arXiv:2303.15154v1 [math.CO] 27 Mar 2023

斜左 brace 与杨-巴克斯特方程的 2-约化解

PˇREMYSL JEDLI ˇCKA AND AGATA PILITOWSKA

Abstract. 我们研究杨-巴克斯特方程的 2-约化非对合非退化集合论解。我们给出了任意此类解（包括无限大小解）的组合构造。我们还证明，与斜左括号相关的解是 2-约化解，当且仅当该斜左括号是 2 阶幂零的。此外，所有这类斜左 brace 实际上都是双斜左 brace。我们聚焦于这些结构，并给出若干等价性质，用以刻画与双斜左 brace 相关的解。

1. 引言

杨-巴克斯特方程是数学物理中的一个基本方程。例如，它出现在统计力学、量子场论和Hopf代数中的可积模型里（例如参见 [20, 21]）。多年来，研究人员一直致力于寻找它的解。

让我们回顾一下，对于向量空间 V，Yang–Baxter 方程的一个解是一个线性映射r： $V \otimes V \to V \otimes V$，满足

$$(id \otimes r)(r \otimes id)(id \otimes r) = (r \otimes id)(id \otimes r)(r \otimes id).$$

描述所有可能的解似乎极其困难，因此 Drinfeld 在 [11] 中引入了一些简化方法。设 X 是空间 V 的一个基，并设σ： $X^2 \to X$和 τ： $X^2 \to X$ 是两个映射。若映射（X， σ， τ）是 Yang–Baxter 方程的一个集合论解，则称其为

$$x \otimes y \mapsto \sigma(x, y) \otimes \tau(x, y)$$

可延拓为 Yang–Baxter 方程的一个解。这意味着 r： $X^2 \to X^2$，其中 $r =(\sigma, \tau)$ 是一个双射，并满足辫关系：

$$(id \times r)(r \times id)(id \times r) = (r \times id)(id \times r)(r \times id). \tag{1.1}$$

若解（X， r） =（X， σ， τ）是非退化的，则对于所有 x， $y \in X$，映射 $\sigma_x = \sigma$（x， ）和 $\tau_y =\tau$（y）都是双射。若 $r^2 =\mathrm{id}_{X^2}$，则称解为对合的；也就是说，对于每个 x， $y \in X$，τ_y（x）$= \sigma^{-1}_{\sigma_x(y)}$（$x$）和 σ_x（y）$= \tau^{-1}_{\tau_y(x)}$（y）。此外，对于每个$x \in X$，若 r（x， x） =（x， x），则称其为平方自由的。

本文研究的所有解都是集合论解且非退化，我们将其简称为解。尽管研究人员通常只关注有限解，但在本文中，集合X 可以具有任意基数。

在过去十年中，研究人员主要致力于研究对合解，这主要是因为每个对合解都可以嵌入到一个与称为左括号的环状结构相关的解中 [24, 7]。人们特别关注所谓的多置换

Date：2023年3月28日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号：16T25。次要分类号：20B25n。
Key words and phrases. 杨-巴克斯特方程、集合论解、多置换解、幂零性、斜左括号、左分配律、双斜左括号。

解，因为这一性质类似于幂零性，并且与左 brace 的幂零性有关（例如参见 [13, 26]）。

2017年，Guarnieri 和 Vendramin [15] 推广了左 brace 的概念，引入了斜左 brace（定义 4.1 ）。这些结构产生非对合解，我们也可以定义多置换解（定义 2.1 ）。根据 Bachiller [2], 的结果，类似于对合情形，解的多置换性质对应于斜左 brace 的幂零性质（推论4.28）。因此，研究人员可以着手研究非对合多置换解，正如 Vendramin 在 [30, 问题 23]中提出的那样。当然，在非对合情形下，这项研究更为复杂，因为现在需要考虑两个几乎独立的映射 σ 和 τ；而在对合情形下，其中一个映射由另一个映射唯一确定。

最简单的对合解称为 2-约化解。作者与 Zamojska-Dzienio 在 [19] 中指出，这类解本质上是组合性的，而非代数性的，并在其中给出了这类解的组合构造。2-约化性这一概念也可以自然地推广到非对合解，只是此时需要四个恒等式，而不是一个（定义 3.1）。由此可见， [19]中的组合构造可以直接推广到非对合解。我们还证明了，与对合情形类似，斜左 brace 产生 2-约化解，当且仅当它是 2 阶幂零的（定理 6.4）。

2-约化对合解也出现在另一个背景中。Stefanello 和 Trappeniers 在 [29] 研究了所谓的双斜左括号（定义 4.11）及其与解的联系。他们证明，与双斜左括号相关的对合解总是 2-约化的。在非对合情形下，我们在定理 5.5 中发现，与双斜左括号相关的解是左分配的；这一性质在 [18]中（在解的语境下）被引入。另一方面，Bardakov、Neshchadim 和 Yadav 在 [3] 研究了斜左括号（B、 、 ∘），其中映射 λ 是群同态（B、 ·），且 Aut(B、 ·)（λ-同态斜左括号）。在命题 6.1 中，我们证明了每个具有 2-约化相关解的斜左括号都是 λ-同态的。

本文结构安排如下：第2节回顾解的基本定义和性质。第3节介绍 2-约化性的定义，并给出 2-约化解的组合构造（定理 3.9）。第4节回顾斜左括号、双斜左括号及其相关解的定义，并回顾这些结构的诸多性质。第 5 节利用若干等价性质刻画与双斜左括号相关的解（定理 5.5），并展示这些性质对双斜左 brace 的影响。最后，第6节描述能够产生 2-约化解的斜左括号；更确切地说，我们分别为定义 2-约化性的四个恒等式给出等价刻画（命题 6.1），并为四个性质的合取给出刻画（定理 6.4）。

2. Preliminaries

由于 $r\colon X^2 \to X^2$ 是一个双射映射，因此存在 $r^{-1}\colon X^2 \to X^2$。同样，(X, r^{-1}) 也是一个解。令对于 $x \in X$，$\hat{\sigma}_x$、$\hat{\tau}_x\colon X \to X$ 满足 $r^{-1}(x,y) = (\hat{\sigma}_x(y), \hat{\tau}_y(x))$。显然，对于 $x, y \in X$，我们有：

$$(x,y) = rr^{-1}(x,y) = r(\hat{\sigma}_x(y), \hat{\tau}_y(x)) = (\sigma_{\hat{\sigma}_x(y)}\hat{\tau}_y(x), \tau_{\hat{\tau}_y(x)}\hat{\sigma}_x(y)), \quad \text{and}$$
$$(x,y) = r^{-1}r(x,y) = r^{-1}(\sigma_x(y), \tau_y(x)) = (\hat{\sigma}_{\sigma_x(y)}\tau_y(x), \hat{\tau}_{\tau_y(x)}\sigma_x(y)).$$

因此

$$\sigma_{\hat{\sigma}_x(y)}\hat{\tau}_y(x)=x \quad \Rightarrow \quad \hat{\tau}_y(x)=\sigma^{-1}_{\hat{\sigma}_x(y)}(x) \quad \Rightarrow \quad \sigma_y^{-1}(x)=\hat{\tau}_{\hat{\sigma}_x^{-1}(y)}(x) \tag{2.1}$$

$$\tau_{\hat{\tau}_y(x)}\hat{\sigma}_x(y)=y \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}_x(y)=\tau^{-1}_{\hat{\tau}_y(x)}(y) \quad \Rightarrow \quad \tau_x^{-1}(y)=\hat{\sigma}_{\hat{\tau}_y^{-1}(x)}(y) \tag{2.2}$$

$$\hat{\sigma}_{\sigma_x(y)}\tau_y(x)=x \quad \Rightarrow \quad \tau_y(x)=\hat{\sigma}^{-1}_{\sigma_x(y)}(x) \quad \Rightarrow \quad \hat{\sigma}_y^{-1}(x)=\tau_{\sigma_x^{-1}(y)}(x) \tag{2.3}$$

$$\hat{\tau}_{\tau_y(x)}\sigma_x(y)=y \quad \Rightarrow \quad \sigma_x(y)=\hat{\tau}^{-1}_{\tau_y(x)}(y) \quad \Rightarrow \quad \hat{\tau}_x^{-1}(y)=\sigma_{\tau_y^{-1}(x)}(y). \tag{2.4}$$

根据定义，在对合解中，我们总有 $\hat{}\sigma_x=\sigma_x$ and $\hat{}\tau_x=\tau_x$。

若对任意 $x,y\in X$, $\sigma_x=\sigma_y$ and $\tau_x=\tau_y$ 均成立，则称解 (X,σ,τ) 为置换型解。若对任意 $x\in X$, $\sigma_x=\tau_x=$ id，则称其为投影解（或平凡解）。

若解 (X,σ,τ) 满足条件（lri），则称其满足 Condition (lri)：对于每个 $x\in X$，置换 $\sigma_x$and τ_x 互为逆置换，即

$$\forall_{x\in X} \quad \sigma_x=\tau_x^{-1}. \tag{lri}$$

I若 f (X,σ,τ) 是一个解，则由辫关系可直接得到，对于 $x,y,z\in X$ ：

$$\sigma_x\sigma_y=\sigma_{\sigma_x(y)}\sigma_{\tau_y(x)} \tag{2.5}$$

$$\tau_{\sigma_{\tau_y(x)}(z)}\sigma_x(y)=\sigma_{\tau_{\sigma_y(z)}(x)}\tau_z(y) \tag{2.6}$$

$$\tau_x\tau_y=\tau_{\tau_x(y)}\tau_{\sigma_y(x)} \tag{2.7}$$

为了描述对合解 (X,σ,τ)，许多作者研究了形如 $\langle\sigma_x\colon\ x\in X\rangle$ 的群（例如参见 [8]），并将其称为 IYB群。在非对合情形中，也引入了各种此类群（例如参见 [2, 18, 6]）。本文将重点讨论其中三类。解 (X,σ,τ) 的左置换群是由 r 左侧坐标中的置换生成的置换群，即群 $\mathcal{G}_\ell(X)=\langle\sigma_x\colon\ x\in X\rangle$。类似地，将 (X,σ,τ) 的右置换群定义为置换群 $\mathcal{G}_r(X)=\langle\tau_x\colon\ x\in X\rangle$。由所有平移 σ_x and τ_x 生成的置换群 $\mathcal{G}(X)=\langle\sigma_x,\tau_y\colon\ x,y\in X\rangle$ 称为解的置换群。

Etingof、Schedler 和 Soloviev（[12]）为每个解（X、σ、τ）引入了其结构群G（X、r）：$=\langle X\mid x\circ y=\sigma_x$（$y$）$\circ\tau_y$（$x$）$\ \forall x$、$\ y\in X\rangle$。如果典范映射$X\to G$（$X$、$r$）；$\ x\mapsto x$ 是单射的，则称该解是单射的。对合解总是单射的。

回顾一下，对于每个 $x\in X$，双射 $\Phi\colon\ X\to X'$ 是两个解（X、σ、τ）和（X'、σ'、τ'）之间的同构，当且仅当

$$\Phi\sigma_x=\sigma'_{\Phi(x)}\Phi \quad \text{and} \quad \Phi\tau_x=\tau'_{\Phi(x)}\Phi.$$

同余关系。设（X、σ、τ）是一个解。若等价关系 $\asymp\subseteq X\times X$ 满足：对于x_1、x_2、y_1、$y_2\in X$,

$$x_1\asymp x_2 \ \text{ and } \ y_1\asymp y_2 \quad \Rightarrow \quad \sigma^{\varepsilon}_{x_1}(y_1)\asymp\sigma^{\varepsilon}_{x_2}(y_2) \quad \text{and} \quad \tau^{\varepsilon}_{x_1}(y_1)\asymp\tau^{\varepsilon}_{x_2}(y_2), \tag{2.8}$$

其中 $\varepsilon\in\{-1,1\}$，则称其为解（X、σ、τ）的同余关系。同余关系在其等价类上诱导出一个商解。

在 [12] Etingof、Schedler 和 Soloviev 的研究中，他们针对每个对合解（X、σ、τ）在集合 X 上引入了等价关系 $\sim$：对于每个 x、$y\in X$

$$x\sim y \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_x=\sigma_y \tag{2.9}$$

并且他们证明了 $\sim$ 是该解的同余关系。对于非对合解 (X,σ,τ)，等价关系 $\sim$未必是同余关系。但如果该解是左分配的，则确实如此（见 [18, 定理 3.4]）。此时，商解 $(X^{\sim},\sigma,\tau)$ 称为 X的左收缩，记作 LRet(X,σ,τ)。

类似于 (2.9)，我们可以定义对称关系

$$x \backsim y \quad \Leftrightarrow \quad \tau_x = \tau_y \tag{2.10}$$

并且，对于每个右分配解，该关系在商集 $X^{\backsim}$ 上诱导出一个解。商解 $(X^{\backsim}, \sigma, \tau)$ 称为 (X, σ, τ) 的右收缩，记作 $\mathrm{RRet}(X, \sigma, \tau)$。若一个解是对合的，则 $x \sim y$ 当且仅当 $x \backsim y$ [12, 命题 2.2]。

此处定义的两个关系的交集为关系

$$x \approx y \quad \Leftrightarrow \quad x \sim y \wedge x \backsim y \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_x = \sigma_y \wedge \tau_x = \tau_y. \tag{2.11}$$

Lebed 和 Vendramin 在 [23] 中证明，关系 $\approx$ 是单射解上的同余关系。在[17] 中，作者与 Zamojska-Dzienio 共同证明，对于任意解 (X, σ, τ)，关系 $\approx$ 在商集 $X^{\approx}$ 上诱导出一个解。最近，[6]中给出了一种大幅缩短的证明。

定义 2.1. 设 (X, σ, τ) 是一个解。商解 $\mathrm{Ret}(X, \sigma, \tau) := (X^{\approx}, \sigma, \tau)$，其中 $\sigma_{x^{\approx}}(y^{\approx}) = \sigma_x(y)^{\approx}$ 且 $\tau_{y^{\approx}}(x^{\approx}) = \tau_y(x)^{\approx}$，对 $x^{\approx}, y^{\approx} \in X^{\approx}$ 及 $x \in x^{\approx}$，$y \in y^{\approx}$成立，称为 (X, σ, τ) 的约化解。若一个解 (X, σ, τ) 满足 $\mathrm{Ret}(X, \sigma, \tau) = (X, \sigma, \tau)$，即 $\approx$ 是平凡关系，则称其为不可收缩的。另一方面，若存在整数 k，使得 $\mathrm{Ret}^k(X, \sigma, \tau)$ 仅含一个元素，则称 (X, σ, τ) 的多置换层级为 k。

3. 2-reductive solutions

本节重新证明 [19] 关于 2-约化解的结果。一个问题是，如何将这一概念自然地推广到非对合解；对合 2-约化解的一个基本性质是，置换群的轨道包含于 $\sim$的等价类中。由于对于非对合解，同余关系 $\sim$ 由 $\approx$推广，因此自然可以假设置换群的轨道包含于 $\approx$的同一等价类中；这一点由恒等式 (3.1)–(3.4) 编码。随后可以发现，对合 2-约化解的一般构造可以直接推广到非对合解。

定义 3.1. 若解 (X, σ, τ) 对任意 $x, y \in X$ 都满足以下条件，则称其为 2-约化解：

$$\sigma_{\sigma_x(y)} = \sigma_y, \tag{3.1}$$

$$\tau_{\tau_x(y)} = \tau_y, \tag{3.2}$$

$$\sigma_{\tau_x(y)} = \sigma_y, \tag{3.3}$$

$$\tau_{\sigma_x(y)} = \tau_y. \tag{3.4}$$

例 3.2. 设 $(A, +)$ 为阿贝尔群，且 $0 \neq \alpha \in \mathrm{End}(A, +)$ 满足 $\alpha^2 = 0$。根据 [28, 引理 8], (A, σ, τ)，其中 $\sigma_x(y) = \alpha(x) + y$ 且 $\tau_y(x) = x + \alpha(y)$，对 $x, y \in A$ 而言，这是一个解。直接计算表明，(A, σ, τ) 是 2-约化解。根据 [28, 定理 3.1]，当且仅当 $2\alpha = 0$ 时它是单射的。在此情况下，它是对合的。

对于 2-约化解，我们还有：

$$\sigma_{\sigma_x^{-1}(y)} = \sigma_y, \quad \tau_{\tau_x^{-1}(y)} = \tau_y, \quad \tau_{\sigma_x^{-1}(y)} = \tau_y \quad \text{and} \quad \sigma_{\tau_x^{-1}(y)} = \sigma_y. \tag{3.5}$$

对于对合解，[19] 2-约化性仅由 (3.1) 定义。不过，容易证明，对于对合解，性质 (3.1)–(3.5) 都是等价的。

对于对合解 (X, σ, τ)，Gateva-Ivanova 在 [14, 定义 4.3] 中考虑了如下条件：

$$\forall x \in X \quad \exists y \in X \quad \sigma_y(x) = x. \tag{$*$}$$

显然，每个平方自由解都满足条件（$*$）。另一方面，无不动点解是不满足该条件的解的例子。

事实 3.3。 [13, 命题8。2], [14, 命题4。7] 如果一个对合解满足条件（$*$），那么它是二层多置换解当且仅当它是 2-约化的。

对于非对合解，我们有类似的结果。

命题3.4. 设 (X,σ,τ) 是满足以下两个性质的解：

$$\forall x \in X\ \exists y \in X \quad \sigma_y(x) = x, \tag{3.6}$$

$$\forall x \in X\ \exists y \in X \quad \tau_y(x) = x. \tag{3.7}$$

则 (X,σ,τ) 是多置换层级至多为 2 的多置换解，当且仅当它是 2-约化的。

证明。解的多置换层级为 1，当且仅当对于所有 x、y、$z \in X$，$\sigma_x(z) = \sigma_y(z)$ 且 $\tau_x(z) = \tau_y$。因此，解的多置换层级至多为 2，当且仅当对于所有 x、y、$z \in X$，$\sigma_x(z) \approx \sigma_y(z)$ 且 $\tau_x(z) \approx \tau_y(z)$。这可以改写为以下四个恒等式：

$$\sigma_{\sigma_x(z)} = \sigma_{\sigma_y(z)}, \qquad \sigma_{\tau_x(z)} = \sigma_{\tau_y(z)},$$
$$\tau_{\sigma_x(z)} = \tau_{\sigma_y(z)}, \qquad \tau_{\tau_x(z)} = \tau_{\tau_y(z)}.$$

因此，显然，2-约化解的多置换层级总是 2。另一方面，如果解的多置换层级为 2，那么在每个恒等式中，我们都可以选取适当的 y，使得 $\sigma_y(z) = z$ 或 $\tau_y(z) = z$，分别将这些恒等式转化为 2-约化性。□

命题 3.5. 设 (X,σ,τ) 是一个解。则

（i）如果该解满足（3.1）和（3.3），则左置换群 $\mathcal{G}_\ell(X)$ 是阿贝尔的；（ii）如果该解满足（3.2）和（3.4），则右置换群 $\mathcal{G}_r(X)$ 是阿贝尔的；（iii）如果该解是 2-约化的，则置换群 $\mathcal{G}(X)$ 是阿贝尔的。

证明. 设 (X,σ,τ) 是一个解。

(i) $\sigma_x\sigma_y \overset{(2.5)}{=} \sigma_{\sigma_x(y)}\sigma_{\tau_y(x)} \overset{(3.1),(3.3)}{=} \sigma_y\sigma_x$;

(ii) $\tau_x\tau_y \overset{(2.7)}{=} \tau_{\tau_x(y)}\tau_{\sigma_y(x)} \overset{(3.2),(3.4)}{=} \tau_y\tau_x$;

(iii) $\tau_z\sigma_x(y) \overset{(3.4)}{=} \tau_{\sigma_x(z)}\sigma_x(y) \overset{(3.3)}{=} \tau_{\sigma_{\tau_y(x)}(z)}\sigma_x(y) \overset{(2.6)}{=} \sigma_{\tau_{\sigma_y(z)}(x)}\tau_z(y) \overset{(3.4)}{=} \sigma_{\tau_z(x)}\tau_z(y) \overset{(3.3)}{=} \sigma_x\tau_z(y)$.

□

Gateva-Ivanova 表明，[14] 2-约化对合解总是满足条件（lri）。实际上，对合解是满足（lri）的唯一 2-约化解。

引理 3.6. 2-约化解满足 $\sigma_x = \tau_x^{-1}$ 当且仅当它是对合的。

证明. 设 (X,σ,τ) 是满足条件（lri）的 2-约化解。于是，对于每个 $x \in X$,$\sigma_x = \tau_x^{-1}$。因此，由（3.5）可得，对于任意 $x,y \in X$，我们得到

$$\tau_y(x) = \sigma_y^{-1}(x) \overset{(3.5)}{=} \sigma^{-1}_{\tau_x^{-1}(y)}(x) \overset{(2.4)}{=} \hat{\tau}_x(y) \quad \text{and}$$
$$\sigma_x(y) = \tau_x^{-1}(y) \overset{(3.5)}{=} \tau^{-1}_{\sigma_y^{-1}(x)}(y) \overset{(2.3)}{=} \hat{\sigma}_x(y).$$

□

在第 5 节中，我们将遇到类似的恒等式，即 $\sigma_x = \hat{\tau}_x^{-1}$ 和 $\tau_x = \hat{\sigma}_x^{-1}$。

现在，我们将介绍一种基于阿贝尔群的、未必对合的 2-约化解构造，并得到一族 2-约化解的示例。这一组合构造的思想源自对合情形（见 [19, 定理 7。8]）。相同的

对合解构造由 Rump 以范畴论的语言进行了描述，称为平移丛（见 [25, 定义 2]）。

定理 3.7。设 I 为非空集合，$(A_i)_{i\in I}$ 为定义在 I上的阿贝尔群族，$\bigcup_{i\in I} A_i$ 为集合 A_i、$c_{i,j}$、$d_{i,j}\in A_j$的不交并，其中对于 i，$j\in I$为一些常数。则 $(\bigcup_{i\in I} A_i,\sigma,\tau)$ 是 2-约化解，其中对于 $x\in A_i$，$y\in A_j$，

$$\sigma_x(y)=y+c_{i,j}\quad\text{and}\quad\tau_y(x)=x+d_{j,i}, \tag{3.8}$$

是一个 2-约化解。

证明。显然，对于每个 $x\in A_i$ 和 $y\in A_j$，映射 σ_x 和 τ_y 均为双射，且

$$\sigma_x^{-1}(y)=y-c_{i,j}\quad\text{and}\quad\tau_y^{-1}(x)=x-d_{j,i}.$$

此外，对于 $z\in A_k$

$$\begin{aligned}
\sigma_x\sigma_y(z)&=\sigma_x(z+c_{j,k})=z+c_{j,k}+c_{i,k}=\\
&=z+c_{i,k}+c_{j,k}=\sigma_{(y+c_{i,j})}(z+c_{i,k})=\sigma_{(y+c_{i,j})}\sigma_{(x+d_{j,i})}(z)=\sigma_{\sigma_x(y)}\sigma_{\tau_y(x)}(z);\\
\tau_{\sigma_{\tau_y(x)}(z)}\sigma_x(y)&=\tau_{\sigma_{(x+d_{j,i})}(z)}(y+c_{i,j})=\tau_{(z+c_{i,k})}(y+c_{i,j})=y+c_{i,j}+d_{k,j}=\\
&=y+d_{k,j}+c_{i,j}=\sigma_{(x+d_{k,i})}(y+d_{k,j})=\sigma_{\tau_{(z+c_{j,k})}(x)}(y+d_{k,j})=\sigma_{\tau_{\sigma_y(z)}(x)}\tau_z(y);\\
\tau_x\tau_y(z)&=\tau_x(z+d_{j,k})=z+d_{j,k}+d_{i,k}=\\
&=z+d_{i,k}+d_{j,k}=\tau_{(y+d_{i,j})}(z+d_{i,k})=\tau_{(y+d_{i,j})}\tau_{(x+c_{j,i})}(z)=\tau_{\tau_x(y)}\tau_{\sigma_y(x)}(z),
\end{aligned}$$

这表明（2.5）–（2.7）均得到满足。

此外，

$$\begin{aligned}
\sigma_{\sigma_x(y)}(z)&=\sigma_{(y+c_{i,j})}(z)=z+c_{j,k}=\sigma_y(z),\\
\tau_{\tau_x(y)}(z)&=\tau_{(y+d_{i,j})}(z)=z+d_{j,k}=\tau_y(z),\\
\sigma_{\tau_x(y)}(z)&=\sigma_{(y+d_{i,j})}(z)=z+c_{j,k}=\sigma_y(z),\\
\tau_{\sigma_x(y)}(z)&=\tau_{(y+c_{i,j})}(z)=z+d_{j,k}=\tau_y(z),
\end{aligned}$$

这证明了 2-约化性。 □

例 3.8. 设 I 是一个（有限或无限）指标集，并且对于 $i\in I$，A_i 是循环群。设 $(c_{i,j})_{i,j\in I}$ 和 $(d_{i,j})_{i,j\in I}$ 是满足 $c_{i,j}$、$d_{i,j}\in A_j$（对所有 i、$j\in I$）的常数。则 $(\bigcup_{i\in I} A_i,\sigma,\tau)$（其中 σ 和 τ 定义于（3.8）中）是一个 2-约化解。若对每个 $j\in I$，至少存在一个 $i\in I$，使得 $c_{i,j}$ 或 $d_{i,j}$ 是群 A_j 的生成元，则作用 $\mathcal{G}(X)$ 的轨道等于 A_j。

一般而言，由于 $\sigma_x\tau_y(z)=z+c_{i,k}+d_{j,k}\in A_k$，群 $\mathcal{G}(X)$ 在 A_k 上传递地作用，当且仅当对每个 $k\in I$ 都有 $A_k=\langle\{c_{i,k},d_{j,k}\mid i\in I\}\rangle$。因此，若我们假设

$$A_j=\langle\{c_{i,j},d_{i,j}\mid i\in I\}\rangle\text{, for every } j\in I, \tag{3.9}$$

则该解具有 $\mathcal{G}(X)$ 作用的轨道，分别为 A_j、$j\in I$，且每个轨道都是置换解。

我们将满足 (3.9) 的解记为 $\mathcal{A}=((A_i)_{i\in I},(c_{i,j})_{i,j\in I},(d_{i,j})_{i,j\in I})$，并称其为一组阿贝尔群在集合 I 上的不交并。

定理 3.9。解 (X,σ,τ) 是 2-约化的，当且仅当它是关于集合 I 的阿贝尔群的不交并。$\mathcal{G}(X)$ 的作用的轨道与这些群重合。

证明。根据例 3.8 后的注释，关于集合 I 的阿贝尔群的不交并是一个 2-约化解，其 $\mathcal{G}(X)$ 的作用的轨道等于 $A_j, j \in I$。

现在设 (X, σ, τ) 是一个 2-约化解，并选取一个截面 E，对应于 $\mathcal{G}(X)$ 的作用的轨道分解。根据定理 3.5，群 $\mathcal{G}(X)$ 是阿贝尔群。因此，对于每个 $e \in E$，轨道 $Xe = \{\alpha(e) \mid \alpha \in \mathcal{G}(X)\}$ 都可以赋予一个阿贝尔群结构 $(Xe, +, -, e)$，其定义为 $\alpha(e) + \beta(e) = \alpha\beta(e)$ 且 $-\alpha(e) = \alpha^{-1}(e)$，其中 $\alpha, \beta \in \mathcal{G}(X)$。

对每个 $e, f \in E$，令

$$c_{e,f} := \sigma_e(f) \in Xf \text{ and } d_{e,f} := \tau_e(f) \in Xf.$$

由于 $\mathcal{G}(X)$ 是阿贝尔群，且该解是 2-约化的，因此对于每个 $\alpha \in \mathcal{G}(X)$，有 $\sigma_{\alpha(e)} = \sigma_e$ 和 $\tau_{\alpha(e)} = \tau_e$。这意味着集合

$$\{c_{e,f}, d_{e,f} \mid e \in E\} = \{\sigma_e(f), \tau_e(f) \mid e \in E\} =$$
$$\{\sigma_{\alpha(e)}(f), \tau_{\alpha(e)}(f) \mid \alpha \in \mathcal{G}(X), e \in E\} = \{\sigma_x(f), \tau_x(f) \mid x \in X\}$$

生成群 $(Xf, +, -, f)$。这表明，集合 E 上阿贝尔群的不交并 $((Xe)_{e\in E}, (c_{e,f})_{e,f\in E}, (d_{e,f})_{e,f\in E})$ 与解 X 的轨道完全相同。

最后，令 $x = \alpha(e) \in Xe$ 和 $y = \beta(f) \in Xf$，其中 α、$\beta \in \mathcal{G}(X)$。因此我们得到

$$\sigma_x(y) = \sigma_{\alpha(e)}\beta(f) = \sigma_e(f) + \beta(f) = c_{e,f} + y, \text{ and}$$
$$\tau_y(x) = \tau_{\beta(f)}\alpha(e) = \tau_f(e) + \alpha(e) = d_{f,e} + x.$$

因此，我们验证了阿贝尔群的不交并 $((Xe)_{e\in E}$、$(c_{e,\ f})_{e,\ f\in E}$、$(d_{e,\ f})_{e,\ f\in E})$ 给出了原解 (X, σ, τ)。□

注意，阿贝尔群的不交并是平方自由的，当且仅当对于每个 $i \in I$，$c_{i,\ i} = d_{i,\ i} = 0$；它是对合的，当且仅当 $d_{i,\ j} = -c_{i,\ j}$（见 [19]）。

命题 3.10。设 (X, σ, τ) 是 $\mathcal{A} =$ 的不交并 $((A_i)_{i\in I}$、$(c_{i,\ j})_{i,\ j\in I}$、$(d_{i,\ j})_{i,\ j\in I})$。则 $(X, \hat{}\sigma, \hat{}\tau)$ 是 $\mathcal{A} =$ 的不交并 $((A_i)_{i\in I}$、$(-d_{i,\ j})_{i,\ j\in I}$、$(-c_{i,\ j})_{i,\ j\in I})$。

证明。根据 (2.3)，$\hat{}\sigma_x(y) = \tau^{-1}_{\sigma_y^{-1}(x)}(y)$ (3.5)= $\tau_x^{-1}(y)$ (3.8)= $y - d_{i,\ j}$。$\hat{}\tau$ 的情形类似。□

定理 3.11. 设 $\mathcal{A} = ((A_i)_{i\in I}, (c_{i,j})_{i,j\in I}, (d_{i,j})_{i,j\in I})$ 和 $\mathcal{A}' = ((A'_i)_{i\in I}, (c'_{i,j})_{i,j\in I}, (d'_{i,j})_{i,j\in I})$ 是定义在同一指标集 I 上的两个阿贝尔群的不交并。那么，当且仅当存在一个双射 $\pi i\in I$ $i\in I$，并 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}'$ 是同构的 2-约化解 $(\bigcup A_i, \sigma, \tau)$ 和 $(\bigcup A'_i, \sigma', \tau')$。

集合 I 和群同构 ψ_i: $A_i \to A'_{\pi(i)}$，使得

$$\psi_j(c_{i,j}) = c'_{\pi(i),\pi(j)} \quad \text{and} \quad \psi_j(d_{i,j}) = d'_{\pi(i),\pi(j)}, \tag{3.10}$$

对每个 $i, j \in I$。

证明。证明方式与中介幺群在 2-约化情形下的 [16, 定理 4.2] 的证明类似。

(⇐) 定义映射 ψ: $\bigcup A_i \to \bigcup A'_i$ 如下：

$$\psi(x) = \psi_i(x),$$

对于每个 $x \in A_i$。我们将证明，ψ 是这些解之间的同构。显然，它是一个双射。设 $x \in A_i$、$y \in A_j$。利用 ψ_j 是群同态这一事实，我们得到

$$\psi(\sigma_x(y)) = \psi_j(\sigma_x(y)) = \psi_j(y) + \psi_j(c_{i,j}) \text{ and}$$
$$\psi(\tau_x(y)) = \psi_j(\tau_x(y)) = \psi_j(y) + \psi_j(d_{i,j}).$$

另一方面，

$$\sigma'_{\psi(x)}(\psi(y)) = \sigma'_{\psi_i(x)}(\psi_j(y)) = \psi_j(y) + c'_{\pi(i),\pi(j)} \text{ and}$$
$$\tau'_{\psi(x)}(\psi(y)) = \tau'_{\psi_i(x)}(\psi_j(y)) = \psi_j(y) + d'_{\pi(i),\pi(j)}.$$

由（3.10）可知，这两个表达式相等。

(⇒) 令 f 为两个阿贝尔群的不交并之间的一个同构。由于同构保持轨道，存在一个置换 π，使得对于每个 I，都有 $f(A_i) = A'_{\pi(i)} \quad i \in I$。

令，对于 $j \in I$， $0_j \in A_j$ 为群 A_j中的单位元。定义映射

$$\psi_i \colon A_i \to f(A_i) = A'_{\pi(i)}; \qquad \psi_i(x) = f(x) - f(0_i),$$

对于每个 $i \in I$。由于 f 是 $x \in A_i$ 的解的一个同构，我们有：

$$f(0_j) + c'_{\pi(i),\pi(j)} = \sigma'_{f(x)}(f(0_j)) = f(\sigma_x(0_j)) = f(0_j + c_{i,j}) = f(c_{i,j}) = \psi_j(c_{i,j}) + f(0_j).$$

这给出 $\psi_j(c_{i,\ j}) = c'_{\pi(i)\ \pi(j)}$。类似地，

$$f(0_j) + d'_{\pi(i),\pi(j)} = \tau'_{f(x)}(f(0_j)) = f(\tau_x(0_j)) = f(0_j + d_{i,j}) = f(d_{i,j}) = \psi_j(d_{i,j}) + f(0_j),$$

并且 $\psi_j(d_{i,\ j}) = d'_{\pi(i)\ \pi(j)}$。

为验证这些映射 ψ_j 是群自同构，令 $x \in A_i$ 和 $y \in A_j$，考虑：

$$f(\sigma_x(y)) = f(y + c_{i,j}) = \psi_j(y + c_{i,j}) + f(0_j) \text{ and}$$
$$f(\tau_x(y)) = f(y + d_{i,j}) = \psi_j(y + d_{i,j}) + f(0_j).$$

另一方面，

$$f(\sigma_x(y)) = \sigma'_{f(x)}(f(y)) = c'_{\pi(i),\pi(j)} + f(y) = \psi_j(c_{i,j}) + \psi_j(y) + f(0_j) \text{ and}$$
$$f(\tau_x(y)) = \tau'_{f(x)}(f(y)) = d'_{\pi(i),\pi(j)} + f(y) = \psi_j(d_{i,j}) + \psi_j(y) + f(0_j)$$

消去 $f(0_j)$，得到

$$\psi_j(c_{i,j} + y) = \psi_j(c_{i,j}) + \psi_j(y) \quad \text{and} \quad \psi_j(d_{i,j} + y) = \psi_j(d_{i,j}) + \psi_j(y). \tag{3.11}$$

对每个 $y \in A_j$均成立。

根据假设，每个群 A_j 都由所有元素 $c_{i,j}$ 和 $d_{i,j}$, $i \in I$生成。因此，(3.11) 意味着对每个 $x, y \in A_j$， $\psi_j(x + y) = \psi_j(x) + \psi_j(y)$，即 ψ_j是群自同构。□

如果 I 是有限集，我们通常将阿贝尔群的不交并表示为三元组 $((A_i)_{i\in I}$、 C、 $D)$，其中 $C = (c_{i,\ j})_{i,\ j\in I}$ 和 $D = (d_{i,\ j})_{i,\ j\in I}$ 是常数矩阵。

We 可以使用以下算法构造所有大小为 n 的 2-约化解：

算法 3.12。输出所有大小为 n 的 2-约化解：

(1) 对所有划分 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ 执行 (2)–(4)。(2) 对所有大小为 $|A_i| = n_i$ 的阿贝尔群 A_1、 ..... 、 A_k 执行 (3)–(4)。(3) 对所有常数 c_i、$_j$、 d_i、$_j \in A_j$、 $1 \le i$、 $j \le k$ 执行 (4)。(4) 如果对所有 $1 \le j \le k$，都有 $A_j = \langle \{c_{i,j}, d_{i,j} \mid 1 \le i \le k\} \rangle$，则使用 (3.8) 构造一个解 $(\bigcup A_i$、 σ、 $\tau)$。

构造出所有解后，我们可以利用定理 3.11 去除同构副本。

例 3.13. 在同构意义下，大小为 3 的 2-约化解恰好有十四个。它们是以下阿贝尔群的不交并：

- One orbit: $(\mathbb{Z}_3, (1), (1))$, $(\mathbb{Z}_3, (0), (1))$, $(\mathbb{Z}_3, (1), (0))$.

• 两个轨道：$(\mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_1, \begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0&0\end{pmatrix})$, $(\mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_1, \begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix})$, $(\mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_1, \begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1&0\end{pmatrix})$, $(\mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_1, \begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1&0\end{pmatrix})$, $(\mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_1, \begin{pmatrix}0&0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0&0\end{pmatrix})$, $(\mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_1, \begin{pmatrix}0&0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix})$, $(\mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_1, \begin{pmatrix}0&0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1&0\end{pmatrix})$, $(\mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_1, \begin{pmatrix}0&0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1&0\end{pmatrix})$, $(\mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_1, \begin{pmatrix}1&0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0&0\end{pmatrix})$, $(\mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_1, \begin{pmatrix}1&0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix})$, $(\mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_1, \begin{pmatrix}1&0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&1&0\end{pmatrix})$, $(\mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_1, \begin{pmatrix}1&0&1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0&1&0\end{pmatrix})$。

• 三个轨道：$(\mathbb{Z}_1 \cup \mathbb{Z}_1 \cup \mathbb{Z}_1, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix})$。

其中五个是对合的，三个是平方自由的。此外，大小为4的2-约化解恰好有九十六个：

- 3 有一个轨道 $\mathbb{Z}_4$,
- 20 有两个轨道： $\mathbb{Z}_3$ 和 $\mathbb{Z}_1$ ，另有42个具有两个轨道的解 $\mathbb{Z}_2$ 和 $\mathbb{Z}_2$,
- 30 有三个轨道： $\mathbb{Z}_2$、 $\mathbb{Z}_1$ 和 $\mathbb{Z}_1$,
- 1 有四个轨道，且每个轨道都等于 $\mathbb{Z}_1$。

将2-约化解表示为阿贝尔群的不交并，可以快速验证命题3.4中定义的条件。

注3.14. 设2-约化解（X， σ， τ）是在集合I上的阿贝尔群的不交并。那么（X， σ， τ）满足（3.6）-（3.7）当且仅当

$$\forall i \in I \quad \exists j \in I, \quad \text{such that} \quad c_{j,i} = d_{j,i} = 0.$$

Soloviev等人研究了单射解。在 [28]中，他证明了此类解的某些性质与对合解的性质相似。他还给出了一些判据，用于识别单射解。特别是，他刻画了仿射单射解。这里，我们将2-约化解表示为阿贝尔群的不交并。事实上，这种表示表明它们的每个分量都是一个仿射解。因此，它使我们能够为常数矩阵中位于对角线上的元素制定一些条件。

命题 3.15. [28]设 (X,σ,τ) 是 $\mathcal{A}=((A_i)_{i\in I}, (c_{i,j})_{i,j\in I}, (d_{i,j})_{i,j\in I})$ 的不交并。若 (X,σ,τ) 是单射的，则对所有 $i \in I$, $c_{i,i} = -d_{i,i}$。

证明. 设 $x \in A_i$，其中 $i \in I$。那么，在解 (X,σ,τ) 的结构群 $G(X,r)$ 中，

$$x \circ \sigma_x^{-1}(x) = \sigma_x\sigma_x^{-1}(x) \circ \tau_{\sigma_x^{-1}(x)}(x) \overset{(3.5)}{=} x \circ \tau_x(x)$$

并且，根据消去性， $\sigma_x^{-1}(x) = \tau_x(x)$，因此对所有 $i \in I$， $-c_{i,i} = d_{i,i}$。 □

命题 3.16. 设 (X,σ,τ) 是 $\mathcal{A}=((A_i)_{i\in I}, (c_{i,j})_{i,j\in I}, (d_{i,j})_{i,j\in I})$ 的不交并。若 (X,σ,τ) 是单射的，则对所有 i, $j \in I$, $o(c_{i,j} + d_{i,j}) = o(c_{j,i} + d_{j,i})$。

证明。令 $x \in A_i$和 $y \in A_j$，其中 i、 $j \in I$。在结构群 $G(X$、 $r)$ 中，我们有

$$x \circ y = \sigma_x(y) \circ \tau_y(x) = \sigma_{\sigma_x(y)}\tau_y(x) \circ \tau_{\tau_y(x)}\sigma_x(y) \overset{(3.1),(3.2)}{=} \sigma_y\tau_y(x) \circ \tau_x\sigma_x(y).$$

假设存在 i、 $j \in I$，使得 $k = o(c_{i,\ j} + d_{i,\ j}) < o(c_{j,\ i} + d_{j,\ i})$。于是我们得到

$$x \circ y = \sigma_y^k\tau_y^k(x) \circ \tau_x^k\sigma_x^k(y) = (x + kc_{j,i} + kd_{j,i}) \circ (y + kc_{i,j} + kd_{i,j}) = (x + kc_{j,i} + kd_{j,i}) \circ y$$

并且我们在结构群中得到 $x = x + k(c_{j,\ i} + d_{j,\ i}) \neq x$。因此，$(X$、 σ、 $\tau)$ 不是单射解。□

例 3.17。设 $(\{x,y,z\}$、 σ、 $\tau)$ 是 $(\mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_1$、$(\begin{smallmatrix}0&0&0&0\end{smallmatrix})$、$(\begin{smallmatrix}0&0&1&0\end{smallmatrix}))$ 的并。这个平方自由解既不是对合的，因为 $c_{2,\ 1} \neq -d_{2,\ 1}$；也不是单射的，因为 $c_{2,\ 1} + d_{2,\ 1} = 1$ 和 $c_{1,\ 2} + d_{1,\ 2} = 0$。事实上，我们有 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_x = \tau_y = \mathrm{id}_X$ 和 $\tau_z = (xy)$。然后

$$x \circ z = z \circ y = y \circ z$$

且该解的结构群是由两个生成元生成的自由阿贝尔群 $\{x,z\}$。

问题 3.18. 对于有限的 2-约化解 $\mathcal{A} = ((A_i)_{i\in I}, C, D)$，求出关于矩阵 C 和 D 的一个必要且充分的条件，使得该解是单射的。

第2节在 X 上定义了三个等价关系，即 $\sim$、 $\backsim$ 和 $\approx$；通常只有最后一个是同余关系。对于 2-约化解，它们全都是同余关系。

命题3.19。 设 (X,σ,τ) 是一个 2-约化解。那么 $\sim$ 和 $\backsim$ 是 (X,σ,τ) 的同余关系 .

证明。设 $x \sim y$ 和 $a \sim b$。我们需要证明四个性质：

$$\begin{aligned}
\sigma_{\sigma_x(a)} \overset{(3.1)}{=} \sigma_a = \sigma_b \overset{(3.1)}{=} \sigma_{\sigma_y(b)} \quad &\Rightarrow \quad \sigma_x(a) \sim \sigma_y(b),\\
\sigma_{\sigma_x^{-1}(a)} \overset{(3.5)}{=} \sigma_a = \sigma_b \overset{(3.5)}{=} \sigma_{\sigma_y^{-1}(b)} \quad &\Rightarrow \quad \sigma_x^{-1}(a) \sim \sigma_y^{-1}(b),\\
\sigma_{\tau_x(a)} \overset{(3.3)}{=} \sigma_a = \sigma_b \overset{(3.3)}{=} \sigma_{\tau_y(b)} \quad &\Rightarrow \quad \tau_x(a) \sim \tau_y(b),\\
\sigma_{\tau_x^{-1}(a)} \overset{(3.5)}{=} \sigma_a = \sigma_b \overset{(3.5)}{=} \sigma_{\tau_y^{-1}(b)} \quad &\Rightarrow \quad \tau_x^{-1}(a) \sim \tau_y^{-1}(b).
\end{aligned}$$

对 $\backsim$ 的证明是类似的。 □

推论3.20。设 (X,σ,τ) 是一个 2-约化解。那么约化解 Ret(X,σ,τ)、左约化 LRet(X,σ,τ) 和 RRet(X,σ,τ) 都是投影解。

证明。由于解（X， σ， τ）是2-约化的，对于 x、 $y \in X$，我们立即得到

$$\sigma_x(y) \approx y \quad \text{and} \quad \tau_x(y) \approx y.$$

这意味着，在 Ret（X， σ， τ）中，对于 $x^{\approx} \in X^{\approx}$、 $\sigma_{x^{\approx}} = \tau_{x^{\approx}} =$，有 id。由于关系 $\approx$是 $\sim$ 与 $\backsim$的交集，左收缩和右收缩是 Ret（X， σ， τ）的因子。□

引理3.21。设2-约化解（X， σ， τ）是集合I上阿贝尔群的不交并。对于 $x \in A_i$ 和 $y \in A_j$，有 $x \sim y$ 当且仅当$c_{i,\ k} = c_{j,\ k}$；并且对于所有 $k \in I$，有 $x \backsim y$ 当且仅当$d_{i,\ k} = d_{j,\ k}$。

证明。设 $x \in A_i$ 和 $y \in A_j$。 则

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in I \quad \forall z \in A_k \quad z + c_{i,\ k} = \sigma_x\ (z) = \sigma_y\ (z) = z + c_{j,\ k} \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in I \quad c_{i,\ k} = c_{j,\ k},$$

对于 $\backsim$也同理。 □

4. Skew left braces

左 brace 的概念由 Rump [24] 引入，用于研究对合解。Guarnieri 和 Vendramin [15] 推广了这一思想，并定义了所谓的斜左 brace。这些结构提供了解的最易处理的例子，因此，自然会提出这样的问题：2-约化性在斜左 brace 的背景下如何体现。本节主要回顾斜左 brace 及其相关解的性质。

定义 4.1. [15, 定义 1.1] 若代数 $(B,\cdot,\circ)$ 满足 $(B,\cdot)$ 和 $(B,\circ)$ 均为群，且这些运算对任意 $a,b,c \in B$ 满足以下条件，则称其为斜左 brace，

$$a \circ (b \cdot c) = (a \circ b) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ c). \tag{4.1}$$

群 $(B,\cdot)$ 的单位元与群 $(B,\circ)$ 的单位元相同，记为 1。此外， a 在群 $(B,\cdot)$ 中的逆元记为 a^{-1}，而 a 在群 $(B,\circ)$ 中的逆元记为 $\bar{a}$。

如果群 $(B,\cdot)$ 是阿贝尔群，则斜左括号是左括号。在这种情况下，我们称该斜左括号为阿贝尔型。

引理 4.2. [15, 引理 1.7] 设 $(B,\cdot,\circ)$ 是一个斜左括号。则对于所有$a,b,c\in B$，以下结论成立：

$$a\circ(b^{-1}\cdot c)=a\cdot(a\circ b)^{-1}\cdot(a\circ c), \tag{4.2}$$

$$a\circ(b\cdot c^{-1})=(a\circ b)\cdot(a\circ c)^{-1}\cdot a. \tag{4.3}$$

如果下式成立，则称斜左括号为双侧斜括号

$$(a\cdot b)\circ c=(a\circ c)\cdot c^{-1}\cdot(b\circ c), \tag{4.4}$$

对所有 a、b、$c\in B$ 均成立。对于任意斜左括号 $(B,\cdot,\circ)$，存在所谓的相反斜左幺半群 $(B,\cdot_{op},\circ)$，其中 $a\cdot_{op}b=b\cdot a$ （见 [22]）。

注 4.3。 [15, 注 1.8，命题 1.9] 设 $(B,\cdot,\circ)$ 是一个斜左括号。对于每个 $a\in B$，映射

$$\lambda_a\colon B\to B;\quad \lambda_a(b)=a^{-1}\cdot(a\circ b),$$

是群 $(B,\cdot)$ 的一个自同构，其逆映射由 $\lambda_a^{-1}(b)=\bar{a}\circ(a\cdot b)$ 定义。

与左括号类似，可以定义斜左括号的相关解。

定理 4.4。 [15, 定理 3.1] 设 $(B,\cdot,\circ)$ 是一个斜左括号。则 (B,λ,ρ)，其中

$$\rho_y(x):=\lambda^{-1}_{\lambda_x(y)}((x\circ y)^{-1}\cdot x\cdot(x\circ y))=\overline{x^{-1}\cdot(x\circ y)}\circ x\circ y=\overline{\lambda_x(y)}\circ x\circ y,\quad for\ x,y\in B,$$

是一个解。当且仅当斜左括号 $(B,\cdot,\circ)$ 属于阿贝尔型时，它是对合的 e.

No注意，由斜左 brace 相关联的解满足条件 (3.6)–(3.7).

根据 Koch 和 Truman 的结果 [22],，对于斜左括号 $(B,\cdot,\circ)$，与相反斜左幺半群相关联的解，是与 $(B,\cdot,\circ)$ 相关联的解的逆解。

定理 4.5. [22, 定理 4.1] 设 (B,λ,ρ) 是与斜左括号 $(B,\cdot,\circ)$ 相关联的解。$\hat{}$ 那么，其逆解 $(B,\lambda,\hat{}\rho)$ 是与相反斜左幺半群 $(B,\cdot_{op},\circ)$ 相关联的解。特别地，对于 $x,y\in B$

$$\hat{\lambda}_x(y)=(x\circ y)\cdot x^{-1},\quad \text{and} \tag{4.5}$$

$$\hat{\rho}_y(x)=\overline{(x\circ y)\cdot x^{-1}}\circ x\circ y. \tag{4.6}$$

例 4.6. 设 $(B,\cdot)$ 是一个群。那么 $Triv(B,\cdot)=(B,\cdot,\cdot)$ 是定义在 $(B,\cdot)$ 上的平凡斜左 brace。相关解 (B,λ,ρ) 具有如下形式：$\lambda_a(b)=b$ 且 $\rho_b(a)=b^{-1}\cdot a\cdot b$。

例 4.7. 设 $(B,\cdot)$ 是一个群。几乎平凡斜左括号 $(B,\cdot,\cdot_{op})$ 的相关解为：$\lambda_a(b)=a^{-1}\cdot b\cdot a$ 以及 $\rho_b(a)=a$。此外，$\hat{}\,\lambda_a(b)=b$ 以及 $\hat{}\rho_b(a)=b\cdot a\cdot b^{-1}$。特别地，如果群 $(B,\cdot)$ 是阿贝尔群，那么 (B,λ,ρ) 是一个投影解。

注 4.8. 设 $(B,\cdot,\cdot_{op})$ 是一个几乎平凡斜左括号，且 (B,λ,ρ) 是其相关解。那么 (3.2)、(3.3) 和 (3.4) 均显然成立，而 (3.1) 等价于

$$\lambda_{\lambda_x(y)}(z)=\lambda_y(z)\quad\Leftrightarrow\quad x^{-1}y^{-1}xzx^{-1}yx=y^{-1}zy\quad\Leftrightarrow\quad[[x,y],z]=1$$

因此，当且仅当群 $(B,\cdot)$ 是 2 阶幂零时，该解是 2-约化的。

例 4.9. 设 $(G,\cdot)$ 为一个非阿贝尔群。与平凡斜左 brace 和几乎平凡斜左幺半群的直积 $(G,\cdot,\cdot)\times(G,\cdot,\cdot_{opp})$ 相关联的解 $(G\times G,\lambda,\rho)$ 对于 (x,y)，$(u,w)\in G\times G$如下：

$$\lambda_{(x,y)}((u,w))=(u,y^{-1}\cdot w\cdot y)\quad\text{and}\quad\rho_{(u,w)}((x,y))=(u^{-1}\cdot x\cdot u,y).$$

例 4.10. 设 $n \in \mathbb{N}$ 为一个奇自然数，并设 $(\mathbb{Z}_{2n}, \cdot, +_{2n})$ 为一个斜左括号，使得对于 $x, y \in \mathbb{Z}_{2n}$

$$x \cdot y = x + (-1)^x y \mod 2n \quad \text{and} \quad x^{-1} = (-1)^{x+1} x \mod 2n.$$

与此斜左括号关联的解如下：

$$\lambda_x(y) = \lambda_x^{-1}(y) = (-1)^x y \mod 2n \quad \text{and} \quad \rho_x(y) = (-1)^{y+1} x + x + y \mod 2n.$$

以上所有例子实际上都是双斜左 brace 的例子。

定义 4.11. [10, 定义 2] 若斜左括号 $(B, \cdot, \circ)$ 同时也是斜左括号 $(B, \circ, \cdot)$，则称其为双斜左括号。

Childs 在 [10], 引入了双斜左 brace，Caranti 在 [4] 对其进行了研究，而 Bardakov 等人最近也在 [3] 中以“对称斜左括号”之名对其进行了研究。Caranti（另见 [3, 命题 5.2]）给出了以下等价关系。

引理 4.12. [4, 引理 3.1] 设 $(B, \cdot, \circ)$ 是一个斜左括号。以下条件等价：

(i) $(B, \cdot, \circ)$ 是一个双斜左 brace，(ii) $\lambda\colon B \to B; a \mapsto \lambda_a$ 是群 $(B, \cdot)$ 到 $\mathrm{Aut}(B, \cdot)$ 的反同态，这意味着 $\lambda_{a \cdot b} = \lambda_b \lambda_a$，对所有 $a, b \in B$ 均成立。

Stefanello 和 Trappeniers 在 [29] 中也研究了双斜左 brace 及其相关解，并给出了以下刻画：

定理 4.13. [29, 定理 5.2] 设 $(B, \cdot, \circ)$ 是一个斜左括号。那么，$(B, \cdot, \circ)$ 是双斜左括号，当且仅当其相关解 (B, λ, ρ) 满足

$$\lambda_{\hat{\lambda}_x(y)} = \lambda_y, \quad for\ all\ x, y \in B. \tag{4.7}$$

这一性质在形式上与 (3.1) 相似，但实际上它等价于定义 2-约化性的另一个恒等式。

命题 4.14. 设 (X, σ, τ) 是一个解。那么，(X, σ, τ) 满足 $\sigma_{\hat{\sigma}_x(y)} = \sigma_y$，对 $x, y \in X$ 成立，当且仅当它满足 (3.3)。

证明. 设 (X, σ, τ) 满足 (4.7)。那么，对于 $x, y \in X$，我们得到

$$\sigma_x \overset{(2.3)}{=} \sigma_{\hat{\sigma}_{\sigma_x(y)}\tau_y(x)} \overset{(4.7)}{=} \sigma_{\tau_y(x)}.$$

另一方面，对于 (3.3)，我们有

$$\sigma_{\hat{\sigma}_y^{-1}(x)} \overset{(2.3)}{=} \sigma_{\tau_{\sigma_x^{-1}(y)}(x)} \overset{(3.3)}{=} \sigma_x,$$

将 x 替换为 $\hat{}\sigma_y(x)$ 即完成证明。 □

推论 4.15. 每个 2-约化解都满足 (4.7)，而满足 (4.7) 的对合解是 2-约化的。

类似地，我们可以说恒等式

$$\tau_{\hat{\tau}_x(y)} = \tau_y. \tag{4.8}$$

等价于恒等式 (3.4)。

例4.16。 [18, 例2。6] 设 $(G,\cdot)$ 是一个非初等阿贝尔2-群，使得对于每个 $x\in G$， $x^2\in Z(G)$。定义如下的一个解 (G,σ,τ)：

$$\sigma_x(y)=xy^{-1}x^{-1}\quad\text{and}\quad\tau_y(x)=xy^{-1}.$$

这个解满足 (4.7)，但不满足 (4.8)，其中 $\hat{}\sigma_x(y)=y^3$ 和 $\hat{}\tau_y(x)=x^{-1}y^{-1}x$。

设 $(B,\cdot,\circ)$ 是一个斜左括号。

定义4.17。如果对于所有 $a\in B$，子集 $I\subseteq B$ 是 $(B,\cdot,\circ)$ 的理想，当且仅当它是 $(B,\cdot)$ 的正规子群、$(B,\circ)$ 的正规子群，并且 $\lambda_a(I)\subseteq I$。

定义4.18。$(B,\cdot,\circ)$ 的根是理想

$$\operatorname{Soc}(B)=\{a\in B\colon a\circ b=a\cdot b=b\cdot a,\ \text{for all } b\in B\}=\ker\lambda\cap Z(B,\cdot),$$

其中， $Z(B,\cdot)$ 表示 $(B,\cdot)$ 的中心。

Ex例4.19。对于一个几乎平凡斜左幺半群 $(B,\cdot,\circ^{op})$，$\operatorname{Soc}(B)=Z(B,\cdot)$.

引理4.20. [15, 引理 3.3] 对于斜左括号$(B,\cdot,\circ)$及其理想 $I\subseteq B$，对所有 $a\in B$,$a\cdot I=a\circ I$均成立。

引理4.21. [9, 引理 1.10] 设 $a\in\operatorname{Soc}(B)$。则对所有 $b\in B$,

$$\lambda_b(a)=b^{-1}\cdot(b\circ a)=b\circ a\circ\bar{b}.$$

由于根$\operatorname{Soc}(B)$是斜左括号的一个理想，群$(B,\circ)$的商群$(B,\circ)/\operatorname{Soc}(B)$也是群$(B,\cdot)$的商群，而因子斜左括号 $B/\operatorname{Soc}(B):=(B,\cdot,\circ)/\operatorname{Soc}(B)$关于$\operatorname{Soc}(B)$的商是良定义的。

定义4.22. $(B,\cdot,\circ)$的根序列定义为序列

$$B_0=B,\ B_{n+1}=B_n/\operatorname{Soc}(B_n),\ n\geq 0.$$

我们称$(B,\cdot,\circ)$是类为 n 的幂零对象，当且仅当 n 是使得 $|B_n|=1$成立的最小数。

定理 4.23。 [27, 定理 4.21] 设 $(B,\cdot,\circ)$ 是一个幂零斜左括号。那么群 $(B,\cdot)$ 是幂零的。

在本节剩余部分，我们将重点研究斜左括号的幂零性与相关解的多置换层级之间的对应关系。对于对合解，Rump 在 [24] 中描述了这种对应关系。在对合情形下，映射 ρ 由 λ 唯一确定，因此无需考虑此映射。在非对合情形下，关系 $\approx$ 同时取决于 λ 和 ρ，因此我们需要进一步考察 ρ 在斜左括号中的作用。

命题 4.24。 [15, 命题 1.9] 设 $(B,\cdot,\circ)$ 是一个斜左括号。映射 $\lambda\colon B\to B;\ a\mapsto\lambda_a$ 是群 $(B,\circ)$ 与自同构群 $\operatorname{Aut}(B,\cdot)$ 之间的同态。

映射 ρ_a 通常不是自同构，以下例子可以说明这一点 .

例 4.25. 设 $(B,+)=\mathbb{Z}_2^3$，并记 $e_0=(0,0,0)$、$e_1=(1,0,0)$、$e_2=(0,1,0)$、$e_3=(0,0,1)$ 和 $f=(1,1,1)$。那么每个 $b\in B$ 都可以唯一地写成 $b=\varepsilon f+e_i$，其中 $\varepsilon\in\mathbb{Z}_2$ 和 $i\in\mathbb{Z}_4$。现在定义

$$(\varepsilon f+e_i)\circ(\zeta f+e_j)=(\varepsilon+\zeta)f+e_{i+3^{\varepsilon}j}\qquad\text{and}\qquad\overline{\varepsilon f+e_i}=\varepsilon f+e_{3^{1+\varepsilon}i},$$

对于任意 ε、$\zeta\in\mathbb{Z}_2$ 和 i、$j\in\mathbb{Z}_4$。不难验证，$(B,\circ)$ 是 8 阶二面体群；而验证 $(B,+,\circ)$ 是一个斜左括号（阿贝尔型）虽然更为复杂，但仍然是直接的。于是，对于其相关解，我们有：$\rho_{f+e_1}(f+e_1)=f+e_1$、$\rho_{f+e_1}(f)=f$和$\rho_{f+e_1}(e_1)=f+e_3$，但 $(f+e_1)+f\neq f+e_3$，因此 ρ_{f+e_1} 不是 $(B,+)$ 的自同态。注意，Bachiller 在 [1] 中给出了这个左括号的一个等价但不同的表示。

然而，即使映射 ρ_a 不是自同态，Bachiller 仍证明，对于映射 ρ，我们可以得到命题 4.24 的一个部分对应结果。

命题 4.26。 [2, 引理 2。4] 设 $(B,\cdot,\circ)$ 是一个斜左括号。映射 $\rho\colon B\to B;\ a\mapsto\rho_a$ 是群 $(B,\circ)$ 到 S_B 的反同态，即对于所有 $a,b\in B$，都有 $\rho_{a\circ b}=\rho_b\rho_a$。

命题 4.27。 [2, 命题 2。8] 设 $(B,\cdot,\circ)$ 是一个斜左括号，且 (B,λ,ρ) 是其相关解。那么 $\mathrm{Soc}(B)=\mathrm{Ker}\,\lambda\cap\mathrm{Ker}\ \rho$。

推论4.28。 [6, 注 4。4] 设 $(B,\cdot,\circ)$ 是一个斜左括号，且 (B,λ,ρ) 是其相关解。那么

(i) $\mathrm{Ret}(B,\lambda,\rho)$ 是与 $(B,\cdot,\circ)/\mathrm{Soc}(B)$ 相关的解；(ii) (B,λ,ρ) 是一个 n 级多置换解，当且仅当 $(B,\cdot,\circ)$ 是类为 n 的幂零群。

定义 4.29。 [3, 定义 2。11] 如果存在理想 N，使得在 $(B,\cdot,\circ)$ 中，$(N,\cdot,\circ)$ 是一个平凡斜左 brace，且商斜左 braceB/N 也是平凡的，则称斜左括号 $(B,\cdot,\circ)$ 是亚平凡的。

推论 4.30。设 $(B,\cdot,\circ)$ 是一个斜左括号。如果其相关解是 2-约化的，则 $(B,\cdot,\circ)$ 是亚平凡的。

证明。由推论 3.20 和 4.28(i)，以及 $(B,\cdot,\circ)$ 的根是一个阿贝尔型的平凡斜左 brace 这一事实，可直接得到。□

5. Distributive solutions

在 [18] 作者和 Zamojska-Dzienio 研究了所谓的分配解。本节我们将建立双斜左括号与有关分配解的结果之间的联系。

定义 5.1. 如果对于任意 $x,y\in X$，解 (X,σ,τ) 满足：

$$\sigma_x\sigma_y=\sigma_{\sigma_x(y)}\sigma_x, \tag{5.1}$$

如果对于任意 $x,y\in X$，它满足：，则称其为右分配的。

$$\tau_x\tau_y=\tau_{\tau_x(y)}\tau_x. \tag{5.2}$$

若一个解既是左分配的又是右分配的，则称其为分配的。

例5.2（Lyubashenko，参见 [11]）。设 X 是一个非空集合，且设 $f,g\colon X\to X$ 是两个满足 $fg=gf$ 的双射。那么，对于每个 $x,y\in X$，满足 $\sigma_x=f$ 和 $\tau_y=g$ 的置换解 (X,σ,τ) 是分配的。

例5.3. 设 (X,σ,id) 是一个解。由 (2.5) 可知它是分配的。同理，由 (2.7) 可知，对于解 $(X,\mathrm{id}\ \tau)$ 也有相同结论。因此，例 4.6 和例 4.7 中的解都是分配的。

例 5. 4. 例 4.10 中的解是左分配的，但不是右分配的 e.

定理 5.5. 设 (X,σ,τ) 是一个解。则以下条件等价：

(i) (X,σ,τ) 是左分配的，(ii) (X,σ,τ) 满足 (3.3)，即对所有 $x,y\in X$，$\sigma_{\tau_x(y)}=\sigma_y$，(iii) (X,σ,τ) 满足 (4.7)，即对所有 $x,y\in X$，$\sigma_{\hat{\sigma}_x(y)}=\sigma_y$，(iv) (X,σ,τ) 对所有 $x\in X$ 满足 $\hat{}\tau_x=\sigma_x^{-1}$，(v) $\mathcal{G}_\ell(X)\leq$ 自同构群(X,σ,τ)。

证明。根据 [18, 引理 2.8], , 以下条件等价:

$$\sigma_x\sigma_y=\sigma_{\sigma_x(y)}\sigma_x \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_x=\sigma_{\tau_y(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_x=\sigma_{\tau_y^{-1}(x)}. \tag{5.3}$$

实际上，(i)⇔(ii) 成立。(ii)⇔(iii) 的等价关系已在命题 4.14 中证明。现在

$$\hat{\tau}_x^{-1}(y)\overset{(2.4)}{=}\sigma_{\tau_y^{-1}(x)}(y)\overset{(3.3)}{=}\sigma_x(y) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\tau}_x=\sigma_x^{-1}, \tag{5.4}$$

证明 (ii)⇔(iv)。最后，对于每个 $x\in X$，映射 σ_x 是一个置换，并且根据定义可得 (v)⇒(i)。另一方面,

$$\tau_{\sigma_{\tau_y(x)}(z)}\sigma_x(y)\overset{(2.6)}{=}\sigma_{\tau_{\sigma_y(z)}(x)}\tau_z(y) \quad \overset{(3.3)}{\Rightarrow} \quad \tau_{\sigma_x(z)}\sigma_x=\sigma_x\tau_z$$

证明 (i)&(ii)⇒(v)。 □

推论 5.6。设 $(B,\cdot,\circ)$ 是一个斜左括号。那么，当且仅当其相关解 (B,λ,ρ) 满足定理 5.5 中的某一项性质时，$(B,\cdot,\circ)$ 是一个双斜左括号。

类似地，我们可以证明定理 5.5 的镜像。

定理 5.7。设 (X,σ,τ) 是一个解。那么，以下条件等价:

(i) (X,σ,τ) 是右分配的，(ii) (X,σ,τ) 满足 (3.4)，即 $\tau_{\sigma_x(y)}=\tau_y$，对所有 $x,y\in X$ 均成立，(iii) (X,σ,τ) 满足 (4.8)，即 $\tau_{\hat{\tau}_x(y)}=\tau_y$，对所有 $x,y\in X$ 均成立，(iv) (X,σ,τ) 满足 $\hat{}\sigma_x=\tau_x^{-1}$，对所有 $x\in X$ 均成立，(v) $\mathcal{G}_r(X)\leq \mathrm{Aut}(X,\sigma,\tau)$。

推论 5.8. 解 (X,σ,τ) 是左分配的，当且仅当 $(X,\hat{}\sigma,\hat{}\tau)$ 是右分配的。

证明。设 (X,σ,τ) 是一个左分配解。根据定理 5.5，对于 $y\in X$，我们有 $\hat{}\tau_y=\sigma_y^{-1}$。于是

$$\hat{\tau}_{\tau_y(x)}=\sigma^{-1}_{\tau_y(x)}\overset{(3.3)}{=}\sigma_x^{-1}=\hat{\tau}_x,$$

这等价于（$X,\hat{}\sigma,\hat{}\tau$）的右分配性。

若解（$X,\hat{}\sigma,\hat{}\tau$）是右分配的，则有 $\sigma_y=\hat{}\tau_y^{-1}$，这意味着

$$\sigma_{\hat{\sigma}_y(x)}=\hat{\tau}^{-1}_{\hat{\sigma}_y(x)}\overset{(3.4)}{=}\hat{\tau}_x^{-1}=\sigma_x$$

并表明（X,σ,τ）是左分配的。 □

由定理 4.5、推论 5.6 和推论 5.8 可得:

推论 5.9. 设（$B,\cdot,\circ$）是一个斜左括号，且（B,λ,ρ）是其相关解。那么（$B,\cdot^{op},\circ$）是一个双斜左括号，当且仅当（B,λ,ρ）满足（4.8），即 $\rho_{\hat{\rho}_a(b)}=\rho_b$，对所有 $a,b\in B$ 均成立。

推论 5.10. 设（$B,\cdot,\circ$）是一个斜左括号，且（B,λ,ρ）是其相关解。那么（B,λ,ρ）是分配的，当且仅当（$B,\circ,\cdot$）是一个斜双侧胚。

证明. 回顾一下，解 (B,λ,ρ) 是左分配的，当且仅当 $(B,\cdot,\circ)$ 是一个双斜左括号；这等价于 $(B,\circ,\cdot)$ 是一个斜左括号。

$\hat{}$ 根据推论 5.9 和定理 5.7，解 (B,λ,ρ) 是右分配的，当且仅当 $(B,\lambda,\hat{}\rho)$ 是左分配的；这又当且仅当 $(B,\cdot^{op},\circ)$ 是一个双斜左括号。这等价于满足条件 (4.4)。□

引理 5.11. 设 (X,σ,τ) 是一个左分配解。则对于 $x,y\in X$

$$\tau_y\tau_x=\tau_{\hat{\tau}_y(x)}\tau_{\hat{\sigma}_x(y)}. \tag{5.5}$$

证明. 对于 $x, y \in X$，我们有

$$\tau_y \overset{(2.2)}{=} \tau_{\tau_{\hat{\tau}_y(x)}\hat{\sigma}_x(y)} \overset{(2.7)}{=} \tau_{\hat{\tau}_y(x)}\tau_{\hat{\sigma}_x(y)}\tau^{-1}_{\sigma_{\hat{\sigma}_x(y)}\hat{\tau}_y(x)} \overset{\text{Th. 5.5}}{=} \tau_{\hat{\tau}_y(x)}\tau_{\hat{\sigma}_x(y)}\tau^{-1}_{\sigma_y\sigma_y^{-1}(x)} = \tau_{\hat{\tau}_y(x)}\tau_{\hat{\sigma}_x(y)}\tau_x^{-1}. \qquad \square$$

我们在第2节中讨论过，$\sim$和 $\backsim$通常不是同余关系。然而，对于分配解而言，它们必须是同余关系：

定理5.12。 [19, 定理 3。4] 设 (X, σ, τ) 是一个解。若 (X, σ, τ) 是左分配的，则$\sim$ 是其同余关系。若 (X, σ, τ) 是右分配的，则 $\backsim$ 是其同余关系。

对于双斜左 brace，我们有一个对应于推论4.28的左侧类比。

命题 5.13。设 $(B, \cdot, \circ)$ 是一个双斜左 brace，且 (B, λ, ρ) 是其相关解。则

(i) 核 λ 是 $(B, \cdot, \circ)$ 的理想；(ii) $\mathrm{LRet}(B, \lambda, \rho)$ 是与 $(B, \cdot, \circ)$/核 λ相关联的解。

证明。令 a、$b \in \mathrm{Ker}\ \lambda$ 以及 x、$z \in B$。则 $\lambda_a(x) = x$，这意味着 $a \cdot x = a \circ x$ 和 $a^{-1} = \bar{a}$。

(i) 首先我们将证明，$\mathrm{Ker}\,\lambda$ 是斜左括号 $(B, \cdot, \circ)$ 的理想。

- $\mathrm{Ker}\ \lambda$ 是 $(B, \circ)$ 的正规子群，因为 λ 是一个同态 $(B, \circ) \to \mathrm{Aut}(B, \cdot)$；
- $\lambda_{a\cdot b} = \lambda_{a\circ b} = \lambda_a\lambda_b = \mathrm{id}$，这证明了 $\mathrm{Ker}\ \lambda$ 是 $(B, \cdot)$ 的子群；
- $\lambda_{x^{-1}\cdot a\cdot x}(z) = (x^{-1}\cdot a\cdot x)^{-1}\cdot((x^{-1}\cdot a\cdot x)\circ z) = x^{-1}\cdot a^{-1}\cdot x\cdot((x^{-1}\cdot a\cdot x)\circ z) = x^{-1}\cdot\bar{a}\cdot((a\cdot x)\circ\bar{x}\circ(x\cdot z)) = x^{-1}\cdot(\bar{a}\circ a\circ x\circ\bar{x}\circ(x\cdot z)) = x^{-1}\cdot x\cdot z = z$，这证明了 $\mathrm{Ker}\ \lambda$ 是 $(B, \cdot)$ 的正规子群；
- $\lambda_{\lambda_x(a)} \overset{(5.1)}{=} \lambda_x\lambda_a\lambda_x^{-1} = \mathrm{id}$，因此对于所有 $x \in X$，$\lambda_x(\mathrm{Ker}\ \lambda) \subseteq \mathrm{Ker}\ \lambda$。

（ii）现在我们要证明，核 λ 的陪集与 λ 的等价类重合 of $\sim$. 但是

$$x \circ \bar{y} \in \mathrm{Ker}\,\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{x\circ\bar{y}} = \mathrm{id} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_x = \lambda_y \quad \Leftrightarrow \quad x \sim y. \qquad \square$$

命题 5.13 的镜像版本并非如此直接，因为 ρ_a 的行为可能与 λ_a不同；例如，对于一般的斜左 brace，它并不是一个自同构。

引理 5.14。设（B，$\cdot$，$\circ$）是一个斜左 brace，且（B，λ，ρ）是其相关解。如果解（B，λ，ρ）是右分配的，那么

（i）ρ_y（x）$= \bar{y}\circ$（$x\cdot y$），对所有 x、$y \in B$均成立；（ii）对于所有 $x \in B$，ρ_x 是（B，$\cdot$）的反自同构。

证明。设 x、$y \in B$。根据定理 5.7，$\rho_y^{-1} = \hat{\lambda}_{y\circ}$

(i) 根据定理 4.5，我们有

$$\rho_y^{-1}(x) = \hat{\lambda}_y(x) = (y \circ x)\cdot y^{-1}.$$

容易验证

$$\rho_y^{-1}(\bar{y}\circ(x\cdot y)) = (y\circ\bar{y}\circ(x\cdot y))\cdot y^{-1} = x \quad \text{and} \quad \rho_y((y\circ x)\cdot y^{-1}) = \bar{y}\circ((y\circ x)\cdot y^{-1}\cdot y) = x,$$

由此完成证明。

(ii) 映射 $\hat{\lambda}: (B, \circ) \to \hat{\mathrm{Aut}}(B, \cdot_{op})$的同态，根据定理 4.5 和命题 4.24。因此，对于所有 $a, b, x \in B$，

$$\rho_x^{-1}(a\cdot b) = \hat{\lambda}_x(b\cdot_{op} a) = \hat{\lambda}_x(b)\cdot_{op}\hat{\lambda}_x(a) = \rho_x^{-1}(a)\cdot\rho_x^{-1}(b).$$

并且 ρ_x 是$(B, \cdot)$的自同构。

$\square$

定理 5.15. 设 $(B, \cdot, \circ)$ 是一个斜左括号，(B, λ, ρ) 是其相关解，且 $(B, \cdot_{op}, \circ)$ 是一个双斜左括号。那么

(i) 核 ρ 是 $(B, \cdot, \circ)$ 的理想，

(ii) RRet$(B,\cdot,\circ)$ 是与 $(B,\cdot,\circ)$/核 ρ 相关联的解。

证明。设 $x,y\in B$。由推论 5.9 和定理 5.7，解 (B,λ,ρ) 是右分配的，并且对所有 $x\in B$，$\rho_x=\hat{}\lambda_x^{-1}$。因此

(i) 核 $\rho=$核 $\hat{}\lambda^{-1}$，并且根据命题 5.13，它是 $(B,\cdot)$ 以及 $(B,\circ)$ 的正规子群。现在，根据定理 5.7 (ii)，$\rho_{\lambda_x(y)}=\rho_y$，这意味着对于所有 $x\in B$，λ_x(核 ρ) $\subseteq$核 ρ。

(ii) $x\circ\bar{y}\in$核 $\rho\quad\Leftrightarrow\quad\rho_{x\circ\bar{y}}=\mathrm{id}\Leftrightarrow\quad\rho_x=\rho_y\quad\Leftrightarrow\quad x\backsim y$。 □

例 5.16。考虑例 4.10 中定义的双斜左括号 $(\mathbb{Z}_{2n},\cdot,+_{2n})$。令 $(\mathbb{Z}_{2n},\lambda,\rho)$ 为其相关联的左分配解。根据命题 4.26，映射 ρ 是群 $(\mathbb{Z}_{2n},\cdot)$ 和 $S_{\mathbb{Z}_{2n}}$ 的反同态，但核 $\rho=\{0,n\}$ 不是正规子群，因为 $1^{-1}\cdot n\cdot 1=2-n\notin\{0,n\}$。

等价关系 $\sim$ 是同余关系，即，对于 $x,y\in\mathbb{Z}_{2n}$,

$$x\sim y\quad\Leftrightarrow\quad\forall(a\in\mathbb{Z}_{2n})\ \lambda_x(a)=\lambda_y(a)\Leftrightarrow$$
$$\forall(a\in\mathbb{Z}_{2n})\ (-1)^x a=(-1)^y a\quad\Leftrightarrow\quad x\equiv y\pmod 2.$$

The 商解 $(\mathbb{Z}_{2n}^{\sim},\lambda,\rho)$ 是一个含两个元素的平凡解。另一方面

$$x\backsim y\quad\Leftrightarrow\quad\forall(a\in\mathbb{Z}_{2n})\ \rho_x(a)=\rho_y(a)\quad\Leftrightarrow$$
$$\forall(a\in\mathbb{Z}_{2n})\ (-1)^{a+1}x+x+a=(-1)^{a+1}y+y+a\quad\Leftrightarrow$$
$$\forall(a\in\mathbb{Z}_{2n})\ x(1+(-1)^{a+1})=y(1+(-1)^{a+1})\quad\Leftrightarrow\quad 2x=2y\quad\Leftrightarrow\quad x\equiv y\pmod n.$$

但是 $\lambda_0(1)=1$ 和 $\lambda_n(1)=-1$ 并不 $\backsim$ 相关，因此，诱导解在商 $\mathbb{Z}_{2n}^{\backsim}$上未定义。最后，

$$x\approx y\quad\Leftrightarrow\quad x\sim y\ \wedge\ x\backsim y\quad\Leftrightarrow\quad x\equiv y\,(\text{模 }2)\ \wedge\ x\equiv y\,(\text{模 }n)\Leftrightarrow\quad x=y,\ \text{这意味着 t}$$

he 解 $(\mathbb{Z}_{2n},\lambda,\rho)$ 是不可收缩的。这对应于 Soc$(\mathbb{Z}_{2n})=\{0\}$这一事实 .

例 5.17. 设 $(G,\cdot)$ 是一个非阿贝尔群，且 $(G\times G,\lambda,\rho)$ 是例 4.9 中定义的解。这个解显然是分配的，因此等价关系 $\sim$、$\backsim$ 和 $\approx$ 都是同余关系。特别地，对于 (x,y)、$(a,b)\in G\times G$

$$(x,y)\sim(a,b)\quad\Leftrightarrow\quad\forall((u,w)\in G\times G)\ \lambda_{(x,y)}((u,w))=\lambda_{(a,b)}((u,w))\quad\Leftrightarrow$$
$$\forall(w\in G)\ y^{-1}\cdot w\cdot y=b^{-1}\cdot w\cdot b\quad\Leftrightarrow\quad y\cdot b^{-1}\in Z(G).$$

类似地，$(x,y)\backsim(a,b)\ \Leftrightarrow\ x\cdot a^{-1}\in Z(G)$。结合可得

$$(x,y)\approx(a,b)\quad\Leftrightarrow\quad(x,y)\sim(a,b)\ \wedge\ (x,y)\backsim(a,b)\quad\Leftrightarrow\quad x\cdot a^{-1},y\cdot b^{-1}\in Z(G).$$

当 $Z(G)$ 是平凡的时，解 $(G\times G,\lambda,\rho)$ 是不可收缩的。

6. 2-约化斜左 brace

本节分析哪些斜左 brace 产生 2-约化解。由于这些解是分配的，我们可以将上一节的所有结果专门应用于此。第一个结果说明 2-约化性的恒等式如何转化为斜左 brace 的性质。

命题 6.1. 设 $(B,\cdot,\circ)$ 是一个斜左括号，(B,λ,ρ) 是其相关解。那么

(i) (B,λ,ρ) 满足 (3.1)，这意味着对于所有 $x,y\in B$，$\lambda_{\lambda_x(y)}=\lambda_y$，当且仅当映射$\lambda$: $B\to B$; $a\mapsto\lambda_a$ 是群 $(B,\cdot)$ 到 Aut$(B,\cdot)$ 的群同态；(ii) (B,λ,ρ) 满足 (3.2)，这意味着对于所有 $x,y\in B$，$\rho_{\rho_x(y)}=\rho_y$，当且仅当映射ρ: $B\to B$; $a\mapsto\rho_a$ 是群 $(B,\cdot)$ 到 S_B 的群同态，

(iii) (B,λ,ρ) 满足 (3.3)，这意味着对于所有 $x,y\in B$，$\lambda_{\rho_x(y)}=\lambda_y$，当且仅当映射$\lambda$: $B\to B$; $a\mapsto\lambda_a$是群 $(B,\cdot)$ 到 Aut$(B,\cdot)$ 的反同态，
(iv) (B,λ,ρ) 满足 (3.4)，即对于所有 $x,y\in B$，$\rho_{\lambda_x(y)}=\rho_y$，当且仅当映射$\rho$: $B\to B$; $a\mapsto\rho_a$是群 $(B,\cdot)$ 与 Aut$(B,\cdot)$ 之间的反同态，

证明。由注 4.3 和命题 4.26，对于 $x,y\in B$，我们有：

(i) $\lambda_{\lambda_x(y)}=\lambda_y \quad\Leftrightarrow\quad \lambda_y=\lambda_{\lambda_x^{-1}(y)}=\lambda_{\bar{x}\circ(x\cdot y)}=\lambda_x^{-1}\lambda_{x\cdot y} \quad\Leftrightarrow\quad \lambda_{x\cdot y}=\lambda_x\lambda_y$;
(ii) $\rho_x=\rho_{\rho_y(x)}=\rho_{\overline{\lambda_x(y)}\circ x\circ y}=\rho_y\rho_x\rho_{\overline{\lambda_x(y)}}=\rho_y\rho_x\rho^{-1}_{\lambda_x(y)} \quad\Leftrightarrow\quad \rho_y\rho_x=\rho_x\rho_{\lambda_x(y)} \quad\Leftrightarrow$
$\rho_x\rho_y=\rho_{\lambda_x^{-1}(y)}\rho_x=\rho_{\bar{x}\circ(x\cdot y)}\rho_x=\rho_{x\cdot y}\rho_x^{-1}\rho_x=\rho_{x\cdot y}$;
(iii) 由引理 4.12 和定理 5.5 可得，但我们仍然给出一个直接证明，因为它类似于 (ii) 的证明：
$\lambda_x=\lambda_{\tau_y(x)}=\lambda_{\lambda_x(y)\circ x\circ y}=\lambda^{-1}_{\lambda_x(y)}\lambda_x\lambda_y \quad\Leftrightarrow\lambda_x\lambda_y=\lambda_{\lambda_x(y)}\lambda_x \quad\Leftrightarrow\quad \lambda_y\lambda_x=\lambda_x\lambda_{\lambda_x^{-1}(y)}$
$=\lambda_x\lambda_{\bar{x}\circ(x\cdot y)}=\lambda_{x\cdot y}$;
(iv) $\rho_{\lambda_x(y)}=\rho_y \quad\Leftrightarrow\quad \rho_y=\rho_{\lambda_x^{-1}(y)}=\rho_{\bar{x}\circ(x\cdot y)}=\rho_{x\cdot y}\rho^{-1}_x \quad\Leftrightarrow\quad \rho_y\rho_x=\rho_{x\cdot y}$ 并且根据定理 5.15，ρ_x 是一个自同构。□

在 [3] 中，以 λ-同态斜左 brace 的名义研究了满足映射 λ 是群 $(B,\cdot)$ 与 Aut$(B,\cdot)$ 的群同态的斜左 brace $(B,\cdot,\circ)$。特别地，其中（[3, 定理 2.12]）证明了任何 λ-同态斜左 brace 都是亚平凡的。因此，根据命题 6.1(i)，我们立即得到：

推论 6.2. 每个满足 (3.1) 的斜左 brace $(B,\cdot,\circ)$，即对所有 $x,y\in B$，$\lambda_{\lambda_x(y)}=\lambda_y$，都是亚平凡的。

引理 6.3. 设 (B,λ,ρ) 是与斜左括号 $(B,\cdot,\circ)$ 相关联的 2-约化解。那么对于 $x,y\in B$，有

(i) $y\circ y=y\cdot\overline{y^{-1}}$,
(ii) $(y^{-1}\circ x)\cdot y=(\bar{y}\circ x)\cdot\bar{y}^{-1}=\rho_y(x)$,
(iii) $\bar{y}\cdot y=y\cdot\bar{y}$,
(iv) $y^{-1}\cdot\bar{y}^{-1}=y^{-1}\circ y$,
(iv) $y\circ y=\overline{y^{-1}}\circ\bar{y}^{-1}$,
(vi) $\overline{\bar{y}\cdot y}=(\bar{y}\cdot y)^{-1}=y^{-1}\circ y$,
(vii) $x\circ y\circ\bar{x}\circ\bar{y}=(x\circ y)\cdot(y\circ x)^{-1}$.

证明. 设 $x,y\in B$。
(i) 由引理 4.12 可得：

$$y^{-1}\cdot(y\circ y)=\lambda_y(y)=\lambda^{-1}_{y^{-1}}(y)=\overline{y^{-1}}\circ(y^{-1}\cdot y)=\overline{y^{-1}} \quad\Rightarrow\quad y\circ y=y\cdot\overline{y^{-1}}.$$

(ii) 由引理 5.14 可得

$$\rho_y(x)=\bar{y}\circ(x\cdot y)\overset{(4.1)}{=}(\bar{y}\circ x)\cdot\bar{y}^{-1}. \tag{6.1}$$

因此，由 2-约化性

$$\rho_y(x)\overset{(3.4)}{=}\rho_{\lambda^{-1}_{y^{-1}}(y)}(x)=\rho_{\overline{y^{-1}}}(x)=(y^{-1}\circ x)\cdot y.$$

（iii）再次由引理 5.14 得：

$$\overline{y^{-1}}=\overline{y^{-1}}\circ(y\cdot y^{-1})=\rho_{y^{-1}}(y)\overset{\text{(ii)}}{=}(y\circ y)\cdot y^{-1} \quad\Rightarrow\quad \overline{y^{-1}}\cdot y=y\circ y\overset{\text{(i)}}{=}y\cdot\overline{y^{-1}} \quad\Rightarrow\quad \bar{y}\cdot y=y\cdot\bar{y}.$$

(iv) By Lemma 4.12

$$y^{-1}=\lambda_y(\bar{y})=\lambda_{\bar{y}^{-1}}(\bar{y})=\bar{y}\cdot(\bar{y}^{-1}\circ\bar{y}) \quad\Rightarrow\quad \bar{y}^{-1}\cdot y^{-1}=\bar{y}^{-1}\circ\bar{y}\overset{y\mapsto\bar{y}}{\Rightarrow} y^{-1}\cdot\bar{y}^{-1}=y^{-1}\circ y.$$

（v）条件（iii）和（iv）意味着：

$$y^{-1}\circ y \overset{\text{(iv)}}{=} y^{-1}\cdot\bar{y}^{-1} = (\bar{y}\cdot y)^{-1} \overset{\text{(iii)}}{=} (y\cdot\bar{y})^{-1} = \bar{y}^{-1}\cdot y^{-1} \overset{\text{(iv)}}{=} \bar{y}^{-1}\circ\bar{y} \quad \Rightarrow$$
$$y^{-1}\circ y\circ y = \bar{y}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \overline{y^{-1}}\circ\bar{y}^{-1} = y\circ y.$$

（vi）根据引理 4.12，我们有：

$$y\circ(\bar{y}\cdot y) = \lambda_{\bar{y}}^{-1}(y) = \lambda_y(y) = \overline{y^{-1}} \quad \Rightarrow$$
$$\bar{y}\cdot y = \bar{y}\circ\overline{y^{-1}} = \overline{y^{-1}\circ y} \overset{\text{(iv)}}{=} \overline{(\bar{y}\cdot y)^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \overline{\bar{y}\cdot y} = (\bar{y}\cdot y)^{-1} \overset{\text{(iv)}}{=} y^{-1}\circ y.$$

（vii）根据 2-约化性，群 $\mathcal{G}_\ell(X)$ 是交换的。因此

$$x^{-1}\cdot(x\circ(y^{-1}(y\circ\bar{x}))) = \lambda_x(y^{-1}\cdot(y\circ\bar{x})) = \lambda_x\lambda_y(\bar{x}) =$$
$$\lambda_y\lambda_x(\bar{x}) = \lambda_y(x^{-1}\cdot(x\circ\bar{x})) = \lambda_y(x^{-1}) = y^{-1}\cdot(y\circ x^{-1}).$$

根据引理 4.2，我们有：

$$x^{-1}\cdot(x\circ(y^{-1}\cdot(y\circ\bar{x}))) \overset{(4.2)}{=} x^{-1}\cdot x\cdot(x\circ y)^{-1}\cdot(x\circ y\circ\bar{x}) = (x\circ y)^{-1}\cdot(x\circ y\circ\bar{x})$$

and

$$y^{-1}\cdot(y\circ x^{-1}) = y^{-1}\cdot(y\circ(1\cdot x^{-1})) \overset{(4.3)}{=} y^{-1}\cdot(y\circ 1)\cdot(y\circ x)^{-1}\cdot y =$$
$$y^{-1}\cdot y\cdot(y\circ x)^{-1}\cdot y = (y\circ x)^{-1}\cdot y.$$

因此

$$(x\circ y)^{-1}\cdot(x\circ y\circ\bar{x}) = (y\circ x)^{-1}\cdot y \quad \Rightarrow$$
$$x\circ y\circ\bar{x} = (x\circ y)\cdot(y\circ x)^{-1}\cdot y. \tag{6.2}$$

在（6.2）中将 y 替换为 $\bar{x}$，并将 x 替换为 y，即可完成证明：

$$y\circ\bar{x}\circ\bar{y} = (y\circ\bar{x})\cdot(\bar{x}\circ y)^{-1}\cdot\bar{x} \quad \Rightarrow \quad x\circ y\circ\bar{x}\circ\bar{y} = x\circ((y\circ\bar{x})\cdot(\bar{x}\circ y)^{-1}\cdot\bar{x}) \overset{(4.1)}{=}$$
$$(x\circ((y\circ\bar{x})\cdot(\bar{x}\circ y)^{-1}))\cdot x^{-1}\cdot(x\circ\bar{x}) \overset{(4.3)}{=} (x\circ y\circ\bar{x})\cdot(x\circ\bar{x}\circ y)^{-1}\cdot x\cdot x^{-1} =$$
$$(x\circ y\circ\bar{x})\cdot y^{-1} \overset{(6.2)}{=} (x\circ y)\cdot(y\circ x)^{-1}\cdot y\cdot y^{-1} = (x\circ y)\cdot(y\circ x)^{-1}. \qquad \square$$

定理 6.4。设 $(B,\cdot,\circ)$ 是一个斜左括号，且 (B,λ,ρ) 是其相关解。则以下条件等价：

(i)（B，λ，ρ）是2-约化的；(ii) $\lambda_{a\cdot b} = \lambda_{b\cdot a} = \lambda_{a\circ b}$ 和 $\rho_{a\cdot b} = \rho_{b\cdot a} = \rho_{a\circ b}$，对所有 a、$b\in B$而言；(iii)（B，λ，ρ）的多置换层级至多为2；(iv)（B，$\cdot$，$\circ$）是类至多为2的幂零的；(v)（B，$\cdot^{op}$，$\circ$）是类至多为2的幂零的。

证明。(i)⇔(ii)由命题 6.1推出，(iii)⇔(iv)由推论4.28推出，(iii)⇔(i)：我们使用命题3.4，因为 $\lambda_1(x) = x = \rho_1 x$。(iv)⇔(v)是多余的，现在根据定理 4.5。但根据命题 3.10，这等价于 (B,λ,ρ) 是 2-约化的。□

推论 6.5. 设 (B,λ,ρ) 是与斜左括号 $(B,\cdot,\circ)$ 相关联的 2-约化解。则 $(B,\cdot)$ 是类至多为 2 的幂零群。

证明。我们有 $\mathrm{Soc}(B) \le Z(B,\cdot)$。并且，根据定理 6.4，$(B,\cdot)/\mathrm{Soc}(B)$ 是阿贝尔的。 □

在第3节中，我们将2-约化解构造为阿贝尔群的不交并。因此自然会产生这样一个问题：这些阿贝尔群在斜左括号中是否具有某种结构意义。下面的例子表明，事实并非如此。

例6.6。（另见 [3, 例 5.6]）设 $(\mathbb{Z}_{2n}, +_{2n}, \cdot)$ 是例 4.10 的对偶斜左括号，即对于 $a, b \in \mathbb{Z}_{2n}$，有 $a \cdot b = a + (-1)^a b$。于是 $\lambda_a(b) = \rho_a(b) = (-1)^a b$。由于$[\mathbb{Z}_{2n} : \mathrm{Soc}(\mathbb{Z}_{2n})] = 2$，相关解是 2-约化的。它同构于以下并：

$$(\mathbb{Z}_1, \underbrace{\mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_2}_{\frac{n-1}{2}\times}, \mathbb{Z}_1, \underbrace{\mathbb{Z}_2, \dots, \mathbb{Z}_2}_{\frac{n-1}{2}\times}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}).$$

回顾一下，对于一个解 (X, σ, τ)，我们可以关联两个群：

$$G(X, r) = \langle X \mid x \circ y = \sigma_x(y) \circ \tau_y(x) \rangle \qquad \text{and} \qquad A(X, r) = \langle X \mid x \cdot y = y \cdot \sigma_y \hat{\sigma}_y(x) \rangle.$$

这两个群彼此配合后构成一个斜左括号。下面定理的证明中有很大一部分几乎是对 [29, 定理 5.4] 证明的复制粘贴。它也直接源自 Castelli 和 Trappeniers 刚刚发表的 [5, 定理 3.13] 。

定理6.7. 设 (X, σ, τ) 是一个 2-约化解。那么 $G(X, r)$ 是一个 2 类幂零斜左括号。

证明. 设 $(G(X, r)\ \lambda, \rho)$ 是与斜左括号 $G(X, r)$ 相关联的解。根据定理 6.4，我们需要证明 $\lambda_{a\cdot b} = \lambda_{b\cdot a} = \lambda_a \lambda_b$ 和 $\rho_{a\cdot b} = \rho_{b\cdot a} = \rho_a \rho_b$ 对所有 $a, b \in G(X, r)$ 都成立。部分 $\lambda_{b\cdot a} = \lambda_a \lambda_b$ 由 [29, 推论 5.5] 得出。

我们来证明 λ 是一个同态。由 (3.1) 可得 $\sigma_{\sigma_x(y)} = \sigma_y$，对所有 $x, y \in X$ 均成立，因此 $\lambda_{\lambda_x(y)} = \lambda_y$，对所有 $x, y \in X$ 均成立。由于 X 生成 $G(X, r)$，我们归纳得到 $\lambda_{\lambda_a(y)} = \lambda_y$，对所有 $a \in G(X, r)$ 和 $y \in X$ 均成立。

现在令 $w = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdot \dots \cdot x_k^{e_k}$，其中 $x_i \in X$ 和 $e_i = \pm 1$，对于 $1 \le i \le k$。我们将通过对 k进行归纳来证明

$$\lambda_w = \lambda_{x_1}^{e_1} \lambda_{x_2}^{e_2} \cdots \lambda_{x_k}^{e_k}.$$

对于 $k = 1$ 和 $e_1 = 1$，结论显然成立。对于 $e_1 = -1$，我们注意到

$$\lambda_a(\bar{a}) = a^{-1} \quad \Rightarrow \quad a = \lambda_a(\bar{a}^{-1}) \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = \lambda_{\bar{a}}(a^{-1}) \quad \Rightarrow \quad a = \overline{\lambda_{\bar{a}}(a^{-1})},$$

因此

$$\lambda_{x^{-1}} = \lambda_{\overline{\lambda_{\overline{x^{-1}}}(x)}} = \lambda^{-1}_{\lambda_{\overline{x^{-1}}}(x)} = \lambda_x^{-1}.$$

现在假设归纳假设对 $k-1$ 成立，并计算，对于 $w = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdot \dots \cdot x_k^{e_k}$和 $v = x_1^{e_1} x_2^{e_2} \cdot \dots \cdot x_{k-1}^{e_{k-1}}$

$$\lambda_w = \lambda_{v \cdot x_k^{e_k}} = \lambda_{v \cdot \lambda_v \lambda_v^{-1}(x_k^{e_k})} = \lambda_{v \circ \lambda_v^{-1}(x_k^{e_k})} = \lambda_v \lambda_{\lambda_{\bar{v}}(x_k)^{e_k}} = \lambda_v \lambda^{e_k}_{\lambda_{\bar{v}}(x_k)} = \lambda_{x_1}^{e_1} \cdots \lambda_{x_{k-1}}^{e_{k-1}} \lambda_{x_k}^{e_k}$$

并且 λ 关于 $\cdot$是一个同态。

现在，根据命题 3.10，$(X, \hat{}\sigma, \hat{}\tau)$ 也是 2-约化的。因此，对于斜左括号 $\hat{}\hat{}\hat{}\hat{}G(X, \hat{}r)$，对所有 $a, b \in G(X, \hat{}r)$，我们有 $\lambda_{a \cdot_{op} b} = \lambda_{b \cdot_{op} a} = \lambda_a \lambda_b$。根据定理 5.7，我们有$\rho_a^{-1} = \hat{}\lambda_a$，从而得到 $\rho_{a\cdot b} = \hat{}\lambda^{-1}_{b \cdot_{op} a} = \hat{}\lambda_b^{-1}\, \hat{}\lambda_a^{-1} = \rho_b \rho_a$，类似地还有 $\rho_{b\cdot a} = \rho_b \rho_a$。 □

References

[1] D. Bachiller, *Classification of braces of order p^3*, 《纯粹与应用代数杂志》219(8)（2015），3568–3603。[2] D. Bachiller, *Solutions of the Yang-Baxter equation associated to skew left braces, with applications to racks*, 《结理论及其分支》27 No. 08（2018），1850055。[3] V.G. Bardakov，M.V. Neshchadim，M.K. Yadav, *On λ-homomorphic skew braces*, 《纯粹与应用代数杂志》226(6)（2022），106961。[4] A. Caranti, *Bi-Skew Braces and Regular Subgroups of the Holomorph*, 《代数杂志》516（2020），352-372。[5] M. Castelli，S. Trappeniers, *Studying solutions of the Yang-Baxter equation through skew braces with an application to indecomposable involutive solutions with abelian permutation group* 2303 00581 , https://arxiv.org/pdf/ . .pdf [6] F. Ced´o, E. Jespers，L. Kubat，A. Van Antwerpen，C. Verwimp, , *On various types of nilpotency of the structure monoid and group of a set-theoretic solution of the Yang–Baxter equation* **227** 2 2022 107194。[7] F. Ced´o, E. Jespers，J. Okni´nski, *Braces and the Yang-Baxter equation*, 《数学物理通讯》327（2014），101–116。扩展版本 arXiv:1205.3587。[8] F. Ced´o，E. Jespers, ´A. del R´ıo, *Involutive Yang-Baxter groups*, 《美国数学会汇刊》362（2010），2541–2558。[9] F. Ced´o，A. Smoktunowicz，L. Vendramin, *Skew left braces of nilpotent type*, 《伦敦数学学会会刊》（3），118(6)（2019），1367–1392。[10] L.N. Childs, *Bi-skew braces and Hopf Galois structures*, 《纽约数学杂志》25（2019），574—588。[11] V.G. Drinfeld, *On some unsolved problems in quantum group theory*, 《量子群》（列宁格勒，1990），1992，第 1.8 页。[12] P. Etingof，T. Schedler，A. Soloviev, *Set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation*, 《杜克数学杂志》100（1999），169–209。[13] T. Gateva-Ivanova，P. Cameron, *Multipermutation solutions of the Yang-Baxter equation*, 《数学物理通讯》309（2012），583–621。扩展版本 arXiv:0907.4276。[14] T. Gateva-Ivanova, *Set-theoretic solutions of the Yang-Baxter equation, braces and symmetric groups*, 《数学进展》338（2018），649–701。[15] L. Guarnieri，L. Vendramin, *Skew braces and the Yang Baxter equation*, 《数学计算》86(307)（2017），2519–2534。[16] P. Jedli˘cka，A. Pilitowska，D. Stanovsk´y，A. Zamojska-Dzienio, *The structure of medial quandles*, 《代数杂志》443（2015），300–334。[17] P. Jedli˘cka，A. Pilitowska，A. Zamojska-Dzienio, *The retraction relation for biracks*, 《纯粹与应用代数杂志》223（2019），3594–3610。[18] P. Jedli˘cka，A. Pilitowska，A. Zamojska-Dzienio，分配 birack 与杨-巴克斯特方程的解，《国际代数与计算杂志》30（2020），667–683。[19] P. Jedli˘cka，A. Pilitowska，A. Zamojska-Dzienio，杨-巴克斯特方程二级多置换解的构造，《组合理论杂志》A辑，176（2020），105295。[20] M. Jimbo, *Introduction to the Yang-Baxter equation*, 《现代物理学国际杂志》A 4(15)（1989），3759–3777。[21] C. Kassel, *Quantum Groups*, 《数学研究生教材》，第 155 卷，施普林格出版社，纽约，1995。[22] A. Koch，P.J. Truman, *Opposite skew left braces and applications*, 《代数杂志》546（2020），218–235。[23] V. Lebed，L. Vendramin, *On structure groups of set-theoretical solutions to the Yang-Baxter equation*, 《爱丁堡数学学会会刊》62(3)（2019），683–717。[24] W. Rump, *Braces, radical rings, and the quantum Yang-Baxter equation*, 《代数杂志》307（2007），153–170。[25] W. Rump, *Classification of Non-Degenerate Involutive Set-Theoretic Solutions to the Yang-Baxter Equation with Multipermutation Level Two* **25** 2022 1293 1307 , 《代数与表示论》（ ），–。[26] A. Smoktunowicz, *On Engel groups, nilpotent groups, rings, braces and the Yang-Baxter equatiuon*, 《美国数学会汇刊》370(9)（2018），6535–6564。[27] A. Smoktunowicz，L. Vendramin, *On skew braces (with an appendix by N. Byott and L. Vendramin)*, 《组合代数杂志》2(1)（2018），47–86。[28] A. Soloviev, *Non-unitary set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation*, 《数学研究快报》7（2000），577–596。[29] L. Stefanello，S. Trappeniers, *On bi-skew braces and brace blocks*, 《纯粹与应用代数杂志》227(5)（2023），107295。[30] L. Vendramin, *Problems on skew left braces*, 《群论与代数应用进展》7（2019），15–37。

(P.J.) Department of Mathematics, Faculty of Engineering, Czech University of Life Sciences, Kamýcká 129, 16521 Praha 6, Czech Republic

(A.P.) Faculty of Mathematics and Information Science, Warsaw University of Technology, Koszykowa75, 00-662 Warsaw, Poland*Email address*: (P.J.) jedlickap@tf.czu.cz*Email address*: (A.P.) agata.pilitowska@pw.edu.pl