arXiv:2303.15088v1 [math.RA] 27 Mar 2023

有限维二类幂零李超代数与斜超对称双线性映射

IBRAHEM YAKZAN HASAN 和 Rudra Narayan Padhan

Abstract. 本文讨论范畴 $\mathcal{SN}_2$，其对象是有限维二类幂零李超代数；以及范畴 $\mathcal{SSKE}$，其对象是斜超对称双线性映射。我们建立了 $\mathcal{SN}_2$ 与 $\mathcal{SSKE}$ 之间的关系。由此，我们讨论二类幂零李超代数的可实现性。

1. 引言与预备知识

李超代数在数学和理论物理的许多领域都有应用，因为它们可用于描述超对称性。Kac [29] 对李超代数的数学理论作了全面阐述，并对特征为零的代数闭域上的所有有限维单李超代数进行了分类。近年来，李超代数理论取得了显著发展，在表示论和分类方面获得了许多成果。其中大多数成果是对李代数中众所周知结论的推广。然而，所有有限维幂零李超代数的分类仍是一个开放问题，与有限维幂零李代数的情形一样。

设 $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ 为一个域。$\mathbb{Z}_2$-分次向量空间 V 是向量空间 $V_{\bar{0}}$ 和 $V_{\bar{1}}$ 的直和，即 $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$。它也称为超空间。我们考虑的所有向量超空间和超代数均定义在域 $\mathbb{F}$ 上（$\mathbb{F} \neq 2$ 的特征不为 3）。$V_{\bar{0}}$（分别为 $V_{\bar{1}}$）中的元素称为偶（分别为奇）元素。$V_{\bar{0}} \cup V_{\bar{1}}$ 中的非零元素称为齐次元素。对于齐次元素 $v \in V_\sigma$，若 $\sigma \in \mathbb{Z}_2$，则记 $|v| = \sigma$ 为 v 的次数。U 是 V 的一个分次向量子空间，其中 $U = (V_{\bar{0}} \cap U) \oplus (V_{\bar{1}} \cap U)$；这样的超子空间也称为子空间。我们约定，只要公式中出现次数函数，相应的元素都视为齐次元素。

李超代数（见 [29, 32]）是一个超空间 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$，配有双线性映射 $[.,.] : L \times L \to L$，并满足以下恒等式：

(1) $[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$，对于 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$（$\mathbb{Z}_2$分次），(2) $[x, y] = -(-1)^{|x||y|}[y, x]$（分次斜对称性），(3) $(-1)^{|x||z|}[x, [y, z]] + (-1)^{|y||x|}[y, [z, x]] + (-1)^{|z||y|}[z, [x, y]] = 0$（分次雅可比恒等式），

对所有 $x, y, z \in L$ 均成立。显然，$L_{\bar{0}}$是一个李代数，而$L_{\bar{1}}$是一个$L_{\bar{0}}$-模。若$L_{\bar{1}} = 0$，则 L就是李代数，但一般而言，李超代数并非李代数。若李超代数 L满足对所有 $x, y \in L$都有 $[x, y] = 0$，则称其为阿贝尔李超代数。没有偶部分的李超代数，即$L_{\bar{0}} = 0$，是阿贝尔的。L 的子超代数（或子代数）是一个对括号运算封闭的 $\mathbb{Z}_2$-分次向量子空间。L 的分次子代数 $[L, L]$称为L的导出子代数。若 H 是一个 $\mathbb{Z}_2$-分次子空间，且 $[H, H] \subseteq L$，则称其为 L 的分次理想。该理想

$$Z(L) = \{z \in L : [z, x] = 0 \text{ for all } x \in L\}$$

2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：17B30；次要分类号：17B05。*Key words and phrases.* 幂零李超代数、斜超对称双线性映射、广义海森堡李超代数。

是一个分次理想，称为 L的中心。超空间 f 之间次数为 $|f| \in \mathbb{Z}_2$的态射 $L \to G$是满足 $f(L_\alpha) \subseteq G_{\alpha+|f|}$的线性映射，其中 $\alpha \in \mathbb{Z}_2$。特别地，若$|f| = \bar{0}$，则称同态 f 为偶次数齐次线性映射。李超代数同态 $f: L \to G$ 是一个偶次数齐次线性映射，并满足$f([x,y]) = [f(x) f(y)]$，对所有 $x, y \in L$均成立。若 H是 L的一个理想，则商李超代数L/H 继承典范李超代数结构，使自然投影映射成为一个同态。满同态、同构和自同构的概念具有显而易见的含义。

本文中，对于李超代数 L 的超维数，我们简记为 $\dim L = (m \mid n)$，其中 $\dim L_{\bar{0}} = m$ 且 $\dim L_{\bar{1}} = n$。此外， $A(m \mid n)$ 表示阿贝尔李超代数，其中 $\dim A = (m \mid n)$。若李超代数 L 满足 $Z(L) = L'$ 且 $\dim Z(L) = 1$，则称其为海森堡李超代数。根据 $Z(L)$ 的齐次生成元，海森堡李超代数还可进一步分为偶海森堡李超代数和奇海森堡李超代数 [44]。本文所说的海森堡李超代数均指特殊海森堡李超代数。

Nayak 为李超代数定义了舒尔乘子 [34]。若 L 是由一个 $\mathbb{Z}_2$-分次集合 $X = X_{\bar{0}} \cup X_{\bar{1}}$ 生成的李超代数，且 $\phi: X \to L$ 是一个零次映射，则存在自由李超代数 F 以及 $\psi : F \to L$，使其延拓 ϕ。令 $R =$ 为 $\ker(\psi)$。该扩张，

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow F \longrightarrow L \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

称为 L 的自由表示，记作 (F, ψ) [32]。对于 L 的这一自由表示， L 的乘子记作 $\mathcal{M}(L)$，定义为

$$\mathcal{M}(L) = \frac{[F,F] \cap R}{[F,R]}.$$

关于舒尔乘子的更多细节，见 [3, 4, 5, 16, 17, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 45]。现在我们列出 [34]，中的一些有用结果，以供后续使用。

定理 1.1. [34，见定理 4.2、4.3] 。每个偶中心的海森堡李超代数的维数为 $(2m+1 \mid n)$，且同构于 $H(m,n) = H_{\bar{0}} \oplus H_{\bar{1}}$，其中

$$H_{\bar{0}} =< x_1, \ldots, x_{2m}, z \mid [x_i, x_{m+i}] = z,\ i = 1, \ldots, m >$$

and

$$H_{\bar{1}} =< y_1, \ldots, y_n \mid [y_j, y_j] = z,\ j = 1, \ldots, n > .$$

奇中心海森堡李超代数的乘子与覆盖已知 wn.

定理 1.2. [35，见定理 2.8] 每个奇中心海森堡李超代数的维数为 $(m \mid m+1)$，且它同构于 $H_m = H_{\bar{0}} \oplus H_{\bar{1}}$，其中

$$H_m =< x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m, z \mid [x_j, y_j] = z, j = 1, \ldots, m > .$$

定义 1.3. 若存在一个李超代数 H，使得 $L \cong H/Z(H)$，则称李超代数 L 为 *capable* 。

上中心 $Z^*(L)$ 是李超代数 L 的最小理想，使得 $L/Z^*(L)$ 是可实现的。现在，若 $Z^*(L)$ 是平凡的，则 L 是可实现的。导出子代数的维数至多为一的可实现李超代数的分类已在 [6, 3] 中研究。关于群、李代数和李超代数的可实现性，更多详情见 [43, 2, 19, 1, 4, 5, 31, 36, 40, 41, 42, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]。本文讨论二阶幂零李超代数的可实现性。

定理 1.4. [6, 定理 6.7] H_m 可容许，当且仅当 $m = 1$。

定理 1.5. [6, 定理 6.3] $A(m \mid n)$ 可容许，当且仅当 $m = 0$、 $n = 1$ 或 $m + n \geq 2$。

定理 1.6. [6, 定理 6.4] $H(m,n)$ 是可容许的，当且仅当 $m = 1, n = 0$。

定理 1.7. [35, 命题 3.4][6, 定理 6.9] 设 L 是一个维数为 $(k \mid l)$ 的幂零李超代数，且 $\dim L' = (r \mid s)$，其中 $r+s=1$。若 $r=1, s=0$ 则 $L \cong H(m,n) \oplus A(k-2m-1 \mid l-n)$，对于 $m+n \geq 1$。若 $r=0, s=1$ 则 $L \cong H_m \oplus A(k-m \mid l-m-1)$。此外， L是可容许的，当且仅当 $L \cong H(1,0) \oplus A(k-3 \mid l)$ 或 $L \cong H_1 \oplus A(k-1 \mid l-2)$。

引理 1.8. [4, 命题 4.3] 设 M是李超代数 $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$的分次理想。则下列序列是正合的:

(1) $\ker(\theta_c) \to \mathcal{M}^{(c)}(L) \to \mathcal{M}^{(c)}(\frac{L}{M}) \to \frac{M \cap \gamma_{c+1}(L)}{\gamma_{c+1}(M,L)} \to 0$. (2) 若 M是 n-中心理想，且有 $n \leq c$, $M \wedge^c {}^{L}_{\gamma_{n+1}(L)} \to \mathcal{M}^{(c)}(L) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}^{(c)}(\frac{L}{M}) \to M \cap \gamma_{c+1}(L) \to 0$。

设 L 是一个李超代数，其自由表示为 $0 \longrightarrow R \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} L \longrightarrow 0$，其中 F 是自由李超代数，且 R 是 F的理想。则 L 的舒尔乘子可定义为$\mathcal{M}(L) = F^2 \cap R/[F,R]$。设 H是李超代数 L 的一个中心理想。则存在 F中的一个理想 S，使得 $H \cong S/R$和 $L/H \cong F/S$，因此 $\mathcal{M}(L/H) = F^2 \cap S/[F,S]$。假设 $\pi(\tilde{x}) = x$，其中 $x \in L$ 和 $\tilde{x} \in F$，则下列映射是同态:

$$\begin{aligned} \xi_1 : \mathcal{M}(L) &\longrightarrow \mathcal{M}(L/H) \\ x + [R,F] &\longmapsto x + [S,F] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi : (L/L^2) \otimes H &\longrightarrow \mathcal{M}(L) \\ (x + L^2) \otimes z &\longmapsto [\tilde{z}, \tilde{x}] + [R,F] \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \rho : \mathcal{M}(L/H) &\longrightarrow L^2 \cap H \cong (S \cap F^2)/(R \cap F^2) \\ x + [S,F] &\longmapsto \pi(x) \end{aligned}$$

引理 1.9. [6, 命题 5.7，定理 5.8] 设 H 是有限维李超代数 L 的一个中心理想。则以下结果成立。

(1) The sequence $0 \longrightarrow ker\rho \longrightarrow H \otimes \frac{L}{L^2} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}(L) \xrightarrow{\xi} \mathcal{M}(L/H) \longrightarrow H \cap L^2 \longrightarrow 0$ *is exact.*
(2) $H \subseteq Z^*(H)$ *if and only if* $im\varphi = 0$.

设 L 是一个李超代数，其自由表示为 $0 \longrightarrow R \longrightarrow F \xrightarrow{\pi} L \longrightarrow 0$。若 $x \in L$，则 $\tilde{x}$ 表示 x 在 π 下的一个固定原像。容易看出 $L^2 \cong (F^2+R)/R$， $L/L^2 \cong F/(F^2+R)$，因此 $\mathcal{M}(L/L^2) = F^2/(F^3 + [R,F])$，并且有以下同态:

$$\begin{aligned} \beta : (L/L^2) \otimes L^2 &\longrightarrow \mathcal{M}(L) \\ (x + L^2) \otimes z &\longmapsto [\tilde{x}, \tilde{z}] + [R,F] \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{M}(L) &\longrightarrow \mathcal{M}(L/L^2) \\ x + [R,F] &\longmapsto x + (F^2 + [R,F]) \end{aligned}$$

$$\zeta : \mathcal{M}(L/L^2) \longrightarrow L^2$$
$$x + [R, F] \longmapsto \pi(x)$$

定理 1.10. 设 L 是一个二阶有限维幂零李超代数，则序列

$$0 \longrightarrow ker\beta \longrightarrow L^2 \otimes (L/L^2) \xrightarrow{\beta} \mathcal{M}(L) \xrightarrow{\xi} \mathcal{M}(L/L^2) \xrightarrow{\zeta} L^2 \longrightarrow 0$$

是正合的。此外，$\ker\beta = \langle (-1)^{|z||y|}((z+L^2) \otimes [x,y]) + (-1)^{|x||z|}((x+L^2) \otimes [y,z]) + (-1)^{|y||x|}((y+L^2) \otimes [z,x]) \mid x, y, z \in L \rangle$。

证明。根据引理 1.8 取 $c = 1$，得到以下正合列

$$0 \longrightarrow \ker\beta \longrightarrow L^2 \otimes (L/L^2) \xrightarrow{\beta} \mathcal{M}(L) \xrightarrow{\xi} \mathcal{M}(L/L^2) \xrightarrow{\zeta} L^2 \longrightarrow 0$$

由分次雅可比恒等式:

$\beta((-1)^{|z||y|}((z+L^2)\otimes[x,y]) + (-1)^{|x||z|}((x+L^2)\otimes[y,z]) + (-1)^{|y||x|}((y+L^2)\otimes[z,x])) = (-1)^{|\tilde{z}||\tilde{y}|}(\tilde{z}\otimes[\tilde{x},\tilde{y}]) + (-1)^{|\tilde{x}||\tilde{z}|}(\tilde{x}\otimes[\tilde{y},\tilde{z}]) + (-1)^{|\tilde{y}||\tilde{x}|}(\tilde{y}\otimes[\tilde{z},\tilde{x}]) = 0$。由此，证明得证。□

由于 L/L^2 是阿贝尔李超代数，$\mathcal{M}(L/L^2) = (L/L^2) \wedge (L/L^2)$。因此，我们得到以下正合列

$$0 \longrightarrow \ker\beta \longrightarrow L^2 \otimes (L/L^2) \xrightarrow{\beta} \mathcal{M}(L) \xrightarrow{\xi} L/L^2 \wedge L/L^2 \xrightarrow{\zeta} L^2 \longrightarrow 0$$

利用上述正合列，我们有

$$\mathcal{M}(L) \cong \ker\xi \oplus \mathrm{im}\xi = \mathrm{im}\beta \oplus \ker\zeta,$$

thus

$$\mathcal{M}(L) \cong \frac{(L/L^2) \otimes L^2}{\ker\beta} \oplus \ker\zeta. \tag{1.4}$$

现在我们建立 1.3 中的 β 的核与李超代数的上中心之间的关系。

引理 1.11. 设 H 是有限维二阶非阿贝尔幂零李超代数L 的一个中心理想，且 β 如 1.3 中所述。则 $H \subseteq Z^*(L)$ 当且仅当 $H \subseteq Z(L) \cap L^2$ 且$\langle (-1)^{|r||y|}(r+L^2) \otimes z \in (L/L^2) \otimes L^2) \mid z = [x,y] \in H; \quad x, y, r \in L \rangle \subseteq \ker\beta$.

证明. 设 $H \subseteq Z^*(L)$。由于 L 是二阶非阿贝尔幂零李超代数，我们可以观察到 $\dim L^2 \leq \dim Z(L) \leq \dim L - 2$，因此根据定理 1.5，$L/L^2$ 是可实现李超代数。现在，根据 $Z^*(L)$的定义可知 $H \subseteq Z^*(L) \subseteq L^2$，特别地，$H \subseteq L^2$。若考虑自然同态 $i : (L/L^2) \otimes H \longrightarrow (L/L^2) \otimes L^2$ 以及 1.2 中的映射 φ，则 $\mathrm{im}(i) \subseteq (L/L^2) \otimes L^2$。显然，$\varphi = \beta i$，因此对每个元素 $z = [x,y] \in H$，$\beta((-1)^{|r||y|}(r+L^2) \otimes z) = \varphi((-1)^{|r||y|}(r+L^2) \otimes z)$。由引理 1.9(ii)可得 $\mathrm{im}\varphi = 0$，因此

$$\beta i((L/L^2) \otimes H) = \varphi((L/L^2) \otimes H) = 0.$$

因此，$\mathrm{im}(i) \subseteq \ker\beta$。反过来，设 $H \subseteq Z(L) \cap L^2$ 且 $\mathrm{im}(i) \subseteq \ker\beta$。由于 $\beta i((L/L^2) \otimes H) = \varphi((L/L^2) \otimes H)$，我们有 $\mathrm{im}\varphi = 0$。因此，由引理 1.9(ii)可得 $H \subseteq Z^*(L)$，证毕。□

由上述引理，我们可以对二阶幂零李超代数的上中心作另一种描述。

推论 1.12. 设 L 是一个二阶幂零李超代数，则

$$Z^*(L) = \{z = [x, y] \in L^2 \mid (-1)^{|r||y|}(r + L^2) \otimes z \in ker\beta \text{ for all } r \in L\}.$$

定义 1.13. 若有限维李超代数 L 满足 $Z(L) = L^2$ 且 $\dim L^2 = m + n$，则称其为秩为（$m \mid n$）的广义海森堡李超代数。

定理 1.14. [3, 命题 2.13] 设 L 是一个（$m \mid n$）维、幂零类为二阶的幂零李超代数，且 $\dim L^2 = (r \mid s)$。则 $L = H \oplus A(l \mid k)$ 且 $Z^*(L) = Z^*(H)$，其中 $A(l \mid k)$ 是维数为（$l \mid k$）的阿贝尔李超代数，而 H 是秩为（$r \mid s$）的（$m - l \mid n - k$）维广义海森堡李超代数。

2. Relation between the categories of Lie superalgebras of class two and skew-supersymmetric bilinear maps

本节将介绍斜超对称双线性映射的术语和基本性质，全文将用到这些内容。设 $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ 是一个向量超空间，$Bil(V)$ 表示 V上所有双线性型构成的空间。它具有自然分解 $Bil(V) = (BilV)_{\bar{0}} \oplus (BilV)_{\bar{1}}$，其中

$$(BilV)_{\bar{0}} = \{f \in Bil(V) \mid f(u, v) = 0 \ if \ |u| \neq |v|\},$$
$$(BilV)_{\bar{1}} = \{f \in Bil(V) \mid f(u, v) = 0 \ if \ |u| \neq |v| + 1\}.$$

设 V和 W是两个超空间。若双线性映射 $f\colon V \times V \longrightarrow W$满足 $f(V_\alpha, V_\beta) \subseteq W_{\alpha+\beta}$，其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$，则称其为保分次映射。若双线性映射 $f \in Bil(V)$ 满足下式，则称其为超对称（分别地，斜超对称）：

$$f(u, v) = (-1)^{|u||v|} f(v, u) \ \ (resp.\ f(u, v) = -(-1)^{|u||v|} f(v, u))$$

对所有齐次元素 $u, v \in V$均成立。

定义 2.1. 若双线性映射 $f \in Bil(V)$ 满足：对所有 $v \in V$，若 $f(v, u) = 0$，则 $u = 0$，则称其为非退化的。

设 V 和 W 是两个向量超空间。考虑一个斜超对称双线性映射 $f : V \times V \longrightarrow W$。令

$$f(V, V) = \{f(u, v) \mid u, v \in V\}.$$

从此以后，对于每个斜超对称双线性映射 f，我们假设 $W = f(V, V)$。

设 $\mathcal{SN}_2$ 为域 $\mathbb{F}$上的有限维二类幂零李超代数范畴，$\mathcal{SSKE}$ 为一个范畴，其对象是保分次的斜超对称双线性映射 $f\colon V \times V \longrightarrow W$，满足 V，且 W 是域 $\mathbb{F}$ 上的非平凡有限维超空间，并且 f 的像张成 W。W 的维数是 f 的秩，而V的维数是 f的维数。本节中，我们建立范畴 $\mathcal{SN}_2$ 与 $\mathcal{SSKE}$之间的等价。随后证明，范畴 $\mathcal{SN}_2$的每个对象都对应于范畴 $\mathcal{SSKE}$的一个对象。

定义 2.2. 若范畴 $\mathcal{SSKE}$ 中的一个对象 $f\colon V \times V \longrightarrow W$ 满足：V可分解为两个非平凡子超空间 $V = \overline{V_1} \oplus \overline{V_2}$ 的直和，使得对所有 $v_1 \in \overline{V_1}$和 $v_2 \in \overline{V_2}$，均有$f(v_1, v_2) = 0$，则称其为可分解的。对每个 $i = 1$，由 $f(\overline{V_i}, \overline{V_i})$ 张成的 W子空间记为 $\overline{W_i}$。对每个 $i = 1$，映射 $\overline{f_i}\colon \overline{V_i} \times \overline{V_i} \longrightarrow \overline{W_i}$是 f 在 $\overline{V_i} \times \overline{V_i}$ 上的限制。特别地，$\overline{f_i} \in \mathcal{SSKE}$。

设 Lb 是 $\mathcal{SN}_2$的一个对象。将 $U_L = L/L^2$ 和 $W_L = L^2$ 视为 $\mathbb{F}$-超空间。定义 e

$$f_L : U_L \times U_L \longrightarrow W_L \tag{2.1}$$
$$(x + L^2, y + L^2) \longmapsto [x, y].$$

于是 $f_L \in \mathcal{SSKE}$。此外， f_L 的像张成 L^2。假设 L_1 和 L_2 是$\mathcal{SN}_2$的两个对象，且 $\delta\colon\ L_1 \longrightarrow L_2$是一个李同态。令 $U_{L_i} = L_i/L_i^2$和 $W_{L_i} = L_i^2$。对于每个 $i = 1,\ 2$，我们将 U_{L_i}和 W_{L_i} 视为 $\mathbb{F}$-超空间。现在，我们可以定义两个李同态

(2.2)
$$\begin{aligned} \delta_1 : U_{L_1} &\longrightarrow U_{L_2} \\ a + L_1^2 &\longmapsto \delta(a) + L_2^2, \end{aligned}$$

and

$$\delta_2 = \delta|_{W_{L_1}} \colon W_{L_1} \longrightarrow W_{L_2},$$

其中， $\delta|_{W_{L_1}}$ 表示 δ 在 L_1^2 上的限制，满足 $\delta_2 f_{L_1} = f_{L_2}(\delta_1 \times \delta_1)$，即下图是交换图

$$\begin{array}{ccc} U_{L_1} \times U_{L_1} & \xrightarrow{\ f_{L_1}\ } & W_{L_1} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \delta_1 \times \delta_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \delta_2} \\ U_{L_2} \times U_{L_2} & \xrightarrow[\ f_{L_2}\ ]{} & W_{L_2} \end{array}$$

因此，(δ_1, δ_2)是 f_{L_1} 与 f_{L_2}之间的一个态射。

对于$\mathcal{SSKE}$中的对象 $f\colon\ V \times V \longrightarrow W$，我们可以通过选取基 $\{u_1, \ldots, u_m;\ v_1, \ldots, v_n\}$，为 V定义 $\mathcal{SN}_2$中的一个李超代数 L_f，其中对所有 $1 \le i \le m$， $|u_i| = 0$；对所有 $1 \le j \le n$， $|v_j| = 1$；并选取基 $\{w_1, \ldots, w_r; q_1, \ldots, q_s\}$，为 W，其中对所有 $1 \le k \le r$， $|w_k| = 0$；对所有 $1 \le t \le s$， $|q_t| = 1$。那么， $\{((u_i, 0), 0), ((0, v_j), 0), (0, (w_k, 0)), (0, (0, q_t))\ \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n, 1 \le k \le r, 1 \le t \le s\}$是超空间 $L_f = V \oplus W$的一组基。我们可以定义括号 $[.,.]\colon\ L_f \times L_f \longrightarrow L_f$如下：

$$[((x, y), (w, l)), ((x', y'), (w', l'))] = (0, f((x, y), (x', y'))),$$

其中 $x, y, x', y' \in V$； $w, l, w', l' \in W$。我们有

(2.3)
$$L_f = V \oplus W \cong \langle u_i, v_j, w_k, q_t \mid B(u_i, u_p) = [u_i, u_p], B(v_j, v_o) = [v_j, v_o], B(u_i, v_j) = [u_i, v_j], w_k, q_t \in Z(L_B) \rangle$$现在，显然 L_f 是范畴 $\mathcal{SN}_2$的一个对象。

定理 2.3. 定义函子 $\mathcal{B}$，它从范畴 $\mathcal{SN}_2$ 到范畴 $\mathcal{SSKE}$，定义如下

$$\begin{aligned} L &\longrightarrow f_L \quad \text{for each object } L \text{ in } \mathcal{SN}_2 \\ \delta &\longmapsto (\delta_1, \delta_2) \quad \text{for each morphism } \delta : L_1 \longrightarrow L_2 \text{ in } \mathcal{SN}_2 \end{aligned}$$

其中，序对 (δ_1, δ_2) 在 2.2 中定义，而映射 f_L 在 2.1 中定义。则以下性质成立：

(1) 函子 $\mathcal{B}$是范畴 $\mathcal{SN}_2$与 $\mathcal{SSKE}$之间的等价。(2) 态射 $\delta\colon\ L \longrightarrow H$ 是 $\mathcal{SN}_2$ 中的同构，当且仅当 $\mathcal{B}(\delta)$是 $\mathcal{SSKE}$中的同构。

证明。(1) 设 $L_1, L_2 \in \mathcal{SN}_2$。按 2.1 定义 $U_i = L_i/L_i^2$, $W_i = L_i^2$ 以及映射 f_{L_i}。设 (δ_U, δ_W) 是从 f_{L_1} 到 f_{L_2} 的态射，满足 $\delta_U\colon\ U_1 \longrightarrow U_2$ 且 $\delta_W\colon\ W_1 \longrightarrow W_2$。设 $L_1 \cong U_1 \oplus W_1$ 和 $L_2 \cong U_2 \oplus W_2$ 如 2.3 所示。我们得到一个李同态 $\varphi\colon\ L_1 \longrightarrow L_2$，满足 $\mathcal{B}(\varphi) = (\delta_U, \delta_W)$。定义

$$\varphi : U_1 \oplus W_1 \longrightarrow U_2 \oplus W_2$$

$$((x,y),(w,l)) \longmapsto (\delta_U((x,y)),\delta_W((w,l)))$$

显然， φ 是一个偶线性映射。设 $((x_i,y_i),(w_i,l_i)) \in U_1 \oplus W_1$，其中 $i=1,2$。则 $\varphi(((x_1,y_1),(w_1,l_1)),((x_2,y_2),(w_2,l_2))) = (0, f_{L_1}((x_1,y_1),(x_2,y_2))$

$$\begin{aligned}
&= (0, \delta_W(f_{L_1}((x_1,y_1),(x_2,y_2))))\\
&= (0, f_{L_2}(\delta_U((x_1,y_1),(x_2,y_2))))\\
&= [(\delta_U((x_1,y_1)\ \delta_W((w_1,l_1))),(\delta_U((x_2,y_2))\ \delta_W((w_2,l_2)))]\\
&= [\varphi((x_1,y_1),(w_1,l_1))\ \varphi((x_2,y_2),(w_2,l_2))].
\end{aligned}$$

因此， φ 是一个李同态，满足 $\mathcal{B}(\varphi) = (\delta_U, \delta_W)$。由此，函子 $\mathcal{B}$ 是满的。

将 $U_i = L_i/L_i^2$ 和 $W_i = L_i^2$ 视为 $\mathbb{F}$-超空间。显然， $\mathcal{B}$ 诱导出映射 $\mathcal{B}_1 : Hom_{\mathcal{SN}_2}(L_1,L_2) \longrightarrow Hom_{\mathcal{SSKE}}(f_{L_1}, f_{L_2})$，其定义为：对每个态射 $\delta: L_1 \longrightarrow L_2$， $\delta \longmapsto (\delta_1,\delta_2)$，其中有序对 (δ_1,δ_2) 的定义如 2.2 所述。现在我们证明 $\mathcal{B}_1$ 是单射。

设 $\theta,\xi \in Hom_{\mathcal{SN}_2}(L_1,L_2)$，且 $\mathcal{B}_1(\theta) = \mathcal{B}_1(\xi)$。那么 $\theta_1(u+L^2) = \xi_1(u+L^2)$ 且 $\theta_2(a) = \xi_2(a)$，其中 $u \in L_1/L_1^2$， $a \in L_1^2$。若 $\theta = 0$ 或 $\xi = 0$，则 $\theta = \xi = 0$。现在，假设 θ 和 ξ 是非零同态。将 $L_1 \cong U_1 \oplus W_1$ 和 $L_2 \cong U_2 \oplus W_2$ 视为超空间。设 $\{x_1 + L_1^2, \ldots, x_{n+m} + L_1^2\}$ 是 U_1 的一组基，其中对所有 $1 \le i \le m$， $|x_i| = 0$；对所有 $m < i \le m+n$， $|x_i| = 1$；再设 $\{y_1 + L_2^2, \ldots, y_{r+s} + L_2^2\}$ 是 U_2 的一组基，其中对所有 $1 \le j \le r$， $|y_j| = 0$；对所有 $r < j \le r+s$， $|y_j| = 1$。由于像 θ 和像 ξ 都包含于 L_2^2，我们得出 θ 和 ξ 分别被映为 $\langle x_1, \ldots, x_{n+m}\rangle \cong U_1$ 到 $\langle y_1, \ldots, y_{r+s}\rangle \cong U_2$。由于对所有满足 $1 \le i \le m+n$ 的 i，都有 $x_i + L_1^2 \in U_1$，因此我们得到 $\theta(x_i)$ 和 $\xi(x_i)$ 是超空间 $\langle y_1$ 的两个元素；对所有满足 $1 \le i \le m+n$ 的 i，均如此。现在，利用 2.2，我们有 $\theta(x_i) - \xi(x_i) \in L_2^2$，其中 $1 \le i \le m+n$。因此，对所有满足 $1 \le i \le m+n$ 的 i，都有 $\theta(x_i) = \xi(x_i)$。由于当 $a \in L_1^2$ 时， $\theta(a) = \xi(a)$，故 $\theta = \xi$ 是一个线性映射。由于对所有满足 $1 \le i,k \le m+n$ 的 i,k，都有 $\theta([x_i,x_k]) = [\theta(x_i)\ \theta(x_k)] = [\xi(x_i)\ \xi(x_k)] = \xi([x_i,x_k])$，因此 $\theta = \xi$ 是李超同态。由此， $\mathcal{B}_1$ 是单射，且该函子是忠实的。

设 $f \in \mathcal{SSKE}$。由上述定理的论证可知，存在一个李超代数 L_f，使得 $\mathcal{B}(L_f) = f$。因此， $\mathcal{SSKE}$ 中的每个对象都同构于某个形如 $\mathcal{B}(H)$ 的对象，其中 H 是 $\mathcal{SN}_2$ 中的李超代数。因此，函子 $\mathcal{B}$ 本质满。由此可知，函子 $\mathcal{B}$ 是范畴等价，因为它是满、忠实且本质满的。

（2）假设 $\delta: L \longrightarrow H$ 是一个李超同态，并设 $\mathcal{B}(\delta) = (\delta_1,\delta_2)$ 是 2.2 中的一个态射。设 δ 是一个同构。那么 δ_1 和 δ_2 都是双射。因此， (δ_1,δ_2) 是 f_L 与 f_H 之间的一个同构。反过来， (δ_1,δ_2) 这一对是 f_L 与 f_H 之间的一个同构。由于 δ_1 是同构，我们得到 $\ker\delta \subseteq L^2$，且 $H = \delta(L) + H^2$。由于 δ_2 是同构，因此 $\ker\delta = 0$，从而 $H^2 = \delta(L^2) \subseteq \delta(L)$。因此， δ 是同构。□

以下结果可由定理 2.3 立即得到。

推论 2.4. 范畴 $\mathcal{SN}_2$ 和 $\mathcal{SSKE}$ 等价。

对于固定的 m、 n 和 r、 s，其中 $1 \le r < m$、 $1 \le s < n$，设 $\mathcal{SN}_2(m \mid n, r \mid s)$ 是范畴 $\mathcal{SN}_2$ 的一个子范畴，其对象是 $\mathcal{SN}_2$ 中导出子代数的维数为 $(r \mid s)$ 的 $(m \mid n)$ 维李超代数。假设 $\mathcal{SSKE}(m-r \mid n-s, r \mid s)$ 是范畴 $\mathcal{SSKE}$ 的一个子范畴，其对象是 $\mathcal{SSKE}$ 中秩为 $(r \mid s)$ 且维数为 $(m-r \mid n-s)$ 的对象。

˜定理 2.5. 设 $\mathcal{B}$ 为定理 2.3 中定义的函子 $\mathcal{B}$ 在子范畴 $\mathcal{SN}_2(m \mid n, r \mid s)$ 上的限制。那么以下性质成立：

˜(1) 函子 $\mathcal{B}$是范畴 $\mathcal{SN}_2(m \mid n,r \mid s)$ 与 $\mathcal{SSKE}(m-r \mid n-s,r \mid s)$ 之间的等价。˜(2) 态射 $\delta\colon L \longrightarrow H$是 $\mathcal{SN}_2(m \mid n,r \mid s)$ 中的同构，当且仅当 $\mathcal{B}(\delta)$ 是 $\mathcal{SSKE}(m-r \mid n-s,r \mid s)$ 中的同构。

证明。该证明与定理 2.3 的证明类似。 □

推论 2.6。 范畴 $\mathcal{SN}_2(m \mid n,r \mid s)$ 和 $\mathcal{SSKE}(m-r \mid n-s,r \mid s)$ 等价 .

3. Applications of equivalence categories $\mathcal{SN}_2$ and $\mathcal{SSKE}$

在上一节中，我们已经看到范畴 $\mathcal{SN}_2$ 和 $\mathcal{SSKE}$ 等价。本节中，我们讨论它的一些应用，即讨论 $\mathcal{SSKE}$ 对象的舒尔乘子和上中心。

设 $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ 是一个超空间。若双线性映射 $f \in Bil(V)$ 满足 $f(V_{\bar{0}},V_{\bar{1}}) = 0$，则称其为偶的；若满足 $f(V_{\bar{0}},V_{\bar{0}}) = f(V_{\bar{1}},V_{\bar{1}}) = 0$，则称其为奇的。我们用 $\otimes$ 表示通常的向量空间张量积运算。设 $f\colon V \times V \longrightarrow W$ 是 $\mathcal{SSKE}$ 的一个对象。我们定义

$$X_f = \left\langle (-1)^{|a||c|}a \otimes f(b,c) + (-1)^{|b||a|}b \otimes f(c,a) + (-1)^{|c||b|}c \otimes f(a,b) \mid a,b,c \in V \right\rangle.$$

那么 X_f 是 $V \otimes W$ 的超子空间。定义 $\rho\colon V \wedge V \longrightarrow W$ 为

$$v_1 \wedge v_2 \longmapsto B(v_1,v_2).$$

那么 ρ 是一个满射的（斜对称）双线性映射。现在，我们将 f 的舒尔乘子定义如下:

$$\mathcal{M}(f) = \frac{U \otimes W}{X_f} \oplus \ker\rho.$$

利用 1.4 和定理 1.10，我们得到以下命题。

命题 3.1. 设 L 是 $\mathcal{SN}_2$ 中的李超代数，且 f_L 按 2.1 节定义。于是

$$\mathcal{M}(L) = \mathcal{M}(f_L).$$

由上述命题可知，作为 $\mathcal{SN}_2$ 中对象的 L 的乘子，等于作为 $\mathcal{SSKE}$中对象的 f_L 的乘子。现在我们给出 $\mathcal{SSKE}$中对象的上中心定义，随后将其与 $\mathcal{M}(f_L)$ 联系起来。

定义 3.2. 设 $f\colon V \times V \longrightarrow W$是 $\mathcal{SSKE}$中的一个对象。我们将 f的上中心定义如下:

$$Z^*(f) = \{w = f(u,v) \in W \mid (-1)^{|x||v|}x \otimes w \in X_f \text{ for all homoenuos elements } x,u,v \in V\}.$$

命题 3.3. 设 $L \in \mathcal{SN}_2$，且 f_L 按 2.1 节定义。于是

$$Z^*(L) = Z^*(f_L).$$

证明. 推论 1.12 表明，对于所有 $r \in L\}$， $Z^*(L) = \{z = [x,y] \in L^2 \mid (-1)^{|r||y|}(r + L^2) \otimes z \in \ker\beta$。由定理 1.10 可知， $X_{f_L} = \ker\beta$。现在根据 $Z^*(f)$ 的定义即可得出结论。□

现在显然，要确定 $\mathcal{SN}_2$ 中一个对象的可实现性，只需检验 $Z^*(f_L)$ 是否为平凡空间。

推论 3.4. 设 $L \in \mathcal{SN}_2$。则 L 可容许当且仅当 $Z^*(f_L) = 0$。

由上述推论可知，二阶幂零李超代数是可容许的，当且仅当 $Z^*(f_L) = 0$。

引理 3.5. 设 $f\colon V\times V\longrightarrow W$ 是 $\mathcal{SSK\mathcal{E}}$ 的一个对象，且 I 是 W的一个子空间。那么，

$\bar{f}\colon V\times V\longrightarrow W/I$由 $f(x,y)=f(x,y)+I$给出，是 $\mathcal{SSK\mathcal{E}}$的一个对象，并且 $(Z^*(f)+I)/I\subseteq Z^*(f)$。

证明。考虑映射 $f\colon V\times V\longrightarrow W/I$，其定义如下：

$$\bar{f}(x,y)=f(x,y)+I,$$

以及由下式给出的 $\eta\colon V\otimes W\longrightarrow V\otimes(W/I)$：

$$x\otimes y\longmapsto x\otimes(y+I),$$

以及从 η 到 X_f $\eta|_{X_f}\colon X_f\longrightarrow V\otimes(W/I)$ 的限制，其定义如下：

$$(-1)^{|a||c|}a\otimes f(b,c)+(-1)^{|b||a|}b\otimes f(c,a)+(-1)^{|c||b|}c\otimes f(a,b)\longmapsto$$

$$(-1)^{|a||c|}a\otimes(f(b,c)+I)+(-1)^{|b||a|}b\otimes(f(c,a)+I)+(-1)^{|c||b|}c\otimes(f(a,b)+I).$$

可以观察到，$f\in\mathcal{SSK\mathcal{E}}$, η 是一个同态，且 $\mathrm{im}(\eta|_{X_f})=X_{\bar{f}}$。由于 $w=f(u,v)\in Z^*(f)$，因此对所有 $x\in V$，$(-1)^{|x||v|}x\otimes w\in X_f$。现在，对所有 $x\in V$，$\eta|_{X_f}((-1)^{|x||v|}x\otimes w)=(-1)^{|x||v|}x\otimes(w+I)\in X_{\bar{f}}$。因此 $w+I\in Z^*(f)$。□

推论 3.6。 设 $L\in\mathcal{SN}_2$，且 H 是 L 的分次中心理想，使得 $H\subseteq L^2$。则

$$(Z^*(L)+H)/H\subseteq Z^*(L/H)$$

.

证明。证明由命题 3.3 和引理 3.5 得出。 □

定理 3.7。设 $f\colon V\times V\longrightarrow W$ 是 $\mathcal{SSK\mathcal{E}}$ 中秩为 $(\binom{m}{2}+\binom{n+1}{2}\mid mn)$、维数为 $(m\mid n)$ 的一个对象。则 L_f 是一个维数为 $(\binom{m+1}{2}+\binom{n+1}{2}\mid mn+n)$、秩为 $(\binom{m}{2}+\binom{n+1}{2}\mid mn)$ 的广义海森堡李超代数，其中 L_f 是与 f 相关联的李超代数。

证明。设 $\{u_1,\ldots,u_m;v_1,\ldots,v_n\}$ 是 $V=V_{\bar{0}}\oplus V_{\bar{1}}$ 的一组基，其中 $|u_i|=0$ 对所有 $1\leq i\leq m$ 成立，$|v_j|=1$ 对所有 $1\leq j\leq n$ 成立。设 $x_{ir}:=f(u_i,u_r)\in W_{\bar{0}}$, $y_{js}:=f(v_j,v_s)\in W_{\bar{0}}$，以及 $z_{ij}:=f(u_i,v_j)\in W_{\bar{1}}$，$1\leq j\leq s\leq n$, $1\leq i<r\leq m$。那么

$$W=<x_{ir},y_{js},z_{ij}\mid 1\leq j\leq s\leq n,\ 1\leq i<r\leq m>.$$

由于 $\dim W=(\binom{m}{2}+\binom{n+1}{2}\mid mn)$，因此 $\{x_{ir},y_{js},z_{ij}\mid 1\leq j\leq s\leq n,\ 1\leq i<r\leq m\}$ 是 W 的一组基。现在

$$L_f\cong\langle u_i,v_j,x_{ir},y_{js},z_{ij}\mid[u_i,u_r]=x_{ir},\ [v_j,v_s]=y_{js},\ [u_i,v_j]=z_{ij},\ 1\leq j\leq s\leq n,\ 1\leq i<r\leq m\rangle.$$

因此，L_f 是一个秩为 $(\binom{m}{2}+\binom{n+1}{2}\mid mn)$ 的 $(\binom{m+1}{2}+\binom{n+1}{2}\mid mn+n)$ 维广义海森堡李超代数。□

现在，我们得到了关于 $\mathcal{SSK\mathcal{E}}$的偶对象和奇对象的以下结果。

推论 3.8. 设 $f\colon V\times V\longrightarrow W$ 是 $\mathcal{SSK\mathcal{E}}$中一个秩为 $(\binom{m}{2}+\binom{n+1}{2}\mid 0)$、维数为 $(m\mid n)$ 的偶对象。那么，L_f 是一个秩为 $(\binom{m}{2}+\binom{n+1}{2}\mid 0)$ 的 $(\binom{m+1}{2}+\binom{n+1}{2}\mid n)$ 维广义海森堡李超代数。

证明。由于 f是偶的，因此定理 3.7 中的 $z_{ij}=f(u_i,v_j)=0$。 □

推论 3.9. 设 $f\colon V\times V\longrightarrow W$ 是一个秩为 $(0\mid mn)$、维数为 $(m\mid n)$ 的奇对象，属于 $\mathcal{SSK\mathcal{E}}$。则 L_f 是一个秩为 $(0\mid mn)$、维数为 $(m\mid mn+n)$ 的广义海森堡李超代数。

证明. 由于 f是奇的， $x_{ir} = f(u_i, u_r) = 0$， $y_{js} = f(v_j, v_s) = 0$，证明由定理 3.7 得出。□

定理 3.10. 设 $f\colon V \times V \longrightarrow W$ 是一个可分解对象， $\mathcal{SSKE}$ 采用定义 2.2 中的记号。则有以下性质：

(1) $W = \overline{W_1} + \overline{W_2}$。 (2) $X_f = X_{\bar{f}_1} + X_{\bar{f}_2} + \overline{V_1} \otimes \overline{W_2} + \overline{V_2} \otimes \overline{W_1}$.˜(3) 假设 dim $W = 2$，且 $W_1 = W = \overline{W_2} \oplus \overline{U}$，并且 $f_1\colon \overline{V_1} \times \overline{V_1} \longrightarrow \overline{U}$是 $\mathcal{SSKE}$中的一个可分解对象。如果 f 是非退化的，那么

$$X_f = X_{\tilde{f}_1} + V \otimes \overline{W_2} \oplus \overline{V_2} \otimes \overline{U}.$$

证明. (1) 设 $V = \overline{V_1} \oplus \overline{V_2}$。则 $\overline{W_1} + \overline{W_2} \subseteq W$。现在，设 $u, v \in V$，则 $u = u_1 + u_2, v = v_1 + v_2$¯ ¯，其中 $u_1, v_1 \in \overline{V_1}$ 和 $u_2, v_2 \in \overline{V_2}$。于是 $f(u, v) = f(u_1, v_1) + f(u_2, v_2) = f_1(u_1, v_1) + f_2(u_2, v_2)$，因此 $W \subseteq \overline{W_1} + \overline{W_2}$。所以， $W = \overline{W_1} + \overline{W_2}$。
(2) 注意到 $X_{\bar{f}_1} + X_{\bar{f}_2} \subseteq X_f$。首先，我们证明 $X_{\bar{f}_1} + X_{\bar{f}_2} + \overline{V_1} \otimes \overline{W_2} + \overline{V_2} \otimes \overline{W_1} \subseteq X_f$，为此只需证明 $\overline{V_1} \otimes \overline{W_2} + \overline{V_2} \otimes \overline{W_1} \subseteq X_f$。令 $u_1, u_2 \in \overline{V_1}$ 和 $x, y \in \overline{V_2}$。由于f 是可分解的，我们有

$$\begin{aligned}(-1)^{|u_1||y|}u_1 \otimes f(x,y) + (-1)^{|x||u_1|}x \otimes f(y,u_1) + (-1)^{|y||x|}y \otimes f(u_1,x) &= (-1)^{|u_1||y|}u_1 \otimes f(x,y) \\ &= (-1)^{|u_1||y|}u_1 \otimes \bar{f}_2(x,y)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}(-1)^{|x||u_2|}x \otimes f(u_1,u_2) + (-1)^{|u_1||x|}u_1 \otimes f(u_2,x) + (-1)^{|u_2||u_1|}u_2 \otimes f(x,u_1) &= (-1)^{|x||u_2|}x \otimes f(u_1,u_2) \\ &= (-1)^{|x||u_2|}x \otimes \bar{f}_1(u_1,u_2).\end{aligned}$$

因此 $X_{\bar{f}_1} + X_{\bar{f}_2} + \overline{V_1} \otimes \overline{W_2} + \overline{V_2} \otimes \overline{W_1} \subseteq X_f$.。对于另一包含关系，令 $z = (-1)^{|a||c|}a \otimes f(b,c) + (-1)^{|b||a|}b \otimes f(c, a) + (-1)^{|c||b|}c \otimes f(a,b) \in X_f$，其中 a, b, c是 V中的齐次元素。由于$f(\overline{V_1}, \overline{V_2}) = 0$，我们有以下几种情况：

(i) 若 a、 b、 c 是 $\overline{V_1}$中的齐次元素，则 $z \in X_{\bar{f}_1}$。(ii) 若 a、 b、 c 是$\overline{V_2}$ 中的齐次元素，则 $z \in X_{\bar{f}_2}$.
(iii) 若 a、b、c 中的一个（设为 a）是V_1 中的齐次元素，且 b、 c 是 $\overline{V_2}$ 中的齐次元素；或者若a 是$\overline{V_2}$ 中的齐次元素，且 b、 c 是 $\overline{V_1}$中的齐次元素。则

$$z = (-1)^{|a||c|}a \otimes f(b,c) = (-1)^{|a||c|}a \otimes \bar{f}_2(b,c) \in \overline{V_1} \otimes \overline{W_2},$$

or

$$z = (-1)^{|a||c|}a \otimes f(b,c) = (-1)^{|a||c|}a \otimes \bar{f}_1(b,c) \in \overline{V_2} \otimes \overline{W_1}.$$

由 (i)、(ii) 和 (iii)，可得 $z \in X_{\bar{f}_1} + X_{\bar{f}_2} + \overline{V_1} \otimes \overline{W_2} + \overline{V_2} \otimes \overline{W_1}$。因此 $X_f \subseteq X_{\bar{f}_1} + X_{\bar{f}_2} + \overline{V_1} \otimes \overline{W_2} + \overline{V_2} \otimes \overline{W_1}$，于是

$$X_f = X_{\bar{f}_1} + X_{\bar{f}_2} + \overline{V_1} \otimes \overline{W_2} + \overline{V_2} \otimes \overline{W_1}.$$

(3) 假设 $W = \langle w_1 \rangle \oplus \langle w_2 \rangle$、 $\overline{W_2} = \langle w_2 \rangle$，且 $\overline{U} = \langle w_1 \rangle$。令 g_i 和 h 分别为定义在$\overline{V_1}$ 和 $\overline{V_2}$ 上的分次¯交替双线性型，其中 $i = 1$=2。于是 $f_1 = g_1 w_1 + g_2 w_2$ 和_ ˜$f_2 = h w_2$。令 $f_1 = g_1 w_1$。现在，我们将证明 $X_f = X_{\tilde{f}_1} + V \otimes \overline{W_2} \oplus \overline{V_2} \otimes \overline{U}$。利用

第 (ii) 部分及事实 $X_{\bar{f}_2} \subseteq \overline{V_2} \otimes \overline{W_2} \subseteq \overline{V_2} \otimes \overline{W_1}$，我们得到

$$\begin{aligned} X_f =& X_{\bar{f}_1} + X_{\bar{f}_2} + \overline{V_1} \otimes \overline{W_2} + \overline{V_2} \otimes \overline{W_1} \\ &= X_{\bar{f}_1} + \overline{V_1} \otimes \overline{W_2} + \overline{V_2} \otimes \overline{W} \\ &= X_{\bar{f}_1} + \overline{V_1} \otimes \overline{W_2} + \overline{V_2} \otimes (\overline{W_2} \oplus \overline{U}) \\ &= X_{\bar{f}_1} + V \otimes \overline{W_2} + \overline{V_2} \otimes \overline{U}. \end{aligned}$$

¯我们断言 $X_{\bar{f}_1} \subseteq X_{\tilde{f}_1} + V \otimes \overline{W_2}$。对于 $x, y, z \in \overline{V_1}$，由于 $f_1 = g_1 w_1 + g_2 w_2$，我们有

$$\begin{aligned} &(-1)^{|x||z|} x \otimes \bar{f}_1(y,z) + (-1)^{|y||x|} y \otimes \bar{f}_1(z,x) + (-1)^{|z||y|} z \otimes \bar{f}_1(x,y) \\ &= (-1)^{|x||z|} x \otimes (g_1(y,z) w_1 + g_2(y,z) w_2) + (-1)^{|y||x|} y \otimes (g_1(z,x) w_1 + g_2(z,x) w_2) \\ &+ (-1)^{|z||y|} z \otimes (g_1(x,y) w_1 + g_2(x,y) w_2) \\ &= (-1)^{|x||z|} x \otimes \tilde{f}_1(y,z) + (-1)^{|y||x|} y \otimes \tilde{f}_1(z,x) + (-1)^{|z||y|} z \otimes \tilde{f}_1(x,y) + (-1)^{|x||z|} x \otimes g_2(y,z) w_2 \\ &+ (-1)^{|y||x|} y \otimes g_2(z,x) w_2 + (-1)^{|z||y|} z \otimes g_2(x,y) w_2 \in X_{\tilde{f}_1} + \overline{V_1} \otimes \overline{W_2} \subseteq X_{\tilde{f}_1} + V \otimes \overline{W_2}. \end{aligned}$$

因此 $X_{\bar{f}_1} \subseteq X_{\tilde{f}_1} + V \otimes \overline{W_2}$，于是我们有

$$X_f = X_{\bar{f}_1} + V \otimes \overline{W_2} + \overline{V_2} \otimes \overline{U} \subseteq X_{\tilde{f}_1} + V \otimes \overline{W_2} + \overline{V_2} \otimes \overline{U}.$$

另一方面，由于 $X_{\tilde{f}_1} \subseteq X_{\bar{f}}$，于是

$$X_f = X_{\tilde{f}_1} + V \otimes \overline{W_2} \oplus \overline{V_2} \otimes \overline{U}.$$

□

在下述定理中，我们对 $\mathcal{SSKE}$ 中秩一的对象进行分类。

定理 3.11. 设 $f : V \times V \longrightarrow W$ 是 $\mathcal{SSKE}$ 中秩为 $(r \mid s)$ 的可分解对象，其中 $r + s = 1$。则以下性质成立：

(1) 若 $r = 1, s = 0$，则对某些 m, n, k 和 l，$L_f \cong H(m \mid n) \oplus A(k, l)$。(2) 若 $r = 0, s = 1$，则对某些 m, k' 和 l'，$L_f \cong H(m) \oplus A(k', l')$。(3) 存在 V 的两个子空间 D_1 和 D_2，使得 $V = D_1 \oplus D_2$。假设 $S_i = f(D_i, D_i)$ 且 $f_i = f|_{D_i \times D_i}$：对每个 $i = 1, 2$，$D_i \times D_i \longrightarrow S_i$。那么 $f = f_1 + f_2$，$S_2 = 0$，且 f_1 是 ALT 中秩一的非退化对象。若 dim $D_1 = (2|0)$ 或 dim $D_1 = (1|1)$ 或 dim $D_1 = (0|2)$，则 $X_f = D_2 \otimes W$。否则，$X_f = U \otimes W$。

其中，L_f 是与 f相关联的李超代数。

证明。(1) 设 L_f 是与 f相关联的李超代数。根据定理 1.14，我们有 $L_f \cong H \oplus A$，其中 H 是广义海森堡李超代数，A 是阿贝尔李超代数。显然，H 的秩等于 f的秩，即$(1 \mid 0)$。因此，对于某些 m、n、k 和 l，有 $L_f = H(m \mid n) \oplus A(k, l)$。

(2) 类似地，我们有$L_f \cong H \oplus A$，其中 H 是广义海森堡李超代数，A 是阿贝尔李超代数。并且 H 的秩等于 f的秩，即$(0 \mid 1)$。因此，对于某些 m、k'和 l'，有 $L_f = H(m) \oplus A(k', l')$。

（3）由（1）可得，对于某些 m、n 和 k、l，有 $L_f = H(m, n) \oplus A(k|l)$；并且由定理 1.7 可知，$L_f$ 是可容许的，当且仅当 $m = 1, n = 0$。令 $V = L_f / L_f^2$, $D_1 = H(m, n)/H(m, n)^2$, 以及 $D_2 = A(k|l)$。由于 $L_f / L_f^2 = (H(m, n)/H(m, n)^2) \oplus A(k|l)$，我们有 $V = D_1 \oplus D_2$。现在令 $S_i = f(D_i, D_i)$ 并令 $f_i = f|_{D_i \times D_i}$：对每个 $i = 1$，有 2：$D_i \times D_i \longrightarrow S_i$。显然，$f_1 \in \mathcal{SSKE}$ 且 $S_2 = 0$。由于 L_{f_1} 是

一个秩一广义海森堡李超代数，因此 f_1 是 $\mathcal{SSKE}$ 中的秩一非退化对象。与定理 3.10 的证明类似，我们有

$$X_f = X_{f_1} + X_{f_2} + D_1 \otimes S_2 + D_2 \otimes S_1. \tag{3.1}$$

若 $\dim D_1 = (r|s)$ 且满足 $r+s=2$，则有

$$L_f \cong \begin{cases} H(1|0) \oplus A(k|l) & \text{if } r=2,\ s=0 \\ H(0|2) \oplus A(k'|l') & \text{if } r=0,\ s=2 \\ H(1) \oplus A(k''|l'') & \text{if } r=1,\ s=1. \end{cases}$$

由于 $S_2 = 0$，我们得到 $X_{f_2} = 0$ 和 $D_1 \otimes S_2 = 0$。显然， $X_{f_1} = 0$。利用 3.1 以及事实$S_1 = W$，可得 $X_f = D_2 \otimes W$。若 $\dim D_1 \neq 2$，则 L_f是非可提升的。利用命题 3.3 和定理 1.14，由于 $Z^*(f_1) = Z^*(H(m,n)) = Z^*(L_f) = W$，我们有 $X_{f_1} = D_1 \otimes W$，因此$X_f = D_1 \otimes W + D_2 \otimes W = V \otimes W$。类似地，若 $L_f \cong H(m) \oplus A(k',l')$。□

定义 3.12. 若李超代数 L 满足 $L = K + H$，其中 $[H,K]=0$ 和 $H \cap K \subseteq Z(L)$，则称其为两个超子代数 K 和H的中心和。记作 $L = H \diamond K$。

以下结果的证明与李代数的情形类似（见 [15]），故省略证明。

引理 3.13. 设 $f: V \times V \longrightarrow W$ 是 $\mathcal{SSKE}$ 中的一个可分解非退化对象，并采用定义 2.2 中的记号。则有以下结果：

(1) $L_f = L_{\overline{f}_1} \diamond L_{\overline{f}_2}$ 和 $L_{\overline{f}_1} \cap L_{\overline{f}_2} = L^2_{\overline{f}_1} \cap L^2_{\overline{f}_2} \subseteq Z(L_f)$，其中 L_f 和 $L_{\overline{f}_i}$ 分别是与 f和 $\overline{f}_i$ 相关联的广义海森堡李超代数，对每个 $i=1$，2 均成立。(2) 第 (1) 部分中的和是直和，当且仅当 $\overline{W}_1 \cap \overline{W}_2 = 0$。此外， $Z^*(f) = Z^*(\overline{f}_1) \oplus Z^*(\overline{f}_2)$。

引理 3.14. 设 L 是秩至少为二的广义海森堡李超代数，且 $L = H \diamond K$。则有以下结论：

(1) H 和 K 是广义海森堡李超代数。(2) f_L 是 $\mathcal{SSKE}$ 的可分解非退化对象。

引理 3.15. 设 $f: V \times V \longrightarrow W$ 是 $\mathcal{SSKE}$ 中秩为二的可分解非退化对象，记号沿用定义 2.2。若对每个 $i=1$，2，均有 $\overline{W}_i = W$，则 $Z^*(f) = W$。

引理 3.16. 设 $f: V \times V \longrightarrow W$ 是 $\mathcal{SSKE}$ 中秩为二的可分解非退化对象，记号沿用定义 2.2。假设 $\overline{W}_1 = W$ 且 $\dim \overline{W}_2 = 1$。则 $Z^*(f) = W$ 或 $Z^*(f) = \overline{W}_2$。

定理 3.17. 设 $f: V \times V \longrightarrow W$ 是 $\mathcal{SSKE}$ 中一个秩二的可分解非退化对象，采用定义 2.2 中的记号。假设 $\dim \overline{W}_i = (r_i|s_i)$，其中 $r_i + s_i = 1$ 对每个 $i=1$ 均成立，2。则 $Z^*(f) = Z^*(\overline{f}_1) \oplus Z^*(\overline{f}_2)$，且

$$L_f \cong \begin{cases} H(m|n) \oplus H(m'|n') & if\, r_i = 1,\ s_i = 0 \\ H(l) \oplus H(l') & if\, r_i = 0,\ s_i = 1 \\ H(m|n) \oplus H(l) & if\, r_1 = 1,\ s_1 = 0;\ r_2 = 0,\ s_2 = 1. \end{cases}$$

对于某些 m、 n、 l、 m'、 n'、 l'。

证明。首先，我们证明 $\overline{f}_i$是非退化的。假设存在一个元素 $x \in \overline{V}_i$，使得$\overline{f}_i(x,y) = 0$对所有 $y \in \overline{V}_i$都成立。由于 f是可分解的，因此对所有 $v \in V$，都有 $f(x,v) = 0$，从而得到矛盾。因此，对每个 $i=1$，$\overline{W}_i \neq 0$，2。定理 3.11(i,ii)意味着

$$L_{f_1} \cong \begin{cases} H(m|n) & \text{if } r_1 = 1,\ s_1 = 0 \\ H(l) & \text{if } r_1 = 0,\ s_1 = 1 \end{cases}$$

对于某些 m、 n、 l，以及

$$L_{f_2} \cong \begin{cases} H(m'|n') & \text{if } r_2 = 1,\ s_2 = 0 \\ H(l') & \text{if } r_2 = 0,\ s_2 = 1. \end{cases}$$

对于某些 m'、 n'、 l'。由于 $W_1 \cap W_2 = 0$，引理 3.13 表明 $Z^*(f) = Z^*(f_1) \oplus Z^*(f_2)$ 和 $L_f = L_{f_1} \oplus L_{f_2}$，因此

$$L_f \cong \begin{cases} H(m|n) \oplus H(m'|n') & \text{if } r_i = 1,\ s_i = 0 \\ H(l) \oplus H(l') & \text{if } r_i = 0,\ s_i = 1 \\ H(m|n) \oplus H(l) & \text{if } r_1 = 1,\ s_1 = 0;\ r_2 = 0,\ s_2 = 1. \end{cases}$$

□

现在我们描述秩二的两个广义海森堡李代数的中心和的上中心。

定理 3.18. 设 L 为秩二的广义海森堡李超代数，且设 $L = H \diamond K$。则有以下结论：

(1) 若 $\dim H^2 = \dim K^2 = 2$，则 $Z^*(L) = Z(L)$。

(2) 若 $dimH^2 = dimK^2 = 1$，则

$$L_f \cong \begin{cases} H(m|n) \oplus H(m'|n') & if\ \ dimH^2 = dimK^2 = (1|0) \\ H(l) \oplus H(l') & if\ \ dimH^2 = dimK^2 = (0|1) \\ H(m|n) \oplus H(l) & if\ \ dimH^2 = (1|0),\ dimK^2 = (0|1), \end{cases}$$

并且对于某些 m、 n、 l、 n'、 m'、 l'，有 $Z^*(L) = Z^*(H) \oplus Z^*(K)$。

(3) 若 $dimH^2 = 2$ 且 $dimK^2 = 1$，则 $Z^*(L) = Z(L)$ 或 $Z^*(L) = K^2$。

证明。该结果由定理 3.17、引理 3.14、3.15 和 3.16 得出。 □

References

[1] 贝尔，B. (1938). 具有预先指定中心和中心商群的群. *Trans. Amer. Math. Soc.* 44(3): 387 412 10 1090 0002 9947 1938 1501973 3 - . DOI: . /S - - - - 埃利斯，G. ( ). 群对的可实现性、同调与中心列. *J. Algebra.* [2] 1996 179(1): 31-46. DOI: 10 1006 1996 0002 . /jabr. . Padhan, Rudra Narayan, and K. C. Pati. (2018) 广义海森堡李超代数的可实现性与舒尔乘子. [3] arXiv 预印本 arXiv: 1810 04862 . Padhan, Rudra Narayan, Nupur Nandi, and K. C. Pati. (2020) 李超代数的二幂零乘子. [4] arXiv 预印本 arXiv: 2006 10970 . 阿拉米安，V.，穆罕默德扎德，H.，萨莱姆卡尔，A. (2008) 李代数的舒尔乘子与覆盖的一些性质. [5] *Comm. Algebra.* 36 2 697 707 10 1080 00927870701724193 ( ): - . DOI: . / Padhan, R. N., Nayak, S., Pati, K. C. ( ). 判定可实现的李超代数. [6] 2021 *Comm. Algebra.* 49(10): 4274 4290 10 1080 00927872 2021 1918135 - . DOI: . / . . Hasan, I. Y., Padhan, R. N. ( ). 关于秩为 ≤ 2 [7] 2022 2210 00254 的广义海森堡李超代数的三重张量积. arXiv 预印本 arXiv: . Padhan, R. N., Hasan, I. Y., Pradhan, S. S. (2022). 关于李超代数非阿贝尔张量平方的维数. [8] arXiv 预印本 arXiv: 2209 09514 . Padhan, R. N., Khuntia, T. K. ( ). 正则 Hom-Lie 代数对的同斜相对中心扩张. [9] arXiv 预印本 arXiv:2209.07822 Hasan, I. Y., Padhan, R. N., Das, M. ([10] 2022 *Indian*). 判定某些幂零 *J Pure Appl Math* 10 1007 13226 022 00348 0 李超代数对的可实现性. . DOI: . /s - - - Nandi, N., Padhan, R. N. ( ). 3-李超 [11] 2022 代数的上同调、超导子与阿贝尔扩张. arXiv 预印本 arXiv: 2207 11443 . Padhan, R. N., Nandi, N., Pati, K. C. (2020). 正则 Hom-Lie 代数中因子集的一些性质. arXiv 预印本 [12] arXiv:2005.05555

[13] Padhan, R. N., Pati, K. C. (2018). 关于幂零李代数的2-乘子维数. arXiv 预印本 arXiv:1811.09771
[14] 2017 1707 06454 Padhan, R. N.,
[15] 2021
Pati, K. C. ( ). 李超代数根系的分裂. arXiv 预印本 arXiv: . Johari, F. ( ). 二阶有限维幂零李代数与交错双线性映射. *Journal of Algebra* 586 10 561 581 10 1016 2021 06 . ( ): - . DOI: . / j.jalgebra. . .
040
[16] 1993 Batten, P. ( ). 李代数的乘子与覆盖. 博士学位论文. 北卡罗来纳州立大学，罗利，北卡罗来纳州.
[17] Batten, P., Moneyhun, K., Stitzinger, E. (1996). 根据乘子刻画幂零李代数. *Comm. Algebra*. 24 14 4319 4330 10 1080 00927879608825817 ( ): - . DOI: . / Batten, P., Stitzinger, E. ( ). 李代数的覆盖.
[18] 1996
Comm. Algebra. 24(14): 4301-4317. DOI: 10 1080 00927879608825816 . / Beyl, F., Felgner, U., Schmid, P. (1979). 关于作为中心因子群出现的群. *J. Algebra*. 61(1): 161-177. DOI:
[19] 10 1016 0021 8693 79 90311 9 . / - ( ) - Beyl, F., Tappe, J. ( ).
[20] 1982
Groups Extensions and Representations and the Schur Multiplier.《数学讲义》第958卷. 纽约，柏林：施普林格.
[21] Bosko, L. (2010). 极大类群中李代数与群的舒尔乘子. *Internat. J. Algebra Comput.* 20 6 807 821 10 1142 0218196710005881 ( ): - . DOI:
[22] 1987
doi.org/ . /S Ellis, G. ( ). 李代数的非阿贝尔外积及李代数同调中的一个正合列. *J. Pure Appl. Algebra*. 46(2-3): 111-115.
[23] Ellis, G. (1991). 李代数的一个非阿贝尔张量积. *Glasg. Math. J*. 33(1): 101-120. DOI: 10 1017 0017089500008107 . /S Ellis, G. ( ). 张量积与 q-交叉模. *J. London Math. Soc*. 51(2): 241-258. DOI: 10 1112
[24] 1995
51 2 243 . /JLMS/ . . Garcıa-Martınez, X., Khmaladze, E.,
[25] ´ ´
Ladra, M. (2015). 李超代数的非阿贝尔张量积与同调. *J. Algebra*. 440 464 488 10 1016 2015 05 027 : - . DOI: . /j.jalgebra. . . Hardy, P., Stitzinger, E. ( ). 根据乘子
[26] 1998
刻画幂零李代数 $t(L) = 3, 4, 5, 6$. *Comm. Algebra*. 26 11 3527 3539 10 1080 00927879808826357 ( ): - . DOI: . / Hardy, P. ( ). 根据乘子刻画幂零李代数 III. *Comm. Algebra*. 33(11):
[27] 2005
4205 4210 10 1080 00927870500261512 - . DOI: . / Johari, F., Parvizi, M., Niroomand, P. ( ). 李代数对的可实现性与舒尔乘子.
[28] 2017
Journal of Geometry and Physics 114 184 196 10 1016 2016 11 . : - . DOI: . / J.GEOMPHYS. . .
016
[29] 1977 *Adv. Math* 26 1 8 96 10 1016 0001 Kac, V.G. ( ). 李超代数. . ( ): - . DOI: . / - 8708 77 90017 2 ( ) - Karpilovsky, G. ( ). .
[30] 1987 *The Schur Multiplier*
伦敦，DC：伦敦数学会.
[31] Khuntia, T. K., Padhan, R. N., Pati, K. C. (2022). n-等斜李超代数的内超导子. *Results Math* 77 3 10 1007 00025 022 01643 2 . ( ) . DOI: . /s - - - Musson, I. ( ). .《数学研究生教程》第131卷. 密尔沃基，
[32] 2012 *Lie superalgebras and enveloping algebras*
威斯康星州：美国数学会.
[33] Nandi, N., Padhan, R. N., Pati, K. C. (2022). 李超代数直和与半直和的超导子. *Comm. Algebra*. 50 3 1055 1070 10 1080 00927872 2021 1977943 ( ): - . DOI: . / . . Nayak, S. ( ). 幂零李超代数的乘子.
[34] 2019
Comm. Algebra. 47(2): 689-705. DOI: 10 1080 00927872 2018 1492595 . / . . Nayak, S. ( ). 通过乘子对有限维幂零李超代数进行分类.
[35] 2021
J. Lie . ( ): - .
[36] Nayak, S., Padhan, R. N., Pati, K. C. (2020 *Comm. Algebra*). 李超代数中等斜的一些性质. *Theory* 31 2 439 458 48 2 523 537 10 1080 00927872 2019 1648654 ( ): - . DOI: . / . .
[37] 2011 Niroomand, P. ( ). 关于幂零李代数舒尔乘子维数. *Cent. Eur. J. Math.* 9 1 57 64 10 2478 11533 010 0079 3 ( ): - . DOI: . /s - - - Niroomand, P., Russo, F. G. ( ). 关于幂零李代数舒尔乘子的注记. *Comm. Algebra*. 39 4 1293 1297 10 1080 00927871003652660 ( ): - . DOI: . / Niroomand, P., Russo, F. G. ( ).
[38] 2011
[39] 2011
关于幂零李代数舒尔乘子的一个限制. *Electron.* . ( ): - . DOI: . / - . *J. Linear Algebra* 22 1 1 9 10 13001 1081 3810 1423
[40] 2013 Niroomand, P., Parvizi, M., Russo, F. G. ( ). 判定李代数可实现性的一些判据. *J. Algebra*. 384 36 44 10 1016 2013 02 033 : - . DOI: . /j.jalgebra. . . Padhan, R. N., Nayak, S. ( ). 关于某些幂零李超代数的可实现性与舒尔乘子. *Linear Multilinear* 70 8 1467 1478 10 1080 03081087 2020 1764902 . ( ): - . DOI: . / . .
[41] 2022
[42] 2020
Padhan, R. N., Pati, K. C. ( ). 幂零李超代数中心导子的一些研究. *Asian-Eur.* . ( ): . . DOI: . /S *J. Math* 13 4 2050068 10 1142 1793557120500680

[43] Pourmirzaei, A., Hokmabadi, A., Kayvanfar, S. (
2011 *Bull. Malays. Math. Sci.*).
Soc 35 1 205 213
群对的可实现性。. ( ): - . [44] Rodriguez-Vallarte, M. C., Salgado, G., Sanchez-Valenzuela, O. A. (2011). 海森堡李超代数及其不变超正交形式与超辛形式。 *J. Algebra*. 332(1): 71-86. DOI: 10 1016 2011 02 003 . /
[45] 2021
j.jalgebra. . . Safa, H. ({ }) 关于李超代数对的乘子。 *Quaestiones Mathematicae*. 1-12. DOI:
10.2989/16073606.2021.1978010Centre for Applied Mathematics and Computing,
Institute of Technical Education and Research,Siksha 'O' Anusandhan (A Deemed to be University),
Bhubaneswar-751030, Odisha, India*Email address*: ibrahemhasan898@gmail.comCentre for Data Science,
Institute of Technical Education and Research, Siksha 'O' Anusandhan(A Deemed to be University),
Bhubaneswar-751030, Odisha, India*Email address*: rudra.padhan6@gmail.com,
rudranarayanpadhan@soa.ac.in