqsubset}(\varepsilon_X^{-1}(m)))) \leq f(m)\vee\varepsilon_Y(c^{\sqsubset}(Gf)(\varepsilon_X^{-1}(m)))) \leq f(m)\vee\varepsilon_Y(c^{\sqsubset}(\varepsilon_Y^{-1}f((m)))) = c^{\sqsubset G,\varepsilon}f(m)$。对于任意 $X\in\mathcal{C},\varepsilon_X$，由于 $\varepsilon_X(c^{\sqsubset}(\varepsilon_X^{-1}(m)) \leq c^{\sqsubset G,\varepsilon}(m) \Leftrightarrow c^{\sqsubset}(\varepsilon_X^{-1}(m))\leq \eta_X^{-1}(c^{\sqsubset G,\varepsilon}(m))$，它是（$c^{\sqsubset}, c^{\sqsubset G,\varepsilon}$）-连续的。若 c'是 $\mathcal{C}$上的另一个拓源序，且 ε_X是（c; c'）-连续的，则 $c^{\sqsubset}(\varepsilon_X^{-1}(m))\leq \varepsilon_X^{-1}(c'(m)) \Leftrightarrow\varepsilon_X(c^{\sqsubset}(\varepsilon_X^{-1}(m)) \leq c'(m) \Rightarrow m\vee\varepsilon_X(c_X^{\sqsubset}(m)) \leq c'(m) \Rightarrow c^{\sqsubset G,\varepsilon}(m)) \leq c'(m)$。□。 □

命题 5.9。设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 和 $\sqsubset\in\bigwedge -TORD$ 的余反射子范畴，则对于所有 $m\in subX$、$c^{\mathcal{A}}(m), = m\vee\varepsilon_X(c^{\sqsubset}(\varepsilon_X^{-1}(m)))$ 都是 $\mathcal{C}$ 上的闭包算子。它是使每个余反射态射 $\varepsilon_X: GX\longrightarrow X$ 都是 $(c, c^{\mathcal{A}})$-连续的最小闭包算子。

命题 5.10。假设对于任意态射 $f\in\mathcal{C}$，逆像 f^{-1} 与子对象的并可交换。设 (G,ε) 是 $\mathcal{C}$ 和 $\sqsubset\in\bigvee -TORD$ 的余带点自函子，则对于所有 $m\in subX$、$i^{\sqsubset G,\varepsilon}(m) = m\wedge(\varepsilon_X)_*(i^{\sqsubset}(\varepsilon_X^{-1}(m)))$ 都是 $\mathcal{C}$ 上的内部算子。它是使每个 $\varepsilon_X: GX\longrightarrow X$ 都是 $(i, i^{G,\varepsilon})$-连续的最大内部算子。

证明。显然满足（$I1$）和（$I2$）。对于（$I3$），设 f: $X\longrightarrow Y$是一个 $\mathcal{C}$-态射，则 $f^{-1}(i^{\sqsubset G,\varepsilon}_Y(m))) = f^{-1}(m\wedge(\varepsilon_Y)_*(i^{\sqsubset}(\varepsilon_Y^{-1}(m))))= f^{-1}(m) \wedge f^{-1}((\varepsilon_Y)_*(i^{\sqsubset}_{GY}(\varepsilon_Y^{-1}(m)))) \leq f^{-1}(m) \wedge(\varepsilon_X)_*(Gf)^{-1}(i^{\sqsubset}_{GY}(\varepsilon_Y^{-1}(m)))) \leq f^{-1}(m) \wedge(\varepsilon_X)_*(i^{\sqsubset}_{GX}(Gf)^{-1}((\varepsilon_Y^{-1}(m)))) \leq f^{-1}(m) \wedge(\varepsilon_X)_*(i^{\sqsubset}_{GX}(\varepsilon^{-1}X(f^{-1}(m))) = i^{\sqsubset G,\varepsilon}_X(f^{-1}(m)))$。由于 $\varepsilon_X^{-1}(i^{\sqsubset G,\varepsilon}(m)) = \varepsilon_X^{-1}m)\wedge\varepsilon_X^{-1}((\varepsilon_X)_*(i^{\sqsubset}_{GX}(\varepsilon^{-1}X(m))) \leq i^{\sqsubset}_{GX}(\varepsilon_X^{-1}(m))\varepsilon_X$是（$i^{\sqsubset}, i^{\sqsubset G,\varepsilon}$）-连续的。若 i' 是 $\mathcal{C}$ 上的另一个内部算子，且 ε_X 是（$i^{\sqsubset}, i'$）-连续的，则$\varepsilon_X^{-1}(i'(m)) \leq i^{\sqsubset}(\varepsilon_{GX}^{-1}(n)) \Leftrightarrow i'(m) \leq(\varepsilon_X)_*(i^{\sqsubset}_{GX}(\varepsilon_X^{-1}(n)) \Rightarrow i'(n) \leq n\wedge(\varepsilon_X)_*(i^{\sqsubset}_{GX}(\varepsilon_X^{-1}(n))$.

□

6 个示例

（1）在拓扑空间及连续映射构成的范畴 Top 中，考虑其（满射、嵌入）分解结构以及以下两个拓生序：$A\sqsubset_X B\Leftrightarrow\bar{A}\subseteq B$ 和 $A\sqsubset'_X B\Leftrightarrow A\subseteq B^o$，其中对所有 $X\in$ Top以及 A、$B\subseteq X$.均成立。命题3.7和命题3.8给出了刻画开映射和闭映射连续映射的等价方式，也给出了刻画定义域带有使映射连续的最粗拓扑的连续映射的等价方式。文中还给出了描述遗传商映射的等价方式。显然，对于任意 $A\subseteq X$，$f_*(A) = Y\setminus f(X\setminus A)$。

命题 6.1. 连续映射 $f:\ X \longrightarrow Y$ 是开映射，当且仅当 f 是 $\sqsubset$-余严格的，当且仅当 f 是 $\sqsubset'$-严格的。

证明. $\overline{f^{-1}(A)} \subseteq B \Leftrightarrow f^{-1}\overline{(A)} \subseteq B \Leftrightarrow X\backslash B \subseteq X\backslash f^{-1}\overline{(A)} \Leftrightarrow X\backslash B \subseteq f^{-1}(Y\backslash \bar{A}) \Leftrightarrow f(X\backslash B) \subseteq Y\backslash\overline{A} \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq Y\backslash f(X\backslash B).\ B \subseteq (f^{-1}(A)]^o \Leftrightarrow X\overline{\backslash f^{-1}(A)} \subseteq X\backslash B \Leftrightarrow \overline{f^{-1}(Y\backslash A)} \subseteq X\backslash B \Leftrightarrow \overline{Y\backslash A} \subseteq Y\backslash f(B) \Leftrightarrow f(B) \subseteq Y\backslash\overline{Y\backslash A} \Leftrightarrow f(B) \subseteq A^o.\ B \subseteq (f^{-1}(A))^o \Leftrightarrow f(B) \subseteq A^o \Leftrightarrow B \subseteq f^{-1}(A^o)$. □

类似的推理可证明以下命题

命题 6.2. 一个连续映射 $f: X \longrightarrow Y$ 是闭映射，当且仅当 f 是 $\sqsubset$-严格的，当且仅当 f 是 $\sqsubset$-余严格的。

对于连续映射 $f:\ X \longrightarrow Y, X$ 携带由 f 诱导的初始拓扑，当且仅当 $A \subseteq X$ 是开映射，即存在一个开 $B \subseteq Y$，使得 $A = f^{-1}(B)$；等价地，对于每个 $A \subseteq X$，$\overline{A} = f^{-1}(f(A))$（例如参见 $\overline{[8, 3]}$）。这样的态射对应于 $\sqsubset$-初始。事实上，如果 f 是 $\sqsubset$-初始的，那么 $f^{-1}(f(A)) \subseteq B \Leftrightarrow X\backslash B \subseteq X\backslash f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow f(\overline{X\backslash B}) \subseteq Y\backslash f(A) \Leftrightarrow f(A) \subseteq Y\backslash\overline{f(X\backslash B)} \Leftrightarrow f(A) \sqsubset_Y f_*\overline{(B)} \Leftrightarrow \overline{A} \sqsubset B \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq B$。反过来，如果 X 携带使 f 连续的最粗拓扑，那么对于任意 $A, B \subseteq X$，$A \sqsubseteq_X B \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq B \Leftrightarrow f^{-1}(f(A)) \subseteq B \Leftrightarrow X\backslash B \subseteq \overline{X\backslash f^{-1}(Y\backslash f(A))} \Leftrightarrow f(X\backslash B) \subseteq Y\overline{\backslash f(A)} \Leftrightarrow f(A) \subseteq Y\backslash f(X\backslash\overline{B)} \Leftrightarrow f\overline{(A)} \sqsubset_Y f_*(B)$。

类似的推理表明，当且仅当 $f(A) \subseteq [Y\backslash f(X\backslash B)]^o \Leftrightarrow A \subseteq B^o$ 时，X 携带使 f 连续的最粗拓扑。根据（[8], 练习 2F），f 是遗传商映射，当且仅当它是满射，且具有如下性质：对于任意 $A \subseteq Y$，每个限制映射f'：$f^{-1}(A) \longrightarrow A$都是商映射；等价地，当且仅当它是满射，且对每个 $B \subseteq Y$，$f(f^{-1}(B)) \subseteq Y$是闭映射。我们显然可以看出，f是$\sqsubset$-终的，当且仅当它是 $\sqsubset'$-终的；而这又当且仅当它是遗传商映射。

(2) 在群及群同态所构成的范畴 Grp 中，取（满射、单态射）分解结构，令 $\sqsubset$ 为由 $A \sqsubset_G B \Leftrightarrow A \leq N \leq B$ 定义的拓生结构，其中 $N \lhd G$且A，$B \leq G$. 当且仅当群同态保正规子群时，它才是 $\sqsubset$-严格的。群同态 $f:\ G \longrightarrow H$ 是 $\sqsubset$-终的，当且仅当它是满射。设 f 是 $\sqsubset$-终的。由于 $H \lhd H$, $f^{-1}(H) \lhd G$。因此$f^{-1}(H) \sqsubset_G G \leq f^{-1}(f(G)) \Rightarrow H \sqsubset_H f(G) \Rightarrow H \leq f(G) \Rightarrow H = f(G)$，也就是说，$f$是满射。反过来，若 f 是满射，则它保正规子群；由命题 3.5(4)，f 是 $\sqsubset$-终的。命题 3.5(3)允许我们得出结论：每个保正规子群的单射群同态都是 $\sqsubset$-始的。

(4) 令 Prox 为邻近空间及邻近映射所构成的范畴，带有（满射、嵌入）分解。对于 Prox 中任意的 $(X,\delta)\ \in$，以及 $A,B\ \subseteq\ X,A\ \sqsubset_{(X,\delta)}\ B\ \Leftrightarrow A\delta(X\backslash B)$，它都是 Prox 上的插值型拓生序。

(5) 考虑 TopGrp，即拓扑群及连续群同态构成的范畴。遗忘函子 F : TopGrp $\longrightarrow$ Grp 是单态纤维化，因为拓扑群的每个子群在子空间拓扑下都是拓扑群（见[4]）。因此，根据命题 4.2，Grp 上的每个拓生序都可以初始提升为 TopGrp 上的拓生序。

(6) 令 Top 为拓扑空间及连续映射构成的范畴，配备（满射，嵌入）分解结构。众所周知，Top（即 T_o拓扑空间及连续映射构成的范畴）是 Top 的满反射子范畴。$^-$定义 $S_X=\{\sqsubset_{X_o}|X_o\in Top_o\}$为 $A\sqsubset_{X_o}B\Leftrightarrow A\subseteq B$，其中任意 $X_o\subseteq Top_o$、A、$B\subseteq X_o$。令（F，η）为到 Top 的反射函子。对于任意 $X\in$ Top，η_X：$X\longrightarrow X/\sim$ 将每个 $x\in X$ 映射到其等价类 $[x]=\{y\in X|\{\bar{x}\}=\{\bar{y}\}\}$。因此 $S_X=\left\{\sqsubset^{F,}{}_X{}^{\eta}\ |X\in Top\right\}$其中 $A\sqsubset^{F,}{}_X{}^{\eta}B\Leftrightarrow\eta_X^{-1}\eta_X^{\ -}(A)\ \subseteq BA$、$B\subseteq X$。

(6) 序列拓扑空间（即每个序列闭集都是闭映射的空间）范畴 sTop 在 Top 中是 M-余反射的。考虑在 sTop 上定义的 $\sqsubset$，其定义为：对于任意 $X\in$sTop 及其某个闭子集 C，$A\sqsubset B\Leftrightarrow A\sqsubseteq C\sqsubseteq B$。设 (G,ε) 是到 sTop 中的余反射函子。对于任意 $(X,\mathcal{T}')\ \in$ Top$^{\varepsilon_{(X,\mathcal{T}')}}$：$(X,\mathcal{T}')\ \longrightarrow(X,\mathcal{T})$，即 X 上的恒等映射，其中 $\mathcal{T}'=\{A\sqsubseteq X|X\backslash A\,is\,sequentially\,closed\,in(X,\mathcal{T})\}$ 是任意 $(X,\mathcal{T})$ 的 sTop-余反射。显然，$A\sqsubset^{G,}{}_X{}^{\varepsilon}B\Leftrightarrow A\subseteq C\subseteq B$，其中 C 是 X 的某个序列闭子集。

参考文献

[1] J. Ad´amek、H. Herrlich 和 G. E. Strecker。《抽象范畴与具体范畴：猫之乐》。《范畴表示论与应用》，(17)，1–507，2006年。重印自1990年原版 [Wiley，纽约]。
[2] F. Assfaw。《内部算子及其应用》。博士论文，西开普大学，2019年。[3] N. Bourbaki。《一般拓扑学：第1—4章》，第18卷。施普林格科学与商业媒体，1998年。

[4] G. Castellini. 内部算子、开态射与性质的保持。《应用范畴结构》，(23):311–322，2015年。[5] D. Dikrajan 和 W. Tholen. 闭包算子的范畴结构及其在拓扑学、代数和离散数学中的应用。《数学及其应用》第346卷。克吕维尔学术出版社集团，多德雷赫特，1995年。[6] D. Dikranjan. 拓扑范畴中的半正则闭包算子与满态射。载于第五届意大利拓扑学国际会议（意大利语）（莱切，1990年/奥特朗托，1990年）。《巴勒莫数学学会会刊》（第2辑）增刊，第29卷，第105–160页，1992年。[7] D. Dikranjan 和 E. Giuli。《闭包算子 I》。《拓扑学及其应用》，27(2):129–143，1987年。[8] R. Engelking。《一般拓扑学》，Sigma纯数学丛书第6卷。Heldermann Verlag，柏林，1989年。由作者从波兰语译出。[9] E. Giuli 和 W. Tholen. 关于闭包算子的开性。《应用范畴结构》，(8):487–502，2000年。[10] D. Holgate. 拉回闭包、完美态射与完备化。博士论文，开普敦大学，1995年。[11] D. Holgate. 拉回闭包算子与完美性的推广。《应用范畴结构》，4(1):107–120，1996年。[12] D. Holgate 和 M. Iragi. 范畴上的拟一致结构与合成拓扑生成结构。《拓扑学及其应用》，263:16–25，2019年。[13] D. Holgate 和 M. Iragi. 由闭包算子确定的拟一致结构。《拓扑学及其应用》，295:论文编号107669，9，2021年。[14] D. Holgate、M. Iragi 和 A. Razafindrakoto. 范畴上的拓生结构与邻近结构。《应用范畴结构》，(24):447–455，2016年。[15]D. Holgate 和 J. ˇSlapal. 范畴邻域算子。《拓扑学及其应用》，158(17):2356–2365，2011年。[16] M. Iragi. 范畴上的拓生结构。理学硕士论文，西开普大学，2016年。

[17] M. Iragi。范畴上的拟一致结构与合成拓扑生成结构。博士论文，西开普大学，2019年。[18] M. Iragi 和 D. Holgate。拟一致结构与函子，即将发表。范畴论及其应用，2021年。[19] M. Iragi、D. Holgate 和 J. Slapal。忠实且健忘函子上的拓扑生成结构。arXiv 预印本 arXiv:2301.12722，2023年。[20] M. Iragi 和 J. ˇSlapal。依赖于参数的传递拟一致结构。《数学方程》，第 1–14 页，2023年。[21] A. Razafindrakoto。范畴上的邻域算子。博士论文，斯泰伦博斯大学，2013年。[22]A. Razafindrakoto 和 D. Holgate。内部与邻域。《拓扑学及其应用》，168:144–152，2014年。[23] L. Stramaccia。由满反射子定义的空间类。《巴勒莫数学学会会报·第二辑·增刊》，(18)，第 423–432 页，1988年。[24] S. J. R. Vorster。一般范畴中的内部算子。《数学问题》，23(4):405–416，2000年。