arXiv:2303.15171v1 [math.OA] 27 Mar 2023

代数化量子场论中的量子操作

Luca Giorgetti[a]

[a] 数学系，罗马第二大学 Tor Vergata 分校，科学研究街 1 号，
I-00133罗马，意大利 giorgett@mat.uniroma2.it

1 或 1+1 个时空维数中的共形量子场论（CFT）（分别称为手征共形场论和完整共形场论）有多种“公理化”（数学上严格且与模型无关的）表述。在本文中，我们讨论 Haag 和 Kastler 提出的冯·诺依曼代数表述 [43], ，主要限于手征共形场论框架 [18]。无论选择哪种表述，都可以提出如下问题：给定一个理论 $\mathcal{A}$，它有多少种以及哪些可能的扩张 $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$ 或子理论 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$? 如何构造并对它们进行分类，以及研究它们的性质？扩张通常使用 $\mathcal{A}$ 的表示所构成的编织张量范畴中的代数对象语言来描述，而子理论则需要不同的思想。

本文回顾了关于给定手征共形场论（共形网）的冯·诺伊曼代数表述（共形子网）中子理论研究的近期结构性成果，[4], [5], [6], [7]。此外，在 [7], 的基础上，我们为共形网提出了一种类似于顶点算子代数（VOA）中量子伽罗瓦理论的“量子伽罗瓦理论” [28], [29]。我们还概述了 3+1 维代数量子场论（AQFT）的情形。

上述成果利用了作用于冯·诺依曼代数网的一族（极端）真空态保持的保单位完全正映射，以下简称量子操作。这些映射是普通真空保持规范自同构的自然推广，因此发挥着“广义全局规范对称性”的作用。量子操作足以描述给定共形网中具有相同中心荷的所有可能的共形子网。

1 共形网

共形网是手征共形场论（CFT）的冯·诺依曼代数描述；手征即一维（存在于 1+1维闵可夫斯基时空的一条光线上）。我们将这条光线与 $\mathbb{R}$ 等同，并为方便起见考虑其一点紧化 S^1（单位圆）。记 $\mathcal{I}$ 为 S^1上所有非空、非稠密开区间的集合，并以$I' := (S^1 \setminus I)^\circ \in \mathcal{I}$表示 $I \in \mathcal{I}$补集的内部。令 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) := \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm 1\}$为莫比乌斯群，它通过分式线性变换作用于 S^1。另令 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$和$\mathcal{U}(\mathcal{H})$分别表示 $\mathcal{H}$ 上的有界算子代数及其酉子群。自成一体的入门介绍和参考文献可参见例如 [18,第 3] 章及 [60] 。

定义 1.1. 在 S^1 上的莫比乌斯协变网是一个三元组 $(\mathcal{A}, U, \Omega)$，由以下对象组成：一族冯·诺伊曼代数 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(I) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}) : I \in \mathcal{I}\}$，它们作用在同一个可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上；一个强连续酉表示 $U\colon \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R}) \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$；以及一个单位向量 $\Omega \in \mathcal{H}$，并满足以下性质：

(i) 等距性：如果 $I_1 \subset I_2$, $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$，则 $\mathcal{A}(I_1) \subset \mathcal{A}(I_2)$。

（ii）局域性： $\mathcal{A}(I_1) \subset \mathcal{A}(I_2)'$，如果 $I_1 \cap I_2 = \emptyset$、 I_1、 $I_2 \in \mathcal{I}$。

（iii）M¨obius 协变性：如果 $I \in \mathcal{I}$、 $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$,

$$U(g)\mathcal{A}(I)U(g)^{-1} = \mathcal{A}(gI).$$

(iv) 能量正性： U 具有正能量。也就是说，共形哈密顿量（$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 的单参数旋转子群的生成元）具有非负谱。

(v) 真空向量：Ω 是满足以下性质的向量（相差一个相位因子意义下）唯一的向量：对于每个 $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$，都有 $U(g)\Omega = \Omega$；并且形如 $x\Omega$、 $x \in \bigvee_{I\in\mathcal{I}} \mathcal{A}(I)$ 的向量在 $\mathcal{H}$ 中稠密。这里， $\bigvee_{I\in\mathcal{I}} \mathcal{A}(I)$ 表示在 $\mathcal{H}$ 上生成的冯·诺依曼代数，而 $\mathcal{A}(I)'$ 表示 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 中 $\mathcal{A}(I)$ 的交换子，即 $\mathcal{A}(I)' := \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : xy = yx, y \in \mathcal{A}(I)\}$。特别地，根据冯·诺依曼双交换子定理， $\mathcal{A}(I) = \mathcal{A}(I)''$。相关介绍可参见例如 [51]。 $\mathcal{A}(I)$ 将被称为局部代数，而 $\mathcal{H}$ 则称为 $\mathcal{A}$的真空希尔伯特空间。

莫比乌斯群在 $3{+}1$ 维量子场论中的作用，与庞加莱群的作用相同。在低维共形情形中，量子场通常具有更大的（无限维）对称群：单位圆上保定向微分同胚所构成的群 $\mathrm{Diff}_+(S^1)$。

定义 1.2. 若莫比乌斯协变网 $(\mathcal{A}, U, \Omega)$ 还满足以下条件，则称其为 S^1上的共形网：

(vi) U 可扩张为 $\mathrm{Diff}_+(S^1)$ 的强连续射影酉表示，仍记为 U，使得对每个 $I \in \mathcal{I}$,

$$U(\gamma)\mathcal{A}(I)U(\gamma)^{-1} = \mathcal{A}(\gamma I), \quad \gamma \in \mathrm{Diff}_+(S^1),$$
$$U(\gamma)xU(\gamma)^{-1} = x, \quad x \in \mathcal{A}(I), \gamma \in \mathrm{Diff}_+(I'),$$

其中，$\mathrm{Diff}_+(I')$ 表示 S^1上局域于 I'的保定向微分同胚子群，即满足 $\gamma(z) = z$ 对所有 $z \in I$ 成立的 $\gamma \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$。

共形网为手征共形场论提供了一种模型无关的处理方法，并且在这一框架下已经构造并分类了许多实例，参见例如 [54]。从数学上看，局部代数是 III 型因子，这是冯·诺依曼代数中最非交换的无限维类型（没有非零的忠实迹/迹权） [21] ，且中心是平凡的（等于 $\mathbb{C}1$, 即作用在 $\mathcal{H}$上的标量算子）。真空向量 Ω 对每个局部代数 $\mathcal{A}(I)$ 都是循环且分离的（即所谓的 Reeh–Schlieder性质）。也就是说，$\mathcal{A}(I)\Omega$ 是 $\mathcal{H}$ 的稠密子空间，并且 $x\Omega = 0$, $x \in \mathcal{A}(I)$，意味着 $x = 0$。

注 1.3。“因子”这一术语源自这类冯·诺依曼代数最简单的（有限维）例子：满的 $n \times n$ 复矩阵代数 $M_n(\mathbb{C})$。如果 $M_n(\mathbb{C})$ 在某个 $\mathbb{C}^m$ 上（忠实地）作用， $m \in \mathbb{N}$那么该空间便“分解”为 $\mathbb{C}^m \cong \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^k$，其中重数指标为 $k \in \mathbb{N}$； $M_n(\mathbb{C})$ 作用在第一个 $\mathbb{C}^n$ 上，而 $(M_n(\mathbb{C}))' \cong M_k(\mathbb{C})$（交换子取于 $\mathbb{C}^m$中）作用在第二个 $\mathbb{C}^k$ 上。并非所有因子都具有这种形式， [64], 也就是说，$\mathcal{N} = \mathcal{N}'' \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 具有平凡中心 $\mathcal{N} \cap \mathcal{N}' = \mathbb{C}1$，即 $\mathcal{N} \vee \mathcal{N}' = \mathcal{B}(\mathcal{H})$，并不意味着希尔伯特空间 $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}_1 \bar{\otimes} \mathcal{H}_2$ 存在张量“ 分解 ”，使得 $\mathcal{N}$ 忠实地作用于 $\mathcal{H}_1$，且 $\mathcal{N}'$ 忠实地作用于 $\mathcal{H}_2$。

2 共形子网

给定一个手征共形场论，例如以共形网 $\mathcal{A}$ 的形式给出，研究并分类其扩张的问题可以表述为：研究其（辫子张量）表示范畴中的类代数对象 $\mathcal{A}$， [61]。更准确地说，相对局域扩张 $\mathcal{B} \supset \mathcal{A}$，即满足以下条件的扩张：若 $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$，则 $\mathcal{B}(I_1) \subset \mathcal{A}(I_2)'$；具有有限琼斯指数 [50], [57]（即“相对大小有限”）的此类扩张，可由表示范畴 $\mathcal{A}$ 中某些 C*-Frobenius 代数对象来描述（也称为 Q-系统 [58], ，参见 [8], [41]）。 $\mathcal{B}$ 本身的局域性可以用其关联的 Q-系统通过适当的“交换性约束”来刻画。在手征和完整（1+1 维）共形场论的顶点算子代数（VOA）表述中，例如分别参见 [52], [47], ；同一理论模范畴中的交换代数结构，最终也被证明能够描述其“有限阶”局域扩张， [55], [46], [56]。在有限指数／有限阶的手征共形场论情形下，共形网与酉顶点算子代数的两种扩张理论 [18] 已在 [42], [20] 中得到统一。在共形网框架中，该理论还被推广到了无限指数离散情形， [25], 参见 [48], [14], ，并且近期构造出了一些完整共形场论的新模型 [1]。而对于一般的半离散情形 [25], ，参见 [36], ，目前尚不清楚应如何推进。近期，VOA 框架也开始着手研究“无限阶”扩张， [24]。

研究给定理论 $\mathcal{A}$ 的子理论是一个截然不同的问题，无论指标有限还是无限。子理论的结构不再由 $\mathcal{A}$ 的表示论所支配（例如，所谓的全纯模型没有非真空不可约表示，却可能有许多彼此不等价的子理论 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$）。

定义 2.1. 共形网 $(\mathcal{A}, U, \Omega)$ 的共形子网是一族 $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(I) : I \in \mathcal{I}\}$ 非平凡的冯·诺依曼代数，它们作用于同一个 $\mathcal{H}$ 空间 $\mathcal{A}$，并满足：

(i) 对每个 $I \in \mathcal{I}$， $\mathcal{B}(I) \subset \mathcal{A}(I)$。

(ii) 对每个 $I \in \mathcal{I}, g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$， $U(g)\mathcal{B}(I)U(g)^{-1} = \mathcal{B}(gI)$。

(iii) 对每个 $I_1 \subset I_2$, $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$， $\mathcal{B}(I_1) \subset \mathcal{B}(I_2)$。

备注 2.2. 共形子网 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 还满足相对于同一个 U 的微分同胚协变性，参见例如 [18, 第 3 节。4], [7, 第 2] 节：

$$U(\gamma)\mathcal{B}(I)U(\gamma)^{-1} = \mathcal{B}(\gamma I), \quad I \in \mathcal{I}, \gamma \in \mathrm{Diff}_+(S^1),$$
$$U(\gamma)xU(\gamma)^{-1} = x, \quad x \in \mathcal{B}(I), \gamma \in \mathrm{Diff}_+(I').$$

上面的第二个等式由定义 1.2 中的第二个等式推出，只是因为$\mathcal{B}(I) \subset \mathcal{A}(I)$。由这个第二个等式，再利用网 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{H}$ 上的所谓 Haag 对偶性（即，对于 $I \in \mathcal{I}$，有 $\mathcal{A}(I)' = \mathcal{A}(I')$；这是 $\mathcal{A}$ 在 $\mathcal{H}$上的真空向量 Ω 所具有的循环性和分离性这一性质的结果， [38]），可知，如果$\gamma \in$ Diff+(I)，则 $U(\gamma) \in \mathcal{A}(I)$。不过请注意， $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{H}$上并不满足 Haag 对偶性，因此，如果 $\gamma \in$ Diff+(I)，则 $U(\gamma) \in \mathcal{B}(I')'$，但 $U(\gamma)$ 可能属于也可能不属于 $\mathcal{B}(I)$。令

$$\mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}(I) := \{U(\gamma) : \gamma \in \mathrm{Diff}_+(I)\}'', \quad I \in \mathcal{I},$$

且 $(\mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}, U, \Omega)$ 是 $(\mathcal{A}, U, \Omega)$ 的 Virasoro 子网。根据前面的讨论，$\mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}$ 可能是也可能不是 $\mathcal{B}$的子网。Virasoro 网完全由一个参数 c 决定

称为中心荷（其可能取值在 1 以下是量子化的，即 $c=0$,$c=1-\frac{6}{m(m+1)}$ 对应 $m\geq 3$, $m\in\mathbb{N}$;~~在 1~~以上则连续），[3], [39]。
共形包含 $\mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}\subset\mathcal{A}$ 自动是不可约的，[14]（即对于每个 $I\in\mathcal{I}$，$\mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}(I)'\cap\mathcal{A}(I)=\mathbb{C}1$），而且是极小的，[11], 也就是说，它没有非平凡的共形子网。共形包含 $\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ 是不可约的（即对于每个 $I\in\mathcal{I}$，$\mathcal{B}(I)'\cap\mathcal{A}(I)=\mathbb{C}1$），当且仅当上述条件 $U(\gamma)\in\mathcal{B}(I)$ 在 $\gamma\in\mathrm{Diff}_+(I)$ 的情况下成立。在此情形下，

$$\mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}\subset\mathcal{B}\subset\mathcal{A},$$

此外，$\mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}=\mathrm{Vir}_{\mathcal{B}}$，且 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 具有相同的中心荷。与 [7], 中一样，我们研究的正是这类子网。物理学文献中称它们为共形包含。此外，所有有限指标包含必然都是不可约的，[59], 因而也是共形的。参见 [19]，其中给出了一类具有无限指标的共形子网示例；按照上述定义，它们并非共形包含。
子理论中研究最广泛的例子族来自群不动点子网$\mathcal{B}=\mathcal{A}^G\subset\mathcal{A}$，其中 G 通过自同构作用于 $\mathcal{A}$，这类子网称为群轨形 [26], [28],[70], [71], [30]。在共形网框架下，自同构定义如下，参见例如[18,第 3.3 节和第 5.3]节：

定义 2.3。设 $(\mathcal{A},U,\Omega)$ 是一个共形网。 $\mathcal{A}$的一个自同构是映射$\alpha=\mathrm{Ad}\ V(\equiv V\cdot V^{-1})$，其中 $V\in\mathcal{U}(\mathcal{H})$ 是某个酉算子（即 $V^*V=1=VV^*$），且满足：

(i) **Compatibility**: $V\mathcal{A}(I)V^{-1}=\mathcal{A}(I)$ for every $I\in\mathcal{I}$.

(ii) 真空保持： $V\Omega=\Omega$。

用 $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ 表示 $\mathcal{A}$的所有自同构构成的集合。显然，该集合在复合运算下构成一个群，并且其元素是每个局部代数上的保幺 *-自同构，且在求逆运算下封闭。

注 2.4。以下关于 α （或 V）的协变条件是 (i) 和 (ii) 的推论，即 (iii)： $U(\gamma)VU(\gamma)^{-1}=V$对每个 $\gamma\in\mathrm{Diff}_+(S^1)$ 都成立，参见例如 [40]。
注 2.5。结合 [27] 中的结果以及分裂性质，[63]，可知 $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ 在 V 上的强算子拓扑下是紧的。

注 2.6。对于每个闭子群 $G\subset\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$，相应的轨形子网$\mathcal{A}^G\subset\mathcal{A}$ 会产生一个共形包含，参见 [12], [71]。对于群轨形，指标要么有限（且 $[\mathcal{A}:\mathcal{A}^G]=|G|$，即 G 的阶），要么无限（如果 G 是无限的）。后一种情况下，包含 $\mathcal{A}^G\subset\mathcal{A}$ 必然是离散的 [14], [25]。

下面回顾一些在某种意义上与群轨形正交的例子：

例 2.7。中心荷为 $c<1$ 的（局部）共形网 $\mathcal{A}$ 已在 [54] 中完成分类。其中有平凡包含 $\mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}=\mathcal{A}$，其指标为 $[\mathcal{A}:\mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}]=1$；此外，对于任意 $m\geq 2$、$m\in\mathbb{N}$，以及任意中心荷 $c=1-\frac{6}{m(m+1)}$，也存在这些情形。还有指标为 $[\mathcal{A}$ 的包含 $\mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}]=2$，它们几乎是平凡的，因为它们是不动点子理论：$\mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}=\mathcal{A}^{\mathbb{Z}_2}\subset\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{Z}_2$-不动点（反过来说，它们是 $\mathbb{Z}_2$-单流扩张），其中心荷由 $m=4n+1$ 或 $m=4n+2$ 给出，对任意 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。最后，还有四种“例外情形”：其中两种的指标为 $3+\sqrt{3}$，分别对应 $m=11$、$m=12$；另外两种的指标约为 19.48，分别对应 $m=29$、$m=30$。我们来看前两种例外情形之一，即 $\mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}\subset\mathcal{A}$，其中 $m=11$，因此 $c=\frac{21}{22}$，且指标为 $[\mathcal{A}:\mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}]=3+\sqrt{3}$。显然，不可能存在有限群 $G\subset\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$（其阶为 $3+\sqrt{3}$），使得 $\mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}=\mathcal{A}^G\subset\mathcal{A}$。

此外，对于这个共形网 $\mathcal{A}$ ，Aut($\mathcal{A}$) 实际上是平凡的（这一事实可由 [54], 的分类本身或子因子理论论证推导得出）。也存在一些不那么极端的例子，其中两个包含 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}^{\mathrm{Aut}(\mathcal{A})} \subset \mathcal{A}$ 都是非平凡的。

我们稍后将看到，任意不可约共形子网（无论其指标有限还是无限，也无论其是否离散）都可以描述为量子操作下的不动点（见第 3 节），也就是说，按照 [4]的术语，它们是广义轨形。

3 量子操作

为了以模型无关的方式在算子代数框架中描述任意子理论，我们在 [7] 中引入了共形网上量子操作的概念。其主要创新在于，使用从每个局部代数映射到其自身的保单位完全正（UCP）映射，而非自同构，参见例如 [66], [69]。我们在 [7] 中证明，量子操作足以描述给定手征共形场论的所有子理论。本节将回顾 [7]中的一些结果。

定义 3.1. 设 ($\mathcal{A}, U$,Ω) 为一个共形网。 $\mathcal{A}$ 上的单位完全正映射是指一族正规忠实幺正完全正映射：

$$\phi = \{\phi_I : \mathcal{A}(I) \to \mathcal{A}(I), \quad I \in \mathcal{I}\},$$

使得：

（i）相容性：$\phi_{I_2} \restriction_{\mathcal{A}(I_1)} = \phi_{I_1}$ 对每个 $I_1 \subset I_2$、I_1、$I_2 \in \mathcal{I}$均成立。（ii）真空保持：$\omega_I = \omega_I \circ \phi_I$ 在 $\mathcal{A}(I)$ 上成立，其中 $\omega_I := (\Omega \cdot \Omega)$ 是限制在 $\mathcal{A}(I)$ 上的真空态，对每个 $I \in \mathcal{I}$ 均成立。（ iii ） M¨obius 协变性：Ad $U(g) \circ \phi_I \circ$Ad $U(g)^{-1} = \phi_{gI}$ 对每个 $I \in \mathcal{I}$ 、$g \in$PSL(2, $\mathbb{R}$)均成立。（iv）Vir 固定： $\phi_I(U(\gamma)) = U(\gamma)$ 对每个 $I \in \mathcal{I}$、 $\gamma \in$Diff+(I)均成立。

将 UCP($\mathcal{A}$) 记为 $\mathcal{A}$ 上所有保单位完全正映射的集合；由于凸组合保持 UCP 性质以及上述条件（i）—（iv），该集合是一个凸集。

注 3.2。条件 (iv)，即 $\phi_I \restriction_{\mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}(I)} = \mathrm{id}$，等价于 ϕ_I 的 Vir$_{\mathcal{A}}$(I)-双模性，即当 $x \in \mathcal{A}(I)$ 且 $a, b \in$Vir$_{\mathcal{A}}$(I) 时， $\phi_I(axb) = a\phi_I(x)b$。

注 3.3。进一步假设包含 Vir$_{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ 具有有限指数（例如有限自同构群的不动点）或是离散的（例如紧自同构群的不动点，如上一节所述），那么正如 [7, 第 6] 节所示，协变条件 (iii) 和 (iv) 都是 (i) 和 (ii) 的推论。问题：在最一般的情形下，即我们只能利用包含的半离散性时，条件 (iii) 和 (iv) 是否由 (i) 和 (ii) 推出?

自同构群 Aut($\mathcal{A}$)（定义 2.3）包含于 UCP($\mathcal{A}$) 中。事实上，$\alpha \in$ Aut($\mathcal{A}$) 限制在每个 $\mathcal{A}(I)$ 上，都通过 $\phi_I := \alpha_{\restriction \mathcal{A}(I)}$ 定义了 UCP($\mathcal{A}$) 中的一个元素 $\phi \in$ ，因为保幺 *-自同构是 UCP 映射的特殊例子。反之，如果某个 $\phi \in$ UCP($\mathcal{A}$) 恰好在 UCP($\mathcal{A}$) 中可逆（或仅是乘性的，即，如果$x, y \in \mathcal{A}(I)$，则 $\phi_I(xy) = \phi_I(x)\phi_I(y)$），那么必然有 $\phi \in$ Aut($\mathcal{A}$)。

注 3.4。与真空保持自同构α的实现酉算子 V类似，可以考虑 $\phi \in \mathrm{UCP}(\mathcal{A})$ 的标准实现，见 [7, 第 4]节。具体而言，对于固定的 $I \in \mathcal{I}$，令 $V_\phi x\Omega := \phi_I(x)\Omega$ 对每个 $x \in \mathcal{A}(I)$ 成立；注意，根据 Reeh–Schlieder性质，向量 $x\Omega$ 在 $\mathcal{H}$ 中稠密。事实证明，V_ϕ 是范数为 1 的有界算子（根据 Kadison–Schwarz 不等式，[53]），因此可以将其定义在整个 $\mathcal{H}$ 上。由 (i) 易见，V_ϕ 不依赖于 I。此外，根据 (iii)，对于每个 $\gamma \in \mathrm{Diff}_+(S^1)$，都有 $U(\gamma)V_\phi U(\gamma)^{-1} = V_\phi$。显然，$V_\phi\Omega = \Omega$。
可以证明，标准实现 V_ϕ 是酉算子（或等距的，即 $V_\phi^* V_\phi = 1$）当且仅当 ϕ 属于 $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$（或具有乘法性，因此属于 $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$，如前所述）。[1]

定义 3.5. 也将 $\mathrm{QuOp}(\mathcal{A})$记作 $\mathrm{UCP}(\mathcal{A})$的极点子集（就凸集而言）。我们称 $\mathcal{A}$ 上的量子操作为 $\mathrm{QuOp}(\mathcal{A})$的元素。

注 3.6. 考虑 $\mathrm{UCP}(\mathcal{A})$的极点而非整个 $\mathrm{UCP}(\mathcal{A})$的一个原因是，$\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$也包含于 $\mathrm{QuOp}(\mathcal{A})$中，[7]。另一个原因是在群轨形的特殊情形下：如果 $\mathrm{Vir}_\mathcal{A} = \mathcal{A}^G \subset \mathcal{A}$，那么 $\mathrm{QuOp}(\mathcal{A}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{A}) = G$ 以及 $\mathrm{UCP}(\mathcal{A}) \cong P(G)$，即 G上的概率 Radon 测度凸集，这是结合 [5] 和 [7] 的结果得到的。注意，通过考虑以 G中的元素为中心的归一化狄拉克 δ 测度，可以将 G 识别为 $P(G)$的极点。

凸集 $\mathrm{UCP}(\mathcal{A})$ 事实证明，在一种自然的局部凸向量空间（Hausdorff）拓扑下是紧的；该拓扑由每个局部代数上的逐点超弱算子拓扑诱导，参见 [7, 定理 4.10]。由此，再结合存在从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathrm{Vir}_\mathcal{A}$ 的真空保持条件期望且属于 $\mathrm{UCP}(\mathcal{A})$（参见 [7, 注 2.5]中的讨论），应用 Krein–Milman 定理可得：

定理 3.7. 设 $(\mathcal{A}, U, \Omega)$ 是一个共形网。则 $\mathrm{Vir}_\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\mathrm{QuOp}(\mathcal{A})}$。特别地，每个不可约共形子网 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 都是某个量子操作子集 $\mathcal{B} = \mathcal{A}^S$下的不动点，其中 $S \subset \mathrm{QuOp}(\mathcal{A})$。

注 3.8. 一方面，$\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ 始终是一个群，并且在一种自然拓扑下是紧的，正如我们之前所述。然而，正如我们在第 2 节中看到的，这不足以描述 $\mathcal{A}$ 的任意子网，即使在有限指数情形下也是如此。另一方面，原则上我们对 $\mathrm{QuOp}(\mathcal{A})$ 本身的紧致性一无所知，因为极点一般不必是闭集，甚至不必是博雷尔集。此外，除了 $\mathrm{QuOp}(\mathcal{A}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ 的情形外，我们不知道 $\mathrm{QuOp}(\mathcal{A})$ 的代数结构，因为极 UCP 映射的复合不一定是极的。

如果 $\mathrm{Vir}_\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ 恰好是离散的或具有有限指数，那么 $\mathrm{QuOp}(\mathcal{A})$ 是一个紧超群，参见 [5], [7], 及其中的参考文献。[2]
在 [7], 中，我们还定义并研究相对于不可约共形子网 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 的 $\mathcal{A}$ 相对量子操作 $_\mathcal{B} = \mathrm{Vir}_\mathcal{A}$，因此具有 $\mathrm{Vir}\ \mathcal{B} \neq$，但也可能是 $_\mathcal{A}\mathrm{Vir}_\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$。这是因为 Vir[37], [67], [13] 基本上从不离散，除非它具有有限指数；例如参见。此外，相对量子操作还可以用于研究中间子网。

[1]对于每个 $\phi \in \mathrm{UCP}(\mathcal{A})$（或 $\mathrm{QuOp}(\mathcal{A})$ 中的元素），其希尔伯特空间伴随 V_ϕ^* 对应于另一个元素$\phi^\sharp \in \mathrm{UCP}(\mathcal{A})$（或 $\mathrm{QuOp}(\mathcal{A})$ 中的元素），定义为 Ω-*adjoint UCP map* 在每个 $\mathcal{A}(I)$ 上的 ϕ_I。参见 [7]。[2]超群 *hypergroup* 是抽象卷积空间，它推广了群的概念（以经典而非量子的方式）。该运算定义在概率测度上，而不是点上；两个极端概率测度（狄拉克 δ 测度）的卷积不一定仍然是极端的。当且仅当超群是群时，它始终是极端的，参见例如 [49]。

定义 3.9。设 $\mathrm{QuOp}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) := \{\phi \in \mathrm{QuOp}(\mathcal{A}) : \phi_I \restriction_{\mathcal{B}(I)} = \mathrm{id}\ \forall I \in \mathcal{I}\}$。再设 $\mathrm{UCP}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) := \{\phi \in \mathrm{UCP}(\mathcal{A}) : \phi_I \restriction_{\mathcal{B}(I)} = \mathrm{id}\ \forall I \in \mathcal{I}\}$。那么可以证明，$\mathrm{QuOp}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ 与 $\mathrm{UCP}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ 的极点子集重合。

问题：给定一个共形子网 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$，在一般（半离散）情形下，$\mathrm{QuOp}(\mathcal{A})(= \mathrm{QuOp}(\mathcal{A}|\mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}))$ 和 $\mathrm{QuOp}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ 的拓扑结构与代数结构是什么?

4 共形子网的伽罗瓦对应

在 [26], [28], [29], [45], ，我们为顶点算子代数建立了“量子伽罗瓦理论”。具体而言，给定一个简单顶点算子代数 V 和一个（有限或紧李）自同构群 $G \subset \mathrm{Aut}(V)$。令 V^G 为 V 中由 G 固定的不动点子顶点算子代数。则 [29, 定理 3] 建立了 G 的闭李子群与 V 中包含 V^G 的正交补的、[29, 定义 2]，简单子顶点算子代数之间的一一对应。基于 [7] 和 [48], ，我们在下文给出共形网以及由紧（不一定是李）自同构群 $G \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ 作用时的类似结论（定理 4.2）。

注 4.1. 若 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 具有有限指数，或是不可约且无限指数离散的，则 [7], 的第二个主要技术结果，即 [7, 定理 6.4], 指出，对于固定的 $I \in \mathcal{I}$，每个保持真空的 UCP 映射 $\mathcal{A}(I) \to \mathcal{A}(I)$（由 $\mathcal{B}(I)$ 固定），都可以扩展为一个 UCP 映射相容族，从而定义 $\mathrm{UCP}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ 中的一个元素（特别是，每个 $\mathcal{B}(I)$-固定的 $\mathcal{A}(I)$ 的真空保持自同构）。类似地，每个 $\mathcal{A}(I)$ 的真空保持自同构（由 $\mathcal{B}(I)$ 固定）都可以扩展为 $\mathrm{Aut}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ 中的一个元素。此外，映射 $\phi \in \mathrm{UCP}(\mathcal{A}|\mathcal{B}) \mapsto \phi_I$ 是一个仿射同胚。

现在回顾注 2.6：只要 $G \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ 是由 $\mathcal{A}$ 的自同构构成的紧群，那么无论 G 的大小如何，$\mathcal{A}^G \subset \mathcal{A}$ 始终是不可约且离散的（其指标为有限或无限，取决于 G 的大小）。因此，作为 [7, 定理 7.4], 的一个特例，我们得到：

定理 4.2. 设 $(\mathcal{A}, U, \Omega)$ 是一个共形网，且 $G \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的紧自同构群。那么，$H \subset G$ 的闭子群与包含 $\mathcal{A}^G$ 的共形子网 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ 之间存在一一对应，由 $H \mapsto \mathcal{A}^H$ 给出。

前述定理 4.2 也可由上述 UCP 映射（或自同构）的延拓结果 [7, Theorem6.4] ，结合子因子中众所周知的群-子群伽罗瓦对应推出，参见 [48, Theorem 3.15]。

注 4.3. 当 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 不可约且离散或具有有限指数时，在 [7, Theorem 7.4, 7.6] 中，借助相对量子操作 $\mathrm{QuOp}(\mathcal{A}|\mathcal{B})$ 的闭子超群给出了定理 4.2 的推广。结果表明，后者本身具有紧超群的结构（参见注 3.8 中关于 $\mathcal{B} = \mathrm{Vir}_{\mathcal{A}}$ 的最后一条评论）；根据定义，它作用于 $\mathcal{A}$ ，并通过定理 3.7 的相对版本得到子网 $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\mathrm{QuOp}(\mathcal{A}|\mathcal{B})}$ 。问题：给定一个共形网 $(\mathcal{A}, U, \Omega)$ 和一个紧超群 $K \subset \mathrm{QuOp}(\mathcal{A})$（因此其作用由保持真空的 UCP 映射给出，参见 [5, Section 5]），不动点包含 $\mathcal{A}^K \subset \mathcal{A}$ 是否自动不可约且离散，正如自同构紧群 $G \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{A})(\subset \mathrm{QuOp}(\mathcal{A}))$ 的情形一样?

5 3+1 维 AQFT 上的量子操作

量子场论的算子代数表述最初是为在 3+1 维闵可夫斯基时空中的庞加莱协变理论设计的。参见例如 [44], [43], [2]。在这种更

具体现实的情况下， [61], [25] 中的有限或无限指标扩张理论仍然适用。然而，在 3+1 维情形下，继 Doplicher 和 Roberts [35], 基于 [33], [34] 和 [31], [32]的工作之后，我们还可以得到更多结论。具体而言，对于每一个由开且非空的有界区域$O \subset \mathbb{R}^{3+1}$ （描述量子场论的局域测量）标记的局域可观测量网 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(O)\}$，都可以关联一个分次局域规范场网 $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(O)\}$ ，它扩张了 $\mathcal{A}$；同时还可以关联一个规范紧自同构群 $G \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{F})$（描述 $\mathcal{F}$的“全局规范群对称性”），使得 $\mathcal{A} = \mathcal{F}^G$。利用这一结果（该结果在 1 维或 1+1 维中没有对应物， [65]），中间局域网 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ [23] 以及庞加莱协变子网 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$已经得到了分类 [15], [17], ，具体参见 [17, 定理 5.2] ，并参见 [16]。下文将定义 3+1 维局域可观测量网上的量子操作，并用这一语言回顾前述分类结果。

令 $\mathcal{K}$ 为闵可夫斯基时空 $\mathbb{R}^{3+1}$ 中所有非空开双锥的集合，并令$\mathcal{P} := \mathrm{SO(3,1)}^{\uparrow}_{+}$ 为正时向的保向庞加莱群。

定义 5.1. 闵可夫斯基时空 $\mathbb{R}^{3+1}$ 上的庞加莱协变局域可观测量网（或简称局域网）是一个三元组 $(\mathcal{A}, U, \Omega)$，由一族作用于同一个可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的冯·诺依曼代数 $\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(O) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}) : O \in \mathcal{K}\}$ 、一个强连续酉表示 $U : \mathcal{P} \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ 以及一个单位向量 $\Omega \in \mathcal{H}$ 组成，并满足以下性质：

(i) **Isotony**: $\mathcal{A}(O_1) \subset \mathcal{A}(O_2)$, if $O_1 \subset O_2$, $O_1, O_2 \in \mathcal{K}$.

(ii) 局域性：若 $O_1, O_2 \in \mathcal{K}$ 在 $\mathbb{R}^{3+1}$ 中类空分离，则 $\mathcal{A}(O_1) \subset \mathcal{A}(O_2)'$。

(iii) 庞加莱协变性：若 $O \in \mathcal{K}$, $g \in \mathcal{P}$,

$$U(g)\mathcal{A}(O)U(g)^{-1} = \mathcal{A}(gO).$$

(iv) 能量正性： U 具有能量正性。也就是说，时空平移的生成元（ $\mathcal{P}$ 的一个同构于 $\mathbb{R}^4$ 的子群）的联合谱包含于未来光锥开集的闭包中。

(v) 真空向量：Ω 是满足以下性质的唯一向量（相差一个相位）：对于 $\mathcal{P}$中的每个时空平移 g ，$U(g)\Omega = \Omega$。

与手征共形情形不同，在 3+1维情形下，其他附加性质并非自动成立，因此通常会将它们纳入局部网的定义。例如，Reeh–Schlieder性质：对于每个 $\mathcal{A}(O)$，Ω 都是$\mathcal{O} \in \mathcal{K}$的循环向量（且为分离向量）。Haag 对偶性： $\mathcal{A}(O)' = \bigvee_{\tilde{O} \in \mathcal{K},\ \tilde{O} \subset O'} \mathcal{A}(O)$，其中 O' 是 O 在 $\mathbb{R}^{3+1}$中的类空补集的内部。其他假设（即：CPT协变性、Bisognano–Wichmann性质和分裂性质）通常也会被纳入其中。另请参见 [43], [15], [16],及其中的参考文献。

定义 5.2。$(\mathcal{A}, U, \Omega)$ 的庞加莱协变子网是一个族 $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(O) : O \in \mathcal{K}\}$ 由作用于同一空间 $\mathcal{H}$ 上的非平凡冯·诺依曼代数组成，其中 $\mathcal{A}$ ，满足：

(i) 对每个 $O \in \mathcal{K}$， $\mathcal{B}(O) \subset \mathcal{A}(O)$。

(ii) 对每个 $O \in \mathcal{K}$、 $g \in \mathcal{P}$， $U(g)\mathcal{B}(O)U(g)^{-1} = \mathcal{B}(gO)$。

(iii) 对于每个 $O_1 \subset O_2$、 O_1、 $O_2 \in \mathcal{K}$， $\mathcal{B}(O_1) \subset \mathcal{B}(O_2)$。

对于 $\mathcal{A}$，我们假设 $\mathcal{B}$ 满足Haag对偶性。我们还假设包含 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$是不可约的，或者更确切地说，按照 [15, 第 2] 节的术语， $\mathcal{B}$ 在 $\mathcal{A}$ 中是满的。与手征共形场论情形 [7], 一样，我们为 3+1维量子场论定义量子操作：

定义 5.3。设 $(\mathcal{A}, U, \Omega)$ 是一个满足 Poincar´e 协变性的局域可观测量网。 $\mathcal{A}$上的保单位完全正映射是正规忠实幺正完全正映射的集合：

$$\phi = \{\phi_O : \mathcal{A}(O) \to \mathcal{A}(O), \quad O \in \mathcal{K}\},$$

满足：

(i) 相容性：$\phi_{O_2} \restriction_{\mathcal{A}(O_1)} = \phi_{O_1}$ 对于每个 $O_1 \subset O_2$、 O_1、$O_2 \in \mathcal{K}$。(ii) 真空保持：$\omega_O = \omega_O \circ \phi_O$ 作用于 $\mathcal{A}(O)$，其中 $\omega_O := (\Omega \ \cdot \Omega)$ 是限制在 $\mathcal{A}(O)$ 上的真空态，对每个 $O \in \mathcal{K}$均成立。(i

ii) Poincar´e 协变性：对于每个 $O \in \mathcal{K}$、 $g \in$， $\mathrm{Ad}\ U(g) \circ \phi_O \circ \mathrm{Ad}\ U(g)^{-1} = \phi_{gO}$ $\mathcal{P}$.

记 UCP($\mathcal{A}$) 为 $\mathcal{A}$上的所有保单位完全正映射的集合，记 QuOp($\mathcal{A}$) 为其极点，我们将其称为 $\mathcal{A}$ 上的量子操作。

备注 5.4。在 3+1 维情形下，似乎没有显而易见的规范类比物，能像 Virasoro 网那样不可约且最小地包含于每个局域网中；参见 [9], [22], [16] ，其中考虑了由 U 对平移的实现所生成的 $\mathcal{A}$ 的一个不可约局部子网。问题：协变条件 (iii) 是否可以由 (i) 和 (ii) 推出？请注意，在 3+1 维情形下，局域网 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 的包含满足离散性假设被视为自然条件；参见 [61], [23], [15], [17], ，因为局域网的不可约 DHR 表示通常具有有限的统计/C* 张量范畴维数[31], [62]。

采用 3+1 维情形下 $\mathcal{A}$ 的真空保持自同构的类似定义（例如参见 [35, 第 3], [43], 节），并对手征共形场论使用 [7] 所用的相同论证，即利用引理 4.49], 的证明 [5, ，可得：

引理 5.5. 设 $(\mathcal{A}, U, \Omega)$ 是一个 Poincar´e 协变的局域可观测量网。那么 Aut($\mathcal{A}$) $\subset$QuOp($\mathcal{A}$)。

我们或许可以证明与手征共形网情形类似的结果。例如，证明 UCP($\mathcal{A}$) 在一种自然拓扑下是紧的，该拓扑由 UCP 映射 ϕ_O 上的逐点超弱算子收敛所诱导。更重要的是，在 3+1 维情形下，基于 [23], [15], [17], in particular[17, 定理 5.2], 关于子系统分类的结果，我们提出以下问题：

问题 5.6. 设 $(\mathcal{A}, U, \Omega)$ 是一个 Poincar´e 协变的局域可观测量网，且 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ 是一个（Haag 对偶、满的）Poincar´e 协变子网。那么，对于某个紧群 G （它是子理论 $\mathcal{B}$ 的 Doplicher–Roberts 全局规范群）以及某个闭子群 $H \subset G$，有 QuOp($\mathcal{A}|\mathcal{B}$)$\cong G/\!\!/H$ （一个双陪集超群 [3]）。

备注 5.7。特别是在 3+1 维背景下，我们猜想 QuOp($\mathcal{A}$) 总是紧的，并且是一个超群（在某种意义上，它与群尽可能接近）。

[3]如果 H 是 G的正规子群，那么 $G/\!\!/H$ 是一个群（商群）；否则，它是紧超群（双商超群）的典型例子，参见 [10, 第 1 章5]。

对于固定区域 $O \in \mathcal{K}$，也就是说，对于单个子因子 $\mathcal{B}(O) \subset \mathcal{A}(O)$（而不是整个子因子网 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$），根据 [5]，中的结果，可以得到前一个问题的肯定解；特别参见 [5，第 9.2 节和例 9.26]。一般而言，解决该问题的一种方法是证明 Poincar´é 协变局域网的 [7，定理 6.4] 的类似结论。

致谢

感谢 Maria Stella Adamo、Sebastiano Carpi、Simone Del Vecchio、Roberto Longo、Alessio Ranallo 和 Yoh Tanimoto 与我进行富有启发且有益的讨论。我还要感谢 Roberto Longo 提醒我关注 [37]，并感谢 Ajit Iqbal Singh 与我通过电子邮件交流，以及提醒我关注 [68]，；后者以更一般的方式研究了算子代数上 UCP 映射的族和超群。本研究获得欧盟“地平线2020”研究与创新计划 H2020-MSCA-IF-2017 的资助，资助协议编号为 795151，项目名称为“代数共形场论中的超越有理性：数学结构与模型”，简称 beyondRCFT。本研究还获得了授予罗马第二大学数学系的 MIUR卓越系项目 MatMod@TOV（CUP E83C23000330006）、罗马第二大学 OAQM 资助（CUP E83C22001800005）以及 GNAMPA–INdAM 的支持。

受邀为泛函分析、逼近理论与数值分析会议论文集撰稿，FAATNA20>22，意大利马泰拉，2022年7月5日至8日。

参考文献

[1] M.S. Adamo、L. Giorgetti、Y. Tanimoto，具有带基点表示范畴的二维共形场论中的 Wightman场，arXiv预印本（2023年），https://arxiv.org/abs/2301.12310。[2] H. Baumg¨artel，量子场论中的算子代数方法，Akademie Verlag，柏林，1995年。[3] A. A. Belavin、A. M. Polyakov、A. B. Zamolodchikov，二维量子场论中的无限共形对称性，Nuclear Phys. B 241（1984年），333–380。[4] M. Bischoff，共形网的广义轨道构造，Rev. Math. Phys. 29（2017年），1750002。[5] M. Bischoff、S.Del Vecchio、L. Giorgetti，由离散子因子得到的紧超群，J. Funct. Anal. 281（2021年），109004。[6] M. Bischoff、S. Del Vecchio、L. Giorgetti，局部离散子因子上的伽罗瓦对应与傅里叶分析，Ann. Henri Poincar´e 23（2022年），2979–3020。[7] M. Bischoff、S. Del Vecchio、L. Giorgetti，共形网上的量子操作，Rev. Math. Phys. 33（2023年），2350007。[8] M. Bischoff、Y. Kawahigashi、R. Longo、K.H. Rehren，张量范畴与冯·诺依曼代数的端omorphism。及其在量子场论中的应用，施普普林格，Cham，Springer数学物理简明丛书第3卷，2015年。

[9] D. Buchholz、S. Doplicher、R. Longo，量子场论中的诺特定理，Ann. Physics 170（1986年），1–17。[10] W.R. Bloom、H. Heyer，超群上概率测度的调和分析，de Gruyter数学研究丛书，第20卷，Walter de Gruyter & Co.，柏林，1995年。[11] S. Carpi，二维共形场论中由能动张量生成的Haag-Kastler网不存在子系统，Lett. Math. Phys. 45（1998年），259–267。[12] S. Carpi，$c = 1$手征流代数生成的Haag-Kastler网的子系统分类，Lett. Math. Phys. 47（1999年），353–364。[13] S. Carpi，Virasoro代数与具有无限统计维数的扇区，Ann. Henri Poincar´e 4（2003年），601–611。[14] S. Carpi，关于Virasoro网的表示论，Comm. Math. Phys. 244（2004年），261–284。[15] S. Carpi、R. Conti，具有平凡超选结构的局域网的子系统分类，Comm. Math. Phys. 217（2001年），89–106。[16] S. Carpi、R. Conti，子系统分类、局域对称性生成元与局域可观测量的内在定义，载于：《数学与物理中的数理物理》（锡耶纳，2000年），Fields Inst. Commun.，第30卷，第83–103页，Amer. Math. Soc.，普罗维登斯，罗得岛州，2001年。[17] S. Carpi、R. Conti，具有平凡超选结构的分级局域网的子系统分类，Comm. Math. Phys. 253（2005年），423–449。[18] S. Carpi、Y. Kawahigashi、R. Longo、M. Weiner，从顶点算子代数到共形网，再返回，Mem. Amer. Math. Soc. 254（2018年），第1213号。[19] S. Carpi、T. Gaudio、R. Hillier，秩一格点手征共形场论模型的酉顶点子代数与共形子网的分类，J. Math. Phys. 60（2019年），093505。[20] S. Carpi、T. Gaudio、L. Giorgetti、R. Hillier，C^*-张量范畴中的单本原代数与Schellekens列表，arXiv预印本（2022年），https://arxiv.org/abs/2211.12790。[21] A. Connes，非交换几何，Academic Press，1994年。[22] R. Conti，关于局域可观测量的内在定义，Lett. Math. Phys. 35（1995年），237–250。[23] R. Conti、S. Doplicher、J.E. Roberts，子系统的超选理论，Comm. Math. Phys. 218（2001年），263–281。[24] T. Creutzig、R. McRae、J. Yang，顶点张量范畴的直极限完备化，Commun. Contemp. Math. 24（2022年），2150033。[25] S. Del Vecchio、L. Giorgetti，局域网的无限指标扩张与缺陷，Rev. Math. Phys. 30（2018年），1850002。

[26] C. Dong, H. Li, G. Mason，顶点算子代数的紧自同构群，《国际数学研究通知》18（1996年），913–921。[27] S. Doplicher, R. Longo，冯·诺依曼代数的标准包含与劈裂包含，《数学发明》75（1984年），493–536。[28] C. Dong, G. Mason，关于量子伽罗瓦理论，《杜克数学杂志》86（1997年），305–321。[29] C. Dong, G. Mason，紧李群的量子伽罗瓦理论，《代数杂志》214（1999年），92–102。[30] C. Dong, L. Ren, F. Xu，关于轨形理论，《数学进展》321（2017年），1–30。[31] S. Doplicher, R. Haag, J.E. Roberts，局域可观测量与粒子统计。I，《Comm. Math. Phys.》23（1971年），199–230。[32] S. Doplicher, R. Haag, J.E. Roberts，局域可观测量与粒子统计。II，《Comm. Math. Phys.》35（1974年），49–85。[33] S. Doplicher, J.E. Roberts，紧群的新对偶理论，《数学发明》98（1989年），157–218。[34] S. Doplicher, J.E. Roberts，C^*代数的端同态、交叉积与紧群的对偶，《Ann. of Math.》（第2辑）130（1989年），75–119。[35] S. Doplicher, J.E. Roberts，为什么存在一个由紧规范群描述粒子物理学中超选择结构的场代数，《Comm. Math. Phys.》131（1990年），51–107。[36] F. Fidaleo, T. Isola，无限指数包含的典范端同态，《Z. Anal. Anwendungen》18（1999年），47–66。[37] K. Fredenhagen，具有无限统计维数的超选择扇区，载于：《子因子》（Kyuzeso，1993年），242–258，世界科学出版社，新泽西州里弗埃奇，1994年。[38] K. Fredenhagen, M. J¨orß，共形Haag-Kastler网、点状局域场与算子乘积展开的存在性，《Comm. Math. Phys.》176（1996年），541–554。[39] D. Friedan, Z. Qiu, S. Shenker，共形不变性、幺正性与二维临界指数，载于：《数学与物理中的顶点算子》（加利福尼亚州伯克利，1983年），第419–449页，数学科学研究所出版物，第3卷，施普林格，纽约，1985年。[40] F. Gabbiani, J. Fr¨ohlich，算子代数与共形场论，《Comm. Math. Phys.》155（1993年），569–640。[41] L. Giorgetti，条件期望的平面代数描述，《国际数学杂志》33（2022年），论文编号2250037，23页。[42] B. Gui，Q-系统与完全幺正顶点算子代数的扩张，《国际数学研究通知》10（2022年），7550–7614。[43] R. Haag，局域量子物理，Springer-Verlag，柏林，《物理学文本与专著丛书》，1996年。

[44] R. Haag, D. Kastler，量子场论的代数方法，《J. Mathematical Phys.》5（1964年），848–861。[45] A. Hanaki, M. Miyamoto, D. Tambara，有限群的量子伽罗瓦理论，《杜克数学杂志》97（1999年），541–544。[46] Y.-Z. Huang, A. Kirillov, J. Lepowsky，编织张量范畴与顶点算子代数的扩张，《Comm. Math. Phys.》337（2015年），1143–1159。[47] Y.-Z. Huang, L. Kong，全场代数，《Comm. Math. Phys.》272（2007年），345–396。[48] M. Izumi, R. Longo, S. Popa，冯·诺伊曼代数自同构紧群的伽罗瓦对应及其向Kac代数的推广，《J. Funct. Anal.》155（1998年），25–63。[49] R.I. Jewett，具有抽象测度卷积的空间，《Advances in Math.》18（1975年），1–101。[50] V.F.R. Jones，子因子的指标，《数学发明》72（1983年），1–25。[51]V.F.R. Jones，冯·诺依曼代数，网址：https://math.berkeley.edu/∼vfr/math20909.html。[52] V. Kac，初学者的顶点代数，大学讲座系列，第10卷，第2版，1998年。[53] R.V. Kadison，广义Schwarz不等式与算子代数的代数不变量，《Ann. of Math.》（第2辑）56（1952年），494–503。[54] Y. Kawahigashi, R. Longo，局部共形网的分类。情形 $c < 1$，《Ann. Math.》160（2004年），493–522。[55] A. Kirillov, V. Ostrik，McKay对应的 q类比与sl_2 共形场论的ADE分类，《数学进展》171（2002年），183–227。[56] L. Kong，全场代数、拟运算与张量范畴，《数学进展》213（2007年），271–340。[57] H. Kosaki，将Jones理论的指标推广到任意因子，《J. Funct. Anal.》66（1986年），123–140。[58] R. Longo，Hopf代数与子因子的对偶。I，《Comm. Math. Phys.》159（1994年），133–150。[59] R. Longo，共形子网与中间子因子，《Comm. Math. Phys.》237（2003年），7–30。[60]R. Longo，共形网讲义，网址：https://www.mat.uniroma2.it/longo/lecture-notes.html。[61] R. Longo, K.H. Rehren，子因子网，《Rev. Math. Phys.》7（1995年），567–597。[62] R. Longo, J.E. Roberts，维数理论，《K-Theory》11（1997年），103–159。

[63] V. Morinelli、Y. Tanimoto、M. Weiner，共形协变性与分裂性质，Comm. Math. Phys. 357（2018年），379–406。[64] F.J. Murray、J. von Neumann，关于算子环，Ann. of Math.（2）37（1936年），116–229。[65] M. M¨uger，共形场论与Doplicher-Roberts重构，载于：数学与物理学中的数学物理（锡耶纳，2000年），Fields Inst. Commun.，第30卷，第297–319页，Amer. Math. Soc.，罗得岛州普罗维登斯，2001年。[66] V. Paulsen，完全有界映射与算子代数，Cambridge Studies in Advanced Mathematics，第78卷，剑桥大学出版社，剑桥，2002年。[67] K.H. Rehren，Virasoro代数的新观点，Lett. Math. Phys. 30（1994年），125–130。[68] A.I. Singh，完全正超群作用，Mem. Amer. Math. Soc. 124（1996年），xii+68。[69] M. Takesaki，算子代数理论 I，Encyclopaedia of Mathematical Sciences，第124卷，Springer-Verlag，柏林，2002年。[70] F. Xu，代数轨形共形场论，Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 97（2000年），14069。[71] F. Xu，强可加性与共形网，Pacific J. Math. 221（2005年），167–199。