arXiv:2303.15138v1 [cs.DB] 27 Mar 2023

多粒度框架中的二元谓词推理规则

Stephen J. Hegner 新罕布什尔州数据库管理系统研究 新伦敦邮政信箱2153号，新罕布什尔州03257，美国dbmsnh@gmx.com

M. Andrea Rodr´ıguez*数据基础研究千年研究所 工程系、信息学与计算机科学系 Edmundo Larenas 219号，康塞普西翁大学 4070409 康塞普西翁，智利 andrea@udec.cl

摘要

在多粒度框架中，最重要的两个二元谓词是包含和不相交性。在本工作的第一部分中，建立了一个针对使用这些谓词的断言的可靠且完备的推理系统。该系统针对粒度框架进行了定制；尤其是，它能够正确地对底粒和顶粒进行建模，并要求除底粒之外的所有粒均为非空。此外，该系统是单次使用的，即在证明中，任何断言都不会被用作前件超过一次。

在本文的第二部分中，我们提出了一种方法，将一个允许使用 Armstrong 模型的框架上的可靠且完备的推理系统，扩展为一个能够对所有断言（包括肯定断言和否定断言）进行可靠且完备推理的系统。随后将该方法应用于二元粒度谓词，从而获得关于包含和不相交性及其否定的可靠且完备的推理系统。

1 引言

在诸如 MGDB [HR17] [HR18]，这样的多粒度关系数据库系统中，普通的扁平属性被替换为允许具有层次结构的属性。具体而言，一个

*本文所有通信事宜均应寄送给作者。

受约束的粒化属性模式（或 CGAS）包含一个集合 Granules$\langle \mathfrak{S} \rangle$，称为 $\mathfrak{S}$ 的粒，以及一个约束集 Constr($\mathfrak{S}$)，用于规定这些粒之间的关系。该知识模型采用开放世界假设，即断言 φ 可能为真（如果 Constr($\mathfrak{S}$) $\models \varphi$），可能为假（如果 Constr($\mathfrak{S}$) $\models \neg\varphi$），也可能未知（如果既不满足 Constr($\mathfrak{S}$) $\models\varphi$，也不满足 Constr($\mathfrak{S}$) $\models \neg\varphi$）。尽管可以证明推理是可判定的，但如果不仔细限制约束的性质，推理将变得极难处理。为了解决这一问题，允许使用的约束必须属于以下两组之一。第一组是本文的主要主题，包括包含关系的二元形式（$g_1 \sqsubseteq g_2$）（在底层语义中等价于包含，包括真包含和非真包含）以及不相交性（$\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot$），还包括它们的否定（$g_1 \not\sqsubseteq g_2$）和（$\bigsqcap\{g_1, g_2\} \neq \bot$）。在智利地理实体的上下文中，正二元陈述的简单示例包括：兰基韦省位于洛斯拉各斯大区内，以及兰基韦省和奥索尔诺省彼此不相交；这些陈述表示如下方程（1-1）所示。

$$(\mathit{Llanquihue_prv} \sqsubseteq \mathit{Los_Lagos_rgn}) \qquad (\bigsqcap\{\mathit{Llanquihue_prv}, \mathit{Osorno_prv}\} = \bot) \tag{1-1}$$

类似地，负二元断言的简单示例包括：普耶韦国家公园既不包含于洛斯拉戈斯大区，也与其不相交，如下文（1-2）所示。

$$(\mathit{Puyehue_npk} \not\sqsubseteq \mathit{Los_Lagos_rgn}) \qquad (\bigsqcap\{\mathit{Puyehue_npk}, \mathit{Los_Lagos_rgn}\} \neq \bot) \tag{1-2}$$

第二组由这样的断言组成：它们表示一个粒要么被其他粒的（有限）集合所包含，要么等于这些粒的并（或并集）。下文（1-3）所示的典型示例断言，洛斯拉各斯区域是其组成省的互不相交并集。

$$\mathit{Los_Lagos_rgn} = \bigsqcup^{\perp}\{\mathit{Osorno_prv}, \mathit{Llanquihue_prv}, \mathit{Chiloé_prv}, \mathit{Palena_prv}\} \tag{1-3}$$

要管理此类约束推理的复杂性，必须将粒划分为不同粒度，并且此类断言必须是双粒度的。有关详情，包括“双粒度”的含义，请参阅 [HR18]。尽管此类断言十分重要，本文将不再进一步讨论。

本文重点讨论第一组约束；更准确地说，本文旨在为两种形式的正二元约束 ($g_1 \sqsubseteq g_2$) 和 ($\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot$)，以及与之相关的负二元约束 ($g_1 \not\sqsubseteq g_2$) 和 ($\bigsqcap\{g_1, g_2\} \neq \bot$)，提供一个一致且完备的推理系统。该推理系统的构建分为两个步骤。第一步，构建一个仅针对正二元约束的推理系统；第二步，将该系统扩展为涵盖负二元约束。

首先，图 1.1 和图 1.2 中所示的推理规则合在一起，被证明是满足条件地完备的；也就是说，当应用于一致约束集时，它们是完备的。在这些规则中，g、g_1, g_2, g_3, g'_1 和 g'_2 是变量，可以取任意粒的

$$\frac{(g_1 \sqsubseteq g_2)\ (g_2 \sqsubseteq g_3)}{(g_1 \sqsubseteq g_3)} \qquad \frac{(g_1 \sqsubseteq g_1')\ (\bigsqcap\{g_1', g_2\} = \bot)}{(\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot)}$$

图 1.1：正二元约束的主要推理规则

$$\frac{}{(g \sqsubseteq g)} \qquad \frac{}{(g \sqsubseteq \top)} \qquad \frac{}{(\bot \sqsubseteq g)} \qquad \frac{}{(\bigsqcap\{\bot, g\} = \bot)}$$

图 1.2：正二元约束的重言式推理规则

值，而 $\bot$ 和 $\top$ 分别表示特殊的底部（最小）粒和顶部（最大）粒。

图 1.1 中的规则是主要规则——它们分别断言包含具有传递性，以及如果两个粒不相交，那么它们在包含关系下的任意子粒也不相交。图 1.2 中的四条规则表示重言式，即始终为真的陈述。结论无需任何前提即可成立。尽管这些重言式规则看起来可能微不足道，但它们对于确保满足条件推理完备是必要的。

为了推导出一组正断言不可满足，还必须纳入图 1.3 中的规则。该规则要求，除 $\bot$ 之外，任何粒都不能具有空语义，因此这样的粒永远不会与自身不相交。

$$\frac{(\bigsqcap\{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\} = \bot)}{\mathbf{false}}\ \langle|(\mathfrak{g} \neq \bot)\rangle$$

图 1.3：正二元约束的不可满足性推理规则

论文的第一部分主要基于[AP88], 中报告的早期工作。该工作在一种既不存在 $\bot$也不存在 $\top$ 这类特殊粒、且任何粒都可能具有空语义的上下文中，提出了相互重叠但并不完全相同的规则。由于这些差异十分显著，因此，为正断言完整发展这一推理系统，需要进行大量工作。

本文第二部分表明，通过在正约束的规则中加入交换版本，可以获得一组关于正约束和负约束的一致且完备的推理规则；在这些交换版本中，将单个前件与后件交换，并分别对其取否定。图 1.4 展示了由图 1.1 中的规则以此方式得到的主要规则。同样，图 1.5 展示了图 1.3 中规则的交换版本。非正式地说，在交换操作下，假结论变为真前提，这是显然成立的，因此可以省略。由此得到的规则表达了一个重言式。图 1.1–1.2 和图 1.4–1.5 中的规则共同构成了一个针对所有正、负二元约束的满足条件地完备的推理系统。（出于稍后将要解释的技术原因，图 1.2 中的重言式规则无需进行交换。）

$$\frac{(g_1 \sqsubseteq g_2) \qquad (g_1 \not\sqsubseteq g_3)}{(g_2 \not\sqsubseteq g_3)} \qquad \frac{(g_2 \sqsubseteq g_3) \qquad (g_1 \not\sqsubseteq g_3)}{(g_1 \not\sqsubseteq g_2)} \qquad \frac{(g_1 \sqsubseteq g_1') \; (\bigsqcap\{g_1 1, g_2\} \neq \bot)}{(g_1' \not\sqsubseteq g_2')}$$

图 1.4：二元约束的交换主要推理规则

$$\frac{}{(\bigsqcap\{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\} \neq \bot)} \; \langle |(\mathfrak{g} \neq \bot)\rangle$$

图 1.5：负二元约束的重言式推理规则

为了从负约束和正约束的混合中推导出不可满足性，只需对图 1.1–1.5 进行简单扩充。具体而言，对于每个正断言 α，加入一条规则，指出 α 和 $\neg\alpha$ 不能同时成立。由于粒的二元逻辑中只有两种类型的断言，因此图 1.6 中的两条规则便足够了。

$$\frac{(g_1 \sqsubseteq g_2) \qquad (g_1 \not\sqsubseteq g_2)}{\text{假}} \qquad \frac{(\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot) \qquad (\bigsqcap\{g_1', g_2'\} \neq \bot)}{\text{假}}$$

图 1.6：二元约束的不可满足对规则

图 1.1–1.6 所示的组合规则，对于所有正向和负向二元约束上的推理而言，都是一致且完备的。

所开发的增广过程的一个重要方面是，它并不局限于粒逻辑的二元约束。相反，它适用于正约束满足某些性质的任何 Armstrong 上下文。这为将这些结果应用于其他上下文打开了大门。

本报告的组织如下。第 2 节概述粒空间；这些粒空间保留了本文所需的 CGAS 的本质特征，同时剔除了不必要的细节。第 3 节回顾和/或发展证明系统的基本思想。第 4 节确立图 1.1–1.3 中针对正二元约束的二元推理规则的一致性和完备性。第 5 节发展 Armstrong设定下的否定语义；该设定包含粒上二元谓词的逻辑。第 6 节利用第 5 节的结果发展相应的证明系统，并确立图 1.4–1.6 中的规则为图 1.1–1.3 中规则的充分扩充，从而为正、负粒约束获得一组完备的推理规则。第 7 节介绍本工作与其他出版物之间的关系。第 8 节给出结论与后续方向。

2 粒的语义

在所报告的 [HR17] 和 [HR18], 框架中，一个核心概念是粒度，它为基础粒提供分类系统。例如，相对于第 1 节所描述的智利空间实体示例，三种主要粒度是区域、省和国家公园: Los Lagos rgn 是区域粒度的一个粒，Osorno prv、兰奇韦 prv、Chilo ´e prv 和帕莱纳 prv 是省粒度的粒，而普耶韦 npk̄ 是国家公园粒度的一个粒。从多粒度数据库管理系统的角度来看，将粒分类到不同粒度中，不仅对于组织概念至关重要，而且对于系统地表达和可处理地推理形式为 (1-3) 的约束也至关重要。然而，在对图 1.1–1.6 所示形式的二元约束进行推理的上下文中，它们至多具有次要重要性。因此，在本节中，我们发展 [HR 18]的 CGAS（受约束的粒化属性模式）的一个简化版本，其中忽略粒度，只考虑二元约束。所得模式称为简单单粒度属性模式，即 SMAS。这种方法的优点在于，可以更加简单地发展和呈现本报告的主要结果。此外，它还使读者无需先全面理解 [HR17] 和 [HR18]中发展出的概念，便能阅读和理解本报告。

2.1 粒空间 粒空间是一个三元组 $\mathcal{G} = (粒\langle\mathcal{G}\rangle、\ \bot_{\mathcal{G}}、\ \top_{\mathcal{G}})$，其中粒$\langle\mathcal{G}\rangle$ 是一个集合，称为粒集。满足 $\bot_{\mathcal{G}}、\ \top_{\mathcal{G}} \in 粒\langle\mathcal{G}\rangle$。 $\bot_{\mathcal{G}}$称为 $\mathcal{G}$ 的底粒，而 $\top_{\mathcal{G}}$称为 $\mathcal{G}$的顶粒；二者始终不同。使用特殊记号粒$_{\not\perp}\langle\mathcal{G}\rangle$ 表示集合粒$\langle\mathcal{G}\rangle \setminus \{\bot_{\mathcal{G}}\}$，而粒$_{\not\perp\not\top}\langle\mathcal{G}\rangle$用于表示集合粒 $\langle\mathcal{G}\rangle \setminus \{\bot_{\mathcal{G}}, \top_{\mathcal{G}}\}$。

2.2 粒结构与二元约束 在 $\mathcal{G}$ 上的粒结构是一个二元组 $\sigma = (\mathrm{Dom}\langle\sigma\rangle、\mathrm{GnletoDom}_\sigma)$，其中 $\mathrm{Dom}\langle\sigma\rangle$ 是一个非空集合，而 $\mathrm{GnletoDom}_\sigma : 粒\langle\mathcal{G}\rangle \to \mathbf{2}^{\mathrm{Dom}\langle\sigma\rangle}$ 是一个函数，它为每个粒分配 $\mathrm{Dom}\langle\sigma\rangle$ 的一个子集，并满足以下条件：$\mathrm{GnletoDom}_\sigma(\bot_{\mathcal{G}}) = \emptyset$, $\mathrm{GnletoDom}_\sigma(\top_{\mathcal{G}}) = \mathrm{Dom}\langle\sigma\rangle$，并且对于每个 $g \in 粒_{\not\perp}\langle\mathcal{G}\rangle$，$\mathrm{GnletoDom}_\sigma(g) \neq \emptyset$。

$\mathcal{G}$ 上的正二元约束有两种形式。对于 g_1， $g_2 \in 粒\langle\mathcal{G}\rangle$，包含规则（$g_1 \sqsubseteq g_2$）在粒结构$\sigma$ 中成立，当且仅当 $\mathrm{GnletoDom}_\sigma(g_1) \subseteq \mathrm{GnletoDom}_\sigma(g_2)$。类似地，不相交规则（$\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot$）在$\sigma$ 中成立，当且仅当 $\mathrm{GnletoDom}_\sigma(g_1) \cap \mathrm{GnletoDom}_\sigma(g_2) = \emptyset$。 $\mathcal{G}$ 上的所有此类正包含规则（分别为正不相交规则）的集合记作 $\mathrm{SubConstr}^+\langle\mathcal{G}\rangle$ （分别记作 $\mathrm{DisjConstr}^+\langle\mathcal{G}\rangle$）。综合以上两者， $\mathcal{G}$ 上的所有正二元约束集合为

$$\mathrm{BinConstr}^+\langle\mathcal{G}\rangle = \mathrm{SubConstr}^+\langle\mathcal{G}\rangle \cup \mathrm{DisjConstr}^+\langle\mathcal{G}\rangle。$$

$\mathcal{G}$ 上的负二元约束是正约束的否定。对于 g_1， $g_2 \in 粒\langle\mathcal{G}\rangle$，$(g_1 \not\sqsubseteq g_2)$表示($g_1 \sqsubseteq g_2$)不成立；即 $\mathrm{GnletoDom}_\sigma(g_1) \not\subseteq \mathrm{GnletoDom}_\sigma(g_2)$，其中 $\mathrm{SubConstr}^-\langle\mathcal{G}\rangle$ 表示所有此类负包含规则的集合。同样，$(\bigsqcap\{g_1, g_2\} \neq \bot)$表示($\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot$)不成立；即 $\mathrm{GnletoDom}_\sigma(g_1) \cap \mathrm{GnletoDom}_\sigma(g_2) \neq \emptyset$。 $\mathcal{G}$ 上的所有负二元约束构成 $\mathrm{BinConstr}^-\langle\mathcal{G}\rangle = \mathrm{SubConstr}^-\langle\mathcal{G}\rangle \cup \mathrm{DisjConstr}^-\langle\mathcal{G}\rangle$，其中 $\mathrm{DisjConstr}^-\langle\mathcal{G}\rangle$

表示所有此类负包含规则的集合。

二元约束$^{\pm}\langle\mathcal{G}\rangle$ = 二元约束$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$ ∪二元约束$^{-}\langle\mathcal{G}\rangle$ 是关于 $\mathcal{G}$的所有二元约束的集合。按照标准逻辑术语，如果 φ在 σ中成立，则粒结构 σ 是 φ ∈二元约束$^{\pm}\langle\mathcal{G}\rangle$ 的模型；如果 σ 是每个 $\varphi \in \Phi$的模型，则 σ 是 $\Phi \subseteq$ 二元约束$^{\pm}\langle\mathcal{G}\rangle$ 的模型。 φ （分别地， Φ）是可满足的，当且仅当它至少有一个模型。 φ（分别地， Φ）的所有模型的集合记为 Mod(φ)（分别地，Mod(Φ)）。约束 φ （分别地，约束集合 Φ ）是可满足的，当且仅当 Mod(φ) $\neq \emptyset$ （分别地，Mod(Φ) $\neq \emptyset$）。

对于 φ_1、 $\varphi_2 \in$ 二元约束$^{\pm}\langle\mathcal{G}\rangle$和 φ_1 ，语义蕴含 φ_2，记作 $\varphi_1 \models \varphi_2$，当且仅当 Mod($\varphi_1$) $\subseteq$ Mod(φ_2)。同样，对于 $\Phi \subseteq$ 二元约束$^{\pm}\langle\mathcal{G}\rangle$ 和 $\varphi \in$ 二元约束$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$ （分别地， $\Phi' \subseteq$二元约束$^{\pm}\langle\mathcal{G}\rangle$），记作 $\Phi \models \varphi$ （分别地， $\Phi \models \Phi'$），当且仅当 Mod(Φ) $\subseteq$ Mod(φ)（分别地，Mod(Φ) $\subseteq$Mod(Φ')）。

2.3 正二元重言式 在标准逻辑术语中，重言式是指在每个模型中都为真的陈述。将 $\mathcal{G}$ 的正二元重言式定义如下。

$$\begin{aligned}\mathsf{BinTaut}^{+}\langle\mathcal{G}\rangle = \quad & \{(g \sqsubseteq g) \mid g \in \mathsf{Granules}\langle\mathcal{G}\rangle\} \\ & \cup \{(\bot_{\mathcal{G}} \sqsubseteq g) \mid g \in \mathsf{Granules}\langle\mathcal{G}\rangle\} \\ & \cup \{(g \sqsubseteq \top_{\mathcal{G}}) \mid g \in \mathsf{Granules}\langle\mathcal{G}\rangle\} \\ & \cup \{(\bigsqcap\{\bot_{\mathcal{G}}, g\} = \bot) \mid g \in \mathsf{Granules}\langle\mathcal{G}\rangle\}\end{aligned}$$

下面将证明，BinTaut$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$ 恰好由 BinConstr$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$ 中属于重言式的成员组成。

2.4 命题——正二元重言式的刻画 设 $\mathcal{G}$ 为一个粒空间。则 BinTaut$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$ 正是 BinConstr$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$ 中由重言式组成的子集。更确切地说，若 φ ∈BinConstr$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$，则对于每个在 $\mathcal{G}$之上的粒结构 σ ， φ ∈BinTaut$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$ 当且仅当 σ ∈Mod(φ)。

Proof: 首先，根据第 2.2 节中约束满足的定义可立即得出，每个 $\varphi \in$ BinTaut$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$ 都是重言式；也就是说，对于每个在 $\mathcal{G}$之上的粒结构 σ，都有 $\sigma \in$ Mod(φ)。为了证明它们是唯一的重言式，任取 $\varphi \in$ BinConstr$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$ \BinTaut$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$。若 $\varphi \in$ SubConstr$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$，则它必定具有 $(g_1 \sqsubseteq g_2)$ 的形式，其中 $g_1 \neq \bot_{\mathcal{G}}$、 $g_2 \neq \top_{\mathcal{G}}$，以及$g_1 \not/_{\mathrm{id}}= g_2$。定义 $\sigma' =$(Dom$\langle\sigma'\rangle$, GnletoDom$_{\sigma'}$)，使其 Dom $\langle\sigma'\rangle = \{x_1, x_2\}$为（任意一个二元素集合），且 GnletoDom$_{\sigma'}(g_1) = \{x_1, x_2\}$，以及 GnletoDom$_{\sigma'}(g_2) = \{x_2\}$。显然， σ'是一个粒结构，但不是 φ的模型，因此后者不可能是重言式。另一方面，若 $\varphi \in$DisjConstr$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$，则它必定具有 $(\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot)$ 的形式，其中 $g_1 \neq \bot_{\mathcal{G}}$和 $g_2 \neq \bot_{\mathcal{G}}$。于是，如上所定义的 σ'不是 φ的模型，因此后者同样不是重言式。 □

2.5 不可满足的正二元约束 按如下方式定义 $\mathcal{G}$ 的不可满足正二元约束。

$$\begin{aligned}\mathsf{BinUnsat}^{+}\langle\mathcal{G}\rangle = \quad & \{(g \sqsubseteq \bot_{\mathcal{G}}) \mid g \in \mathsf{Granules}_{\not\perp}\langle\mathcal{G}\rangle\} \\ & \cup \{(\bigsqcap\{g, g\} = \bot) \mid g \in \mathsf{Granules}_{\not\perp}\langle\mathcal{G}\rangle\}\end{aligned}$$

下面将证明，二元不可满足约束$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$ 恰好由二元约束$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$ 中不可满足的成员构成。

2.6 命题——不可满足正二元约束的刻画 设 $\mathcal{G}$ 为一个粒空间。那么，BinUnsat$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$ 恰好是 BinConstr$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$ 中由不可满足断言组成的子集。更准确地说，若 $\varphi \in$ BinConstr$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$，则 $\varphi \in$ BinUnsat$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$ 当且仅当不存在定义在 $\mathcal{G}$ 上的粒结构 σ 使得 $\sigma \in$Mod(φ)。

Proof: 首先，根据 2.2 中约束满足的定义，显然每个 $\varphi \in$BinUnsat$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$ 都不可满足；也就是说，不存在定义在 $\mathcal{G}$ 上的粒结构 σ 使得 $\sigma \in$ Mod(φ)。为证明它们是 BinConstr$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$ 中仅有的不可满足元素，任取 $\varphi \in$ BinConstr$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle\backslash$BinUnsat$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$。若 $\varphi \in$ SubConstr$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$，则它必定具有 ($g_1 \sqsubseteq g_2$) 的形式，其中 $g_2 \neq \bot_{\mathcal{G}}$。若 $g_1 = \bot_{\mathcal{G}}$，则 φ 是重言式，因此显然可满足。否则，定义 $\sigma' =$(Dom$\langle\sigma'\rangle$, GnletoDom$_{\sigma'}$)，令 Dom$\langle\sigma'\rangle = \{x_1, x_2\}$ 为（任意一个二元素集合），并令 GnletoDom$_{\sigma'}(g_1) = \{x_1\}$，且 GnletoDom$_{\sigma'}(g_1) = \{x_1, x_2\}$。显然，$\sigma'$ 是一个粒结构，且是 φ 的模型，因此后者可满足。另一方面，若 $\varphi \in$DisjConstr$^{+}\langle\mathcal{G}\rangle$，则它必定具有 ($\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot$) 的形式，其中要么 $g_1 \not\overset{\text{id}}{=} g_2$，要么 $g_1 = g_2 = \bot_{\mathcal{G}}$。若 $g_1 = g_2 = \bot_{\mathcal{G}}$，则 ($\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot$) 是重言式，无须进一步证明。否则，定义 $\sigma'' =$(Dom$\langle\sigma''\rangle$, GnletoDom$_{\sigma''}$)，令 Dom$\langle\sigma''\rangle = \{x_1, x_2\}$ 为（任意一个二元素集合），并令 GnletoDom$_{\sigma'}(g_1) = \{x_1\}$，且 GnletoDom$_{\sigma'}(g_2) = \{x_2\}$。显然，$\sigma''$ 是一个粒结构，且是 φ 的模型，因此它可满足。 □

2.7 简单单粒属性模式 简单单粒属性模式（或 SMAS）是一对 $\mathfrak{G} =$ (GrSpace$\langle\mathfrak{G}\rangle$, Constr($\mathfrak{G}$))，其中 GrSpace$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 是一个粒空间，而 Constr($\mathfrak{G}$) $\subseteq$ BinConstr$^{\pm}\langle$GrSpace $\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$。要在此 SMAS 的上下文中理解 2.2 中的概念，只需在所有地方将 $\mathcal{G}$ 替换为 GrSpace$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 。不过，由于它们经常出现，$\bot_{\mathfrak{G}}$（分别为 $\top_{\mathfrak{G}}$）通常会作为较为冗长的 $\bot_{\text{GrSpace}\langle\mathfrak{G}\rangle}$（分别为 $\top_{\text{GrSpace}\langle\mathfrak{G}\rangle}$）的同义词使用。

定义 Constr^{+}($\mathfrak{G}$) = Constr($\mathfrak{G}$) ∩BinConstr$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$。因此，Constr^{+}($\mathfrak{G}$) 是 Constr($\mathfrak{G}$) 中所有正约束的集合。同样地，定义 Constr^{-}($\mathfrak{G}$) =Constr($\mathfrak{G}$) ∩BinConstr$^{-}\langle\mathfrak{G}\rangle$。

将 Constr($\mathfrak{G}$) 的闭包定义为

$$\overline{\text{Constr}(\mathfrak{G})} = \{\varphi \in \text{二元约束}^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle \mid \text{Constr}(\mathfrak{G}) \models \varphi\}。$$

粒状结构 σ 是 $\mathfrak{G}$ 的模型，当且仅当它是 Constr($\mathfrak{G}$) 的模型。如果 Constr($\mathfrak{G}$) 具有该性质，则称 SMAS $\mathfrak{G}$ 可满足；否则称为不可满足。

2.8 粒的等价性与同一性 区分粒之间两种不同的相等概念非常重要。相对于 $\mathfrak{G}$，如果 Constr($\mathfrak{G}$) $\models \{(g_1 \sqsubseteq g_2)、(g_2 \sqsubseteq g_1)\}$，则两个粒 g_1、$g_2 \in$ Granules$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 是等价的。因此，如果在每个作为模型的粒结构下，它们具有相同的值，则两个粒等价。另一方面，两个粒 g_1、$g_2 \in$ Granules$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 若为同一个粒，即具有相同的名称，则称它们是同一的。显然，两个不同的粒可能等价但并不相同。为了区分这两种情况，表达式 ($g_1 = g_2$) 将始终表示 g_1 和 g_2 是等价的。为了表示同一性，始终使用记号 ($g_1 \overset{\text{id}}{=} g_2$)。

2.9 析取的隐式对称性 在全文中，对于任意 g_1、g_2 ∈Granules⟨𝔊⟩，(⋂{g_1, g_2} = ⊥) 和 (⋂{g_2, g_1} = ⊥) 将始终被视为同一个约束。显然，语义不取决于 g_1 和 g_2 的任何顺序。这将无需再使用那些基本上无关紧要、但原本为确保 (⋂{g_1, g_2} = ⊥) 与 (⋂{g_2, g_1} = ⊥) 以及 (⋂{g_1, g_2} ≠ ⊥) 与 (⋂{g_2, g_1} ≠ ⊥) 相同而必需的推理规则。

这也将允许写出形式为 (⋂ S = ⊥) 和 (⋂ S ≠ ⊥) 的约束，其中S 是一个至多包含两个粒的非空集合。如果 $S = \{g_1, g_2\}$，那么 (⋂ S = ⊥) 可分别表示 (⋂{g_1, g_2} = ⊥) 和 (⋂{g_2, g_1} = ⊥)；而如果 $S = \{g\}$，那么 (⋂ S = ⊥) 表示 (⋂{g, g} = ⊥)。(⋂ S ≠ ⊥) 的含义与此类似。

2.10 SMAS 与 CGAS 的关系 本节简要比较 2.7 中定义的 SMAS、[HR18 第 2] 节中定义的 CGAS，以及 [HR17 第 3] 节中定义的早期粒度模式。对后两种概念不熟悉或对这项比较不感兴趣的读者，可以放心略过本节讨论。

一个 CGAS 𝔊 =(Glty⟨𝔊⟩、GrAsgn⟨𝔊⟩、约束$^{\pm}$⟨𝔊⟩) 由三个组成部分构成：粒度偏序集 Glty⟨𝔊⟩、粒分配 GrAsgn⟨𝔊⟩，以及一组约束$^{\pm}$⟨𝔊⟩ 。相对于这样的 CGAS，一个 SMAS 𝔊 = (GrSpace⟨𝔊⟩、约束(𝔊)) 在三个根本方面有所不同。

（a）在 SMAS 中不存在粒度偏序集，因为不存在将粒划分为不同粒度的粒的分类。

（b）SMAS 的粒空间 GrSpace⟨𝔊⟩ 大致对应于 CGAS 的粒分配 GrAsgn⟨𝔊⟩ 。然而，由于 SMAS 中不存在粒度层次结构，嵌入 CGAS 的 GrAsgn⟨𝔊⟩ 中的、将粒划分为不同粒度的分类，在 GrSpace⟨𝔊⟩ 中并不存在。（c）在 CGAS 中，某些二元约束已经嵌入 GrAsgn⟨𝔊⟩，其中尤其包括由将粒划分为不同粒度而产生的约束。更具体地说，粒预序$\sqsubseteq_{\mathfrak{G}}$，以及由不同粒度的粒必须不相交这一要求所产生的约束，都已经嵌入粒分配中。另一方面，在 SMAS 中，粒空间内没有嵌入任何约束；约束仅嵌入约束(𝔊)中。

3 证明系统背景

本文的结果基于一般数理逻辑中的简单概念，尤其是命题逻辑中的简单概念。关于这些主题，有许多优秀的论述，涵盖不同层次并采用不同视角，其中包括但不限于[Mon76], [Men97], [End01], [BA12], and [Gal15]。本文假定读者熟悉这些书籍相关章节中介绍的基本思想。本节旨在为证明系统确立记号和术语。

3.1 记号 N 表示 $\{0, 1, 2, \ldots\}$ 自然数的集合。除非另有明确说明，形如 $[n_1, n_2]$的表达式，其中 n_1、 $n_2 \in$ N，表示区间$\{n \in \mathbf{N} \mid n_1 \leq n \leq n_2\}$。

Card$\langle S \rangle$ 表示集合 S的基数。

3.2 上下文 — SMAS 除非特别声明相反情况，否则在本文其余部分中， $\mathfrak{G} =$ (GrSpace$\langle \mathfrak{G} \rangle$, Constr($\mathfrak{G}$)) 表示任意 SMAS。

3.3 粒逻辑的良构公式 乍看之下，BinConstr$^{\pm}\langle \mathfrak{G} \rangle$ 似乎构成了一个适合用来表达二元粒块约束推理规则的集合。然而，这一选择过于受限。例如，为了表达包含关系 $\sqsubseteq$ 具有传递性，就需要针对每组三元粒分别使用如下形式的规则

$$\frac{(g_1 \sqsubseteq g_2) \quad (g_2 \sqsubseteq g_3)}{(g_1 \sqsubseteq g_3)} \tag{3.3-1}$$

对于每组三元粒 $\langle g_1$、 g_2、 $g_3 \rangle$ 。更理想的做法是能够通过一条规则断言，这种关系对任意三元粒均成立。为此，引入一个由粒变量构成的集合 $\{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$、……、$\mathfrak{g}_i$、 $\ldots\}$ 是恰当的，并约定每个此类变量默认都可以绑定到任意粒。于是，一般的传递性规则变为

$$\frac{(\mathfrak{g}_1 \sqsubseteq \mathfrak{g}_2) \quad (\mathfrak{g}_2 \sqsubseteq \mathfrak{g}_3)}{(\mathfrak{g}_1 \sqsubseteq \mathfrak{g}_3)} \tag{3.3-2}$$

其中 $\langle \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_3 \rangle$ 表示任意三个粒，如图 1.1 所示。如果变量只能绑定到某些特定的粒，则可以使用显式限定符；图 1.3 和图 1.5 中的规则已通过使用 $|_{(\mathfrak{g} \neq \bot)}$ 展示了这一点。

为使其形式化，首先为 $\mathfrak{G}$ 配备一个可数集 VarSet$\langle \mathfrak{G} \rangle$ =$\{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}2, \ldots, \mathfrak{g}_i, \ldots\}$，其中包含粒变量，并令 VarSet$\langle \mathfrak{G} \rangle \cap$ Granules$\langle \mathfrak{G} \rangle = \emptyset$。相对于此集合， $\mathfrak{G}$ 的正二元良构公式（或正二元 WFF），记为 BinWFF$^{+}\langle \mathfrak{G} \rangle$，是由所有形如 $(\gamma_1 \sqsubseteq \gamma_2)$ 和 $(\bigsqcap\{\gamma_1, \gamma_2\} = \bot)$ 的表达式组成的集合，其中 $\gamma_1, \gamma_2 \in$Granules$\langle \mathfrak{G} \rangle \cup$VarSet$\langle \mathfrak{G} \rangle$。换言之，BinWFF$^{+}\langle \mathfrak{G} \rangle$ 与 BinConstr$^{+}\langle \mathfrak{G} \rangle$ 类似，只是表达式中既可以使用粒名称，也可以使用粒变量。因此，除了 BinConstr$^{+}\langle \mathfrak{G} \rangle$ 中的成员外，BinWFF$^{+}\langle \mathfrak{G} \rangle$ 还包括所有形如 $(\mathfrak{g}_1 \sqsubseteq g_2)$、$(g_1 \sqsubseteq \mathfrak{g}_2)$、$(\mathfrak{g}_1 \sqsubseteq \mathfrak{g}_2)$、$(\bigsqcap\{\mathfrak{g}1, g_2\} = \bot)$、$(\bigsqcap\{g_1, \mathfrak{g}_2\} = \bot)$ 和 $(\bigsqcap\{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2\} = \bot)$ 的表达式，其中 $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \in$VarSet$\langle \mathfrak{G} \rangle$ 且 $g_1, g_2 \in$Granules$\langle \mathfrak{G} \rangle$。类似地， $\mathfrak{G}$ 的负二元 WFF，记为 BinWFF$^{-}\langle \mathfrak{G} \rangle$，是由所有形如 $(\gamma_1 \not\sqsubseteq \gamma_2)$ 和 $(\bigsqcap\{\gamma_1, \gamma_2\} \neq \bot)$ 的表达式组成的集合，其中 $\gamma_1, \gamma_2 \in$Granules$\langle \mathfrak{G} \rangle \cup$VarSet$\langle \mathfrak{G} \rangle$。最后， $\mathfrak{G}$ 的所有二元 WFF 构成的集合，记为 BinWFF$^{\pm}\langle \mathfrak{G} \rangle$，即 BinWFF$^{+}\langle \mathfrak{G} \rangle \cup$BinWFF$^{-}\langle \mathfrak{G} \rangle$。

更为形式化且完备的推理规则论述见第3.9节及其后续内容。

3.4 上下文——粒变量 除非另有明确说明，在本文其余部分，VarSet$\langle \mathfrak{G} \rangle = \{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$、……、$\mathfrak{g}_i$、 $\ldots\}$ 将表示为 3.2 中所确定的 SMAS $\mathfrak{G}$ 的一个可数粒变量集。

3.5 WFF 的语义 为了将 2.2 中语义蕴涵和模型的概念扩展到涉及变量的良构公式，有必要将这些变量绑定到粒。更准确地说，将代换定义为 $\mathfrak{G}$ 一个可能为偏函数的函数 s ： VarSet$\langle\mathfrak{G}\rangle$ →VarSet$\langle\mathfrak{G}\rangle \cup$ Granules$\langle\mathfrak{G}\rangle$。定义 Subst$\langle\varphi$、 $s\rangle$ 为这样的良构公式：其中每个属于 s 论域的变量 g 都被 s(g) 所代替。例如，若 $s_0 = \{g_1 \mapsto g_3$、$g_2 \mapsto g_4$、$g_3 \mapsto g_3\}$，则 Subst$\langle$ ($g_1 \sqsubseteq g_2$) $s_0\rangle$ = ($g_3 \sqsubseteq g_4$)。基代换 s 是满足 s(VarSet$\langle\mathfrak{G}\rangle$) $\subseteq$Granules$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的代换；换言之，对于 s(g) 有定义的每个 g， s(g) 都是一个粒，而绝不是变量。若一个代换对 $\varphi \in$ BinWFF$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 完备，即对于出现在 φ 中的每个 g $\in$ VarSet$\langle\mathfrak{G}\rangle$，它都有定义，则称其为完备代换。若 s 是基代换且对 φ 完备，则在粒结构 σ 中，称 φ 对于 s 成立，当且仅当 Subst$\langle\varphi$、 $s\rangle$ 在 σ 中成立。因此，一个良构公式一旦其所有变量都被绑定到粒，就会被赋予一个真值。现在，对于 φ_1、 $\varphi_2 \in$ BinWFF$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$、 $\varphi_1 \models \varphi_2$，当且仅当对于每个同时对 φ_1 和 φ_2 完备的基代换 s，均有 Subst$\langle\varphi_1$、 $s\rangle \models$ Subst$\langle\varphi_2$、 $s\rangle$。

这些思想可以轻松扩展到 $\Phi \subseteq$ 二元良构公式$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$。定义 Subst$\langle\Phi$、 $s\rangle$ = {Subst$\langle\psi$、 $s\rangle \mid \psi \in \Phi$}，称 s 对 Φ 是完备的，当且仅当它对每个 $\psi \in \Phi$ 都是完备的；对于 $\varphi \in$二元良构公式$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$，定义 $\Phi \models \varphi$ 成立，当且仅当对于每个同时对 Φ 和 ψ 完备的基代换 s，都有 Subst$\langle\Phi$、 $s\rangle \models$ Subst$\langle\varphi$、 $s\rangle$。类似地，对于 $\Phi' \subseteq$ 二元良构公式$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$， $\Phi \models \Phi'$ 成立，当且仅当对于每个对 $\Phi \cup \Phi'$ 完备的基代换 s，都有 Subst$\langle\Phi$、 $s\rangle \models$Subst$\langle\Phi'$、 $s\rangle$。

最后，可满足性始终是相对于基代换定义的。更准确地说， $\varphi \in$ 二元良构公式$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$ （分别地， $\Phi \subseteq$二元良构公式$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$）是可满足的，当且仅当存在一个对 φ （分别地，对 Φ）完备的基代换 s，使得 n Mod(Subst$\langle\varphi$、 $s\rangle$) $\neq \emptyset$ （分别地，Mod(Subst$\langle\Phi$、 $s\rangle$) $\neq \emptyset$）。

很容易看 出，BinWFF$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的这些概念推广了 2.2 节中关于 BinConstr$^{\pm}\langle\mathfrak{G}$ 的概念 $\rangle$.

3.6 一般逻辑系统与否定 本节余下部分以及第 5 节和第 6 节中引入的许多概念，都适用于比 BinWFF$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 更一般的情形。因此，在需要时，将一般逻辑系统 $\mathcal{L}$ 的框架作为上下文。该上下文包含良构公式（记作 WFF$\langle\mathcal{L}\rangle$）、结构、模型和语义蕴涵（记作 $\models$）等概念。假设 $\mathcal{L}$ 是非平凡的，即至少有一个可满足的 $\varphi \in$良构公式$\langle\mathcal{L}\rangle$，并且包含至少一个重言式 true 和一个不可满足断言 false。此外，假设 $\mathcal{L}$ 具有否定算子，其中 $\neg\varphi$ 表示 $\varphi \in$ 良构公式$\langle\mathcal{L}\rangle$的否定， $\neg\neg\varphi$ 等价于 φ，且满足排中律（φ 和 $\neg\varphi$ 不可能同时可满足）。除非讨论某个特定问题时有必要，否则这里不进一步阐述 $\mathcal{L}$ 的其他详细性质。不过，值得注意的是，我们并未假设 $\mathcal{L}$ 在合取或析取运算下封闭。事实上，本文中的主要示例 $\mathcal{L}$ （BinWFF$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$）在这两种运算下都不封闭。

对于不习惯这种一般化的读者，只需将 WFF$\langle\mathcal{L}\rangle$ 固定为 BinWFF$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$ ，并将 $\models$ 固定为该上下文中的语义蕴涵关系。断言 true（分别为 false）可以视为 BinTaut$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$（分别为 BinUnsat$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$）中的任意元素（或其同义词）。在 BinWFF$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 中，为避免不必要的咬文嚼字，($g_1 \not\sqsubseteq g_2$)（分别为 ($\bigsqcap\{g_1, g_2\} \neq \bot$)）将被视为与 $\neg$($g_1 \sqsubseteq g_2$)（分别为 $\neg$($\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot$)）相同的良构公式。

3.7 证明系统 语义蕴涵是一种纯粹基于模型的良构公式关联方式。为了推导出一组公式蕴涵另一组公式，也就是说，为了确定 $\Phi \models \varphi$ 是否成立，需要一个计算过程。这正是证明系统的作用。

更准确地说，针对集合 $\mathfrak{A} \subseteq \mathrm{WFF}\langle\mathcal{L}\rangle$ 的证明系统 $\mathscr{A}$ 由一组推理规则构成，记作 $\mathrm{InfRules}\langle\mathscr{A}\rangle$，可据此从其他良构公式推导出新的良构公式。令 $\Phi \subseteq \mathfrak{A}$，并令 $\varphi \in \mathfrak{A}$。当且仅当可通过反复应用 $\mathscr{A}$ 的推理规则从 Φ 推导出 φ 时，记作 $\Phi \vdash_{\mathscr{A}} \varphi$。当且仅当可通过单次应用一条推理规则从 Φ 推导出 φ 时，记作 $\Phi \vdash^{(1)}_{\mathscr{A}} \varphi$。

如果只要 $\Phi \vdash_{\mathscr{A}} \varphi$ 就有 $\Phi \models \varphi$，那么证明系统 $\mathscr{A}$ 就是可靠的。换言之，只有真实的结论（按照 $\models$ 的意义）才能被证明。可靠性始终是证明系统的一项本质属性。

如果只要 $\Phi \models \varphi$ 就有 $\Phi \vdash_{\mathscr{A}} \varphi$，那么证明系统 $\mathscr{A}$ 就是完备的。换言之，所有真实的推理都可以使用 $\mathscr{A}$ 来证明。完备性虽然不是本质属性，却仍然是一项非常理想的性质。

如果存在一个算法（该算法总会终止）来判定 $\Phi \vdash_{\mathscr{A}} \varphi$ 是否成立，则证明系统 $\mathscr{A}$ 是可判定的。本报告中讨论的所有证明系统都是可判定的，因为集合 $\mathfrak{A}$ 总是有限的。

3.8 可满足条件完备性 如果对于任意可满足的 $\Phi \subseteq \mathfrak{A}$ 以及任意 $\varphi \in \mathfrak{A}$，都有 $\Phi \models \varphi$ 蕴含 $\Phi \vdash_{\mathscr{A}} \varphi$，则称关于 $\mathfrak{A}$ 的证明系统 $\mathscr{A}$ 是可满足完备的。

因此，只要输入集合 Φ 是可满足的，$\mathscr{A}$ 就是完备的；但在 Φ 不可满足的情况下，它不一定是完备的。（当然，如果 Φ 不可满足，那么 $\Phi \models \varphi$ 就会平凡地成立，因此，可满足完备性并不是一个严重的限制。不过，它确实要求采用其他方法来检测不可满足性。）

3.9 规则与证明的记法 本文采用的证明规则表示法得到了广泛使用；此处旨在澄清术语和记号。下面的（3.9-1）说明了一条通用规则。

$$\frac{\alpha_1 \;\; \alpha_2 \;\; \ldots \;\; \alpha_k}{\beta} \; (r) \tag{3.9-1}$$

集合 $\{\alpha_i \mid i \in [1,k]\} \subseteq$ 良构公式$\langle\mathcal{L}\rangle$ 由规则的前件组成，记作 $\mathrm{Antecedents}\langle r\rangle$。类似地，$\beta \in$ 良构公式$\langle\mathcal{L}\rangle$是后件，记作 $\mathrm{Consequent}\langle r\rangle$。该规则精确表示：$\{\alpha_i \mid i \in [1,k]\} \vdash_{\mathscr{A}} \beta$ 通过对名为 r 的规则应用一次即可得到。如果上下文已明确规则名称，则可以省略。如果 $k = 0$；也就是说，如果$\{\alpha_i \mid i \in [1,k]\} = \emptyset$，那么该规则表示 β 是一个重言式。如果 β 为假，该规则表示 $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$ 不可满足。

如 3.3 中所述，替换也可以应用于规则（以及公式）。例如，(3.3-1) 是将代换 $s_1 = \{\mathsf{g}_1 \mapsto g_1,\ \mathsf{g}_2 \mapsto g_2,\ \mathsf{g}_3 \mapsto g_3\}$ 应用于 (3.3-2) 后的结果。如果对替换集加以限制，则会通过尖括号中的适当表达式来表示，如图1.2和图1.5所示。

对一个规则进行代换所得的结果称为该规则的实例。在证明中，有时需要为规则实例加上标签。例如，下面的（3.9-2）展示了一个

标记为 d 的单个实例。为了区分规则名称和标签，前者始终写在括号中（如（3.9-1）所示），而标签绝不会置于括号内。请注意，尽管一个规则通常只有一个名称，但在同一个证明中可能有该规则的多个实例（因而也有这些实例的多个标签）。

$$\frac{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_k}{\beta} \ d \tag{3.9-2}$$

例如，图 1.1–1.6 给出了本文将研究的关于粒的规则。在本文后续部分，4.13、6.5 和 6.16 给出了同样的规则及其名称。

3.9 的记号有一个很大的优点，即涉及应用多条规则的证明可以以清晰的视觉形式呈现。例如，下面的公式 (3.9-3) 和 (3.9-4) 展示了从集合中证明 $(g_1 \sqsubseteq g_5)$ 的两种方式

$$S_{3.9} = \{(g_1 \sqsubseteq g_2), (g_2 \sqsubseteq g_3), (g_3 \sqsubseteq g_4), (g_4 \sqsubseteq g_5)\},$$

使用图 1.1 左侧的规则。已经给出了各种演绎实例，其中 d_1–d_3 出现在 (3.9-3) 中，d_1–d_3 出现在 (3.9-4) 中。它们都是规则 (3.3-2) 的实例。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(g_1 \sqsubseteq g_2) \ \ (g_2 \sqsubseteq g_3)}{(g_1 \sqsubseteq g_3)} \ d_1 \qquad (g_3 \sqsubseteq g_4)}{(g_1 \sqsubseteq g_4)} \ d_2 \qquad (g_4 \sqsubseteq g_5)}{(g_1 \sqsubseteq g_5)} \ d_3 \tag{3.9-3}$$

$$\dfrac{\dfrac{(g_1 \sqsubseteq g_2) \ \ (g_2 \sqsubseteq g_3)}{(g_1 \sqsubseteq g_3)} \ d'_1 \qquad \dfrac{(g_3 \sqsubseteq g_4) \ \ (g_4 \sqsubseteq g_5)}{(g_3 \sqsubseteq g_5)} \ d'_2}{(g_1 \sqsubseteq g_5)} \ d'_3 \tag{3.9-4}$$

诸如 (3.9-3) 和 (3.9-3) 的图示称为证明树（针对所考虑的推理系统）。

组合规则的前件是位于顶部的公式。在 (3.9-3) 和 (3.9-4) 中，前件集合均为 $S_{3.9}$。每条组合规则只有一个后件，位于底部。在这两个示例中，后件都是 $(g_1 \sqsubseteq g_5)$。

在证明树中出现、但既不是前件也不是后件的公式，称为内部公式。在 (3.9-3) 中，内部公式集合为 {$(g_1 \sqsubseteq g_3)$、$(g_1 \sqsubseteq g_4)$}；而在 (3.9-4) 中，内部公式集合为 {$(g_1 \sqsubseteq g_3)$、$(g_3 \sqsubseteq g_5)$}，

最后，被视为公理的公式 φ 总是被视为其自身的一个证明。

3.10 规则和证明系统的可靠性与最小性 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathfrak{A}$ 的一个证明系统，r 是一条规则，如下方的 (3.10-1) 所示。

$$\frac{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_k}{\beta} \ (r) \tag{3.10-1}$$

称其为 r 声，当它本身能够产生一致推理时；也就是说，如果 $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \models \beta$.

如果移除前件中的任意一个 α_i 后，得到的规则 r'（如下方 (3.10-2) 所示）不再可靠，则称可靠的 r 是极小的。

$$\frac{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_{i-1} \ \ \alpha_{i+1} \ \ldots \ \alpha_k}{\beta} \ (r') \tag{3.10-2}$$

换句话说，规则 r 是极小的，当且仅当对于任意 $j \in [1,k]$, $\{\alpha_i \mid i \in [1,k] \setminus \{i\}\} \not\models \beta$。S
ay that $\mathscr{A}$ 是可靠的 d (分别是极小的 l) if all memb者 o f InfRules$\langle\mathscr{A}\rangle$ h ave t h属性处。

3.11 单次使用证明与多次使用证明 前件可能会在证明中被使用多次。例如，给定约束集合

$S_{3.11} = \{(g_1 \sqsubseteq g_2),(g_2 \sqsubseteq g_3),(g_3 \sqsubseteq g_2),(g_2 \sqsubseteq g_3),(g_3 \sqsubseteq g_4)\}$，在下方（3.11-1）所示的证明中，$(g_1 \sqsubseteq g_2)$、$(g_1 \sqsubseteq g_3)$ 和 $(g_1 \sqsubseteq g_3)$ 均被使用了多次。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(g_1 \sqsubseteq g_2) \ \ (g_2 \sqsubseteq g_3)}{(g_1 \sqsubseteq g_3)}\, d_1 \qquad (g_3 \sqsubseteq g_2)}{(g_1 \sqsubseteq g_2)}\, d_2 \qquad (g_2 \sqsubseteq g_3)}{(g_1 \sqsubseteq g_3)}\, d_3 \qquad (g_3 \sqsubseteq g_4)}{(g_1 \sqsubseteq g_4)}\, d_4 \tag{3.11-1}$$

将这类证明称为多次使用证明。另一方面，将其中没有任何公式作为前件出现超过一次的证明称为单次使用证明。（3.9-1）和（3.9-2）的证明都是单次使用证明。

如果对于任意公式集合 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ 和任意单个公式 β，只要存在一个从 $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k\}$ 得到 β 的证明，就存在一个单次使用证明，则称证明系统为单次使用。

现在值得注意的是，尽管公式 (3.11-1) 的证明是多次使用的，但单次使用证明也是可能的，如下文的 (3.11-2) 所示。

$$\dfrac{\dfrac{(g_1 \sqsubseteq g_2) \ \ (g_2 \sqsubseteq g_3)}{(g_1 \sqsubseteq g_3)}\, d_1 \qquad (g_3 \sqsubseteq g_4)}{(g_1 \sqsubseteq g_4)}\, d_4 \tag{3.11-2}$$

本文为粒规则建立的证明系统均为单次使用的，这一点将在后文予以确立。

“用尽”公式而不允许再次使用它们的思想，是 Girard 在上下文线性逻辑 [Gir95] 中提出的。由于这并非本文结果的核心内容，后文将不再讨论线性逻辑。

3.12 Armstrong 模型 设 $\mathcal{C}$ 是逻辑框架中的任意句子集。给定 $\Phi \subseteq \mathcal{C}$，相对于 $\mathcal{C}$，Φ 的 Armstrong 模型 M 具有如下性质：对于每个 $\varphi \in \mathcal{C}$，都有 $M \in \mathrm{Mod}(\varphi)$ 当且仅当 $\Phi \models \varphi$。换言之，M 的 Armstrong 模型是极小的，因为它只满足 $\mathcal{C}$ 中那些为使 M 成为 Φ 的模型而必须满足的约束。若 $\mathcal{C}$ 允许存在 Armstrong 模型，或者说它是 Armstrong 上下文，

则 $\mathcal{C}$ 的每个可满足子集都有这样的模型。关于 Armstrong 模型的全面讨论，包括对其存在条件的简洁刻画，参见 [Fag82] [Fag82，定理 3.1]。

在本文的上下文中，重要的情形是 $\mathcal{C}$ =二元约束$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$。虽然根据 [HR17, 3.18] 的更一般结果，很容易得出二元约束$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 存在 Armstrong 模型，但本节将确立一个强得多的结果。具体而言，本文展示了如何为 Constr$^{+}(\mathfrak{G})$ 构造一个称为规范模型的 Armstrong 模型。由于 $\mathfrak{G}$ 是任意的，这实质上等同于展示如何为任意 $\Phi \subseteq$ 二元约束$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 构造规范模型。利用该模型，本文证明了第 1 节中确定的正向推理规则是可靠且完备的。

4 正向推理：正二元粒约束 s

本节将为二元约束$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$构建一个完备的推理系统；也就是说，适用于形式为 ($g_1 \sqsubseteq g_2$) 和 ($\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot$) 的二元规则。该系统主要基于 [AP88], ，不过，两个框架之间存在显著差异（尤其是 [AP88] 中缺少粒$\bot_{\mathfrak{G}}$ 和 $\top_{\mathfrak{G}}$），而且还需要确保证明为单次使用（ [AP88] 未考虑这一性质），因此这项工作颇具挑战。

此处的论述旨在独立于 [AP88], ，仅在证明中引用后者；不过，读者或许仍有兴趣将该著作作为参考。为此，下文简要概述 [AP88][1]的术语与记号。

4.1 [AP88] 的术语、记号与上下文概述

[AP88] 的研究根植于通用知识库，因此所用的术语和记号不同于本报告；本报告则植根于空间领域。在 [AP88], 中，与 SMAS 等价的概念称为方案，其中的类型对应于 SMAS 的粒，而对象对应于粒结构 σ的论域 Dom$\langle\sigma\rangle$ 中的元素。潜在状态将对象分配给类型，这与函数 GnletoDom$_\sigma$ 将论域元素分配给粒的方式大致相同。本文的包含约束（$g_1 \sqsubseteq g_2$）记作 $g_1$isa g_2，而不相交约束（$\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot$）记作 g_1 dis g_2。

从语义的角度来看，本文的 SMAS 框架与之有两点显著差异。首先，没有专门标识出与 $\bot_{\mathfrak{G}}$ 和 $\top_{\mathfrak{G}}$ 对应的类型，不过可以通过约束 $g$dis g，要求将空集对象赋给类型 g 。这种类型称为不一致类型；若某个方案至少包含一种不一致类型，则称该方案不一致。其次，不要求与某种类型关联的对象集合为非空集合。这与 SMAS 框架形成鲜明对比：在 SMAS 框架中，粒结构会为除 $\bot_{\mathfrak{G}}$ 以外的每个粒分配一个非空的论域元素集合。

[1] [AP86] 是期刊论文 [AP88]的初步会议版本。难以访问 [AP88] 的读者可以将 [AP86] 作为有用的替代版本。

4.2 粒子拟结构与拟模型 在 [AP88], 中，采用了一种比 SMAS 中所用的粒结构（见 2.2）更宽松的（对应）概念，不对映射 GnletoDom$_\sigma$ 作任何限制。为明确区分， [AP88] 意义上的结构称为拟结构。形式化地说，论域 $\mathfrak{G}$ 上的粒子拟结构是一个二元组 $\sigma = (\mathrm{Dom}\langle\sigma\rangle, \mathrm{GnletoDom}_\sigma)$，其中 $\mathrm{Dom}\langle\sigma\rangle$ 是非空集合，$\mathrm{GnletoDom}_\sigma : \mathrm{Granules}\langle\mathfrak{G}\rangle \to \mathbf{2}^{\mathrm{Dom}\langle\sigma\rangle}$ 是一个函数，为每个粒分配 $\mathrm{Dom}\langle\sigma\rangle$ 的一个子集，并满足以下附加性质：$\bigcup\{\mathrm{GnletoDom}_\sigma(g) \mid g \in \mathrm{Granules}\langle\mathfrak{G}\rangle\} = \mathrm{Dom}\langle\sigma\rangle$。特别要注意的是，不要求除 $\bot_\mathfrak{G}$ 以外的粒映射到非空集合，也不对 $\bot_\mathfrak{G}$ 或 $\top_\mathfrak{G}$ 的像作任何限制。不过，它满足一个较弱的性质：每个论域元素都出现在某个粒在 GnletoDom$_\sigma$ 下的像中。

若 $\mathrm{GnletoDom}_\sigma(g_1) \subseteq \mathrm{GnletoDom}_\sigma(g_2)$，则粒拟结构 σ 是包含约束 $(g_1 \sqsubseteq g_2)$ 的拟模型；若 $\mathrm{GnletoDom}_\sigma(g_1) \cap \mathrm{GnletoDom}_\sigma(g_2) = \emptyset$，则它是不相交约束 $(\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot)$ 的拟模型。对于 $\Phi \subseteq$二元约束$^+\langle\mathfrak{G}\rangle$， σ是 Φ 的拟模型，当且仅当它是每个 $\varphi \in \Phi$ 的拟模型。最后，若它是 $\mathrm{Constr}(\mathfrak{G})$ 的拟模型（但不一定是二元重言式$^+\langle\mathfrak{G}\rangle$的拟模型），则它是 $\mathfrak{G}$ 的拟模型。

在 $\mathfrak{G}$ 上的空拟结构记作 $\mathrm{Empty}\langle\mathfrak{G}\rangle$，其 $\mathrm{Dom}\langle\mathrm{Empty}\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle = \emptyset$，其中 GnletoDom$^{\mathrm{Empty}\langle\mathfrak{G}\rangle}$ 是将每个粒映射到 $\emptyset$ 的函数。这个拟结构之所以有意义，主要是因为它始终是一个拟模型，从而表明在拟模型的语境下，任何 SMAS 都是可满足的。

为避免与准模型混淆，本文中的粒结构（分别地，模型）有时也称为完整结构（分别地，完整模型）。

4.3 准模型上的推理规则 [AP88，引理 3] 的推理规则如图 4.1 所示。定义推理系统 QBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 为具有

$$\text{Inf规则}\langle\mathrm{QBinInfPos}\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle = \{\text{(I1), (I2), (D1), (M1), (M2)}\}.$$

主要规则是（I2）和（M1），它们断言包含具有传递性，并且 that

$$\text{(I2)}\ \frac{(\mathfrak{g}_1 \sqsubseteq \mathfrak{g}_2)\ \ (\mathfrak{g}_2 \sqsubseteq \mathfrak{g}_3)}{(\mathfrak{g}_1 \sqsubseteq \mathfrak{g}_3)} \qquad \text{(M1)}\ \frac{(\mathfrak{g}_1 \sqsubseteq \mathfrak{g}_1')\ \ (\bigsqcap\{\mathfrak{g}_1', \mathfrak{g}_2\} = \bot)}{(\bigsqcap\{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2\} = \bot)}$$

$$\text{(I1)}\ \frac{}{(\mathfrak{g} \sqsubseteq \mathfrak{g})} \qquad \text{(D1)}\ \frac{(\bigsqcap\{\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'\} = \bot)}{(\bigsqcap\{\mathfrak{g}', \mathfrak{g}\} = \bot)} \qquad \text{(M2)}\ \frac{(\bigsqcap\{\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'\} = \bot)}{(\mathfrak{g}' \sqsubseteq \mathfrak{g})}$$

图 4.1：QBinInfPos 的推理规则$\langle\mathfrak{G}\rangle$

不相交性分别在通过包含约简粒度大小时保持不变。规则 (I1) 断言了每个粒都包含自身这一重言式。这三条规则在完整模型和准模型的上下文中同样适用。

剩余的两条规则（D1）和（M2）分别断言：如果一个粒与自身不相交，那么它也与其他所有粒不相交，并且也被每个

粒所包含。在准模型的上下文中，这很有道理，因为准模型中的任何粒都可能被要求为空。然而，在完整模型的上下文中，这些规则仅适用于 g' 绑定到 $\bot_{\mathfrak{G}}$ 的情况。第 4.13 节和第 4.14 节对此有更详细的解释。

4.4 命题——QBinInfPos 的可靠性与完备性$\langle\mathfrak{G}\rangle$ QBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的推理规则（见图 4.1）在准模型的上下文中是可靠且完备的。更准确地说，当所采用的模型概念是准模型时，这些规则是完备的。

Proof: 参见 [AP88，定理 1]。 □

扩充 QBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$，以获得一个对完整模型完备的推理系统，这一策略很直接，分两步实施。第一步，添加额外规则，强制将 BinTaut$^+\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的所有成员作为约束；第二步，添加额外规则，要求 BinUnsat$^+\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的成员永远不能被满足。详情如下。

4.5 强准结构与准模型 若准结构 σ =(Dom$\langle\sigma\rangle$, GnletoDom$_\sigma$) 满足以下条件，则称其为 $\mathfrak{G}$强准结构：GnletoDom$_\sigma(\bot_{\mathfrak{G}}) = \emptyset$且 GnletoDom$_\sigma(\top_{\mathfrak{G}})$ =Dom$\langle\sigma\rangle$。 $\mathfrak{G}$ 的准模型若同时也是强准结构，则称为强准模型（ $\mathfrak{G}$的）。

显然，每个完整结构（分别地，完整模型）也是强准结构（分别地，强准模型）。唯一的区别在于，在强准结构 σ 中，并不要求 GnletoDom$_\sigma(g) \neq \emptyset$ 对 $g \in$ 粒$_{\not\perp}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 成立。

此外，请注意，无论 Constr($\mathfrak{G}$) 为何，Empty$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 始终是一个强准模型。因此，正如普通准结构的情形一样，任意 SMAS 在强准模型的上下文中都是可满足的。

4.6 命题——重言式与强准结构 如果 σ 是一个关于 $\mathfrak{G}$ 的准结构，并且还满足 BinTaut$^+\langle\mathfrak{G}\rangle$，那么它就是一个关于 $\mathfrak{G}$ 的强准结构。因此，如果 σ 是 $\mathfrak{G}$ 的一个满足 BinTaut$^+\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的准模型，那么它就是一个强准模型。

Proof: σ = (Dom$\langle\sigma\rangle$,GnletoDom$_\sigma$) 成为普通准结构与成为强准结构之间有两个区别：在后者中，另外要求 (a) GnletoDom$_\sigma(\bot_{\mathfrak{G}}) = \emptyset$；以及 (b) GnletoDom$_\sigma(\top_{\mathfrak{G}})$ =Dom$\langle\sigma\rangle$。在准结构中，不要求这两个条件中的任何一个成立。为了证明该断言，只需证明要求 BinTaut$^+\langle\mathfrak{G}\rangle$ 中的所有约束成立，会蕴含 (a) 和 (b) 成立。这很容易验证，如下所示。

对于（a），令 $g_{\mathrm{id}} = \bot_{\mathfrak{G}}$ 属于（$\bigsqcap\{\bot_{\mathfrak{G}}, g\} = \bot$）$\in$二元重言式$^+\langle\mathfrak{G}\rangle$，由此可得 GnletoDom$_\sigma$（$\bot_{\mathfrak{G}}$）$\cap$ GnletoDom$_\sigma$（$\bot_{\mathfrak{G}}$）$= \emptyset$，这只有在 GnletoDom$_\sigma$（$\bot_{\mathfrak{G}}$）$= \emptyset$时才能成立。

对于（b），重言式（$g \sqsubseteq \top_{\mathfrak{G}}$）$\in$二元重言式$^+\langle\mathfrak{G}\rangle$保证对于每个 $g \in$粒$\langle\mathfrak{G}\rangle$, GnletoDom$_\sigma(g) \subseteq$GnletoDom$_\sigma(\top_{\mathfrak{G}})$，结合附加条件

$\bigcup\{\text{GnletoDom}_\sigma(g) \mid g \in \text{粒}\langle\mathfrak{G}\rangle\} = \text{Dom}\langle\sigma\rangle$（见 4.2）保证 $\text{GnletoDom}_\sigma(\top_\mathfrak{G}) = \text{Dom}\langle\sigma\rangle$，从而完成证明。 □

4.7 将 QBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 扩展到强准模型 定义推理系统 SQBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$，使其具有

InfRules$\langle$SQBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$ = InfRules$\langle$QBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle \cup$ {(T1)、(T2)、(T3)}这些规则，其中 (T1)、(T2) 和 (T3) 的定义见图 4.2。

$$(\text{T1})\ \frac{}{(\bigsqcap\{\bot_\mathfrak{G}, \mathfrak{g}\} = \bot)} \qquad (\text{T2})\ \frac{}{(\bot_\mathfrak{G} \sqsubseteq \mathfrak{g})} \qquad (\text{T3})\ \frac{}{(\mathfrak{g} \sqsubseteq \top_\mathfrak{G})}$$

图 4.2：SQBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的附加重言式规则

4.8 命题——SQBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 在强准模型上下文中的可靠性与完备性 SQBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的推理规则在强准模型上下文中是可靠且完备的。更准确地说，当所使用的模型概念为强准模型时，这些规则是完备的。

Proof: 该结果由 4.6 推得，同时还基于以下事实：SQBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 新增的规则 (T1)、(T2) 和 (T3)，连同 QBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的 (I1)，迫使 BinTaut$^+\langle\mathfrak{G}\rangle$ 中的所有约束都成立。 □

4.9 命题——强准结构与二元不可满足约束$^+\langle\mathfrak{G}\rangle$ 如果 σ 是 $\mathfrak{G}$ 上的强准结构，并且进一步具有以下性质：对于不存在某个 $\varphi \in$BinUnsat$^+\langle\mathfrak{G}\rangle$ 使得 Constr($\mathfrak{G}$) $\cup$BinTaut$^+\langle\mathfrak{G}\rangle \models \varphi$，那么 σ 就是 $\mathfrak{G}$上的（完整）结构。

因此，如果 σ 是 $\mathfrak{G}$ 的强准模型，且不满足 BinUnsat$^+\langle\mathfrak{G}\rangle$中的任何成员，那么它就是 $\mathfrak{G}$的（完整）模型。

Proof: σ =(Dom$\langle\sigma\rangle$, GnletoDom$_\sigma$)成为强准结构与完整结构之间的区别在于，后者还额外要求，对于 $g \in$ 粒$_\not\perp\langle\mathfrak{G}\rangle$，$\text{GnletoDom}_\sigma(g) \neq \emptyset$。现在，对于任意 $g \in$粒$_\not\perp\langle\mathfrak{G}\rangle$，都有 $(\bigsqcap\{g, g\} = \bot) \in$二元不可满足约束$^+\langle\mathfrak{G}\rangle$，这禁止 $\text{GnletoDom}_\sigma(g) = \text{GnletoDom}_\sigma(g) \cap \text{GnletoDom}_\sigma(g) = \emptyset$。 □

4.10 定理——SQBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的可满足完备性$\langle\mathfrak{G}\rangle$ SQBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的推理规则在完整模型的上下文中是可靠且可满足完备的。

Proof: 该结果由 4.8 和 4.9 得出，因为对于可满足完备性而言，任何结构满足二元不可满足约束$^+\langle\mathfrak{G}\rangle$ 中的任一成员的可能性都已被排除。 □

4.11 将 SQBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 扩展至模型 定义推理系统 SQBinInfPosExt$\langle\mathfrak{G}\rangle$，使其具有

InfRules$\langle$SQBinInfPosExt$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$ = InfRules$\langle$SQBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle \cup$ {(U1)、(U2)}，其中规则 (U1)和(U2)的定义见图4.3。

$$\text{(U1)}\ \frac{(\bigsqcap\{\mathfrak{g},\mathfrak{g}\}=\bot)}{\mathbf{false}}\ \langle|(\mathfrak{g}\neq\bot_{\mathfrak{G}})\rangle \qquad \text{(U2)}\ \frac{(g\sqsubseteq\bot_{\mathfrak{G}})}{\mathbf{false}}\ \langle|(\mathfrak{g}\neq\bot_{\mathfrak{G}})\rangle$$

图 4.3：SQBinInfPosExt⟨𝔊⟩的附加规则

4.12 命题—在完整模型的上下文中，QBinInfPosExt⟨𝔊⟩ 的可靠性和完备性 SQBinInfPosExt⟨𝔊⟩ 的推理规则在完整模型的上下文中是可靠且完备的。

Proof: 可靠性和可满足完备性由4.10推出，而（U1）和（U2）确保能够检测到不可满足性。 □

4.13 BinInfPosSat⟨𝔊⟩的不必要规则⟨𝔊⟩虽然推理系统 QBinInfPosExt⟨𝔊⟩对于完整模型是可靠且完备的，但其中包含一些不必要的规则。具体而言，可以删除规则（D1）、（M2）和（U2）。定义推理系统 BinInfPos⟨𝔊⟩ 使其具有

InfRules⟨BinInfPos⟨𝔊⟩⟩ = （InfRules⟨SQBinInfPosExt⟨𝔊⟩⟩ \ {（D1）、（M2）、（U2）}。由于这一推理系统十分重要，图 4.4 完整展示了它。其可靠性

$$\text{(I2)}\ \frac{(\mathfrak{g}_1\sqsubseteq\mathfrak{g}_2)\ \ (\mathfrak{g}_2\sqsubseteq\mathfrak{g}_3)}{(\mathfrak{g}_1\sqsubseteq\mathfrak{g}_3)} \qquad \text{(M1)}\ \frac{(\mathfrak{g}_1\sqsubseteq\mathfrak{g}_1')\ \ (\bigsqcap\{\mathfrak{g}_1',\mathfrak{g}_2\}=\bot)}{(\bigsqcap\{\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2\}=\bot)}$$

$$\text{(I1)}\ \frac{}{(\mathfrak{g}\sqsubseteq\mathfrak{g})} \qquad \text{(T1)}\ \frac{}{(\bigsqcap\{\bot_{\mathfrak{G}},\mathfrak{g}\}=\bot)} \qquad \text{(T2)}\ \frac{}{(\bot_{\mathfrak{G}}\sqsubseteq\mathfrak{g})} \qquad \text{(T3)}\ \frac{}{(\mathfrak{g}\sqsubseteq\top_{\mathfrak{G}})}$$

$$\text{(U1)}\ \frac{(\bigsqcap\{\mathfrak{g},\mathfrak{g}\}=\bot)}{\mathbf{false}}\ \langle|(\mathfrak{g}\neq\bot_{\mathfrak{G}})\rangle$$

图 4.4：BinInfPos⟨𝔊⟩的推理规则

以及对于完整模型的完备性将在下面的 4.14 中得到证明。

4.14 命题——BinInfPos⟨𝔊⟩ 的可靠性和完备性BinInfPos⟨𝔊⟩ 的推理规则在完整模型的上下文中是可靠且完备的。

Proof: 首先，鉴于规则 (U1)，规则 (D1) 和 (M2) 中的前提 ($\bigsqcap\{\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'\} = \bot$) 只有在 $\mathfrak{g}'$ 绑定到 $\bot_{\mathfrak{G}}$ 时才能成立。由于根据 (T1)，($\bigsqcap\{\bot_{\mathfrak{G}}, \bot_{\mathfrak{G}}\} = \bot$) 是一个重言式，因此在 (D1) 和 (M2) 中，$\mathfrak{g}$ 绑定到 $\bot_{\mathfrak{G}}$ 时的前提均成立。由此得到的规则分别正是 (T1) 和 (T2)，因此原来的 (D1) 和 (M2) 均不再必要。

要说明可以去掉 (U2)，只需注意到，利用 (T2) 和 (M1)，可以从 ($\bigsqcap\{g, g\} = \bot$) 的不可满足性推导出 ($g \sqsubseteq \bot_{\mathfrak{G}}$) 的不可满足性，如图 4.5 所示。 □

$$\dfrac{\dfrac{(\mathfrak{g} \sqsubseteq \bot_{\mathfrak{G}}) \quad \overline{(\bigsqcap\{\bot_{\mathfrak{G}}, \mathfrak{g}\} = \bot)}}{(\bigsqcap\{\mathfrak{q}, \mathfrak{q}\} = \bot)}\ \langle|(\mathfrak{g} \neq \bot_{\mathfrak{G}})\rangle}{\mathbf{false}}$$

图 4.5：由 ($\bigsqcap\{g, g\} = \bot$) 的不可满足性推导 ($g \sqsubseteq \bot_{\mathfrak{G}}$) 的不可满足性

4.15 Armstrong 上下文策略 扩展 BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 等推理系统以纳入负约束的方法，同样要求上下文（此处为 BinConstr$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$）是 Armstrong 上下文（见 3.12）。证明某个上下文是 Armstrong 上下文的一种直接方法，是使用 [Fag82，定理 3.1] 给出的刻画。对于比 BinConstr$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 更一般得多的一类粒度约束，相关证明已在 [HR17, 3.15-3.18] 中完成，因此此处不再重复。详情请参阅该文。为确保完备性，下面记录正式结果。

4.16 定理——Armstrong 上下文 BinConstr$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 是 Armstrong 上下文。更确切地说，如果 $\mathfrak{G}$ 可满足，那么 Constr$^{+}(\mathfrak{G}) \cup$BinTaut$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 存在一个 Armstrong 模型。
Proof: 参见 [HR17, 3.18]。 □

现在转而证明 BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 中的证明是单次使用。为此，首先通过相关联的图来刻画 $\mathfrak{G}$ 的性质会很有帮助。

4.17 SMAS 的图。 $\mathfrak{G}$的图记作 Graph$\langle\mathfrak{G}\rangle$，其顶点为 Granules$\langle\mathfrak{G}\rangle$的元素。图中有两种类型的边，一种有向边和一种无向边，定义如下。

（s-边）对于 $g_1, g_2 \in$ Granules$\langle\mathfrak{G}\rangle$，当且仅当 ($g_1 \sqsubseteq g_2$) $\in$ Constr$^{+}(\mathfrak{G}) \cup$ BinTaut$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$时，存在一条从 g_1 到 g_2 的有向包含边。形式上，此边视为有序对 $\langle g_1, g_2\rangle$。Graph$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 中所有包含边的集合记作 SubEdges$\langle$Graph$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$。

（d-边）对于 $g_1, g_2 \in$ Granules$\langle\mathfrak{G}\rangle$，当且仅当 ($\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot$) $\in$ Constr$^{+}(\mathfrak{G}) \cup$ BinTaut$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$时，$g_1$ 与g_2之间存在一条无向不相交边。形式上，如果 $g_1 \not\equiv_{\mathrm{id}} g_2$，此边视为无序对 $\{g_1, g_2\}$。如果 $g_1 \equiv_{\mathrm{id}} g_2$，则此边视为单元素集合 $\{g_1\} = \{g_2\} = \{g_1, g_2\}$。Graph$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 中所有不相交边的集合记作 DisjEdges$\langle$Graph$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$。

图$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的所有边的集合是

$$\text{边}\langle\text{图}\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle = \text{子边}\langle\text{图}\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle \cup \text{不相交边}\langle\text{图}\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle。$$

在该图于 [AP88], 中的等价表示中，包含边称为黑边，不相交边称为红边。

图$\langle\mathfrak{G}\rangle$中的一条包含路径是粒$\langle\mathfrak{G}\rangle$中元素构成的序列 $p=\langle g_1,g_2,\ldots,g_k\rangle$，其中 $k\geq 2$，并且对于每个 $i\in[1,k-1]$，$\langle g_i,g_{i+1}\rangle\in$子边$\langle$图$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$。这样的路径 p 称为从 g_1 到 g_k，并且作为 $\langle g_1,g_k\rangle$的基础。图$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的所有包含路径组成的集合记作子路径$\langle$图$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$。 p 的长度 k 记作长度$\langle p\rangle$。

p的基础约束序列为约束序列$\langle p\rangle=\langle(g'_1\sqsubseteq g'_2),(g'_2\sqsubseteq g'_3)\ldots,(g'_i\sqsubseteq g'_{i+1})\ldots,(g'_{k-1}\sqsubseteq g'_k)\rangle$，其中 $(g'_i\sqsubseteq g'_{i+1})$ 是 p的 i^{th}-约束。 p的基础约束集是去除顺序后的基础约束序列；更准确地说，约束集$\langle p\rangle=\{(g'_1\sqsubseteq g'_2),(g'_2\sqsubseteq g'_3)\ldots,(g'_i\sqsubseteq g'_{i+1})\ldots,(g'_{k-1}\sqsubseteq g'_k)\}$，

粒上的子*边$\langle$图$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$ 关系定义如下：$\langle g_1,g_2\rangle$ $\in$子*边$\langle$图$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$当且仅当存在一个 $\langle g'_1,g'_2,\ldots,g'_k\rangle\in$子路径$\langle$图$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$，满足 $g'_1{}_{\text{id}}=g_1$ 且$g'_k{}_{\text{id}}=g_2$。在这种情况下，路径 $p=\langle g'_1,g'_2,\ldots,g'_k\rangle$ 称为 $\langle g_1,g_2\rangle$的基础路径。

4.18 命题 — 基础路径的存在性 设 $g_1,g_2\in$ 粒$\langle\mathfrak{G}\rangle$，并进一步假设 $\mathfrak{G}$ 可满足。那么，蕴涵约束$^+(\mathfrak{G})\cup$二元重言式$^+\langle\mathfrak{G}\rangle\models(g_1\sqsubseteq g_2)$成立，当且仅当存在一条包含路径 p ，它是 $\langle g_1,g_2\rangle$的基础路径。

Proof: 该结果在准模型上下文中成立，这一点已在 [AP88, 定理2]中证明。加入重言式并考虑 4.6 的结果后，很容易看出，该结果在强准模型上下文中也成立。最后，要求 $\mathfrak{G}$ 可满足，根据 4.9，该结果也适用于完整模型上下文。 □

由于包含约束在 $\mathfrak{G}$ iff 存在一条底层路径时成立，因此也可以基于该路径给出一个简单的证明。详情如下。

4.19 包含约束的线性证明 令 $p'=\langle g'_1,g'_2,\ldots,g'_k\rangle\in$SubPaths$\langle$Graph$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$。与 p 相关联的左线性证明树（在 BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 中）记作 LLinear$\langle p\rangle$，定义如下。

(a) 若 $k=2$ 且 $(g'_1\sqsubseteq g'_2)\in$ Constr($\mathfrak{G}$)，则 LLinear$\langle p\rangle$ 仅为 $(g'_1\sqsubseteq g'_2)$。在这种情况下，证明完全不需要使用规则，因为所需的结论已包含在前件集合中。(b) 若 $k=2$ 且 $(g'_1\sqsubseteq g'_2)\in$ BinTaut$^+\langle\mathfrak{G}\rangle\setminus$Constr($\mathfrak{G}$)，则 LLinear$\langle p\rangle$ 为树 $(g'_1\sqsubseteq g'_2)$。在这种情况下，证明至多使用 {(I1), (T1), (T2), (T3)} 中的规则。(c) 若 $k>2$ 且对于每个 $i\in[1,k-1]$，都有 $(g'_i\sqsubseteq g'_{i+1})\in$ Constr($\mathfrak{G}$)，则 LLinear$\langle p\rangle$ 的定义如图 4.6 所示。在这种情况下，仅使用规则 (I2)。(d) 若 $k>2$ 且对于一个或多个 $i\in[1,k-1]$，都有 $(g'_i\sqsubseteq g'_{i+1})\in$ BinTaut$^+\langle\mathfrak{G}\rangle\setminus$Constr($\mathfrak{G}$)，则 LLinear$\langle p\rangle$ 如图 4.6 所示，但将 $(g'_i\sqsubseteq g'_{i+1})$ 替换为树 $(g'_i\sqsubseteq g'_{i+1})$。在这种情况下，至多使用 {(I1), (I1), (T1), (T2), (T3)} 中的规则。

4.20 引理——左线性证明的存在性 设 $g_1,g_2\in$ 粒$\langle\mathfrak{G}\rangle$。若 $\mathfrak{G}$ 可满足，且 BinConstr$^+\langle\mathfrak{G}\rangle\cup$ 二元重言式$^+\langle\mathfrak{G}\rangle\models(g_1\sqsubseteq g_2)$，则存在一个关于

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(g'_1 \sqsubseteq g'_2)\ (g'_2 \sqsubseteq g'_3)}{(g'_1 \sqsubseteq g'_3)} \qquad (g'_3 \sqsubseteq g'_4)}{(g'_1 \sqsubseteq g'_4)}}{\vdots}}{(g'_1 \sqsubseteq g'_i)} \qquad (g'_i \sqsubseteq g'_{i+1})}{(g'_1 \sqsubseteq g'_{i+1})}}{\vdots}}{(g'_1 \sqsubseteq g'_{k-1})} \qquad (g'_k \sqsubseteq g'_{k-1})}{(g'_1 \sqsubseteq g'_k)}$$

图 4.6：用于包含的左线性证明树

该命题的证明，且此证明属于 BinInfPos⟨𝔊⟩。

Proof: 使用 4.18 证明存在一个基础包含路径，然后使用 4.19 说明可以进行给定形式的证明。 □

4.21 约简包含路径 如果包含路径 $p = \{g'_1, g'_2, \ldots, g'_k\}$ ∈子路径⟨图⟨𝔊⟩⟩ 满足以下任一条件，则称其为约简的：(a) 长度⟨p⟩ $= 2$；或 (b) p中没有任何粒在粒集$_{\not\perp}$⟨𝔊⟩ 中出现超过一次，同时 $\perp_{\mathfrak{G}}$ 根本不出现。

4.22 引理——约简包含路径的存在性 设⟨g_1、 g_2⟩ ∈属于粒集⟨𝔊⟩ ×粒集⟨𝔊⟩。如果图⟨𝔊⟩ 中存在一条包含路径，其底层为⟨g_1、 g_2⟩，那么就存在这样一条约简的路径。

Proof: 设 p = ⟨g'_1、 g'_2、.....、 g'_k⟩ 是一条包含路径，其底层为 ⟨g_1、 g_2⟩。如果长度⟨p⟩ $= 2$，则无需进一步证明，因为所有此类路径都是约简的。因此，假设长度⟨p⟩ > 2 ，且某个粒集⟨𝔊⟩ 中的 g ∈在 p中出现超过一次。如果这些重复出现是 p的端点，即如果 $_{\text{id}} = g'_1 \ _{\text{id}}= g'_k$，那么 ⟨$g_1$、 g_2⟩ 具有如下形式：对于某个粒集 ⟨𝔊⟩中的 $g \in$，为 ⟨g、 g⟩。在这种情况下，将 p 替换为 ⟨g、 g⟩，所得路径同样以 ⟨g_1、 g_2⟩ 为底层，并且由于其长度为二，进一步还是约简的。

否则，记为 $p = \langle g'_1, g'_2, \ldots, g'_k \rangle$，假设对于 $j_1, j_2 \in [1, k]$，满足 $j_1 < j_2$ 且 $j_1 > 1$ 或 $j_2 < k$，则有 $g'_{j_1} \ _{\text{id}}= g'_{j_2}$。从 p 中移除子序列⟨$g_{j_1+1}, \ldots, g_{j_2}$⟩ 中的元素，得到序列 $p' = \langle g'_1, g'_2, \ldots, g'_{j_1}, g'_{j_2+1}, \ldots, g'_k \rangle$。容易看出， $p' \in$ 子路径⟨图⟨𝔊⟩⟩，且它也对应于 ⟨g_1, g_2⟩，但长度⟨p'⟩ $<$ 长度⟨p⟩。如果 p' 中仍有另一个非本质环，则可重复此过程。由于每次迭代都会缩短路径的长度，该过程最终必然终止，得到一条不含内部环的路径。

唯一涉及 $\perp_{\mathfrak{G}}$ 且可满足的包含约束，都是某个 $g \in$粒⟨𝔊⟩ 的形式 ($\perp_{\mathfrak{G}} \sqsubseteq g$)，而这些已经包含在二元重言式$^{+}$⟨𝔊⟩中。因此，无需在长度大于二的任何路径中使用 $\perp_{\mathfrak{G}}$ 。 □

4.23 引理 — 单次使用的左线性证明 如果 p 是图$\langle\mathfrak{G}\rangle$中的一条约化包含路径，那么证明 LLinear$\langle p\rangle$ （参见 4.19）是单次使用的。

Proof: 这是显然的，因为在任何长度大于二的约化路径中，任一粒都不会出现多次。 □

4.24 命题——推导包含约束的可满足性 如果 Constr$^+(\mathfrak{G})$ 可满足，那么对于任意 g_1, $g_2 \in$ Granules$\langle\mathfrak{G}\rangle$ ，若 Constr$^+(\mathfrak{G}) \models (g_1 \sqsubseteq g_2)$，则 BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 中存在一个关于 ($g_1 \sqsubseteq g_2$) 的单次使用左线性证明，其前提仅使用 Constr$^+(\mathfrak{G})$ 中的包含约束，且至多使用{(I2)、(I1)、(T1)、(T2)、(T3)}中的规则。若 $g_1, g_2 \in$ Granules$_{\not\perp\top}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 满足 $g_1 \not=_{\mathrm{id}} g_2$，则至多只需使用规则 (I2) 和 (T3)。

Proof: 只需结合 4.20 和 4.23 即可。 □

不相交性的证明也具有特殊形式，但在一般情况下，它们基于两条包含路径，而不是一条。详细内容如下。

4.25 受保护对 定义 $\mathfrak{G}$ 的双元组集合为

双元组$\langle\mathfrak{G}\rangle = \{\{g_1, g_2\} \mid g_1, g_2 \in$粒$\langle\mathfrak{G}\rangle$和 $g_1 \not=_{\mathrm{id}} g_2\}$。称一对 $S = \{g_1, g_2\} \in$ 双元组$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 对于 $\mathfrak{G}$ 是受保护的，当且仅当存在一对 $S' = \{g_1', g_2'\} \in$ 粒 $\langle\mathfrak{G}\rangle$，使得$\langle g_1$、 $g_1'\rangle$、 $\langle g_2$、 $g_2'\rangle \in$ 子*边$\langle$图$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$ 以及$S' \in$不相交边$\langle$图$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$。见图 4.7。因此， S 是受保护的，当且仅当其两个粒（不

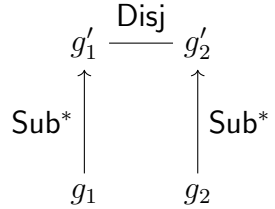


图 4.7：受保护对 $\{g_1, g_2\}$的可视化

必然是相应对象的真子粒）的一对 S'，明确声明为不相交，可以是重言式，也可以是 $\mathfrak{G}$ 的约束。在这种情况下， S' 被称为 S 的保护者。一对 $S \in$双元组 $\langle\mathfrak{G}\rangle$ 对于 $\mathfrak{G}$ 是未受保护的，当且仅当它未受到保护。对于 $\mathfrak{G}$ 的所有受保护对的集合记作 ProtectedPr$\langle\mathfrak{G}\rangle$，而 UnProtectedPr$\langle\mathfrak{G}\rangle$ =双元组$\langle\mathfrak{G}\rangle$ \ProtectedPr$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 是 $\mathfrak{G}$ 的未受保护对集合。

4.26 引理——保护蕴含不相交性 对于任意 $S \in$双元组$\langle\mathfrak{G}\rangle$,

$S \in$ ProtectedPr$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 当且仅当 Constr$^+(\mathfrak{G}) \models (\bigsqcap S = \bot)$。

Proof: 参见 [AP88，第 3]条定理。 □

4.27 不相交约束的单路径和双路径左线性证明 假设（$\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot$）是待证明的约束。需要考虑四种情况。首先，如果（$\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot$）$\in$约束$^+$（$\mathfrak{G}$），那么该约束本身就构成其证明树。其次，如果

($\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot$) 是一个重言式；也就是说，如果 $g_1 \overset{\text{id}}{=} \bot_{\mathfrak{G}}$，那么证明树为 $\dfrac{}{(\bigsqcap\{\bot_{\mathfrak{G}}, g_2\} = \bot)}$（如果 $g_2 \overset{\text{id}}{=} \bot_{\mathfrak{G}}$，情况也类似）。第三，这两种情况都不成立，但对于某些 $g_1' \in$ 粒$\langle\mathfrak{G}\rangle$，($\bigsqcap\{g_1', g_2\} = \bot$) $\in$ 约束$^+$($\mathfrak{G}$)，那么证明的形式如图4.8所示。对于某些 $g_2' \in$ 粒$\langle\mathfrak{G}\rangle$，类似的结果也适用于 ($\bigsqcap\{g_1, g_2'\} = \bot$) $\in$ 约束$^+$($\mathfrak{G}$)。最后，如果以上情况均不

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \vdots\\ \text{left-linear proof}\\ \vdots\\ (g_1 \sqsubseteq g_1') \end{array} \qquad (\bigsqcap\{g_1', g_2\} = \bot)}{(\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot)}$$

图4.8：不相交性的一路径线性证明

成立，那么证明如图 4.9 所示。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_1\\ \vdots\\ \text{left-linear proof}\\ \vdots\\ (g_1 \sqsubseteq g_1') \end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Sigma_2\\ \vdots\\ \text{left-linear proof}\\ \vdots\\ (g_2 \sqsubseteq g_2') \end{array} \qquad (\bigsqcap\{g_1', g_2'\} = \bot)}{(\bigsqcap\{g_1', g_2\} = \bot)}}{(\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot)}$$

图4.9：不相交性的双路径线性证明

4.28 命题——推导不相交约束的可满足性 如果 Constr$^+$($\mathfrak{G}$) 是可满足的，那么对于任意 $g_1, g_2 \in$ 粒$\langle\mathfrak{G}\rangle$，满足 Constr$^+$($\mathfrak{G}$) $\models$ ($\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot$) 的对象，在 BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 中存在一个至多包含两条路径的单次使用左线性证明，并且该证明至多使用属于 {(I2)、(M1)、(I1)、(T1)、(T2)、(T3)} 的那些规则。

Proof: 该证明直接由 4.27 的构造得到。现在只需证明单次使用即可。除最后一种情况外，证明是单次使用这一点显然成立。对于最后一种情况，只需注意，由于 g_1' 和 g_2' 不相交，因此，支撑$\langle g_1$、$g_1'\rangle$的路径中的每个粒都必须与支撑 $\langle g_2$、$g_2'\rangle$的路径中的每个粒不相交，所以不存在某个约束同时用于两条链的可能性。 □

4.29 示例 对于 4.28 中证明技术的一个简单示例，设 $\mathfrak{G}_{4.29}$ 为一个 SMAS，其 $\{g_i \mid i \in [1,8]\} \subseteq$ 粒$\langle\mathfrak{G}_{4.29}\rangle$ 和$\{(g_1 \sqsubseteq g_2)、(g_2 \sqsubseteq g_3)、(g_3 \sqsubseteq g_4)、(g_5 \sqsubseteq g_6)、(g_6 \sqsubseteq g_7)、(g_7 \sqsubseteq g_8)、(\bigsqcap\{g_4, g_8\} = \bot)\} \subseteq$ BinConstr$^+\langle\mathfrak{G}_{4.29}\rangle$.
进一步假设二元约束$^+\langle\mathfrak{G}_{4.29}\rangle$ 是可满足的。图4.10展示了一个使用 BinInfPos$\langle\mathfrak{G}_{4.29}\rangle$的证明规则对二元约束$^+\langle\mathfrak{G}_{4.29}\rangle \models (\bigsqcap\{g_1, g_5\} = \bot)$进行证明的双路径左线性证明。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(g_1 \sqsubseteq g_2)\ (g_2 \sqsubseteq g_3)}{(g_1 \sqsubseteq g_3)} \qquad (g_3 \sqsubseteq g_4)}{(g_1 \sqsubseteq g_4)} \qquad \dfrac{\dfrac{(g_5 \sqsubseteq g_6)\ (g_6 \sqsubseteq g_7)}{(g_5 \sqsubseteq g_7)} \qquad (g_7 \sqsubseteq g_8)}{(g_5 \sqsubseteq g_8)} \qquad (\bigsqcap\{g_4, g_8\} = \bot)}{(\bigsqcap\{g_1, g_5\} = \bot)}$$

图 4.10：不相交性的示例证明

4.30 命题——使用 BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 推导不可满足性：若 $\mathfrak{G}$ 不可满足，则存在一个 BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 中的单次使用证明，其最后一步应用规则 (U1)。

Proof: BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的完备性保证存在一个证明，证明 $\mathfrak{G}$ 不可满足，且最后一步是 (U1) 的实例化，因为 (U1) 是唯一允许推导出假值的规则。然而，仅凭这样的论证并不能保证该证明是单次使用的。要确保满足这一条件，还需要额外的工作。

对于最一般的情况，证明的思路是建立在能够确保单次使用证明的既有结果之上，具体来说是 4.28。策略是找出一个粒 $g \in$ 粒$_{\not\perp}\langle\mathfrak{G}\rangle$，使得可以从约束$^+(\mathfrak{G})$证明$(\bigsqcap\{g, g\} = \bot)$，其形式类似于图 4.9 所示的形式，然后在其末尾追加一次应用（U1），以推出假，如图 4.11 所示。不过，有两个细节需要注意。首先，

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma_1 \\ \vdots \\ \text{左线性证明} \\ \vdots \\ (g \sqsubseteq g_1')}{(\bigsqcap\{g, g\} = \bot)} \qquad \dfrac{\dfrac{\Sigma_2 \\ \vdots \\ \text{左线性证明} \\ \vdots \\ (g \sqsubseteq g_2') \qquad (\bigsqcap\{g_1', g_2'\} = \bot)}{(\bigsqcap\{g_1', g\} = \bot)}}{\text{假}}$$

图4.11：不可满足性的双路径线性证明

由于约束$^{+}(\mathfrak{G})$不可满足，因此必须谨慎界定什么是证明，因为假可以蕴含任何事物。其次，由于 g 同时用于两条线性路径中，而图 4.9 中并不存在这种情况，因此必须通过其他方式确保任何规则都不会被使用超过一次。

该策略是：对于图 4.11 中除最后一个推导出假之外的所有推导，切换到证明系统 SQBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 。如 4.8 中所确立的，在强准模型的上下文中，任意约束集都是可满足的。此外，BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$的每条规则，除 (U1) 外，也都是 SQBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的规则。因此，图 4.11 的整棵树（应用 (U1) 的最低层除外）也是 SQBinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 中的证明树。于是，整棵树都是 BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 中的证明树。

现在，设 $p_1 = \langle g_{11}、 g_{12}、……、 g_{1k_1}\rangle$（分别为 $p_2 = \langle g_{21}、 g_{22}、……、 g_{2k_2}\rangle$）是作为从 Σ_1 证明 $(g \sqsubseteq g_1')$（分别从 resp. Σ_2 证明 $(g \sqsubseteq g_2')$）基础的路径。如 4.27 中一样，假定 p_1 和 p_2 都是约简的。如果 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \neq \emptyset$，那么某个不同于 g 的粒必须同时出现在 p_1 和 p_2 中。在这种情况下，设 $g' \overset{\text{id}}{=} g_{1i_1} \overset{\text{id}}{=} g_{2i_2}$ 是 p_1 中也出现在 p_2 中且索引最高的粒，并在整个证明中将 p_1 替换为 $p_1' = \langle g_{1i_1}、 g_{1i_2}、……、 g_{1k_1}\rangle$，将 p_2 替换为 $p_2' = \langle g_{2i_1}、 g_{2i_2}、……、 g_{2k_1}\rangle$，并将 g 替换为 g'。所得结果显然是单次使用的，因为若 Σ_1 和 Σ_2 具有共同约束，就要求 p_1 和 p_2 至少具有两个共同的粒。

在不太一般的情形下，即在图4.8形式的树上附加一个以假为结论的最终证明时，该证明类似但更容易，因为只有一个关于包含的左线性证明。对于其余可能性（对应于4.27的前两种情形），证明是平凡的。 □

最后，本节的主要结果可以得到证明。

4.31 定理——BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 与单次使用 证明系统BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 是可靠的、完备的，并且满足单次使用性。

Proof: 这由4.24、4.28和4.30推出。 □

4.32 示例 对于4.30(b)中证明技术的一个简单示例，设 $\mathfrak{G}_{4.32}$ 为一个具有 $\{g_i \mid i \in [1,7]\} \subseteq$ 粒$\langle\mathfrak{G}_{4.32}\rangle$ 和{（$g_1 \sqsubseteq g_2$）、（$g_2 \sqsubseteq g_3$）、（$g_3 \sqsubseteq g_4$）、（$g_1 \sqsubseteq g_5$）、（$g_5 \sqsubseteq g_6$）、（$g_6 \sqsubseteq g_7$）、（$\bigsqcap\{g_4, g_7\} = \bot$）的 SMAS}

$\subseteq$ 二元约束$^{+}\langle\mathfrak{G}_{4.32}\rangle$。

进一步假设 $g_1 \overset{\text{id}}{\neq} \bot_{\mathfrak{G}_{4.32}}$。图 4.12 展示了一个使用 BinInfPos$\langle\mathfrak{G}_{4.32}\rangle$ 的证明规则证明二元约束$^{+}\langle\mathfrak{G}_{4.32}\rangle$ 不可满足的证明。

5 ArmstrongContext 中的否定

本文余下部分旨在说明如何扩展 4.13 中的推理系统 BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ ，使其包含 BinConstr$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$中的所有断言；也就是说，既包含 BinConstr$^{-}\langle\mathfrak{G}\rangle$中的断言，也包含 BinConstr$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 中已由 BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$涵盖的断言。所采用的方法具有普适性，并不局限于 BinConstr$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$。相反，它适用于

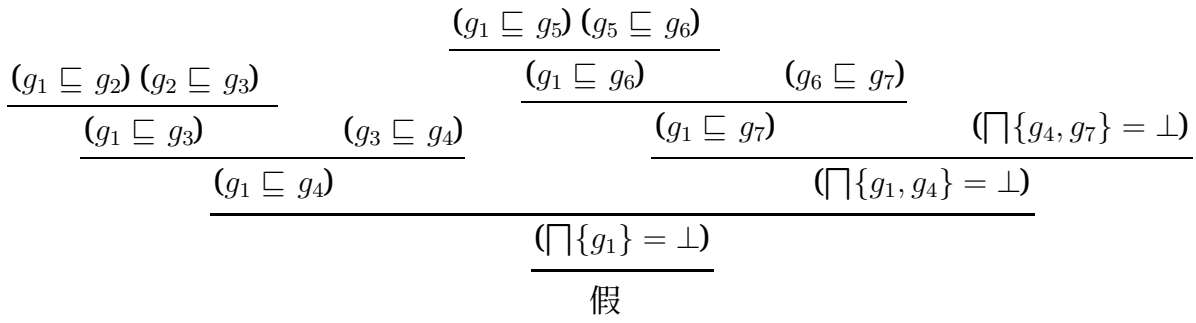


图 4.12：不可满足性证明示例

任何 Armstrong 上下文 $\mathcal{C}$。采用这种更一般的方法绝不会增加复杂性。恰恰相反，将这些思想独立于特定上下文进行阐述会更加容易。这种方法不仅避免引入 BinConstr$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$所特有的无关性质，还为将这些结果应用于其他上下文打开了大门。不过，关于一般结果如何应用于 BinConstr$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的明确指导将始终置于首要位置。

本节将阐述 Armstrong 上下文中否定的一些本质性质。下一节（第 6 节）将给出一组推理规则的构造，这组规则对于正断言和负断言都是完备的。

5.1 上下文 除非特别说明，本文其余部分中，$\mathcal{L}$ 表示一个一般的逻辑系统（见 3.6），其中 $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{WFF}\langle\mathcal{L}\rangle$ 是一个 Armstrong 上下文（见 3.12）。换言之，$\mathcal{C}$ 的每个可满足子集都存在一个 Armstrong 模型。对于不关心任何一般化的读者，只需取 $\mathcal{C}$ =二元约束$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$, 并令 $\mathcal{L}$ 为包含二元约束$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$中所有断言的逻辑即可。

5.2 Armstrong 约束集 为 $\mathcal{C}$中的断言的否定提供明确的记号很有用。为此，对于任意 $\Phi \subseteq \mathcal{C}$, 定义 $\mathrm{Not}\langle\Phi\rangle = \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Phi\}$，并定义 $\mathrm{All}^{\pm}\langle\mathcal{C}\rangle = \mathcal{C} \cup \mathrm{Not}\langle\mathcal{C}\rangle$。对于 $\mathcal{C}$ = 二元约束$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$这一特定情形，显然有 Not$\langle$二元约束$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$ =二元约束$^{-}\langle\mathfrak{G}\rangle$ ，以及 All$^{\pm}\langle$二元约束$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$ = 二元约束$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$。

$\mathcal{C}$ 上的扩展 Armstrong 约束集是 All$^{\pm}\langle\mathcal{C}\rangle$ 的任意可满足子集。特别地，对于 $\mathcal{C}$ = BinConstr$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$，扩展 Armstrong 约束集是 BinConstr$^{\pm}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的子集。

对于 $\Phi \subseteq \mathrm{All}^{\pm}\langle\mathcal{C}\rangle$，定义 $\mathrm{Only}^{+}\langle\Phi\rangle = \Phi \cap \mathcal{C}$，并定义 $\mathrm{Only}^{-}\langle\Phi\rangle = \Phi \cap \mathrm{Not}\langle\mathcal{C}\rangle$。因此，如果 $\mathcal{C} = \mathrm{BinConstr}^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$，那么 $\mathrm{Only}^{+}\langle\Phi\rangle = \Phi \cap \mathrm{BinConstr}^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$，且 $\mathrm{Only}^{-}\langle\Phi\rangle = \Phi \cap \mathrm{BinConstr}^{-}\langle\mathfrak{G}\rangle$。

5.3 等价对和互补对 两个良构公式可以等价而不完全相同。例如，在二元约束$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$中，对于任意 g_1, $g_2 \in$ 粒$\langle\mathfrak{G}\rangle$，($\bot_{\mathfrak{G}} \sqsubseteq g_1$)和($g_2 \sqsubseteq \top_{\mathfrak{G}}$)都是等价的，因为二者都是重言式，因此在任何粒状结构中都为真。

更一般地，如果 $\varphi_1, \varphi_2 \in$ 良构公式$\langle\mathcal{L}\rangle$ 具有相同的模型，则它们等价。在这种情况下，记作 $\varphi_1 \equiv \varphi_2$，并称 $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ 构成一个等价对。

二元素集合 $\{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq$ 良构公式$\langle\mathcal{L}\rangle$ 若 $\{\varphi_1, \neg\varphi_2\}$ 构成等价对，则构成互补对，其中 φ_1 和 φ_2 称为彼此的互补项。

5.4 示例——二元约束中的互补对$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 对于任意 $g_1, g_2 \in$ 粒$_{\mathcal{L}}\langle\mathfrak{G}\rangle$,{（$\bot_{\mathfrak{G}} \sqsubseteq g_1$），（$\bigsqcap\{g_2, g_2\} = \bot$）} 在 $\mathcal{C} =$ 二元约束$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$中构成一对元素的互补对，其中（$\bot_{\mathfrak{G}} \sqsubseteq g_1$）是重言式，而（$\bigsqcap\{g_2, g_2\} = \bot$）不可满足。

通常， $\mathcal{C}$ 中的互补对必定由一个重言式和一个不可满足断言组成。证明这一点的关键在于注意到空集具有一个 Armstrong 模型，具体如下所述。

5.5 引理—— $\emptyset$ 的 Armstrong 模型在 5.1 中所标识的上下文中，空集$\emptyset \subseteq \mathcal{C}$ 具有一个 Armstrong 模型。

Proof: $\mathcal{L}$ 被假定为非平凡的，其含义是存在一个 $\varphi \in$ 良构公式$\langle\mathcal{L}\rangle$可拥有一个模型（见 3.6）。由于 φ 的任何模型也是 $\emptyset$的模型，因此空集是可满足的。由于 $\mathcal{C}$ 是一个 Armstrong 上下文， $\emptyset \subseteq \mathcal{C}$、 $\emptyset$ 必须拥有一个 Armstrong 模型，正如所要求的那样。 □

5.6 引理——Armstrong 上下文中的互补对 令 $\{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq \mathcal{C}$。如果 $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ 是一个互补对，则其中一个必为重言式，而另一个必不可满足。

Proof: 令 $M_\emptyset$ 为 $\emptyset$的一个 Armstrong 模型；根据 5.5，该模型必然存在；再令$\{\varphi_1, \varphi_2\} \subseteq \mathcal{C}$ 为一个互补对。根据重言式的定义（见 [Mon76，定义 8.22]或 [End01，第 23]页）， $M_\emptyset$ 是 φ_1 的模型，当且仅当它是一个重言式；对于 φ_2同样如此。因此，如果二者都不是重言式，那么 $M_\emptyset$ 既不是$\neg\varphi_1$ 的模型，也不是 $\neg\varphi_2$的模型，于是它必然同时是二者的模型，这不可能，因为二者互为补集。因此，φ_1 或 φ_2 必有一个是重言式，证明完毕。 □

现在很容易得出 $\mathcal{C}$ 与 Not$\langle\mathcal{C}\rangle$ 重叠的刻画。

5.7 命题—— $\mathcal{C}$ 与 Not$\langle\mathcal{C}\rangle$ 在 Armstrong 上下文中的重叠 若 $\varphi_1 \in \mathcal{C}$且 $\varphi_2 \in$ Not$\langle\mathcal{C}\rangle$ ，并且 $\varphi_1 \equiv \varphi_2$，则 φ_1 必定是重言式或不可满足。

Proof: 假设 $\varphi_1 \in \mathcal{C}$、 $\varphi_2 \in$ Not$\langle\mathcal{C}\rangle$ ，并且 $\varphi_1 \equiv \varphi_2$。那么 φ_2 的形式为 $\neg\varphi_3$，其中某个 $\varphi_3 \in \mathcal{C}$ 满足条件，因此 $\varphi_1 \equiv \neg\varphi_3$。由此可知 $\{\varphi_1, \varphi_3\}$ 是一个互补对，因此根据 5.6， φ_1和 φ_3 中一个必定是重言式，另一个则不可满足。 □

有了前面的结果，现在我们将重点转向在推理中引入否定这一更一般的主题。尽管逆否命题的思想在逻辑中广为人知，但此处仍值得准确回顾这一思想，因为它是本节结果的核心。

5.8 引理 — 前提与结论的一般交换 设 $\mathfrak{A} \subseteq$ 良构公式$\langle\mathcal{L}\rangle$对逻辑否定封闭；即 Not$\langle\mathfrak{A}\rangle \subseteq \mathfrak{A}$。（请注意，这一点对$\mathfrak{A} = \text{All}^{\pm}\langle\mathcal{C}\rangle$尤其成立。）此外，设 $\Phi \subseteq \mathfrak{A}$ 有限，且 $\varphi, \psi \in \mathfrak{A}$,

(a) $\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi$ 当且仅当 $\Phi \cup \{\neg\psi\} \models \neg\varphi$。

(b) 如果 $\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi$ 和 $\Phi \cup \{\varphi\}$ 是可满足的，且 φ 是本质的，即 $\Phi \not\models \psi$，那么 $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ 也是可满足的。

特别地，令 ψ 不可满足，可得到以下特殊情形。

(a′) $\Phi \cup \{\varphi\}$ 不可满足，当且仅当 $\Phi \models \neg\varphi$,

(b′) 如果 $\Phi \cup \{\varphi\}$ 不可满足，且 φ 对于该不可满足性是本质的，即 Φ 是可满足的，那么 $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ 也是可满足的。

Proof: (a)部分只是逆否命题 [End01, Cor. 24D]。对于(b)部分，由于 $\Phi \not\models \psi$，存在一个 $\Phi \cup \{\neg\psi\}$的模型 M，根据(a)，它也必定是 $\neg\varphi$ 的模型。因此， M 也是 $\Phi\cup\{\neg\varphi\}$的模型。取 ψ为在(a)和(b)中均为假的恒假断言，便可得到(a′)和(b′)。 □

5.9 注记——不可满足性下的交换 在 5.8 的第一部分中，需要注意的是，如果 $\Phi \models \psi$；也就是说，如果 φ 在 $\Phi \cup \{\varphi\} \models \psi$ 中是多余的，那么 $\Phi \cup \{\neg\psi\}$ 必定不可满足，因此 $\Phi \cup \{\neg\psi\} \models \neg\varphi$ 以一种相当平凡的方式成立，因为 $\models \neg\varphi$ 为假。只需令 φ 为恒真断言 true，即可看出这一点。

类似地，在第二部分中，如果 Φ 不可满足，因此无论 φ 如何， $\Phi\cup\{\varphi\}$ 都不可满足，那么 $\Phi \models \neg\varphi$ 也会以一种相当平凡的方式成立，因为假可以蕴涵任何内容。

关键在于，尽管该结果普遍成立，但在大多数情况下，只有当 φ 对于蕴涵成立而言是左侧本质的情况才有意义。

在 Armstrong 上下文中应用时，交换前提与结论这一总体思路会带来显著的结果。具体而言，否定前提对于推导肯定结论毫无影响；而在推导否定结论时，至多只需要一个否定前提。这些想法将在接下来的两个结果中形式化。

5.10 引理——扩展 Armstrong 约束集中的可满足性与不可满足性 设 Φ 是关于 $\mathcal{C}$ 的扩展 Armstrong 约束集,

(a) 如果 Φ 可满足，则相对于 $\mathcal{C}$ ，$\text{Only}^{+}\langle\Phi\rangle$ 的任何 Armstrong 模型也是 Φ 中所有约束的模型。(b) 如果 Φ 不可满足，则 $\text{Only}^{+}\langle\Phi\rangle$ 不可满足，或者存在某个 $\neg\varphi \in \text{Only}^{-}\langle\Phi\rangle$ ，使得 $\text{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\neg\varphi\}$ 不可满足。

Proof: 对于 (a)，如果 $\Phi =\text{Only}^{+}\langle\Phi\rangle$，那么无需进一步证明。否则，设 M 是相对于 $\mathcal{C}$的 Φ 的 Armstrong 模型，并且设 $\neg\varphi \in \text{Only}^{-}\langle\Phi\rangle$。由于 $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ 是可满足的，根据 5.8(a) 可得 $\Phi \not\models \varphi$。因此，由于 M 是 Φ的 Armstrong 模型，它

不可能是 φ 的模型，因此它是 $\neg\varphi$ 的模型。由于 $\neg\varphi$ 是从 $\mathbf{Only}^{-}\langle\Phi\rangle$ 中任意选取的，因此可得 M 是 Φ 中所有内容的模型，证毕。

对于第 (b) 部分，假设 Φ 不可满足。如果 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle$ 不可满足，则无需进一步证明。因此，假设 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle$ 可满足，并令 M 为相对于 $\mathcal{C}$的 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle$ 的 Armstrong 模型。由于 Φ 不可满足，因此必定存在某个 $\neg\varphi \in \mathbf{Only}^{-}\langle\Phi\rangle$，使得 $M \notin \mathbf{Mod}(\neg\varphi)$，从而有 $M \in \mathbf{Mod}(\varphi)$。因此，根据 Armstrong 模型的定义，$\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \models \varphi$。最后，应用 5.8(a′)，$\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\neg\varphi\}$ 不可满足，证明完毕。 □

5.11 命题——扩展 Armstrong 约束集中的蕴涵 令 Φ为定义在 $\mathcal{C}$上的扩展 Armstrong 约束集，并令 $\beta \in \mathcal{C}$。

(a) 如果 $\Phi \models \beta$，则必有 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \models \beta$。

(b) 如果 $\Phi \models \neg\beta$，则要么 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \models \neg\beta$，要么存在一个 $\neg\varphi \in \mathbf{Only}^{-}\langle\Phi\rangle$，满足 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\neg\varphi\} \models \neg\beta$（因而 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\beta\} \models \varphi$）成立，且 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\neg\varphi\}$ 和 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\beta\}$ 均可满足。

Proof: （a）部分：如果 Φ不可满足，则结论显然成立。因此，假设 Φ 与 $\Phi \models \beta$可满足，并令 M 为 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle$的一个 Armstrong 模型。根据 5.10(a)，M 是所有 Φ的模型，因此也是 β 的模型。最后，根据 Armstrong 模型的定义，$\mathcal{C}$ 中在 M 中成立的约束只有那些由 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle$蕴含的约束，因此 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \models \beta$。

（b）部分：如果 Φ 不可满足，则结论立即成立。因此，假设 Φ 与 $\Phi \models \neg\beta$可满足。根据 5.8(a′)，$\Phi \cup \{\beta\}$ 必定不可满足。于是，应用 5.10(b)，必有以下两种情况之一：$\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\beta\}$ 不可满足；或者存在$\neg\varphi \in \mathbf{Only}^{-}\langle\Phi\rangle$，使得 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\beta\} \cup \{\neg\varphi\}$ 不可满足。如果 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\beta\}$ 不可满足，再次应用 5.8(a′)可得 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \models \neg\beta$。如果 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\beta\}$ 可满足，但存在 $\neg\varphi \in \mathbf{Only}^{-}\langle\Phi\rangle$，使得 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\beta\} \cup \{\neg\varphi\}$ 不可满足，则应用 5.8(a)可得 $\mathbf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\neg\varphi\} \models \neg\beta$，证明完成。 □

6 涉及否定的二元规则推理

本节将说明如何扩展适用于 Armstrong 上下文 $\mathcal{C}$ 的可靠且完备的证明系统 $\mathscr{A}$，使其适用于所有的 $\mathbf{All}^{\pm}\langle\mathcal{C}\rangle$。该方法以第 5 节提出的理论思想为基础，并对 $\mathscr{A}$中的每条规则执行交换操作：将规则的结论与一个前提交换，并对二者分别取否定。本文将说明，在 $\mathscr{A}$ 中加入所有此类交换规则后，便可得到适用于 $\mathbf{All}^{\pm}\langle\mathcal{C}\rangle$的可靠且完备的推理系统。

6.1 上下文 本节中，除非另有明确说明，$\mathscr{A}$ 均视为针对 $\mathcal{C}$ 的可靠但不一定完备的推理系统。请注意，5.1 节中引入的上下文仍然适用。

与上一节一样，对一般情形不感兴趣的读者可以将 $\mathcal{C}$ 固定为 $\mathrm{BinConstr}^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$。

虽然以下结果显而易见，但仍将其正式记录下来，因为它建立了第 5 节的结果与本节所发展的证明系统类型之间的关键连接。

6.2 命题——Armstrong设定下的可满足推理 设 Φ 是 $\mathcal{C}$ 的可满足子集，且 $\beta \in \mathcal{C}$ 也可满足。此外，假设 $\mathscr{A}$ 完备。

(a) $\Phi \models \beta$ 成立，当且仅当 $\mathrm{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \vdash_{\mathscr{A}} \beta$。

(b) $\Phi \models \neg\beta$ 成立，当且仅当 $\mathrm{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\beta\} \vdash_{\mathscr{A}}$ 为假，或者存在一个 $\neg\varphi \in \mathrm{Only}^{-}\langle\Phi\rangle$，使得 $\mathrm{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\beta\} \vdash_{\mathscr{A}} \varphi$。

Proof: 该证明由 5.11 以及 $\mathscr{A}$ 对 $\mathcal{C}$ 可靠且完备这一事实立即得出。 □

6.3 交换与交换闭包 设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathcal{C}$ 的一个推理系统。若规则 $r \in \mathrm{InfRules}\langle\mathscr{A}\rangle$ 满足 $\mathrm{Antecedents}\langle r\rangle \neq \emptyset$，则称其具有非空前件集。

令 $r \in \mathrm{InfRules}\langle\mathscr{A}\rangle$ 具有非空前件集 $\mathrm{Antecedents}\langle r\rangle = \{\alpha_i \mid i \in [1,k]\}$和后件 $\mathrm{Consequent}\langle r\rangle = \{\beta\}$。 α_i-交换操作 r记作 $\mathrm{Swap}\langle r{:}\alpha_i\rangle$，其规则为：将 α_i 替换为 $\neg\beta$ 作为前件，并将 β 替换为 $\neg\alpha_i$ 作为后件。从视觉上看，该变换为

$$\frac{\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_{i-1}\ \alpha_i\ \alpha_{i+1}\ \ldots\ \alpha_{k-1}\ \alpha_k}{\beta} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_{i-1}\quad \neg\beta\ \alpha_{i+1}\ \ldots\ \alpha_{k-1}\ \alpha_k}{\neg\alpha_i} \tag{6.3-1}$$

如果 β 不可满足；即 $\beta \equiv$为假，则 $\neg\beta$ 将直接从前提中省略。在这种情况下，该变换为

$$\frac{\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_{i-1}\ \alpha_i\ \alpha_{i+1}\ \ldots\ \alpha_{k-1}\ \alpha_k}{\mathbf{false}} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_{i-1}\quad \alpha_{i+1}\quad \ldots\ \alpha_{k-1}\ \alpha_k}{\neg\alpha_i} \tag{6.3-2}$$

将 $\mathscr{A}$ 的交换闭包 $\mathrm{SwapCl}\langle\mathscr{A}\rangle$ 定义为 $\mathrm{All}^{\pm}\langle\mathcal{C}\rangle$ 上的推理系统，其由 $\mathrm{InfRules}\langle\mathrm{SwapCl}\langle\mathscr{A}\rangle\rangle = \mathrm{InfRules}\langle\mathscr{A}\rangle \cup$给出

$\{\mathrm{Swap}\langle r{:}\alpha\rangle \mid r \in \mathrm{InfRules}\langle\mathscr{A}\rangle$ 以及 $\mathrm{Antecedents}\langle r\rangle \neq \emptyset$ 和 $\alpha \in \mathrm{Antecedents}\langle r\rangle\}$。

6.4 命题——交换操作的可靠性

（a）如果 r 是 $\mathscr{A}$ 的可靠且极小推理规则，那么 $\mathrm{Swap}\langle r{:}\alpha_i\rangle$ 是 $\mathrm{All}^{\pm}\langle\mathcal{C}\rangle$ 上可靠且极小的推理规则。

（b）如果 $\mathscr{A}$ 的每条规则都是可靠且极小的，那么 $\mathrm{SwapCl}\langle\mathscr{A}\rangle$ 也是可靠的。

Proof: (a) 的证明可直接由 5.8 得出。(b) 的证明则可立即由交换闭包的定义得出。 □

6.5 BinInfPos 的交换闭包$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 将 6.3(b) 的构造应用于 BinInfPos 的规则后，可得到一个新的推理系统，记作 BinInf$\langle\mathfrak{G}\rangle$。其规则定义如下：

推理规则$\langle$BinInf$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$ = 推理规则$\langle$SwapCl$\langle$BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle\rangle$

= {(I2)、(M1)、(I1)、(T1)、(T2)、(T3)、(U1)、(I2-sa)、(I2-sb)、(M2-sa)、(M2-sb)、(U1-s)}以及五条在推理规则$\langle$BinInfPos$\langle\rangle\rangle$ 中未出现的附加规则，如图 6.1 所示；每条规则右侧展示了通过交换操作得到该规则的方式。请注意，规则 (I1) 和 (T1)–(T3) 未进行交换，因为它们的前件集均为空。

$$\text{(I2-sa)}\ \frac{(\mathfrak{g}_1 \sqsubseteq \mathfrak{g}_2)\ \ (\mathfrak{g}_1 \not\sqsubseteq \mathfrak{g}_3)}{(\mathfrak{g}_2 \not\sqsubseteq \mathfrak{g}_3)} \qquad (\mathsf{Swap}\langle(\mathrm{I2}){:}(\mathfrak{g}_2 \sqsubseteq \mathfrak{g}_3)\rangle)$$

$$\text{(I2-sb)}\ \frac{(\mathfrak{g}_1 \not\sqsubseteq \mathfrak{g}_3)\ \ (\mathfrak{g}_2 \sqsubseteq \mathfrak{g}_3)}{(\mathfrak{g}_1 \not\sqsubseteq \mathfrak{g}_2)} \qquad (\mathsf{Swap}\langle(\mathrm{I2}){:}(\mathfrak{g}_1 \sqsubseteq \mathfrak{g}_2)\rangle)$$

$$\text{(M1-sa)}\ \frac{(\mathfrak{g}_1 \sqsubseteq \mathfrak{g}_1')\ \ (\bigsqcap\{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2\} \neq \bot)}{(\bigsqcap\{\mathfrak{g}_1', \mathfrak{g}_2'\} \neq \bot)} \qquad (\mathsf{Swap}\langle(\mathrm{M1}){:}(\bigsqcap\{\mathfrak{g}_1', \mathfrak{g}_2'\} = \bot)\rangle)$$

$$\text{(M1-sb)}\ \frac{(\bigsqcap\{\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2\} \neq \bot)\ \ (\bigsqcap\{\mathfrak{g}_1', \mathfrak{g}_2\} = \bot)}{(\mathfrak{g}_1 \not\sqsubseteq \mathfrak{g}_1')} \qquad (\mathsf{Swap}\langle(\mathrm{M1}){:}(\mathfrak{g}_1 \sqsubseteq \mathfrak{g}_1')\rangle)$$

$$\text{(U1-s)}\ \frac{}{(\bigsqcap\{\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}\} \neq \bot)\ \langle\mathsf{I}(\mathfrak{g}\neq\bot)\rangle} \qquad (\mathsf{Swap}\langle(\mathrm{U1}){:}(\bigsqcap\{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\} = \bot)\rangle$$

图 6.1：BinInfPos 的交换规则$\langle\mathfrak{G}\rangle$

目标是　　证明 BinInf$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 既可靠又完备。第一部分很容易　　y.

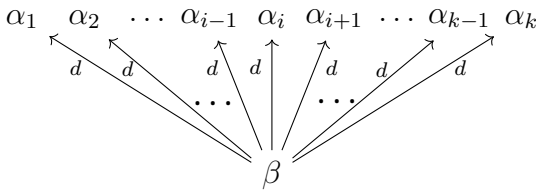
6.6 命题 — BinInf$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的可靠性推理系统 BinInf$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 是可靠的。Proof: 证明可由 6.4 直接得出。 □

6.7 转换为仅正向证明 设定与 6.2(b) 中相同，并假设 $\Phi \models \neg\beta$。当然，无法使用 $\mathscr{A}$ 对此进行证明，因为该证明系统不将 Not$\langle\mathcal{C}\rangle$ 的成员纳入规则的前件或后件。然而，利用 6.2(b) 以及 $\mathscr{A}$ 的完备性，必然有 Only$^+\langle\Phi\rangle \cup \{\beta\} \vdash_{\mathscr{A}}$ 假，或者对于某个 $\neg\varphi \in$ Only$^-\langle\Phi\rangle$ 而言，Only$^+\langle\Phi\rangle \cup \{\beta\} \vdash_{\mathscr{A}} \varphi$。其思路是：根据具体情况，对 Only$^+\langle\Phi\rangle \cup \{\beta\} \vdash_{\mathscr{A}}$ 假 或 Only$^+\langle\Phi\rangle \cup \{\beta\} \vdash_{\mathscr{A}} \varphi$ 在 $\mathscr{A}$ 中取一个证明，并通过对原证明中的某些规则进行逆否推理，将其转换为一个证明 $\Phi \vdash_{\mathsf{SwapCl}\langle\mathscr{A}\rangle} \beta$，具体过程如下文

将在 6.13 中详细说明。为此，首先有必要介绍一种证明树的替代表示方式，即使用以顶点-边格式表示的树。

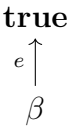
6.8 推理规则的树结构 其中前提通过一条水平线与结论分隔开的证明规则记号，在逻辑学中已近乎成为一种标准。它隐含地表示了一种树结构。然而，为了将逆否推理的过程形式化，最好将这一树结构明确表示出来，如（6.8-1）和（6.8-2）所示。

$$\frac{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_{i-1} \ \alpha_i \ \alpha_{i+1} \ \ldots \ \alpha_{k-1} \ \alpha_k}{\beta} \ d \quad \equiv$$



(6.8-1)

$$\frac{}{\beta} \ e \quad \equiv$$



(6.8-2)

每个前件以及后件都是一个顶点。后件是树的根节点，从该根节点分别向每个前件连接一条有向边，如（6.8-1）所示。如果前件集为空，则添加一个名为 true 的人工前件顶点，如（6.8-2）所示。形式上，每条边都标有该规则的实例名称。不过，如果实例名称可根据上下文明确确定，也可以省略这些标签。

6.9 顶点-边格式的证明树 证明树以顶点-边格式表示，具体方式很直观：将各棵树连接起来即可。图6.2展示了(3.9-3)和(3.9-4)的证明所对应的证明树。

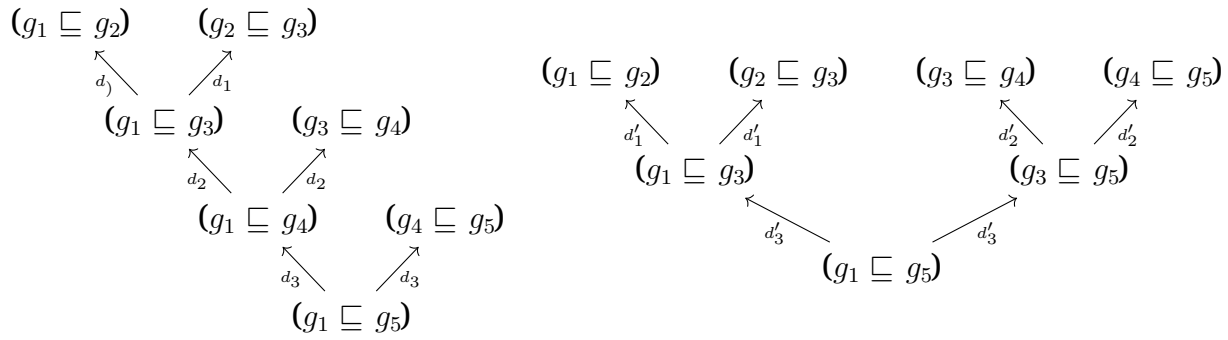


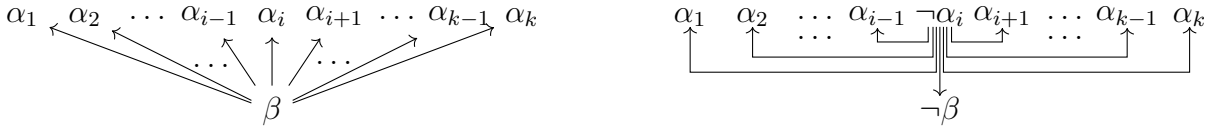
图 6.2：(3.9-3) 和 (3.9-4) 的顶点-边表示

6.10 顶点-边格式的交换推理规则 给定推理规则 r，Swap$\langle r{:}\alpha_i\rangle$ 的表示原则上很直接，如(6.10-1)所示。只需将标记为 α_i 的顶点与结论β的身份互换，并分别对二者取反。边保持不变；因此，这种表示称为固定边定位。



(6.10-1)

虽然这对于孤立的推理规则而言效果不错，但当这类规则相互连接形成证明时，就会产生问题，因为必须移动顶点，从而造成表示上的迷宫。更合适的做法是保持顶点的位置固定，并根据需要移动边。固定顶点定位如式 (6.10-2) 所示。



(6.10-2)

尽管顶点 α_i 和 β 已被否定，但它们仍保留原来的位置。另一方面，边则必须重新绘制。除了将原本从 β指向 α_i的箭头反向之外，针对 $j \neq i$ 的每条从 β 指向 α_j 的边也都替换为一条从 α_i 指向 α_j的边。

6.11 规则实例的交换操作 6.3 中引入的交换操作概念自然地扩展到规则实例。具体而言，如果 d 是通过代换 s 获得的规则 r 的一个实例（见 3.5 和 3.9 ），那么对于 $\alpha_i \in$ 前件$\langle r\rangle$，Swap$\langle d{:}$Subst$\langle\alpha_i, s\rangle\rangle$ 是通过将 s 应用于 Swap$\langle r{:}\alpha_i\rangle$ 的所有条目而获得的规则实例。

6.12 多重使用上下文中的证明树 为了描述证明逆否变换的过程（见 6.13），有必要采用一种能够明确无误地标识证明树顶点的方法。对于单次使用证明而言，这是一项简单的任务，因为与该顶点关联的良构公式可以唯一地标识它。然而，如果证明不是单次使用的，则可能有多个顶点标记有相同的良构公式。在这种情况下，解决方法是将非根顶点标识为一对 $\langle\alpha, d\rangle$ ，其中 α 是良构公式，而 d 是具有 $\alpha \in$ 前件$\langle d\rangle$ 的规则。根顶点则以特殊方式标识为 $\langle\beta$、根$\rangle$。作为一个具体示例，考虑 (3.11-1) 的证明树，如图 6.3 所示。有两个顶点标记为 $(g_1 \sqsubseteq g_2)$；其中一个是规则 d_1 的叶节点和前件，另一个是规则 d_3 的内部顶点和前件。它们分别表示为 $\langle(g_1 \sqsubseteq g_2)\ d_1\rangle$ 和 $\langle(g_1 \sqsubseteq g_2)\ d_3\rangle$。请注意，根顶点表示为 $\langle(g_1 \sqsubseteq g_4)$、根$\rangle$。

给定一棵证明树 τ，将使用诸如 $\langle\alpha$、$d\rangle \in$前件$\langle\tau\rangle$ 之类的记号，其含义显而易见——即 $\alpha \in$ 前件$\langle\tau\rangle$。

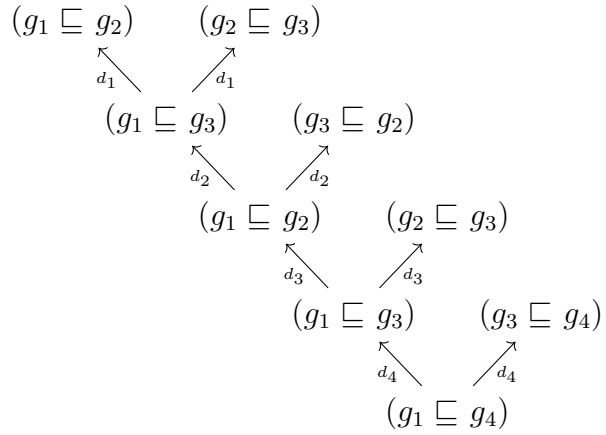


图6.3：(3.11-1) 的顶点-边表示

应当注意，这一约定假设单个规则实例不会包含同一前件的多个实例。在大多数情况下，这是一个合理的假设。若要处理同一前件的多个实例，就必须使用具有有序顶点的树，并根据这些实例的顺序为其标记索引。具体细节很直接，但本文不会采用这种做法，因为这会使论述复杂得多。

6.13 证明逆否变换 图 6.4、图 6.5 和图 6.6 说明了证明逆否变换的策略，其中规则交换操作应用于整个证明树。图 6.4 展示了一棵源树，将其称为 τ，采用顶点-边格式。它是一棵使用以下规则的任意证明树
$\mathscr{A}$；不假设任何特殊性质。形式为 T_{ij} 的每个条目都表示整个证明树中的一个子树，该子树在变换过程中保持不变。树中最重要的顶点是 $\langle \alpha_{1j_1},\ d_1 \rangle$，称为 （指定的）交换叶，属于 τ。它是将与后件 β 交换以获得 $\neg\alpha_{1j_1}$ 的证明的前件，该证明来自（前件 $\langle\tau\rangle \setminus \{\alpha_{1j_1}\}$） $\cup \{\neg\beta\}$。该 交换路径 为

$\langle\langle\alpha_{1j_1}, d_1\rangle, \langle\alpha_{2j_2}, d_2\rangle,$ ....., $\langle\alpha_{ij_i},\ ^{d_i}\rangle,$ ....., $\langle\alpha_{(k-1)}{}^{j_{k-1}}$、 $d_{i-1}\rangle$、 $\langle\alpha_{kj_k}$、 $d_k\rangle$、 $\langle\beta$、根$\rangle\rangle$、
从交换叶到根节点的（唯一）路径。该序列的成员恰好是其断言将在逆否证明中被否定的顶点。在图 6.4 中，这条路径正好沿图的中间向下延伸。对于 $i \in [1, k-1]$，后件 $\langle d_i\rangle$ $=\alpha_{(i+1)j_{i+1}} \in$ 前件$\langle d_{i+1}\rangle$，其后件为 $\langle d_k\rangle = \beta$。

在结果中，称为逆否变换树，交换规则序列中的每个规则实例 d_i 都会被 Swap$\langle d_i$: $\alpha_{ij_i}\rangle$ 替换。图 6.5 展示了这棵树，采用了 6.10 节所述的固定顶点定位。为使记号简洁，图 6.5 将此替换规则标记为 d_i'。请注意，遵循了 6.10 节所述的更改。具体而言，在从 d_i 到 d_i'的转换中，前件 α_{ij_i} 和后件 $\alpha_{(i+1)j_{i+1}}$ （β 对于 d_k）被否定，并且连接它们的箭头方向反转。此外， d_i 的所有箭头的起点都在 d_i'中从原处改为 $\neg\alpha_{ij_i}$。

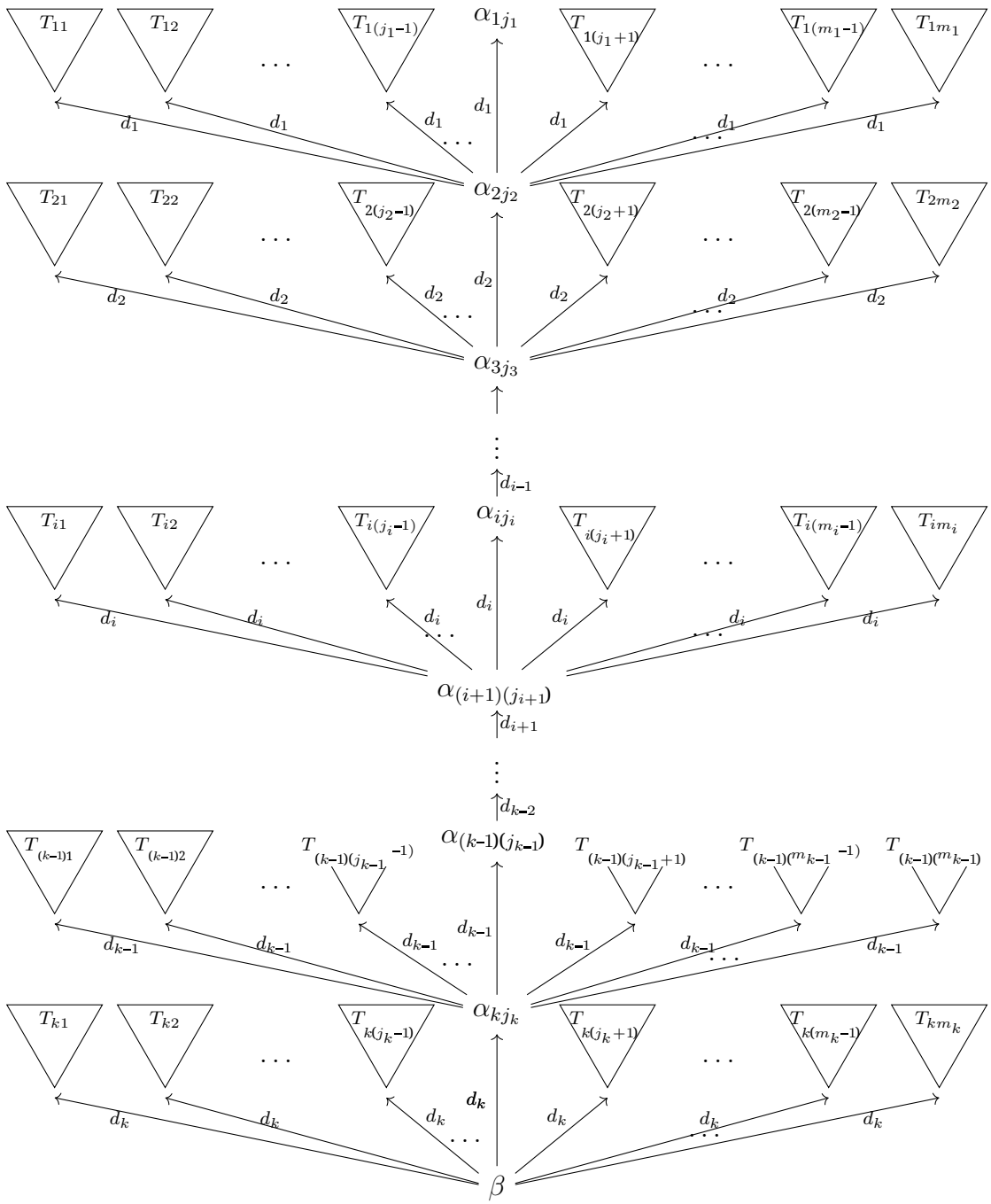


图 6.4：将进行逆否推理的源证明

图 6.6 以固定边格式展示了同一棵逆否变换树。虽然结果看起来可能更美观，但请注意，其排列顺序发生了显著变化——翻转树中的交换规则顺序与源树中的顺序相反，因为交换操作将规则的一个前件与

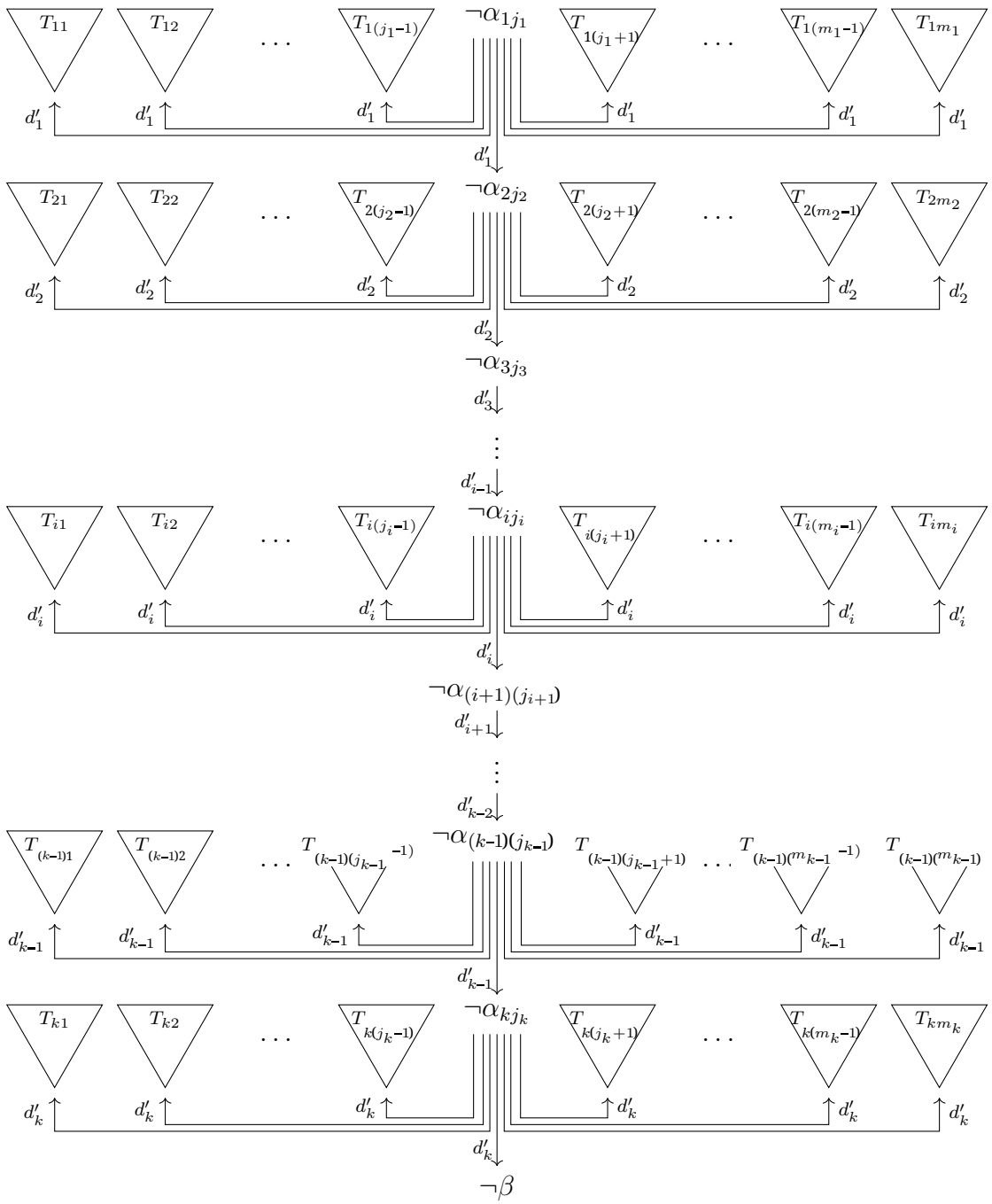


图 6.5：固定位置格式下的逆否证明

后件（然后两者都取补集）。因此，尽管固定边定位可能会生成一棵看起来更自然的树，但固定顶点定位能以更易理解的方式展现源树与其逆否对应对象之间的关系。

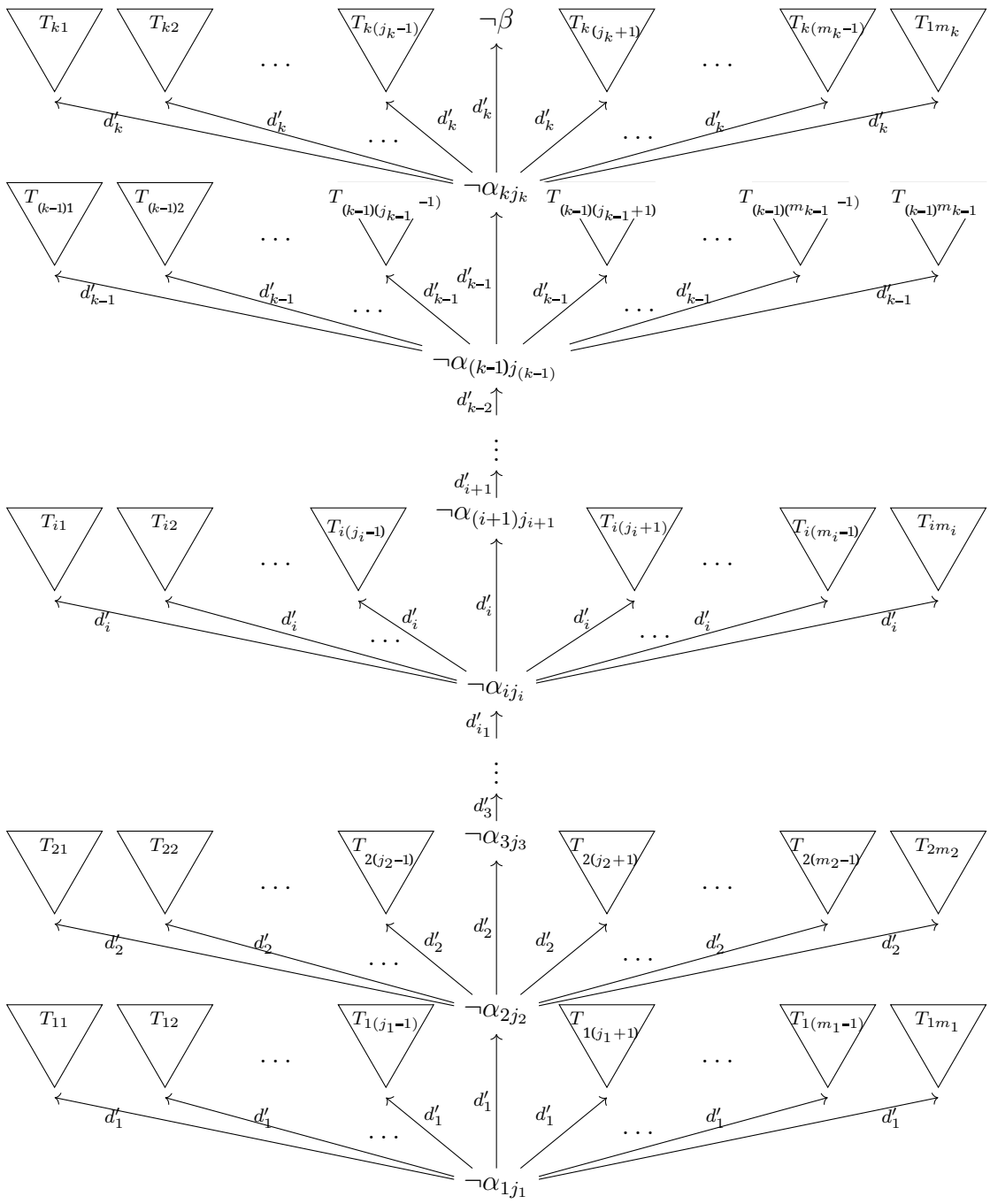


图 6.6：层次格式的逆否证明

树 τ 的逆否推理记作 Contraposn$\langle\tau{:}\langle\alpha_{1j_i}, d_1\rangle\rangle$。交换叶决定了整条交换路径。

关于逆否推理的示例，读者可参见 6.20 和 6.21。当前要讨论的是建立与逆否推理相关的关键完备性结果。

6.14 引理——逆否推理保持证明 若 τ 是一个在 $\mathscr{A}$ 上、具有$\langle\alpha$和 $d\rangle \in$前件$\langle\tau\rangle$的证明树，则 Contraposn$\langle\tau{:}\langle\alpha, d\rangle\rangle$是在证明系统 SwapCl$\langle\mathscr{A}\rangle$中，从 (前件$\langle\tau\rangle \setminus\{\alpha\}) \cup \{\neg$后件$\langle\tau\rangle\}$ 得出 $\neg\alpha$的证明。

Proof: 结论可直接由 6.13 中给出的构造推出。容易验证，Contraposn$\langle\tau{:}\langle\alpha, d\rangle\rangle$ 是由 SwapCl$\langle\mathscr{A}\rangle$ 的规则构造的证明树，且具有所需的前件和后件。 □

6.15 定理 — Armstrong 推理系统的可满足完备性 若 $\mathscr{A}$ 可靠、完备且为单次使用，则 SwapCl$\langle\mathscr{A}\rangle$ 也可靠、可满足完备且为单次使用。

Proof: SwapCl$\langle\mathscr{A}\rangle$ 的一致性可由 6.4(b) 得出。为证明可满足完备性，假设 $\mathscr{A}$完备，且令 $\Phi \subseteq$ All$^{\pm}\langle\mathcal{C}\rangle$ 可满足，并令 $\psi \in \mathcal{C}$。需要考虑两种情况： $\Phi \models \psi$ 和 $\Phi \models \neg\psi$。

对于第一种情况 $\Phi \models \psi$，只需调用 6.2(a)，该结果保证 Only$^{+}\langle\Phi\rangle \vdash_{\mathscr{A}} \psi$，因此 $\Phi \vdash_{\mathscr{A}} \psi$ 也显然成立。

对于第二种情况，若 $\Phi \models \neg\psi$，则根据 6.2(b)，要么 Only$^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\psi\} \vdash_{\mathscr{A}}$为假，要么存在唯一的 $\neg\varphi \in$ Only$^{-}\langle\Phi\rangle$ ，使得 Only$^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\psi\} \models \varphi$。对于第一种子情况，Only $^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\psi\} \vdash_{\mathscr{A}}$为假，令 τ 为 $\mathscr{A}$ 中的证明树，其构造仿照图 6.4，其中 $\alpha_{1j_1} = \psi$ 和 $\beta =$ 为假。对于第二种子情况，若对某个 $\neg\varphi \in$ 有 Only$^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\psi\} \models \varphi$ Only$^{-}\langle\Phi\rangle$，令 τ 为 $\mathscr{A}$ 中的证明树，其构造仿照图 6.4，其中 $\alpha_{1j_1} = \psi$ 和 $\beta = \varphi$。在任一种子情况下， $\mathscr{A}$ 的完备性都保证了这样的树存在。若 ψ 被用作前件多次，则任选一个出现位置。（稍后将证明，这种多次出现是不可能的。）

现在，考虑树 $\tau' =$逆否变换$\langle\tau{:}\langle\psi, d_1\rangle\rangle$，其中 d_1这条规则以 $\psi = \alpha_{1j_1}$为前件，如图 6.4 所示。在上文确定的两个子情形中，逆否变换树 τ'都将以 $\neg\psi$ 为结论。在第一种情形中， $\neg\beta = \neg$假、 $=$真，因此只需从 τ'的前件中省略 $\neg\beta$。在第二种情形中， $\neg\beta = \neg\varphi$，这正是必须添加为整个证明的前件的唯一一个否定句。原树 τ中不可能多次出现 ψ。如果确实如此，所得的树将展示一个证明：从一组包含 ψ的前提推出 $\neg\psi$。由于所有规则都是可靠的，这是不可能的。

由此可知，Contraposn$\langle\tau{:}\langle\psi, d_1\rangle\rangle$ 是一个在 SwapCl$\langle\mathscr{A}\rangle$中从 Φ 证明 ψ 的证明，因此后者是可满足完备的。单次使用性质可由上一段的论证推出。 □

为获得一个即使对于 All$^{\pm}\langle\mathcal{C}\rangle$ 的不可满足公式也完备的系统，引入了互补对规则的概念。

6.16 互补对规则 互补对规则断言，一个良构公式及其否定不可能同时为真。此类规则的通用形式如（6.16-1）所示。

$$\frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\mathbf{false}} \tag{6.16-1}$$

$\mathcal{C}$ 的互补对集合记为 CompPrSet$\langle\mathcal{C}\rangle$，其中对于每个 $\alpha \in \mathcal{C}$，都包含一个形式如（6.16-1）所示的互补对规则。如果 $\mathscr{A}$ 的规则使用变量以通用形式表示，则只需添加能够实例化为所有互补对规则的规则。对于主要示例 BinConstr$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$，CompPrSet$\langle$BinConstr$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$ 由图 6.7 所示的两条规则给出。

$$\text{(C1)}\ \frac{(g_1 \sqsubseteq g_2)\ (g_1 \not\sqsupseteq g_2)}{\text{假}} \qquad \text{(C2)}\ \frac{(\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot)\ (\bigsqcap\{g_1, g_2\} \neq \bot)}{\text{假}}$$

图 6.7：二元约束$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$的互补对规则

$\mathscr{A}$ 的完全交换闭包记为 FullSwapCl$\langle\mathscr{A}\rangle$，它是 SwapCl$\langle A\rangle \cup$CompPrSet$\langle\mathcal{C}\rangle$。因此，FullSwapCl$\langle$BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$ = SwapCl$\langle$BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle \cup$CompPrSet$\langle$BinConstr$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle\rangle$ ={(I2)、(M1)、(I1)、(T1)、(T2)、(T3)、(U1, (I2-sa), (I2-sb), (M1-sa), (M1-sb), (U1-s), (C1)、(C2)}。

这一术语的依据在于，互补对规则可视为恒等规则的交换，如（6.16-2）所示。中间的推理规则与最左侧的规则等价，只是增加了一个真前提；而最右侧的规则则是将前件“真”与后件 α 交换后得到的。

$$\frac{\alpha}{\alpha} \quad \equiv \quad \frac{\alpha \quad \mathbf{true}}{\alpha} \quad \overset{\text{swap}}{\rightsquigarrow} \quad \frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\mathbf{false}} \tag{6.16-2}$$

因此，若将恒等规则（如（6.16-2）中最左侧的规则）加入 $\mathscr{A}$，那么互补对规则就会包含在交换闭包中。

6.17 引理——All$^{\pm}\langle\mathcal{C}\rangle$ 中不可满足性的刻画设 $\Phi \subseteq$All$^{\pm}\langle\mathcal{C}\rangle$。若$\Phi$ 不可满足，则要么 Only$^{+}\langle\Phi\rangle$ 不可满足，要么存在一个 $\neg\varphi \in$Only$^{-}\langle\Phi\rangle$，使得 Only$^{+}\langle\Phi\rangle \models \varphi$。

Proof: 若 Only$^{+}\langle\Phi\rangle$ 不可满足，则应用 5.11(b)，令 $\beta \equiv$为真（因此 $\neg\beta \equiv$为假），可得要么 Only$^{+}\langle\Phi\rangle \models$ 为假；也就是说，Only$^{+}\langle\Phi\rangle$ 不可满足；要么存在一个$\neg\varphi \in$Only$^{-}\langle\Phi\rangle$，使得 Only$^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\neg\varphi\} \models$ 为假；也就是说，Only$^{+}\langle\Phi\rangle \cup \{\neg\varphi\}$不可满足。由此，根据 5.8(a′) 可得 Only$^{+}\langle\Phi\rangle \models \varphi$，证毕。 □

6.18 定理 — FullSwapCl 的完备性$\langle\mathscr{A}\rangle$ 如果 $\mathscr{A}$ 完备，那么证明系统 FullSwapCl$\langle\mathscr{A}\rangle$ 既可靠又完备。

Proof: 假设 $\mathscr{A}$ 完备。根据 6.15，FullSwapCl$\langle\mathscr{A}\rangle$的可靠性和可满足完备性随之成立。事实上，CompPrSet$\langle\mathscr{A}\rangle$ 的规则显然可靠，将它们添加到 SwapCl$\langle\mathscr{A}\rangle$ 中不会影响可满足完备性。

为说明完备性可扩展到不可满足推理，设 $\Phi \subseteq$All$^{\pm}\langle\mathcal{C}\rangle$ 不可满足。若 Only$^{+}\langle\Phi\rangle$ 不可满足，则仅使用 $\mathscr{A}$ 的规则即可证明这一点，因为假定其是完备的。显然，证明 Only$^{+}\langle\Phi\rangle$ 不可满足的证明也是证明 Φ 中所有内容均不可满足的证明。

若 $\mathsf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle$ 可满足，则根据 6.17，存在一个具有以下性质的 $\neg\varphi \in \mathsf{Only}^{-}\langle\Phi\rangle$：$\mathsf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle \models \varphi$。证明 Φ 不可满足的证明树如（6.18-1）所示。

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\ \vdots\\ \text{proof using } \mathscr{A}\\ \vdots\\ \varphi \qquad\qquad \neg\varphi\end{array}}{\textbf{false}} \tag{6.18-1}$$

在该证明中，Σ 是 $\mathsf{Only}^{+}\langle\Phi\rangle$ 的一个最小子集，对于该子集，$\Sigma \models \varphi$。$\mathscr{A}$ 是完备的这一事实保证了相应证明的存在。因此，可以证明 $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ 不可满足，从而 Φ 也具有这一性质。□

最后，本节提供两个示例，用于说明通过逆否推理进行证明的过程。

6.19 推论——$\mathsf{BinInf}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 的完备性 推理系统 $\mathsf{BinInf}\langle\mathfrak{G}\rangle$ 是可靠且完备的。

Proof: So可靠性由 6.6 得出，而完备性则由 4.31 和 6.18 □ 得出

6.20 示例——涉及逆否推理的推理 在本示例中，将给出一个涉及逆否推理的证明。设 $\mathfrak{G}_{6.20}$ 是一个 SMAS，其中包含 $\{g_i \mid i \in [1,6]\} \subseteq$粒$\langle\mathfrak{G}_{6.20}\rangle$ 以及

$\{(g_1 \sqsubseteq_{\mathfrak{S}} g_2)$、$(g_2 \sqsubseteq_{\mathfrak{S}} g_3)$、$(g_4 \sqsubseteq_{\mathfrak{S}} g_5)$、$(g_5 \sqsubseteq_{\mathfrak{S}} g_6)$、$(g_1 \not\sqsubseteq_{\mathfrak{S}} g_6)\} \subseteq$二元约束$^{\pm}\langle\mathfrak{G}_{6.20}\rangle$。

将利用 $\mathsf{BinInf}\langle\mathfrak{G}_{6.20}\rangle$的证明规则证明二元约束$^{\pm}\langle\mathfrak{G}_{6.20}\rangle \models (g_3 \not\sqsubseteq_{\mathfrak{S}} g_4)$。第一步，需要确定将进行逆否推理的正断言的证明。利用 5.8(a) 以及 $\Phi \leftarrow$ 二元约束$^{\pm}\langle\mathfrak{G}_{6.20}\rangle \setminus \{(g_1 \not\sqsubseteq g_6)\}$、$\varphi \leftarrow (g_3 \sqsubseteq g_4)$ 和 $\psi \leftarrow (g_1 \sqsubseteq g_6)$，只需证明

$$(\mathsf{BinConstr}^{\pm}\langle\mathfrak{G}_{6.20}\rangle \setminus \{(g_1 \not\sqsubseteq_{\mathfrak{S}} g_6)\}) \cup \{(g_3 \sqsubseteq g_4)\} \models (g_1 \sqsubseteq g_6).$$

用于说明证明过程的各种树如图所示。图顶端的第一棵树表示以下命题的证明：

$$(\mathsf{BinConstr}^{\pm}\langle\mathfrak{G}_{6.20}\rangle \setminus \{(g_1 \not\sqsubseteq_{\mathfrak{S}} g_6)\}) \cup \{(g_3 \sqsubseteq g_4)\} \models (g_1 \sqsubseteq g_6)$$

采用标准证明树格式。向左移动，此时我们得到同一棵树的顶点—边格式，其中交换路径用双线箭头突出显示。对于本示例，这棵树是图 6.4 中通用树的实例。其右侧是采用固定顶点定位对这棵树进行的逆否推理，对应于图 6.5 中的通用树。交换路径再次用双线箭头突出显示，而源顶点因这一变换而发生改变的边则用虚线表示。其正下方是采用固定边定位的同一棵树，对应于图 6.6；图的底部则是采用标准推理格式表示的同一证明结果。在所有情况下，所用的证明规则都未明确标出，但很容易确定。

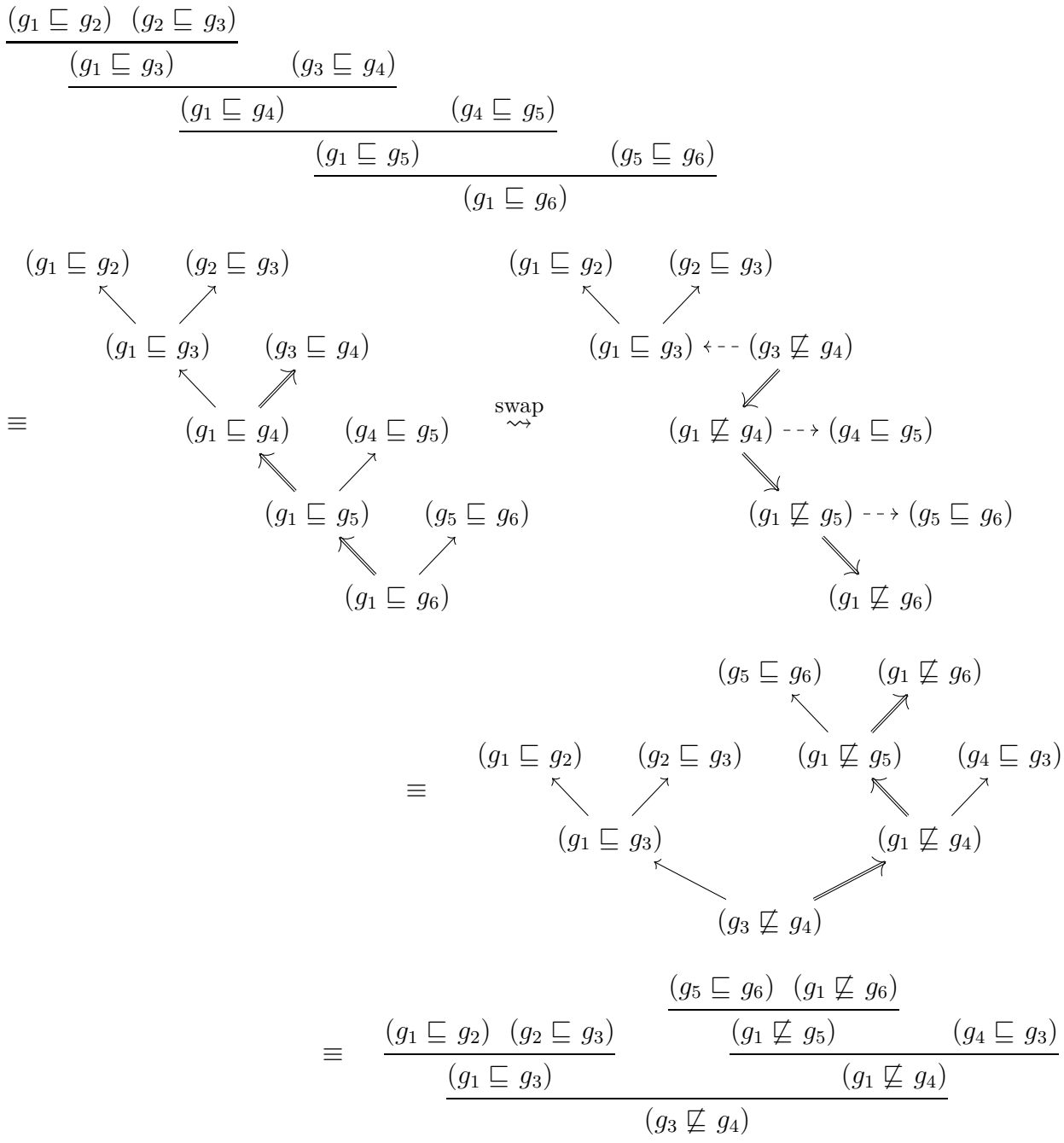
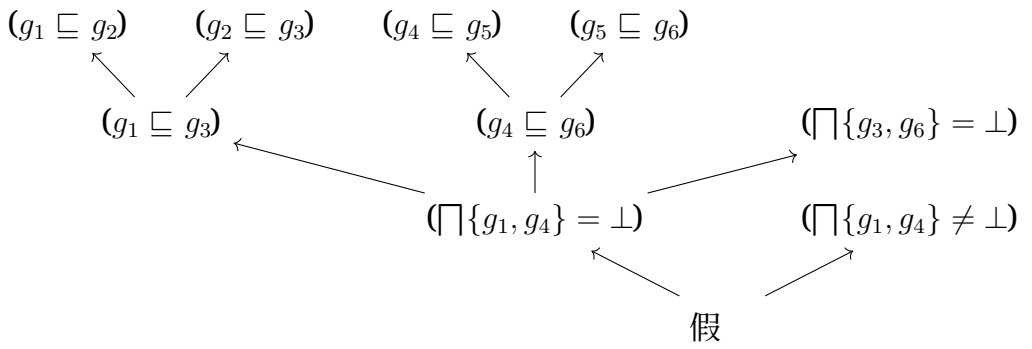


图 6.8：6.20 的证明树

6.21 示例——使用互补对规则进行推理在本示例中，将构建一个涉及使用互补对规则的不可满足性证明。设 $\mathfrak{G}_{6.21}$为一个具有 $\{g_i \mid i \in [1,6]\} \subseteq$ 粒$\langle\mathfrak{G}_{6.21}\rangle$ 的 SMAS，并且 $\{(g_1 \sqsubseteq_{\mathfrak{S}} g_2)$、$(g_2 \sqsubseteq_{\mathfrak{S}} g_3)$、$(g_4 \sqsubseteq_{\mathfrak{S}} g_5)$、$(g_5 \sqsubseteq_{\mathfrak{S}} g_6)$、$(\bigsqcap_{\mathfrak{S}}\{g_3, g_6\} = \bot_{\mathfrak{S}})$、$(\bigsqcap_{\mathfrak{S}}\{g_1, g_4\} \neq \bot_{\mathfrak{S}})\}\subseteq$ 二元约束$^{\pm}\langle\mathfrak{G}_{6.21}\rangle$。我们将使用 BinInf$\langle\mathfrak{G}_{6.20}\rangle$ 的证明规则证明二元约束$^{\pm}\langle\mathfrak{G}_{6.21}\rangle$ 不可满足。

策略很简单。首先，构建一个二元约束$^{+}\langle\mathfrak{G}_{6.21}\rangle \setminus \{(\bigsqcap\{g_1, g_4\} \neq \bot)\} \models$的证明。



$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(g_1 \sqsubseteq g_2)\ (g_2 \sqsubseteq g_3)}{(g_1 \sqsubseteq g_3)} \qquad \dfrac{(g_4 \sqsubseteq g_5)\ (g_5 \sqsubseteq g_6)}{(g_4 \sqsubseteq g_6)} \qquad (\bigsqcap\{g_3, g_6\} = \bot)}{(\bigsqcap\{g_1, g_4\} = \bot)} \qquad (\bigsqcap\{g_1, g_4\} \neq \bot)}{\text{假}}$$

图 6.9：6.21 的证明树

$(\bigsqcap\{g_1, g_4\} = \bot)$，然后应用互补对规则，该规则指出，这一对中的两个元素 $\{(\bigsqcap\{g_1, g_4\} = \bot)$、$(\bigsqcap\{g_1, g_4\} \neq \bot)\}$ 不能同时为真。图 6.9 展示了相关的证明树，包括顶点-边格式和传统逻辑格式。

6.22 与 RCC5 的关系 给定两个粒 $g_1, g_2 \in$ 粒$\langle\mathfrak{G}\rangle$，三个语句 $(g_1 \sqsubseteq g_2)$、$(g_2 \sqsubseteq g_1)$ 和 $(\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot)$ 的真值共同表示了已知的它们之间的关系。为对此进行形式化，对于 $\varphi \in$ 二元约束$^{+}\langle\mathfrak{G}\rangle$，定义

$$\mathsf{State}_{\mathfrak{G}}\langle\varphi\rangle = \begin{cases} \textbf{true} \text{ if } \mathsf{Constr}(\mathfrak{G}) \models \varphi, \\ \textbf{false} \text{ if } \mathsf{Constr}(\mathfrak{G}) \models \neg\varphi, \\ \textbf{unknown} \text{ otherwise}, \end{cases}$$

然后将 $\langle g_1, g_2\rangle$ 在 $\mathfrak{G}$ 中的状态向量定义为三元组

状态$_{\mathfrak{G}}\langle g_1、\ g_2\rangle$ = $\langle$状态$_{\mathfrak{G}}\langle\ (g_1 \sqsubseteq g_2)\ \rangle$、状态$_{\mathfrak{G}}\langle\ (g_2 \sqsubseteq g_1)\ \rangle$、状态$_{\mathfrak{G}}\langle\ (\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot)\ \rangle\rangle$。如果没有任何条目的值为未知，则称状态$_{\mathfrak{G}}\langle g_1、\ g_2\rangle$ 为完备。

区域连接演算（RCC）及其变体以完备状态向量而非单个谓词为出发点。[RC89], [RCC92], [CBGG97], [LY03], 和 [Ste04] 等论文只是这一领域大量研究中的一小部分。最常研究的变体是 RCC8，其相关状态向量有四个条目，因为区域边界也被纳入模型。若要与本文的工作进行比较，更合适的变体是 RCC5，它关注没有边界的区域，因此状态向量只有三个条目。表 6.1 展示了以下版本的状态向量：

[Ste04 中描述的 RCC5，见表 1]。该版本尤其适合与本文的粒逻辑进行比较，因为它支持空粒子，而 RCC 的大多数变体都不支持这一点。[2]为避免混淆，表 6.1 中描述的 RCC 变体将称为 RCC$5+$。

	$(g_1 \sqsubseteq g_2)$	$(g_2 \sqsubseteq g_1)$	$(\prod\{g_2, g_1\} = \bot)$	对称
不相交$\langle g_1, g_2\rangle$	假	假	**true**	✓
部分重叠$\langle g_1, g_2\rangle$	假	假	假	✓
相等$\langle g_1, g_2\rangle$	**true**	**true**	假	✓
真部分$\langle g_1, g_2\rangle$	**true**	假	假	
真部分$^{-1}\langle g_1, g_2\rangle$	假	**true**	假	
相等$_\emptyset\langle g_1, g_2\rangle$	**true**	**true**	**true**	✓
PP$_\emptyset\langle g_1, g_2\rangle$	**true**	假	**true**	
PP$_\emptyset^{-1}\langle g_1, g_2\rangle$	假	**true**	**true**	

表 6.1：RCC$5+$ 的谓词

所使用的谓词名称是该领域中已经成为标准的名称。DC 表示不相交（即不相交），PO 表示部分重叠，EQ 表示相等，PP 表示真部分，而 PP^{-1} 表示真部分逆。关系 DC、PO 和 EQ 是对称的，因为它们是自身的逆关系。另一方面，PP 不是对称的，因此需要 PP^{-1}。这五种关系构成了普通的 RCC5，只要区域非空，它们就足够适用。然而，它们在空区域上会失效。断言 EQ$\langle\bot_\mathfrak{G}, \bot_\mathfrak{G}\rangle$、PP$\langle\bot_\mathfrak{G}, g_2\rangle$ 和 PP$^{-1}\langle\bot_\mathfrak{G}, g_2\rangle$ 均不成立，后两者对于任何 $g \in$ 粒$_\not\perp\langle\mathfrak{G}\rangle$ 都不成立，这与这些谓词的预期含义相悖。解决办法是引入另外三个关系名称。语句 EQ$\langle g_1, g_2\rangle$、PP$\langle g_1, g_2\rangle$ 和 PP$^{-1}\langle g_1, g_2\rangle$ 涵盖了$g_1 \not=_{\mathrm{id}} \bot_\mathfrak{G}$的情况，而 EQ$_\emptyset\langle g_1, g_2\rangle$、PP$_\emptyset\langle g_1, g_2\rangle$ 和 PP$_\emptyset^{-1}\langle g_1, g_2\rangle$涵盖了 $g_1 =_{\mathrm{id}} \bot_\mathfrak{G}$的情况。

该框架的一个关键特征是，对于任意一对粒 $\langle g_1, g_2\rangle$，$R\langle g_1, g_2\rangle$ 恰好有一个 $R \in \{$DC、PO、EQ、PP、PP^{-1}、EQ$_\emptyset$、PP$_\emptyset$、PP$_\emptyset^{-1}\}$成立。这可以从以下事实看出：每一种可能的状态向量都由其中一个谓词表示。这一性质有时称为 JEPD，即联合互斥且成对不相交。

RCC 中的推理通常通过使用复合表 [LY03]来进行。对于 $R_1, R_2 \in \{$DC、PO、EQ、PP、PP^{-1}、EQ$_\emptyset$、PP$_\emptyset$、PP$_\emptyset^{-1}\}$，此表列出满足 $R_3 \subseteq R_1 \circ R_2$的关系 $R_3 \in\{$DC、PO、EQ、PP、PP^{-1}、EQ$_\emptyset$、PP$_\emptyset$、PP$_\emptyset^{-1}\}$，其中 $\circ$表示普通关系复合。较不正式地说，给定 $R_1\langle g_1, g_2\rangle$ 和 $R_2\langle g_2, g_3\rangle$ 成立时，该表指出 $R_3\langle g_1, g_3\rangle$可能成立的关系。

完整列出 RCC$5+$ 的复合表超出了本讨论的范围。不过，为了将 RCC$5+$ 与本文的框架进行比较，有必要给出一个简单的推理示例。设 $\mathfrak{G}_{6.22}$ 具有粒$_{\not\perp\mathcal{T}}\langle\mathfrak{G}_{6.22}\rangle = \{g_1, g_2, g_3\}$，其中约束 $(\mathfrak{G}) = \{(g_1 \not\sqsubseteq g_2), (g_2 \not\sqsubseteq g_1), (\prod\{g_1, g_2\} \neq \bot), (g_2 \sqsubseteq g_3), (g_3 \not\sqsubseteq g_2), (\prod\{g_2, g_3\} \neq \bot)\}$ ·

[2]在 [Ste04 的表 1]中，第三个状态参数使用的不是（$\prod\{g_1, g_2\} = \bot$），而是（$g_1 \sqsubseteq \overline{g_2}$）这一谓词；后者最好描述为（$\overline{g_2}$），即 g_2的补集。由于互补项不是 SMAS 框架的一部分，因此改用（$\prod\{g_1, g_2\} = \bot$）。很容易验证，两者的结果是相同的。

显然，这些约束恰好对应于 RCC5+ 条件{PO$\langle g_1, g_2\rangle$, PP$\langle g_2, g_3\rangle$}。即使不构造完整的 RCC5+复合表，也很容易看出，PO$\langle g_1, g_3\rangle$ 和 PP$\langle g_1, g_3\rangle$ 是 $\langle g_1, g_3\rangle$ 上关系的唯一可能情况。可以通过查看 RCC8 的复合表来做到这一点，例如 [LY03，表 2]，，并将 TPP 和 NTPP 合并为 PP；也可以直接检查，画一个维恩图。

现在考虑应用 BinInf$\langle \mathfrak{G}_{6.22}\rangle$ 的证明规则。唯一可能的推导如图 6.10 所示。对于 ($g_3 \sqsubseteq g_1$) 和 ($\bigsqcap\{g_1, g_3\} = \bot$) 均为假，真值为

$$\frac{(g_2 \sqsubseteq g_3)\ (g_2 \not\sqsubseteq g_1)}{(g_3 \not\sqsubseteq g_1)} \qquad \frac{(g_2 \sqsubseteq g_3)\ (\bigsqcap\{g_1, g_2\} \neq \bot)}{(\bigsqcap\{g_1, g_3\} \neq \bot)}$$

图 6.10：6.22 的证明

($g_1 \sqsubseteq g_3$) 未知时，查看表 6.1 可知，唯一可能的情况是 PO$\langle g_1, g_3\rangle$和 PP$\langle g_1, g_3\rangle$，这与复合表得出的结果一致。

RCC 是否优于本文的框架，完全取决于待建模知识的类型。如果几乎所有粒之间的关系都是已知的，因此表 6.1 中的八种谓词之一适用于每一对 $\langle g_1, g_2\rangle$，那么 RCC 可能更胜一筹。然而，在信息大量不完备的情况下，RCC 将不堪析取表示的重负，使本文的方法成为更好的选择。

6.23 与反功能依赖的关系 在 [DeB87]和 [PDGV89, 第 5 节.2]，中，提出了一个用于关系数据库依赖关系的框架，其中包括函数依赖（FDs）和反功能依赖（AFDs），并给出了一个可靠且完备的推理系统。由于函数依赖构成了最初的 Armstrong 上下文 [Arm74]，，因此值得探讨这项工作如何融入本文所构建的框架。

反功能依赖并不是函数依赖真正的逻辑否定。关系 R 满足反功能依赖 $X \not\Rightarrow Y$，当且仅当对于每个元组 $t \in R$，都存在另一个元组 $t' \in R$，使得 $t[X] = t'[X]$ 且 $t[Y] \neq t'[Y]$。另一方面，函数依赖 $X \to Y$ 的真正逻辑否定具有这样的性质：对于某个元组 $t \in R$，存在另一个元组 $t' \in R$，使得 $t[X] = t'[X]$ 且 $t[Y] \neq t'[Y]$。因此，尽管反功能依赖很有用，但无法通过将本文的交换方法应用于函数依赖上的约束，来定义函数依赖与反功能依赖的组合推理系统。

6.24 其他上下文 或许应该指出，本节中的技术也可应用于推理系统 QBinInfPos$\langle \mathfrak{G}\rangle$ （见 4.3 ）和 SQBinInfPos$\langle \mathfrak{G}\rangle$ （见 4.7 ），因为很容易证明，它们各自的基础框架（分别由准模型和强准模型构成）都是 Armstrong 上下文。不过，这里不再探讨这一方向，因为目前并不急需这一结果。

7 与其他工作的关系

xxxxx

8 结论与后续方向

本文作出了两项主要贡献。

Single-use proof system for binary granule constraints: 针对粒的包含与析取谓词，已开发出一个可靠且完备的证明系统 BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$。这一成果建立在 [AP88], 的早期工作之上，并加入了关键的新特性，例如对底粒 $\bot_{\mathfrak{G}}$ 和顶粒 $\top_{\mathfrak{G}}$ 建模，以及要求除 $\bot_{\mathfrak{G}}$ 之外的所有粒都具有非空语义。此外，该系统还提供了单次使用证明，这对于扩展到同时涉及这些谓词否定的证明系统是必要的。

Proof system augmentation to negative constraints 我们已开发出一种通用方法，可将任意基于 Armstrong 上下文 $\mathcal{C}$ 的可靠且完备的单次使用推理系统，扩展为一个对 $\mathcal{C}$ 中的断言及其否定均可靠且完备的系统。随后，我们将此方法应用于推理系统 BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ ，从而得到一个在 SMAS 的所有正向和负向二元谓词上均可靠且完备的推理系统 BinInf$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 。

紧接着的进一步方向如下。

Extend to granules with boundary: 在空间建模中，能够处理带边界粒块往往是有利的，甚至是必要的。目前正在开展工作，以将本文的 SMAS 概念扩展到此类粒块。这需要将单个析取谓词（$\bigsqcap\{g_1, g_2\} = \bot$）替换为两个谓词：第一个（$\bigsqcap\{g_1^\circ, g_2^\circ\} = \bot$）用于内部，第二个（$\bigsqcap\{g_1^\partial, g_2^\partial\} = \bot$）用于边界。由此得到的框架可以证明是一个 Armstrong 上下文，具有可靠且完备的单次使用推理系统，并以自然的方式扩展 BinInfPos$\langle\mathfrak{G}\rangle$ 。本文第 6 节的方法同样适用于这一新框架，从而为带边界的二元谓词提供一个同时处理正约束和负约束的推理系统。该框架的建模能力等价于四交模型[EF91]和 RCC8 [Ste04]。

参考文献

[AP86] Paolo Atzeni 和 D. Stott Parker Jr. 基于网的知识表示方案的形式性质。载于《第二届国际数据工程会议论文集》，1986年2月5日至7日，美国加利福尼亚州洛杉矶，第700–706页。IEEE计算机学会，1986年。

[AP88] Paolo Atzeni 和 D. Stott Parker Jr. 基于网的知识表示方案的形式性质。《数据与知识工程》，3:137–147，1988年。[Arm74] William Ward Armstrong. 数据库关系的依赖结构。载于 IFIP 大会，第580–583页，1974年。[BA12] Mordechai Ben-Ari.《计算机科学数理逻辑》。Springer，第三版，2012年。[CBGG97] Anthony G. Cohn、Brandon Bennett、John Gooday 和 Nicholas Mark Gotts. 基于区域连接演算的定性空间表示与推理。GeoInformatica，1(3):275–316，1997年。[DeB87] Paul De Bra. 函数依赖蕴涵与水平分解的诱导。载于 Joachim Biskup、J´anos Demetrovics、Jan Paredaens 和 Bernhard Thalheim 编，《MFDBS 87：第一届数据库系统数学基础研讨会》，德累斯顿，德意志民主共和国，1987年1月19日至23日，论文集，计算机科学讲义第305卷，第80–98页。Springer，1987年。[EF91] Max J. Egenhofer 和 Robert D. Franzosa. 点集拓扑空间关系。《国际地理信息科学杂志》，5(2):161–174，1991年。[End01] Herbert B. Enderton.《数理逻辑导论》。Harcourt，第二版，2001年。[Fag82] Ronald Fagin. Horn 子句与数据库依赖。《计算机协会杂志》，29(4):952–985，1982年。[Gal15] Jean H. Gallier.《计算机科学逻辑》。Dover，第二版，2015年。[Gir95] Jean-Yves Girard. 线性逻辑：语法与语义。载于 Jean-Yves Girard、Yves Lafont 和 Laurent Regnier 编，《线性逻辑进展》，伦敦数学学会讲义丛书第222卷，第1–42页。剑桥大学出版社，1995年。[HR17] Stephen J. Hegner 和 M. Andrea Rodr´ıguez. 多粒度数据及其完整性的模型。Informatica, Lith. Acad. Sci., 28:45–78，2017年。[HR18] Stephen J. Hegner 和 M. Andrea Rodr´ıguez. 多粒度数据中双粒度规则的隐式表示。载于 Sven Hartmann、Hui Ma、Abdelkader Hameurlain、G¨unther Permul 和 Roland R. Wagner 编，《数据库与专家系统应用——第29届国际会议 DEXA 2018》，德国雷根斯堡，2018年9月3日至6日，论文集第一部分，计算机科学讲义第11029卷，第372–389页。Springer，2018年。[LY03] Sanjiang Li 和 Mingsheng Ying. 区域连接演算：其模型与复合表。《人工智能》，145(1-2):121–146，2003年。

[Men97] Elliott Mendelson。《数理逻辑导论》。Chapman and Hall，第四版，1997年。[Mon76] J. Donald Monk。《数理逻辑》。Springer-Verlag，1976年。[PDGV89] Jan Paredaens、Paul De Bra、Marc Gyssens 和 Dirk Van Gucht。《关系数据库模型的结构》。Springer-Verlag，1989年。[RC89] David A. Randell 和 Anthony G. Cohn。在 Ronald J. Brachman、Hector J. Levesque 和 Raymond Reiter（编）所编的《第一届知识表示与推理原理国际会议论文集》（KR'89）中发表了"物理过程中的拓扑和度量性质建模"。多伦多，加拿大，1989年5月15日至18日，第357–368页。Morgan Kaufmann，1989年。[RCC92] David A. Randell、Zhan Cui 和 Anthony G. Cohn。在 Bernhard Nebel、Charles Rich 和 William R. Swartout（编）所编的《第三届知识表示与推理原理国际会议论文集》（KR'92）中发表了"一种基于区域和连接的空间逻辑"。马萨诸塞州剑桥，1992年10月25日至29日，第165–176页。Morgan Kaufmann，1992年。[Ste04] John G. Stell。部分与补集：空间关系中的基本概念。《数学与人工智能年刊》，41(1)：1–17，2004年。