arXiv:2303.15264v1 [math.LO] 27 Mar 2023

局部化公理

Athanassios Tzouvaras

数学系，塞萨洛尼基亚里士多德大学，541 24 塞萨洛尼基，希腊；电子邮箱：tzouvara@math.auth.gr

摘要

我们考察将 ZFC 替换为一个局部化／相对论系统 LZFC 后会发生什么。该系统的核心新公理记为Loc(ZFC)，其断言每个集合都属于某个 ZFC 的传递模型。LZFC 由 Loc(ZFC)以及构成基本集合论（BST）的一些初等公理组成。我们给出了支持这一观点转变的若干理论理由。ZFC 的所有 Π_2 后果都可在 LZFC 中证明。LZFC 强烈扩展了去掉 Δ_0-聚集和 $\in$-归纳法方案的 Kripke-Platek（KP）集合论。ZFC+“存在一个不可达基数”证明了 LZFC 的一致性。在 LZFC 中，我们关注模型而非基数，并将传递模型视为不可达基数的类似物。进一步推进这一类比，我们定义了 α-Mahlo 模型和 Π^1_1-不可描述模型，后者是弱紧致基数的类似物。此外，我们还考察了形如 Loc(ZFC$+\phi$)的局部化公理，并研究了它们的全局后果。最后，我们引入了标准紧基数（在 ZFC 中）的概念，并证明了一些标准紧致性结果。

关键词：局部化公理、局部 ZFC、马洛模型、标准紧基数。

1 引言

本文旨在从某种地方主义/相对主义观点考察 ZFC。在当今的集合论中，我们相信存在一个客观的集合现实，即“真实世界” V，其主要性质由 ZFC 公理刻画。换言之，ZFC公理应当在 V中成立。这就是绝对主义观点。

与之相反，一种可称为地方主义/相对主义的观点认为，ZFC公理，尤其是有争议的幂集公理（或许还有替代公理），所指的并非 V 本身，而只是若干局部模型；它们相当于物理学中的参考系。可以设想，将局部真理和局部模型这一总体思想形式化，不止一种方式。本文提出的形式化论述只是其中一种。其主要要点大致如下：（1）我们所考虑的所有 ZFC（或其扩展）的局部模型都是标准传递集。（2）这样的模型遍布整个宇宙，数量极其丰富。

这种观点转变的动机，源于 Skolem 首先指出的、在所有一阶集合论公理化体系中都会出现的著名相对性。某些基本概念，尤其是基数和幂集公理，若被视为绝对实体，就会引发难以克服的困难。因此，在有人提出关于无限集的幂集究竟包含什么的革命性新见解之前——这种见解或许（但不一定）也能解决如何计算其成员的问题——最好先搁置 [10], 在 $\mathcal{P}$中存在ω的想法，转而接受这样的观点： V ($\mathcal{P}$)仅相对于传递集宇宙才是集合，即采用局部／相对形式ω($\mathcal{P}^M$) ω($= \mathcal{P}$) ω，其中（$\cap M$， M）是一个 ZFC 模型。 $\in$([1] $\mathcal{P}$)本身只有作为真类才有意义。作为补偿，可以假设 ZFC的传递模型在ω中处处存在，具体而言，每个集合 V都属于某个传递模型 x 。这种观点一方面不会对各种无限基数的研究产生任何负面影响。例如，它绝不会使大基数理论失效，当然，除了如今这些大基数被视为只存在于模型中的相对化实体。另一方面，它也激发了人们对传递模型本身的兴趣，将其视为独立的研究对象，而不只是手段。尤其是，大基数构成了思想和技术的来源，其中一些可以移植到模型中，从而在模型之间建立类似的分类。

对上述观点的理论论证可概括为以下说法：尽管我们可能相信， V确实是一种客观、绝对的实在，但这并不必然意味着，所有关于

[1]全文使用“传递模型”一词，而不采用更为冗长的“标准传递（集合）模型”，也就是说，传递集 x 配备标准的属于关系 $\in$，使得 $(x, \in) \models$ ZFC。若“传递性”并非独立于“标准性”，我们本可以直接说“标准模型”。另一方面，传递集被默认认为是由 $\in$构成的。不过，鉴于Mostowski同构定理，ZFC的标准模型本质上与标准传递模型相同。

V中对象的性质和事实也都是绝对的。有些性质可能始终受局部约束，而且这是它们本质使然，因此对这些性质作任何绝对主义判断都毫无意义。物理对象的宇宙提供了一个有助于理解且颇具说服力的类比。根据公认的相对论范式，这个宇宙同样是一个由事物构成的客观、绝对实在，[2] 但质量、长度、时间、速度等基本物理量，本质上都是相对量，并且在很大程度上取决于观察者的参考系。如果质量和大小等物理对象的基本属性都是相对的，那么无限集的类型（或无穷程度）为何应当是绝对的？当然，两者有所不同：对于物理宇宙，有实验和测量支持相对论的观点；而对于抽象集合的宇宙，人们只能作出假设。此外，人们往往更容易接受几乎所有物理性质（颜色、形状、气味等）都受相对化影响，却较难接受抽象性质——如数和结构——也会如此；人们通常认为这些性质反映了存在物更深层、更恒久的特征。而且，有限基数 0、1、2、.....似乎并不会以任何合理的方式发生相对化。但各种无限基数则是另一回事。在所有数学对象中，人们最自然地会预期它们具有内在的相对性。无限集的基数很容易通过强迫构造发生变化，这一点有力地表明了这一点。

关于集合论的地方主义/相对主义方法是否可行，至此已讨论完毕。本文旨在通过一个公理系统，阐述这一方法的一种具体实现，并考察其逻辑强度及其集合论后果。本文结构如下：

在第 2 节中，我们定义系统 LZFC（取自“局部 ZFC”），其主要公理是：

$(Loc(\mathrm{ZFC}))$ $\qquad\qquad \forall x \exists y (x \in y \wedge Tr(y) \wedge (y, \in) \models \mathrm{ZFC}).$

其他公理构成了 BST（基本集合论）系统，是 Pair、Union 等基本假设，仅用于表述Loc(ZFC)。LZFC 证明 ZFC 的所有 Π_2 推论。LZFC 还证明了 Found* 与序数上的归纳法方案 Found$_{On}$ 的等价性。然而，它们似乎都无法在 LZFC 中导出。因此，LZFC 中无法使用沿 On进行的超限归纳。LZFC 不证明 Π_2-反射，因为 LZFC $+\,\Pi_2$-反射 $\vdash Con$(LZFC)。

[2]或者至少，它 *can* 如此。显然，对于这类形而上学问题，不可能得出最终结论。

Σ_1-聚集在 LZFC 上等价于 Δ_0-聚集，但后者是否能证明 Δ_0-聚集仍未解决。可构造集的类 L 是可定义的（尽管在 LZFC 中无法证明 L 是 LZFC 的内模型）。此外，完备性定理、L¨owenheim-Skolem 定理、泛型扩张、莫斯托夫斯基塌缩等标准事实和构造，在 LZFC 中也都可用。LZFC 是 KP（Kripke-Platek 集合论）的一个强扩展，但不包含 Δ_0-聚集，也不包含关于 $\in$-归纳法的方案 Found* 。关于一致性，LZFC 是 ZFC+ “存在真类不可达基数”的子理论。此外，ZFC $+$ “存在一个不可达基数”证明了 ZFC+LZFC 的一致性，而 ZFC $+$ “存在一个 ZFC 的自然模型”证明了 LZFC 的一致性。

在第3节中，我们讨论 LZFC 中的无限（不可数）基数和（无限集合的）幂集公理。鉴于缺少超限归纳法，无法推导出关于基数 ω_α 和幂集公理 $\mathcal{P}^\alpha(\omega)$ 的一般性陈述。然而，可以建立一些关于具体类（如 ω_1、$\mathcal{P}(\omega)$ 和 $H(\omega_1)$，以及更一般地说，ω_n、$\mathcal{P}^n(\omega)$ 和 $H(\omega_n)$，对于 $n \in \omega$）的存在性与绝对性的蕴含关系。例如，证明了 $H(\omega_1) \in M$蕴含 $\mathcal{P}(\omega)^M = \mathcal{P}(\omega)$ 和 $\omega_1^M = \omega_1$；$\mathcal{P}(\omega) \in M$ 蕴含 $\omega_1^M = \omega_1$ 和$H(\omega_1)^M = H(\omega)$，等等。我们还讨论了符号 ω_α 对于 $\alpha > 0$ 的含义存在的歧义，以及如何消除这种歧义。

在第4节中，我们将 α-Mahlo 模型定义为 α-Mahlo 基数的类比。这是一个相当自然的概念：若 ZFC 的模型 M 中，属于 M 的 ZFC 模型构成 M的一个平稳子集，则称该模型为 Mahlo。平稳子集以及 M的闭无界子集，都仅限于 M的可定义子集。可定义性保证，α-马洛性质对于 ZFC 的传递模型是绝对的。我们在 ZFC 中证明，若 κ是 α-Mahlo 的，则V_κ 是一个 α-Mahlo 模型。

在第 5 节中，我们在 LZFC 中定义了 Π^1_1-不可描述模型，它们是 Π^1_1-不可描述（即弱紧致）基数的类比。关于这类模型的存在性，我们证明（在 ZFC 中），如果 κ 是弱紧致的，那么 V_κ 是 Π^1_1-不可描述的。此外，如果 M 是 Π^1_1-不可描述的，那么对于每个 $\alpha \in M$，它都是 α-Mahlo 的。

在第6节中，我们考察 ZFC 扩展的局部化公理，即形如 Loc(ZFC $+\,\phi$) 或 $\{Loc(\text{ZFC} + \phi) : \phi \in \Gamma\}$ 的公理，其中 Γ 是某个句子集合，并研究这些公理（加入 LZFC 后）的一致性及其对 V 的影响。例如，我们证明，对每个 Π_1 or Σ_1 句子ϕ，Loc(ZFC $+\phi$)$+ Loc$(ZFC $+\neg\phi$) 都是不一致的。此外，Loc (ZFC $+V=L$) 蕴含 $V = L$。我们还证明，若 LZFC $+\, Loc$(ZFC $+$ CH) $+Loc$ (ZFC $+\neg$CH) 一致，则幂集公理为假；而 LZFC $+\, Loc$(ZFC$+$CH) $+\, Loc$(ZFC $+\neg$CH) 的一致性则由以下一致性推出

ZFC+“存在一个 ZFC 的自然模型”。最后，我们证明，对于任意可定义集合 c 和可定义序数 α、β，理论 LZFC+Loc(ZFC+$|c| = \omega_\alpha$) + Loc(ZFC + $|c| = \omega_\beta$) + “c 存在”是不一致的。

在第 7 节中，我们（在 ZFC 中）考察一个因只处理传递模型而产生的问题。我们可以称之为“标准紧致性”问题，因为它与通常的紧致性类似，只不过允许的模型仅限于（标准的）传递模型。给定一个有限语言的句子集 Σ, 该语言扩展了集合论语言，并且 $|\Sigma| = \kappa$ 以及 Σ 的每个基数为 $< \kappa$ 的子集都有传递模型，那么 Σ 是否有传递模型? 如果答案是肯定的，我们就称 κ为标准紧致。我们证明（在 ZFC 中）：(a) ω 不是标准紧致的；(b) 每个弱紧致基数都是标准紧致的；(c) 如果 $\lambda > \omega$ 是强紧致的，那么每个满足 $\kappa^{<\kappa} = \kappa$ 的 $\kappa \geq \lambda$ 都是标准紧致的。

2 ZFC 的一个局部化变体。

V 是集合宇宙。V 中实体之间的属于关系记作 $\in$。令 $\mathcal{L} = \{\epsilon\}$ 为集合论语言。由于 ϵ 将只在 $\in$ 中解释，我们将 ϵ 与 $\in$ 视为相同，并为简便起见写作$\mathcal{L} = \{\in\}$。

Π_n, Σ_n 表示 L´evy 层级中通常的公式类（其中$\Pi_0 = \Sigma_0$ 是有界公式类）。若 S 是一个集合论，Σ_n^{S}和Π_n^{S} 分别表示可在 S 中证明与某个 Σ_n 公式和 Π_n公式等价的公式类。此外，Δ_n^{S} 是性质 ϕ 的类，这些性质在 S 中可证明既等价于某个 Π_n 公式，也等价于某个 Σ_n 公式；也就是说，存在一个 Σ_n 公式ϕ_1 和一个 Π_n 公式 ϕ_2，使得 S $\vdash \phi \leftrightarrow \phi_1 \leftrightarrow \phi_2$。

小写字母 a, b, x, y, u, v 表示集合。大写字母A, B, M, N, X, Y根据上下文表示集合或（真）类。例如，全文中，字母 M, N 始终表示作为 ZFC 模型的传递集。

若 ϕ 是 $\mathcal{L}$ 的一个公式，且 u 是一个集合，则 ϕ^u 表示由 ϕ 得到的有界公式：将 ϕ 中的每个无界量词 $\forall x$, $\exists x$ 分别替换为$\forall x \in u$, $\exists x \in u$。按照惯例，写作 ϕ 时，我们的意思是 $(V, \in) \models \phi$。因此，ϕ^u 等价于 $(u, \in) \models \phi$。

下面的局部主义 ZFC 替代方案将作为我们下文定义的 LZFC 系统的主要公理:

$(Loc(\mathrm{ZFC}))$ $\qquad \forall x \exists y (x \in y \wedge Tr(y) \wedge (y, \in) \models \mathrm{ZFC}),$

其中，$Tr(y)$ 表示公式“y 是传递的”，而 $(y, \in) \models$ZFC 是公式 TrZFC 的缩写。

（$(y, \in) \models \phi$）。 Loc(ZFC) 表示，ZFC 的传递模型组成的类相对于 $\in$ 是 V 的一个无界（或共终）子类，因此也相对于 $\subseteq$ 是无界的（因为传递性）。

然而，关系“$(y, \in) \models \phi$”以及作为公式集合的 ZFC，都无法在不借助一组绝对集合论真理中的某些初等概念和事实的情况下定义；我们将这组真理称为基本集合论，并记作 BST。这与 $[4, \text{p. } 39]$, 中的初等集合论 EST 类似，只是 BST 还包含笛卡尔积，而不包括基础公理和选择公理，因为它们可以从 Loc(ZFC) 中推导出来（见下文）。因此，我们将 BST 取为由以下公理组成：

(空集公理) $\exists x(x = \emptyset)$，(外延性) $\forall x \forall y[\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y]$(配对公理) $\forall x \forall y \exists z(z = \{x, y\})$ (并集) $\forall x \exists y(y = \bigcup x)$ (笛卡尔积) $\forall x \forall y \exists z($ $z = x \times y)$。[“有序对”“函数”等谓词是 Δ_0 ，可以按照 $[1, \text{p. } 14]$ 中的方式定义。](无穷公理) $\exists x[\emptyset \in x \wedge \forall y \in x \exists z \in x(z = y \cup \{y\})]$($\Delta_0$-分离公理) $\forall \bar{z} \forall a \exists b \forall y(y \in b \leftrightarrow y \in a \wedge \phi(y, \bar{z}))$，对每个不含 b 自由出现的 Δ_0 公式 ϕ 都成立。

引理 2.1 在 BST 中：(i) ω 存在，并且可以证明皮亚诺算术（PA）的公理在配备通常运算的 ω 中成立。因此，PA $\subseteq$BST。(ii) 公式 $Fml(\mathcal{L})$的集合是可定义的， V_ω 存在，并且关系“$(x, \in) \models \phi(\bar{a})$”是可定义的。

证明。(i) 根据无穷公理，设 a 是一个归纳集。我们可以定义 ω （使用Δ_0-分离公理）为满足以下条件的序数组成的集合：对于每个 $y \leq x$ 和$y \neq 0$， y 都是后继序数。可以看出，这个集合是最小的归纳集（细节留给读者）。 ω 作为归纳集的最小性，意味着 ω 满足完全归纳法。其上的运算′、 $+$、 $\cdot$ 按通常方式定义，并且在 BST 中可以证明，PA 的公理相对于 ω成立。

（ii）根据笛卡尔积，对于每个集合 a和 $n \in \omega$， $a^n = \{(x_0, \ldots, x_{n-1}) : x_i \in a\}$ 是一个集合。 $\mathcal{L}$ 的公式归纳地定义为整数三元组，例如 $\ulcorner v_i = v_j \urcorner = (0, i, j)$、 $\ulcorner v_i \in v_j \urcorner = (1, i, j)$等，如 $[3, \text{第 } 90]$页所示。 $Fml(\mathcal{L})$中的 $\mathcal{L}$ 公式集合是递归的（因此是 Δ_1^{ZFC}可定义的 ω子集）。ZFC $\subset Fml(\mathcal{L})$也是如此。

集合 a^n 也可以与满足以下条件的函数集合 f 等同：$dom(f) = n$ 且 $rng(f) \subseteq a$。利用这一对应，我们可以将 V_ω 定义为

通过一个 Δ_1^{ZFC}定义，见 [3, 第81] 页。最后，关系“$(x,\in) \models \phi$”也可以借助 V_ω 定义（详见 [3, 第 91] 页）。⊣

注 2.2 若没有 BST 的笛卡尔积公理，要证明集合的笛卡尔积也是集合，就需要类似于 Δ_0-聚集（或 Δ_0-替代公理）的公理（见 [1, 命题 3.2]）。这是一个相当强的公理，而笛卡尔积的存在性却是相当初等的。我们不知道 LZFC 是否能证明 Δ_0-聚集（见下文命题 2.15 和 2.16）。

固定了 $Fml(\mathcal{L})$、ZFC 和 $(x,\in) \models \phi$ 的定义后，现在可以考虑上文给出的公理 Loc(ZFC)，并令

$$\mathrm{LZFC} = \mathrm{BST} + Loc(\mathrm{ZFC}).$$

为简便起见，以下我们将写作 $x \models \phi$，而不写 $(x,\in) \models \phi$。有时，如果谓词 $Tr(x)$ 已被隐含地理解，我们也会省略它，因此 Loc(ZFC) 通常写作 $\forall x \exists y (x \in y \ \wedge \ y \models \mathrm{ZFC})$。

首先请注意，正如上文已经提到的，选择公理和基础公理可由 Loc(ZFC) 推出。

引理 2.3 Loc（ZFC）蕴含选择公理和基础公理。

证明。设 $x \neq \emptyset$ 是一个集合，使得对每个 $y \in x$，都有 $y \neq \emptyset$。根据 Loc（ZFC），存在一个 ZFC 的传递模型 M，使得 $x \in M$。于是，在 M 中 x 存在选择函数，并且有一个 $\in$-最小元素。⊣

给定一组集合 $\bar{x} =$（x_1, ..., x_n），令 $\bar{x} \in y$ 表示公式 $x_1 \in y \wedge \cdots \wedge x_n \in y$。

引理 2.4 (i) LZFC $\vdash \forall \bar{x} \ \exists y$（$\bar{x} \in y \wedge Tr$（$y$） $\wedge y \models$ ZFC）。
(ii) 令 Π_2（ZFC）为 ZFC 的所有 Π_2 推论所组成的集合。则 Π_2（ZFC） $\subseteq$LZFC。

证明。（i）令 $\bar{x} = (x_1,\ldots,x_n)$。给定任意 $a_1,\ldots,a_n$， $\{a_1,\ldots,a_n\}$ 在 BST 中存在。因此，根据 Loc(ZFC)，存在一个传递模型 b，使得 $\{a_1,\ldots,a_n\} \in b$。于是 $\{a_1,\ldots,a_n\} \subset b$，且 $b \models$ 满足 ZFC。

(ii) 设 $\phi \in \Pi_2$(ZFC)。 ϕ 的形式为 $\forall \bar{x} \ \exists \bar{y} \psi(\bar{x},\bar{y})$，其中 $\bar{x}$ 是一个 n元变量组， $\bar{y}$ 是一个 m元变量组，且 ψ 是有界的。我们在 LZFC 中进行讨论。任取一个 n元集合组 $\bar{a}$。只需证明存在一个 $\bar{y}$，使得 $\psi(\bar{a},\bar{y})$。由上面的 (i)，存在一个传递的模型 $b \models$ ZFC，使得$\bar{a} \in b$。由于 ϕ 是 ZFC 的推论， $b \models \phi$，或者 $b \models \exists \bar{y} \psi(\bar{a},\bar{y})$。因此$\exists \bar{y} \psi(\bar{a},\bar{y})$，因为 ψ 是 Δ_0。于是 LZFC $\vdash \phi$。⊣

注 2.5 与 ZFC 不同，LZFC 通常不应允许含有无界量词的公理，因为其中的真理是“局部的”，所以变量必须在某个集合模型中取值。不过，某些表达基本且毋庸置疑事实（例如 $\forall x, y \exists z (z = \{x, y\})$）的 Π_2 陈述，即使出现两个交替的无界量词，也只能予以接受。BST公理正是如此。所有这些公理都是 Π_2 句子，只要查看上文给出的表述，便可轻易验证。

注 2.6 BST公理的必要性仅在于使 Loc(ZFC)能够得到严格表述。否则，也就是说，如果我们假设Loc(ZFC)是有意义的，例如假设“公式”和“$x \models \phi$”这两个概念是原始概念，那么我们就可以在 Loc(ZFC)+配对公理+空集的框架下，而非 LZFC 中，轻易证明引理 2.4。由于 BST 的所有公理都是 ZFC 的 Π_2 推论，由 2.4 (ii) 可知，我们可以从Loc(ZFC)+配对公理+空集中恢复 BST 的其余公理。

注 2.7 在全文中，我们将大量运用一个众所周知的事实：每个 Δ_1^{ZFC}（因而每个 Σ_0^{ZFC}）公式对于 ZFC 的传递模型都是绝对的。不过，这里需要提醒一句：当我们在 ZFC 中工作时（大多数时候都是如此），也就是说，当 V 被假定满足 ZFC 时， Δ_1^{ZFC}公式在 ZFC 的传递模型与宇宙之间是绝对的。如果 $V \not\models$，则 Δ_1^{ZFC}公式的 ZFC 绝对性便无法保证。例如，令 ϕ 为 Σ_1，且 ψ 为 Π_1 和 ZFC $\vdash \phi \leftrightarrow \psi$。那么，对于任意 ZFC 模型， $M \models \phi \leftrightarrow \psi$。但是，如果 $V \not\models$ ZFC，我们就不能推断 $V \models \phi \leftrightarrow \psi$，因此也不能推断 ϕ 和 ψ的绝对性。在我们的情形中， V满足的是 LZFC 而非 ZFC，因此有必要指出这一点。不过，若 S 是一种集合论，使得 $V \models$ S，并且只要 ZFC $\vdash \phi \leftrightarrow \psi$，就有 S $\vdash \phi \leftrightarrow \psi$，那么对于如上所述的 ϕ、ψ， ϕ和ψ 在 V 与 ZFC 模型之间仍然是绝对的。下一条引理表明，对于 S =LZFC，这一条件成立。

引理 2.8 如果 $\phi \in \Sigma_1$ 且 $\psi \in \Pi_1$ 且 ZFC $\vdash \phi \leftrightarrow \psi$，那么 LZFC $\vdash \phi \leftrightarrow \psi$。因此，对于任意传递的 $M \models$ZFC、任意 Δ_1^{ZFC}公式 $\phi(\bar{x})$ 以及任意$\bar{a} \in M$， $\phi(\bar{a})$ $\leftrightarrow M \models \phi(\bar{a})$。

证明。设 $\phi \in \Sigma_1$ 且 $\psi \in \Pi_1$ 且 ZFC $\vdash \phi \leftrightarrow \psi$。那么 $\phi \leftrightarrow \psi$ 属于 Π_2 (ZFC)，因此由引理 2.4 (ii) 可得该断言。⊣

为简洁起见，我们将引理 2.8 中确立的事实表述为：每个 Δ_1^{ZFC}公式of $\mathcal{L}$ 也是 Δ_1^{LZFC}。

由引理 2.8 可知，在任意带有参数 M 的 ZFC 传递模型 M 中，内部由 Δ_1^{ZFC} 公式定义的每个集合都与

在 LZFC 中定义时相同。我们通常说这个集合存在于 LZFC 中，其含义是：在 LZFC 中对它的定义不会得到一个真类。特别地，对于任意传递模型中由某个正归纳算子 Γ_ϕ 通过归纳方式定义的集合，某个 Σ_1 公式ϕ 的情形也是如此。

备注2.9 我们在此指出这一点，以便后续使用：句子

$$Loc(\mathrm{ZFC}) = \forall x \exists y (x \in y \wedge y \models \mathrm{ZFC})$$

本身就是 Π_2^{ZFC}，因为“ϕ 是一个公式”、“$\phi \in$ ZFC”和“$x \models \phi$”都是 Δ_1^{ZFC}。此外，根据引理 2.8， Loc(ZFC) 也是 Π_2^{LZFC}。

序数在 LZFC 中按通常方式定义（传递集合由 $\in$线性排序，因此也是良序）。小写希腊字母 α、β、.....表示序数。我们常用 $\alpha < \beta$ 代替 $\alpha \in \beta$。我们用 On表示所有序数组成的类。（On， $\in$）是良序的，但我们必须谨慎理解这一断言。（On， $\in$）是良序的，意指 On的每个子集都有一个最小元素，这是基础公理的结果。然而，对于 On的子类，情况可能不同。如果 $X = \{\alpha : \phi(\alpha)\}$ 是On的一个子类，那么无法保证 X 有最小元素。通常的论证是先选取一个 $\alpha \in X$，再取 $\alpha \cap X$ 在X 上的迹 α，但这种做法在 LZFC 中行不通，因为缺少完整的分离公理， $\alpha \cap X$未必是集合。它只适用于 Δ_0-类（即由 Δ_0-公式定义的类）。因此，我们用 Found$_{On}$ 表示以下公理模式：“ On的每个子类都有一个最小元素”。也就是说：

(Found_{On}) $\exists \alpha \in On\ \phi(\alpha) \to \exists \alpha \in On[\phi(\alpha) \wedge \forall \beta < \alpha \neg \phi(\beta)]$.

基础$_{On}$ 显然是完整的 $\in$-归纳法方案基础* 的弱形式，该方案指出“每个类都有一个 $\in$最小元素”：

(Found^*) $\exists x \phi(x) \to \exists x[\phi(x) \wedge \forall y \in x \neg \phi(y)]$

然而，下面我们将看到（引理 2.11），在 LZFC 中，基础$_{On}$ 和基础* 实际上是等价的。

涉及基础$_{On}$ 的一种值得注意的情形如下。称集合 x、 y 等势，并记作 $x \sim y$，如果存在一个双射 f： $x \to y$。若存在一个单射 f： $x \to y$，则记作 $x \precsim y$；若存在一个单射 f： $x \to y$，但 $x \not\sim y$，则记作 $x \precnsim y$。给定任意 x，令 $Ord(x) = \{\alpha \in On : x \sim \alpha\}$。根据选择公理，对于每个 x，都有 $Ord(x) \neq \emptyset$。然而，公式 $x \sim \alpha$ 是Σ_1，因此，由于 LZFC 中无法使用 Σ_1-分离公理，我们无法保证 $Ord(x)$有最小元素。若 $Ord(x)$存在最小元素，

它将是 x的（绝对）基数，也就是我们通常记作 $|x|$的量。因此，仅凭 LZFC，而不借助基础$_{On}$ （或根据前述引理，*），无法定义集合的绝对基数。[3] 这相当符合 LZFC 的精神；其主要动机正是质疑绝对无限基数和幂集的存在。因此，关于这一问题的进一步讨论见第3节。

给定一个模型 M，令 $Def(M)$ 表示其中一阶可定义子集的聚集，即

$$Def(M) = \{X \subseteq M : (\exists \phi(x, \bar{y}) \in \omega)(\exists \bar{b} \in M)[M \models \forall x(x \in X \leftrightarrow \phi(x, \bar{b}))]\}.$$

该定义是绝对的，因此 $Def(M)$ 存在于 V 中。此外，如果 $\mathcal{X}$ 是 $\mathcal{P}(M)$ 的子集，那么 $Def(M, \mathcal{X})$ 表示在 $(M, \mathcal{X})$ 中二阶可定义的 M 的子集的聚集。

在 M 上的分层解析层级是聚集 $RA(M) = \bigcup_{\alpha \in On} RA_\alpha(M)$，其中

$$\begin{aligned} &RA_0(M) = Def(M), RA_{\alpha+1}(M) \\ &= Def(M, RA_\alpha(M)), RA_\alpha(M) \\ &= \bigcup_{\beta<\alpha} RA_\beta(M). \end{aligned}$$

引理 2.10 以下事实可在 LZFC 中证明，并且相对于 ZFC的传递模型是绝对的:

(i) $\exists x(x = V_\omega)$（遗传有限集构成的集合存在）。
(ii) $\forall x \exists y(TC(x) = y)$（每个集合都有一个传递闭包）。
(iii) $\forall x \exists \alpha \in On(rank(x) = \alpha)$，其中 $rank(x) = \sup\{rank(y) + 1 : y \in x\}$。

(iv) $\forall \alpha \in On\ \exists x(x = L_\alpha)$，其中 L_α 是通常的可构造层级的第 α 层。

(v) Δ_1-分离公理。
(vi) 对于每个模型 M，$(M, Def(M))$ 和 $(M, RA(M))$ 都存在，并且分别是类理论 GBC（哥德尔–伯奈斯）和 KM（凯利–莫尔斯）的模型。

证明。上述条款 (i)-(vi) 中涉及的所有对象都有 Δ_1^{ZFC}Def 定义，因此根据 2.8，它们的定义都是 Δ_1^{LZFC}定义；由此，它们在任何包含相应参数的 ZFC的传递模型中都有绝对定义。例如，要证明 L_α的存在，取一个传递模型

[3]因此，当 x 是 LZFC 的一个集合时，将不使用记号 $|x|$ 。有时，即使没有实际提及作为集合存在的基数，也会使用这个记号。例如，记号 $|x| = |y|$ 是说 $x \sim y$的另一种方式，而 $|x| < |y|$ 仅表示 $x \precsim y$。

$M \models$ ZFC，使得 $\alpha \in M$，并在 M 中构造 L的层级 $L_\beta, \beta \leq \alpha$。⊣

引理 2.11 基础* 与基础$_{On}$ 在 LZFC 上等价。

证明。由于 On 上的序 $<$ 与 $\in$重合，显然基础*蕴含基础$_{On}$。反过来，假设基础$_{On}$ 成立，并令 $\exists x\phi(x)$为真。考虑 On的子类

$$R_\phi = \{\alpha \in On : \exists x(\phi(x) \ \wedge \ rank(x) = \alpha)\}.$$

由引理 2.10 (iii)，LZFC 中的每个集合都有秩，因此 $R_\phi \neq \emptyset$。由基础$_{On}$，R_ϕ 有一个最小元素 α_0。因此，$\exists x(\phi(x) \wedge rank(x) = \alpha_0)$为真。取这样一个 x。于是 $\forall y \in x \neg\phi(y)$。⊣

鉴于基础$_{On}$ 在 LZFC 中不可导出，我们得到以下重要推论。

注记 2.12 在 LZFC 中，通常沿着 On 进行的超限归纳法并不可用，除非对于 On的 Δ_1 子类。

由于 2.10 (iii)，我们可以对每个 $\alpha \in On$定义（非归纳地！）这个类

$$V_\alpha = \{x : rank(x) < \alpha\}.$$

V_α、$\alpha \in On$是宇宙的层级，因为对于 $\alpha < \beta$ 和$V = \bigcup_\alpha V_\alpha$，$V_\alpha \subset V_\beta$。除了 V_α 对于 $\alpha \leq \omega$之外，V_α 一般不必是集合。然而，很容易看出，将 V_α 的相对化应用于任意ZFC的传递模型M，会生成 M的通常累积层级。

引理 2.13 设 M 是ZFC的传递模型。那么对于每个 $\alpha \in On^M$，
$V_\alpha^M = M_\alpha = M \cap V_\alpha$。

此外，令

$$L = \bigcup_{\alpha \in On} L_\alpha$$

是可构造集的类。与 V_α 相比，每个 L_α 都是一个集合。[4] 因此，LZFC 宇宙的图景大致如图1所示。

[4]不过，不应期待LZFC能够证明 L 是ZFC的内模型，因为为此需要替换公理。毕竟，这样的要求不符合LZFC的地方主义精神；按照这种精神，只有 *set* ZFC模型才是有意义的。

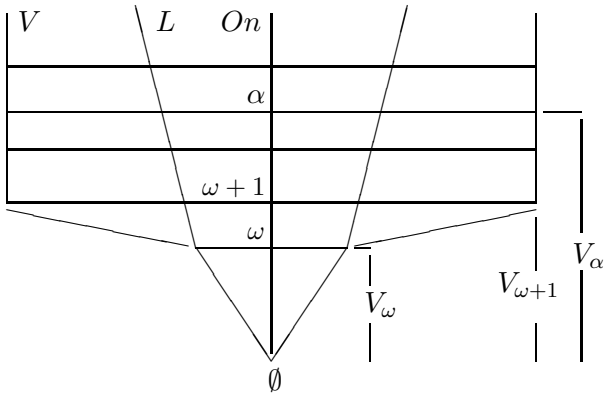

图1

注2.14 图1的图景表明，对于 $\alpha > \omega$，各个层级 V_α 都是真类。不过，这并非总是如此；在某些情况下，一些V_α 可能是集合。当然，如果 V_α 是真类，那么对于 $\beta > \alpha$，每个 V_β 也都是真类。LZFC 并未对幂集公理的地位提供任何信息，因此通常与 ZFC 相容（见下文 2.23），尽管其预期解释指向相反的方向。要否定幂集公理，我们需要比 Loc(ZFC) 更强的局部化原则，其形式为 Loc(ZFC $+ \phi$) 或 $\{Loc(\text{ZFC} + \phi)\colon\ \phi \in \Gamma\}$。见第6节。

除了幂集公理之外，收集/替代公理模式在应用于 V 时也值得质疑。一般而言，对于一组公式 Γ，我们有如下模式：

(Γ-聚集) $\forall \vec{z} \forall a \exists b [\forall x \in a \exists y \phi(x, y, \vec{z}) \rightarrow \forall x \in a \exists y \in b\ \phi(x, y, \vec{z})]$, 对于每个不含 b 自由出现的公式 $\phi \in \Gamma$。

Γ-替代公理弱于 Γ-聚集，因此我们只考虑后者。

Π_2-反射公理模式在此也值得关注：

(Π_2-Reflection) $\phi \rightarrow \forall x \exists y [x \in y \wedge Tr(y) \wedge \phi^y]$, for every Π_2 sentence ϕ.

（显然，在 LZFC 中进行推理时，我们可以在上述模式中使用 Π_2^{LZFC} 句子，而不只是 Π_2。）

命题2.15 (i) Δ_0-聚集与 Σ_1-聚集在 LZFC 上等价。

(ii) LZFC + Π_2-反射- $\vdash$ Σ_1-聚集。

证明。(i) 一个方向是显然的。只需证明在 LZFC 上，Δ_0-聚集蕴含 Σ_1-聚集。设 $\psi(x,y):=\exists\bar{z}\phi(x,y,\bar{z})$ 是一个 Σ_1-公式，并且 $\forall x\in a\exists y\psi(x,y)$ 在 LZFC 中为真。那么 $\forall x\in a\exists y\exists\bar{z}\phi(x,y,\bar{z})$。令 n 为元组 $\bar{z}$ 的长度。利用配对以及 Δ_0函数 $(u)0$，...，$(u)_n$，对于一个 $(n+1)$-元组 u，使得 $u=((u)0,\ ...,\ (u)_n)$，$\forall x\in a\exists y\exists\bar{z}\phi(x,y,\bar{z})$ 写作 $\forall x\in a\exists u\phi(x,(u)_0,(u)1,\ ...,\ (u)_n)$。由于 $\phi(x,(u)_0,(u)1,\ ...,\ (u)_n)$ 是一个 Δ_0 公式（的缩写），根据 Δ_0-聚集，存在一个 b，使得 $\forall x\in a\exists u\in b\ \phi(x,(u)_0,(u)1,\ ...,\ (u)_n)$。如果 $c=TC(b)$，那么 $\forall x\in a\exists y\in c\exists\bar{z}\phi(x,y,\bar{z})$，即 $\forall x\in a\exists y\in c\ \psi(x,y)$。

(ii) 我们在 LZFC$+\Pi_2$-反射中工作。设 $\phi(x,y,\bar{z})$ 是一个 Σ_1 公式，$a,\bar{c}$ 是集合，且 $\forall x\in a\exists y\phi(x,y,\bar{c})$ 成立。我们必须证明存在 b 使得

$$\forall x\in a\exists y\in b\ \phi(x,y,\bar{c}).$$

由于 ϕ 是 Σ_1，$\forall x\in a\exists y\phi(x,y,\bar{c})$ 是一个 Π_2 公式。根据 Π_2-反射，存在一个传递的 b，使得 $a\cup\{c_1,\dots,c_n\}\in b$ 且 $(\forall x\in a\exists y\phi(x,y,\bar{c}))^b$，或者 $\forall x\in a\exists y\in b\ \phi(x,y,\bar{c})^b$。由于 ϕ 是 Σ_1，ϕ^b 蕴含 ϕ，因此 $\forall x\in a\exists y\in b\ \phi(x,y,\bar{c})$。 $\dashv$

令 TM(LZFC) 表示“存在一个 LZFC 的传递模型”这一原理。

命题2.16 LZFC $+\Pi_2$-反射$\vdash$ TM(LZFC)。因此 LZFC$+\Pi_2$-反射$\vdash$ Con(LZFC)。所以，如果 LZFC 是一致的，那么 LZFC $\nvdash\Pi_2$-反射。

证明。在 LZFC $+\Pi_2$-反射中工作。根据备注2.9，LZFC 的公理Loc(ZFC)是一个真 Π_2 句子，因此 Π_2-反射适用于Loc(ZFC)。考虑合取式 $\Phi=Loc$(ZFC)$\wedge$配对公理。显然 Φ是 Π_2，且根据假设它在 V中成立，因此由 Π_2-反射可知，存在一个（非空）传递集 b，使得 $\Phi^b=(Loc(\text{ZFC}))^b\wedge$配对公理^b 成立。只需证明 $b\models$ LZFC。已有 $b\models Loc$(ZFC) $\wedge$配对公理，因此只需证明 b 满足 BST 的其余公理。鉴于 b的传递性，空集公理和外延性显然成立。对于并集，设 $x\in b$。于是$x\in M\in b$对某个模型 M成立，因此 $\bigcup x\in M\in b$。对于笛卡尔积，给定任意 $x,y\in b$，由配对公理可得 $\{x,y\}\in b$，因此根据 Loc(ZFC)，存在一个模型$M\in b$，使得 $\{x,y\}\in M$。于是 $x,y\in M$，故 $x\times y\in M\in b$。无穷公理的情况类似。还需验证 Δ_0-分离公理。设 $c\in b$，且 $\phi(x,\bar{a})$ 是 Δ_0，其中 $\bar{a}\in b$。令 $X=\{x\in c:\ b\models\phi(x,\bar{a})\}$。我们必须证明 $X\in b$。由配对公理和 Loc(ZFC)，存在一个 ZFC 模型 $M\in b$，使得 $c,\bar{a}\in M$。那么显然 $X=\{x\in M:\ M\models x\in c\wedge\phi(x,\bar{a})\}$。因此 $X\in M$，进而$X\in b$。至此，LZFC $+\Pi_2$-反射 $\vdash TM$(LZFC) 的证明完成。

因此，LZFC $+\Pi_2$-反射 $\vdash Con$(LZFC)。由于根据引理 2.1，PA $\subseteq$ LZFC，哥德尔不完备性定理意味着 LZFC $\nvdash \Pi_2$-反射。$\dashv$

LZFC 是否能证明 Δ_0-聚集仍是一个未解决的问题。上述 2.15 (ii) 的逆命题是否成立也尚无定论，即 LZFC $+\Sigma_1$-聚集是否能证明 Π_2-反射。（如果成立，那么根据 2.15 (i) 和 2.16，LZFC $\nvdash\Delta_0$-聚集。）

作为上一命题证明的副产品，我们得到以下简单事实，它给出了一个集合成为 LZFC 模型的充分条件。若传递集 $(a, \in)$ 作为偏序集是向上有向的，即对于任意 $x, y \in a$，存在一个 $z \in a$ 使得 $x, y \in z$，则称它为有向的。

推论 2.17 设 a 是一个传递集，它是其中所包含的 ZFC 传递模型的并集，也就是说，$a = \bigcup\{x \in a : x \models \text{ZFC}\}$。若 a 还满足配对公理，则 $a \models$ LZFC。特别地，若 $(a, \in)$ 是由 ZFC 模型构成的有向集，且满足 $\cup a = a$，则 $a \models$ LZFC。

在前述结果中，我们甚至可以用 LZFC 的模型替换 ZFC 模型。具体而言，有如下结论。

引理 2.18 设 $(a, \in)$ 是 LZFC 模型的一个有向集，满足 $\cup a = a$。那么 $a \models$ LZFC。

证明。由有向性可知 a 满足配对公理。因此只需证明 $a \models Loc$(ZFC)。设 $x \in a$。那么存在 $b \in a$，使得 $x \in b$ 且 $b \models Loc$(ZFC)。因此 $b \models \exists y($ $x \in y \wedge y \models$ ZFC)。但于是 $a \models (\exists y(x \in y \wedge y \models \text{ZFC}))^b$，故 $a \models \exists y(x \in y \wedge y \models$ ZFC)，或者 $a \models Loc$(ZFC)。$\dashv$

显然，如果 ZFC 和 LZFC 是相容理论，那么 ZFC $\not\subseteq$LZFC，且 LZFC $\not\subseteq$ ZFC。在文献中的其他集合论里，与 LZFC 的 BST 部分最接近的是带无穷公理的克里普克–普拉托集合论（KP $+$ 无穷公理）（参见[1], ，其中考虑的不是该系统，而是 KPU=KP+原子）。该系统的公理如下：

KP $=$ {空集公理、外延性、配对公理、并集、基础*, Δ_0-分离公理 Δ_0-聚集},

其中 Found* 是我们之前已经看到与 Found_{On} 等价的 $\in$-归纳法公理模式（见引理 2.11 及前文），而且似乎不能由 LZFC 推出。因此，

$$\text{KP} + \text{Infinity} - \{\Delta_0\text{-Collection}, \text{Found}^*\} \subset \text{LZFC}.$$

关于注记 2.12，我们在此列出一些合理的 LZFC 扩展，在这些扩展中归纳法成立。

引理 2.19

LZFC+基础$_{On}$ $\subseteq$ LZFC+分离公理 $\subseteq$LZFC+替代公理 $\subseteq$LZFC+聚集。

证明。第一个包含关系由备注2.9之后的讨论得出。第三个包含关系显然。至于包含关系 LZFC $+$分离公理 $\subseteq$LZFC$+$替代公理，其证明与 ZFC 中所用的熟悉证明并无不同。$\dashv$

LZFC $+$ 分离公理和 LZFC $+$替代公理这两个系统，除了恢复超限归纳之外，似乎本身也是 LZFC 的有趣扩展。

下面给出 LZFC 的若干其他存在性结果。

引理 2.20 (i) 在 LZFC 中可以证明 L ¨owenheim-Skolem 定理。也就是说，对任意一阶语言 $\mathcal{L}$、任意 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{A} = (A, ...)$ 以及任意 $S \subseteq A$ 使得 $S \precsim \mathcal{L}$，存在一个 $\mathcal{L}$-结构 $\mathcal{B} = (B,...)$，使得 $S \subseteq B$, $B \precsim \mathcal{L}$ 且 $\mathcal{B} \preceq \mathcal{A}$。

(ii) Mostowski同构定理可在 LZFC 中证明。也就是说，若 x 是一个集合，且 E 是 x 上的二元关系，使得 (a) E 是良基的，并且 (b) $(x, E) \models$ 外延性，那么存在一个（唯一的）传递集 y ，使得 $(x, E) \cong (y, \in)$。

(iii) 完备性定理可在 LZFC 中证明。

证明。将这三个定理形式化后，都是可在 ZFC 中证明的 Π_2 句子，因此结论由引理 2.4 得出。$\dashv$

引理 2.21 ACA $\subset$ LZFC。

证明。一阶皮亚诺公理转写为 $\mathcal{L} = \{\in\}$ 后，便成为 Δ_0 句子，因为所有量词都限制在 ω 上。归纳公理

$$\forall X[(0 \in X \wedge \forall n(n \in X \to n + 1 \in X)) \to \forall n(n \in X)]$$

变成一个 Π_1 句子，因为 $\forall X$ 变成了 $\forall x \subseteq \omega$。算术概括公理是

$$\forall \bar{X}\ \exists Y \forall n(n \in Y \leftrightarrow \phi(n, \bar{X})),$$

其中 ϕ 不含集合量词。在 $\mathcal{L}=\{\in\}$ 中，它变成

$$\forall \bar{x}\ \exists y \forall z \in \omega(z \in y \leftrightarrow \psi(z, \bar{x})),$$

其中 ψ 现在是有界的，因此是一个可在 ZFC 中证明的 Π_2 句子。因此，根据 2.4 (ii)，ACA 的归纳公理和概括模式都可在 LZFC 中证明，故 ACA $\subset$LZFC。⊣

引理 2.22 (i) 设 M 是一个可数的 ZFC 传递模型，$B \in M$ 是一个布尔代数。那么，在 LZFC 中可以证明存在M-泛型滤子 $G \subseteq B$。

(ii) 对于每个 M 以及上述泛型 G ，泛型扩张 $M[G]$在 LZFC 中存在。

证明。(i) 给定一个可数的 M 和代数 $B \in M$，按通常方式用选择公理构造一个 M-泛型滤子 $G \subseteq B$ 。

(ii) 给定上述 M、 B和 G，可通过两个归纳定义构造 $M[G]$：一个定义给出 M上的 B-名称集合 M^B，另一个则从 M^B和 G得到 M^B、$I''_G M^B = M[G]$的 G-解释。这两个定义都是归纳的且绝对。因此，在任何满足 M、 B、 $G \in N$的模型 N中执行这些定义，与在V中执行它们相同。⊣

一致性。LZFC 的真理性和一致性如何？令 IC 表示公理“存在一个强不可达基数”，IC$^\infty$ 表示公理“存在真类强不可达基数”，NM 表示公理“存在一个 ZFC 的自然模型”（即形如 V_α）。众所周知，在 ZFC 上，蕴含关系 IC$^\infty$ →IC →NM 都是严格的。

命题 2.23 (i) LZFC $\subset$ ZFC +IC$^\infty$。

(ii) ZFC + IC $\vdash Con$(ZFC + LZFC)。 (iii) ZFC+NM $\vdash Con$(LZFC +“每个集合都是可数的”)。

证明。(i) 在 ZFC +IC$^\infty$ 中进行。只需证明 Loc(ZFC) 成立。于是每个集合 a 都属于某个 V_κ，其中 κ 是强不可达的。由于每个这样的 V_κ 都是 ZFC 的传递模型，因此可得 $\forall x \exists y$($x \in y \wedge\ y \models$ZFC)。

(ii) 令 κ 为 ZFC 宇宙中的一个不可达基数。那么 $V_\kappa \models$ ZFC +Loc(ZFC)。事实上，显然 $V_\kappa \models$ZFC。众所周知（参见 [8], 或 [6, 练习 12.12]），$\{\alpha \in V_\kappa : (V_\alpha, \in) \prec (V_\kappa, \in)\}$ 在 κ 中是闭无界的。因此 $\forall x \in V_\kappa \exists y$($x \in y \wedge y \models$ ZFC)。于是 $V_\kappa \models Loc$(ZFC)。

(iii) 令 V_κ 为 ZFC 的一个自然模型。众所周知， κ 足够大，因此 $H(\omega_1) \in V_\kappa$。$H(\omega_1)$ 就是所需的模型。事实上，令 $x \in H(\omega_1)$。那么 $x \in V_\kappa$ ，由 L¨owenheim-Skolem 定理，存在一个可数模型 $N \prec V_\kappa$ ，使得 $x \in N$。如果 N' 是 N 的莫斯托夫斯基塌缩，那么 N' 是一个包含 x 且属于 $H(\omega_1)$ 的传递模型。因此，$H(\omega_1) \models Loc$(ZFC)。此外， $H(\omega_1) \models$ “每个集合都是可数的”。$\dashv$

由 2.23 (ii) 可知，LZFC 的一致性强度不高于 ZFC $+$NM 的一致性强度。同样，由 2.23 (iii) 可知，ZFC $+ Loc$(ZFC) 的一致性强度不高于 ZFC $+$ IC 的一致性强度。此外，ZFC$+Loc$(ZFC) 是 ZFC+IC$^\infty$ 的一个很好的温和替代方案。值得一提的是，IC$^\infty$ 等价于范畴论中所谓的“宇宙公理”，其渊源可追溯到格罗滕迪克。粗略地说，“格罗滕迪克宇宙”是一个在配对、幂集和替代运算下封闭的传递集。宇宙公理断言，每个集合都属于某个格罗滕迪克宇宙。范畴论学者借助宇宙公理证明的大多数或全部内容，很可能都能在 ZFC $+ Loc$(ZFC) 中得到证明。

3 LZFC 中的基数与幂集

通常，我们可以像在 ZFC 中那样继续讨论 LZFC 中的基数，但由于缺少幂集公理、替代公理以及超限归纳（注记 2.12），不能指望证明那些熟悉的 ZFC 结论。就绝对无限基数而言，LZFC 的图景十分模糊；对习惯于 ZFC 的人来说，处处都潜藏着陷阱。

我们可以照常定义基数。若序数 α 是一个初始序数，即不存在 $\beta \in On$ 使得 $\beta < \alpha$ 且 $\beta \sim \alpha$，则称它为基数（在 V的意义下）。例如， ω 是一个基数。事实上， ω 可能是唯一的无限基数（由命题 2.23 (ii) 可知）。 ω_1 是可数序数类，即

$$\omega_1 = \{\alpha \in On : \alpha \precsim \omega\}.$$

一般而言，这是一个（真）类。若类 $X = \{x : \phi(x)\}$ 是集合，则称其存在。因此，若 ω_1 存在，它就是一个基数。若 ω_1 是一个真类，我们能否推断出 $\omega_1 = On$? 实际上不能。因为 ω_1 是On的一个初始段，但若要从 $On - \omega_1 \neq \emptyset$推出矛盾，后一个类必须有一个最小元素，而我们无法保证这一点。若 $\beta \in On - \omega_1$,

那么 ω_1 将是 β的一个真子类。若 M 是一个包含β的 ZFC模型，那么 $\omega_1 \subseteq \beta \subseteq M$，但 $\omega_1^M \subsetneq \omega_1$，即 $\omega_1^M \in \omega_1$；否则 $\omega_1 = \omega_1^M$和ω_1 就都必须是集合。

若 ω_1 存在，则我们定义 $\omega_2 = \{\alpha \in On\colon\ \alpha \precsim \omega_1\}$，关于这个类也有类似的说明。若 ω_1 存在，则根据 Loc(ZFC)，存在一个 ZFC 的模型 M，使得 $\omega_1 \in M$。显然， ω_1 是 M 中的一个基数，但相对于 M而言，它不一定是绝对的。可能出现这样的情况： $\omega_1^M < \omega_1$，因此 $\omega_1 = \omega_\alpha^M$，对某个 $\alpha > 1$成立。但即使 $\omega_1^M = \omega_1$， ω_2^M（它是一个集合）也不一定是绝对的，而且 ω_2 可能是一个真类。一般而言，类$X = \{\alpha \in On : \omega_\alpha$ exists$\}$ 已定义，但我们既不知道 $X = On$是否成立，也不知道 $On - X$ 是否有最小元素。

关于幂类 $\mathcal{P}(\omega)$ 以及遗传可数集的类，也有类似的说明

$$H(\omega_1) = \{x : TC(x) \precsim \omega\}$$

。若 $\mathcal{P}(\omega)$存在，则 $\mathcal{P}(\omega)$属于一个模型M，显然， $\mathcal{P}(\omega)^M = \mathcal{P}(\omega)$。然而，由于 M 不一定是自然模型，因此可能有 $(\mathcal{P}^2(\omega))^M \neq \mathcal{P}^2(\omega)$，而且 $\mathcal{P}^2(\omega)$ 可能是一个真类。对于类 $Y = \{\alpha :\ \mathcal{P}^\alpha(\omega)$ exists$\}$，我们同样既不知道 $Y = On$是否成立，也不知道 $On - Y$是否有最小元素。此外，若对每个 $n \in \omega$，$\mathcal{P}^n(\omega)$都存在，我们不能据此断定 $\mathcal{P}^\omega(\omega)$存在，因为缺少替代公理。

关于 $H(\omega_1)$，众所周知，在 ZFC 中，我们可以用 $\mathcal{P}(\omega)$ 的元素对其元素进行编码，从而构造一个嵌入 $f\colon\ H(\omega_1)$ 到 $\to \mathcal{P}(\omega)$。这是通过对 $H(\omega_1)$ 的元素按秩进行归纳来完成的，秩一直上升到 ω_1。因此，在 LZFC 中无法实现这一嵌入。

上述关于绝对无限基数的不确定性似乎符合 LZFC 的精神。它们促使人们只处理模型，而将绝对不可数无穷置于一旁。然而，一旦我们在 LZFC 中加入分离公理，这些不确定性便迎刃而解，因为分离公理恢复了超限归纳（见引理 2.19）。

此时，我想谈谈符号 ω_α 的含义中一个容易产生歧义之处（在 ZFC 环境中也会出现这种情况）。 ω_α 根据上下文，可以表示一个对象，即某个特定序数；也可以表示一种性质，即“是第 α 个无限基数”这一性质。这种歧义源于这两种含义在 ZFC 模型中的交互。例如，如果 $M \models$ ZFC，$\beta \in On \cap M$ 并且我们写作$M \models \beta = \omega_\alpha$，那么这里的 ω_α 指的是一种性质，即“β 是第 α 个无限基数”（按 M 的意义）的性质。最后这个断言也可以记作 $\beta = \omega_\alpha^M$。类似地，在表达式 $M \models |x| = \omega_\alpha$ 中，

ω_α 被理解为一种性质。现在假设 ω_α 是一个集合。根据 Loc(ZFC)，存在一个模型 M，使得 $\omega_\alpha \in M$。如果对于某个 $x \in M$ 我们写作$M \models x \sim \omega_\alpha$，那么这里的 ω_α 指的是一个对象，它涉及在 M 中成立的一种性质。另一方面，ω_α 在 M 中仍然是一个基数，但它的大小未必也保持不变；也就是说，对于某个 $\beta > \alpha$，可能有 $\omega_\alpha = \omega_\beta^M$。按照将 ω_β 用作性质的惯例，后者等价地写作$M \models \omega_\alpha = \omega_\beta$，这似乎是荒谬的。这种荒谬仅仅是由符号 ω_α、ω_β 的歧义造成的：在公式 $M \models \omega_\alpha = \omega_\beta$ 中，ω_α 被理解为一个对象，而 ω_β 被理解为一种性质。在 ZFC 中情况并无不同。只不过，我们在其中讨论的（集合）模型大多要么是可数的，因此不含真正的不可数基数；要么是自然的，在其中所有幂集和基数都是绝对的。只有当 ω_α 不可数、$\omega_\alpha \in M$ 且 $\omega_\alpha^M \neq \omega_\alpha$ 时，才会出现这种棘手的情况。

如果我们不把符号 ω_α 用作性质，而改用谓词 $Card(\alpha, x)$ 表示性质“x 是第 α 个无限基数”，就能进一步消除歧义。谓词 $Card(\alpha, x)$ 定义如下。令

$$Card(x) := x \in On \wedge \forall \beta < x (\beta \not\sim x)$$

表示性质“x 是一个基数”。那么，公式 $Card(\alpha, x)$ 由以下子句定义：

$$\begin{cases} Card(0\ x) = [x = \omega], \\ Card\ \alpha + 1\ x := [Card(\forall z\ Card\ z\ x) \wedge \forall y\ Card\ \alpha\ y \rightarrow y \precsim x \wedge \\ \qquad \rightarrow z \precsim y \vee x \precsim z\ ]) \\ Card\ \alpha\ x = [\forall \beta < \alpha \forall y\ Card\ \beta\ y \rightarrow y \precsim x \\ \rightarrow x \precsim z \vee \exists \gamma < \alpha \exists u (Card(\gamma, u) \wedge z \precsim u)], \text{对于 } \alpha \text{ 极限序数。} \end{cases}$$

请注意，$Card(\alpha, x)$旨在 ZFC 模型内部使用，因此，为验证 $M \models Card(\alpha, x)$ 而对 α 进行归纳是合理的。使用谓词 $Card(\alpha, x)$，我们写作 $M \models Card(\alpha, \beta)$，而不写 $M \models \beta = \omega_\alpha$。如果 $\omega_\alpha \in M$ 和 ω_α 恰好是 M 的第 β个基数，我们就写作 $M \models Card(\beta, \omega_\alpha)$，而不写令人困惑的 $M \models \omega_\alpha = \omega_\beta$。这样便消除了歧义。

下文中，我们将继续使用记号 $\beta = \omega_\alpha^M$作为$M \models Card(\alpha, \beta)$的缩写。此外，$M \models |x| = \omega_\alpha$ 将作为以下内容的缩写：

$$M \models \exists \beta (x \sim \beta \wedge Card(\alpha, \beta)).$$

如果 ω_α 存在，且 M 是满足 $\omega_\alpha \in M$ 的模型，我们就称 ω_α 在 M 中是绝对的，当且仅当 $\omega_\alpha^M = \omega_\alpha$，也就是说，当 $M \models Card(\alpha, \omega_\alpha)$ 时。下面的结论很容易验证。

引理 3.1 (LZFC) 如果 M, N是满足 $M \subseteq N$, $x \in M$,$\alpha \in M$ 和 $M \models |x| = \omega_\alpha$ 的 ZFC 模型，那么 $N \models |x| \leq \omega_\alpha$。

证明。我们只需在模型 N 内按通常方式论证。 ⊣

一般来说，如果 $n \in \omega$ 和 ω_n 存在，我们就令 $H(\omega_{n+1}) = \{x : TC(x) \precsim \omega_n\}$ 和 $\omega_{n+1} = \{\alpha \in On : \alpha \precsim \omega_n\}$。

引理 3.2 在 LZFC 中，对所有 $n \in \omega$，以下结论成立。

(i) 如果 $H(\omega_{n+1})$ 存在，那么 $\mathcal{P}(\omega_n)$ 和 ω_{n+1} 也存在。特别地，如果 M 是一个满足 $H(\omega_{n+1}) \in M$ 的 ZFC模型，那么 $\mathcal{P}(\omega_n)^M = \mathcal{P}(\omega_n)$ 和 $\omega_{n+1}^M = \omega_{n+1}$。

(ii) 如果 $\mathcal{P}(\omega_n)$ 存在，且 $\mathcal{P}(\omega_n) \in M$，那么 $\omega_{n+1}^M = \omega_{n+1}$ 和 $H(\omega_{n+1})^M = H(\omega_{n+1})$。

(iii) 假设 $\mathcal{P}^{n+1}(\omega)$ 存在且 $\mathcal{P}^{n+1}(\omega) \in M$。那么 $\mathcal{P}(\omega_n) \in M$，因此 $\omega_{n+1}^M = \omega_{n+1}$。此外，$\mathcal{P}^{n+1}(V_\omega)^M = V_{\omega+n+1}^M = V_{\omega+n+1}$。

此外，在 LZFC+分离公理中，上述断言对每个$\alpha \in On$都得到了证明。具体如下:

(iv) 如果 $H(\omega_{\alpha+1}) \in M$，那么 $\mathcal{P}(\omega_\alpha)^M = \mathcal{P}(\omega_\alpha)$ 且 $\omega_{\alpha+1}^M = \omega_{\alpha+1}$。

(v) 如果 $\mathcal{P}^\alpha(\omega) \in M$，那么 $\omega_\alpha^M = \omega_\alpha$ 以及 $V_{\omega+\alpha}^M = V_{\omega+\alpha} = \mathcal{P}^\alpha(V_\omega)$。

证明。为清晰起见并简化表述，我们对 $n = 0$ 展示条款 (i) 和 (ii)，并对 $n = 1$ 展示条款 (iii)。归纳步骤很直接，留给读者完成。

(i) 假设 $H(\omega_1)$ 是一个集合，且 M 是一个模型，使得 $H(\omega_1) \in M$。那么 $\mathcal{P}(\omega) \subseteq H(\omega_1) \subseteq M$，因此 $\mathcal{P}(\omega) = \mathcal{P}(\omega)^M$。此外，$\omega_1^M = \{\alpha \in On \cap M : M \models \alpha \precsim \omega\}$。于是 $\omega_1^M \subseteq \omega_1$。反过来，设 $\alpha \in \omega_1$ 是一个无限序数。那么存在一个双射 $f : \alpha \to \omega$。显然 $f \in H(\omega_1)$，因此 $f \in M$。由于 $\alpha = dom(f)$，$\alpha \in M$，因此 $\alpha \in \omega_1^M$。所以 $\omega_1^M = \omega_1$。

(ii) 假设 $\mathcal{P}(\omega)$ 存在，并设 $\mathcal{P}(\omega) \in M$。我们先证明 $\omega_1^M = \omega_1$。正如上文所见，$\omega_1^M \subseteq \omega_1$。为证明反向结论，取某个无限的 $\alpha \in \omega_1$。只需证明 $\alpha \in M$ 和 $M \models \alpha \sim \omega$。现在（在 V 中）存在一个双射 $f : \omega \to \alpha$。令

$$R = \{\langle m, n\rangle \in \omega \times \omega : f(m) \in f(n)\}.$$

$\omega \times \omega$ 是一个集合，R 的定义性质是 Δ_0，因此根据 Δ_0-分离公理，R 也是一个集合。此外，R是 ω的良序，并且 $R \in \mathcal{P}(\omega \times \omega)$。由于 $\mathcal{P}(\omega) \in M$，所以 $\mathcal{P}(\omega \times \omega) \in M$。因此，$R \in M$和 $M \models$“(ω, R)是一个良序”。所以(ω, R)的序型在 M中存在。但这个序型就是 α，即 $\alpha \in M$，且 $M \models (\alpha, \in) \cong (\omega, R)$。因此 $M \models \alpha \sim \omega$。

我们现在讨论这一条款的第二个断言，并令 $\mathcal{P}(\omega) \in M$。我们必须证明 $H(\omega_1)^M = H(\omega_1)$，或者说，$H(\omega_1) \subseteq H(\omega_1)^M$。[5] 令 $x \in H(\omega_1)$，并令 $f: TC(x) \to \omega$ 是一个双射。令 N 为一个满足 $\{\mathcal{P}(\omega) \ f\} \subset N$的ZFC模型。在 N中，我们可以按通常方式定义一个编码 $g: H(\omega_1)^N \to \mathcal{P}(\omega)^N = \mathcal{P}(\omega)$。现在，序对 $\langle x、f\rangle$ 是 $H(\omega_1)^N$的一个元素，并且由 $g(\langle x, f\rangle) \in \mathcal{P}(\omega)$ 进行编码。但由于 $\mathcal{P}(\omega) \in M$，$g(\langle x, f\rangle)$ 属于 M，而且从$g(\langle x, f\rangle)$ 可以完全恢复 $\langle x、f\rangle$，即 $\langle x、f\rangle \in M$。因此 $x \in H(\omega_1)^M$。

(iii) 我们证明关于 $n = 1$ 的断言。令 $\mathcal{P}^2(\omega) \in M$。那么 $\mathcal{P}(\omega) \in M$，因此根据 (ii)，$\omega_1^M = \omega_1$。正如我们在 (ii) 中看到的，每个 $\alpha \in \omega_1$ 都由 ω 的某个良序 $R \in \mathcal{P}(\omega \times \omega)$ 编码。因此，每个 $x \subseteq \omega_1$ 都由 $\mathcal{P}^2(\omega \times \omega)$ 的某个元素编码，或者等价地，由 $\mathcal{P}^2(\omega)$ 的某个元素编码。所以 $\mathcal{P}(\omega_1)$ 是 $\mathcal{P}^2(\omega)$ 的一个子集（的编码）。这意味着 $\mathcal{P}(\omega_1) \in M$，并且根据 (ii)，$\omega_2^M = \omega_2$。另一个断言也很容易得出。

(iv) 和 (v) 需要对 α 使用归纳法。这里我们不能在 LZFC 的任何特定模型中进行推理，因此必须在 V 中完成归纳。这解释了为何要使用分离公理。⊣

关于上述断言 (i)–(iii) 的逆命题，其中一些可以证明是错误的（假设某个基础理论一致）。例如，相对于 ZFC +LZFC，一致的是：在 LZFC 中 ω_1 存在，而 $\mathcal{P}(\omega)$ 是一个真类。事实上，如果 ZFC +LZFC 一致，那么 ZFC +LZFC $+\mathcal{P}(\omega) \sim \omega_2$ 也一致。若 K 是最后一个理论的模型，那么 $H(\omega_2)^K$就是 LZFC + “ω_1 存在” + “$\mathcal{P}(\omega)$ 不存在”的模型。

4 马洛模型

ZFC的传递模型与不可达基数有着显而易见的类比。粗略地说，传递的 $M \models$ZFC是不可达基数的“一阶对应物”，因为二者都是满足相同基本闭包条件的传递集。这些闭包条件与ZFC中最强大的两个公理——替代公理和幂集公理——有关。首先，一个（强）不可达基数 κ 对所有函数 f都是闭的，也就是说，对于每个 $\alpha \in \kappa$，$f''\alpha$ 在 κ中有界。模型M的对应性质是：鉴于替代公理，对于每个 $x \in M$，都有 $f''x \in M$，前提是 f在 M中是一阶可定义的。（这就是我们所说的 M 是不可达基数的一阶对应物。）其次，对于每个基数 $\lambda < \kappa$，$2^\lambda < \kappa$；这显然对应于幂集公理为真

[5]这一蕴含的证明由审稿人提供。

于 M中这一事实，即对于每个 $x \in M$， $\mathcal{P}^M$（x） $\in M$。[6]

因此，满足 $M \models$ ZFC+Loc(ZFC) 的传递 M，在以下意义上类似于“准 1-Mahlo”基数： $M \models Loc$(ZFC) 表示每个 $x \in M$ 都属于某个满足 $y \models$ ZFC 的 $y \in M$。也就是说，包含于 M 中的传递模型构成了 M 在 $\in$ （以及 $\subseteq$）下的一个无界（$=$ 共终）子类。这正是成为 1-Mahlo 基数的性质，只不过需要将“无界”替换为“平稳”。因此，若 $M \models$ ZFC $+ Loc$(ZFC $+ Loc$(ZFC))，则 M 是“准 2-Mahlo”，依此类推。[7]然而，平稳性是一个相对概念：它取决于有哪些闭无界集（俱乐部集）可用。只有当范围限于模型 M 的可定义俱乐部集和平稳子集的聚集时，才能获得绝对性。在给出模型的平稳子集定义之前，我们先按归纳方式定义迭代局部化原则 Loc_n(ZFC)，其中 $n \in \omega$，如下：

$Loc_0(\mathrm{ZFC}) = Loc(\mathrm{ZFC})$,
Loc_{n+1}(ZFC) $= Loc$(ZFC $+ Loc_n$(ZFC)。

很容易验证，对每个 $n \in \omega$，句子 Loc_n(ZFC) 都是 Π_2。此外，归纳地可以看到

$$Loc_{n+1}(\mathrm{ZFC}) \rightarrow Loc_n(\mathrm{ZFC}). \tag{1}$$

备注 4.1 我们能否继续定义 Loc_α(ZFC) 的 $\alpha \geq \omega$? 至少可以沿着构造序数继续定义，方式类似于 [5] 中用一致性算子定义理论超限递进的方式：T$_0$ = T、T$_{\alpha+1}$ = T$_\alpha + Con$(T$_\alpha$)、T$_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha}T_\beta$。在 ZFC 中，也可以把序数用作参数$\beta < \alpha$ 来定义 Loc_α(ZFC)。例如，假设对于 $\beta < \alpha$，已经定义了 Loc_β(ZFC)，从而映射 $\beta \mapsto Loc_\beta$(ZFC) 是可定义的。那么，根据替代公理，$\{Loc_\beta$(ZFC)： $\beta < \alpha\}$ 是一个可定义集合，因此，鉴于脚注

[6]即使在 ZFC 中，ZFC 的传递模型存在这一事实也可以被视为一种弱大基数公理，因为这些蕴涵不可逆

$$\mathrm{IC} \rightarrow \mathrm{NM} \rightarrow \mathrm{TM} \rightarrow Cns(\mathrm{ZFC}),$$

其中，IC 表示“存在一个不可达基数”，NM 表示“存在一个自然的（即形如 V_α）ZFC模型”，TM 表示“存在一个 ZFC 的传递模型”，Cns(ZFC) 表示“ZFC 是一致的”。[7]请注意，算子 Loc 不仅可以应用于 ZFC，也可以用显而易见的方式应用于任意集合论 S。也就是说， Loc(S)：$= \forall x \exists y$($x \in y \wedge y \models$ S)。不过，要使后者有意义，S 必须是语言 $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ 中的一个 *definable* 公理集合。如果 S 由 ϕ 定义，那么 Loc(S) 就是 $\mathcal{L}'$-句子 $\forall x \exists y$($x \in y \wedge \forall z$($\phi(z) \rightarrow y \models z$))。

7，我们可以设 Loc_α(ZFC) $= Loc$(ZFC $\cup \{Loc_\beta$(ZFC): $\beta < \alpha\}$)。但在 LZFC 中，替代公理不可用，因此 $\{Loc_\beta$(ZFC): $\beta < \alpha\}$ 未必是集合，所以 Loc 的迭代无法超越构造序数。

回顾一下，若基数 κ 以下的不可达基数构成 κ中的驻定集，则称基数 κ 为 Mahlo。由于公理 Loc_n(ZFC) 只涉及模型类的无界性，因此只需 κ 具有马洛性质，就足以使 V_κ 满足 Loc_n(ZFC)。

命题 4.2 (ZFC) 设 κ 是 Mahlo 基数。那么对所有 $n \in \omega$，都有 $V_\kappa \models Loc_n$ (ZFC)。

证明。对 $n \in \omega$归纳地定义：若基数 κ 是不可达的，并且对于每个 $m < n$， m- 无界基数在 κ 中无界，则称基数 κ 为 n- 无界。

断言 1. 若 κ 是 Mahlo 基数，则对所有 $n \in \omega$， κ 都是 n-无界的。

证明。对 n使用归纳法。显然， κ 是 0-无界和 1-无界的。设对 $n \geq 1$, κ是 n-无界的。那么 $(n-1)$-无界基数在 κ中共终。令 $\alpha < \kappa$。令 S为 ($n-1$)-无界基数在 α以上的极限点集。容易验证， S 是闭无界集。因此，由于 κ 是 Mahlo， S 中包含一个不可达基数 β。这个 β 也是 $(n-1)$-无界基数的极限，因此它是 n-无界的，且大于 α。这意味着 n-无界基数在 κ中共终。因此， κ 是 $(n+1)$-无界的。

断言 2. 若 κ 是 $(n+1)$-无界的，则 $V_\kappa \models Loc_n$(ZFC)。

证明. 对 n 使用归纳法。设 κ 是 1-无界的。那么，低于 κ 的不可达基数集合 $S \subset \kappa$ 在 κ 中无界。对于每个 $\lambda \in S$， $V_\lambda \models$ ZFC。因此， V_κ 满足 $\forall x \exists y($ $x \in y \wedge y \models$ ZFC)，即 $V_\kappa \models Loc_0$(ZFC)。

我们假设该断言对 $n+1$ 成立，并证明它对 $n+2$ 也成立。设 κ 是 $(n+2)$-无界的。$(n+1)$-无界基数组成的集合 $S \subset \kappa$ 在 κ 中无界。根据归纳假设，对于每个 $\lambda \in S$， $V_\lambda \models Loc_n$(ZFC)。因此， V_κ 满足 $\forall x \exists y(x \in y \wedge y \models$ ZFC $+ Loc_n$ (ZFC))。最后一句是 Loc(ZFC $+ Loc_n$(ZFC)) $= Loc_{n+1}$(ZFC)。

断言 1 和 2 给出了该命题的证明。 ⊣

迭代局部化原则 Loc_n(ZFC)是“弱 Mahlo”原则，旨在为下文讨论的模型所用的完整 Mahlo 概念提供动机。后者预设了为此目的而调整的闭无界集和驻定集的概念。除非另有说明，下文的定义均在 LZFC 中给出。

定义 4.3 设 M 是 ZFC 的一个传递模型。若一个集合 $X \in Def(M)$ 满足 $(\forall x \in M)(\exists y \in X)(x \subseteq y)$，则称其在 M 中无界。若一个 $X \in Def(M)$，则称其为闭集，若

$$(\forall y \in M)(y \subseteq X \wedge (y, \subseteq) \text{ is a chain } \rightarrow \cup y \in X).$$

若无界且闭，则称 $X \in Def(M)$ 为 M 的闭无界集。若对于每个闭无界集 $Y \in Def(M)$，都有 $X \cap Y \neq \emptyset$，则称 $X \in Def(M)$ 在 M 中是驻定的。

对于一个 ZFC 模型 $M \models$, M 的一个典型闭无界集是集合

$$\{M_\alpha : \alpha \in On \cap M\},$$

其中 $M_\alpha = V_\alpha^M$。对于每个 ZFC $M \models$，令

$$Club(M) = \{x \in Def(M) : x \text{ is closed unbounded in } M\},$$

$$Stat(M) = \{x \in Def(M) : x \text{ is stationary in } M\}.$$

由于 $Def(M)$ 是绝对的，因此 $Club(M)$ 和 $Stat(M)$ 也都是绝对的。容易看出，对于每个 M， $Club(M)$ 都是 $Stat(M)$ 的真子集。例如，若 X 是闭无界集，$(y, \subseteq)$ 是一个 X 的链，并且我们令$Y = X - \{\cup y\}$，那么 $Y \in Stat(M) \backslash Club(M)$。

给定一个传递的 ZFC $M \models$ 和任意无界的 $X \in Def(M)$，令F_X^M: $On^M \rightarrow On^M$ 定义如下:

$$F_X^M(\alpha) = \text{least}\{\beta : (\exists x \in X)(M_\alpha \subseteq x \subseteq M_\beta)\}.$$

显然， $F_X^M \in Def(M)$。 F_X^M称为相对于 M的 X的关联函数。只要 M 是明确的，我们就简单地用 F_X代替F_X^M。根据定义可得

$$(\forall \alpha \in On^M)(\exists x \in X)(M_\alpha \subseteq x \subseteq M_{F_X(\alpha)}). \tag{2}$$

引理 4.4 对每个 M 以及每个可定义的无界 $X \subseteq M$，(a) F_X是单调不减的，即对所有 $\alpha < \beta \in M$、 F_X，$(\alpha) \leq F_X(\beta)$。(b) 对每个$\alpha \in M$， $\alpha \leq F_X(\alpha)$。

证明。（a）令 $\alpha < \beta$。那么 $\exists x \in X(M_\beta \subseteq x \subseteq M_{F_X(\beta)})$。由于$M_\alpha \subseteq M_\beta$, 我们有 $\exists x \in X(M_\alpha \subseteq x \subseteq M_{F_X(\beta)})$。由于 $F_X(\alpha)$ 是满足 $\exists x \in X(M_\alpha \subseteq x \subseteq M_\gamma)$ 的最小 γ，可知 $F_X(\alpha) \leq F_X(\beta)$。（b）只需注意，按定义，$M_\alpha \subseteq M_{F_X(\alpha)}$，因此 $\alpha \leq F_X(\alpha)$。$\dashv$

借助函数 F_X，可以证明闭无界集的以下闭包性质。由于它们不会用于本节主要结果——命题 4.11——的证明中，我们省略证明。

引理 4.5 (i) 对任意 $X_1, X_2 \in Club(M)$， $X_1 \cap X_2 \in Club(M)$。

(ii) 设 $X \in Def(M)$ 是一个由配对编码的 M 的闭无界集族。即，对于每个 $x \in dom(X)$， $X_{(x)} = \{y : (x, y) \in X\}$ 是一个闭无界集。那么，对于每个集合 $A \subseteq dom(X)$， $A \in M$, $\bigcap_{x \in A} X_{(x)} \in Club(M)$。

(iii) 若 $X_{(x)}, x \in M$ 是 M 的一个 M-闭无界集族，则 $\triangle_{x \in M} X_{(x)}$ 是一个闭无界集（其中 $\triangle_{x \in M} X_{(x)}$ 是 $X_{(x)}$ 的通常对角交）。因此，对每个 $S \in Def(M)$, $\triangle_{x \in S} X_{(x)}$ 是一个闭无界集。

现在我们来定义 ZFC 的 α-Mahlo 模型。

定义 4.6 (LZFC) αZFC 的 -Mahlo 模型归纳地定义如下：

(i) 若 x 是传递的且满足 $x \models$ ZFC，则称 x 为 0-Mahlo。

(ii) 若 x 是传递的、满足 $x \models$ ZFC，且 $\{y \in x : (y, \in)$ 是一个 α-Mahlo 模型，$\}$ 是 x的驻定子集，则称 x 为 $(\alpha + 1)$-Mahlo。

(iii) 对于 α 极限序数，若对所有 $\beta < \alpha$，它都是 β-Mahlo，则称 x 为 α-Mahlo。

上述关于 α-马洛性质的定义，可用公式 $mahlo(\alpha, x)$ 形式化；该公式由以下子句定义（我们只省略了 x的传递性，因为这是不言自明的）：

$$\begin{cases} mahlo(\quad 0\ x \quad = [x \models \quad],): \text{ ZFC}\ (\ ,\ ): \text{ ZFC} \\ \qquad mahlo\ \alpha + 1\ x \quad = [x \models \\ \qquad\qquad \wedge\ \forall y \in Club\ x \quad \exists u \in y \quad mahlo\ \alpha\ u \quad]\ (\ (\ ))(\ )(\ (\ ,\ ))\ (\ ,\ ): \ = \forall \beta < \alpha\ mahlo(\beta,), \text{ 对于极限} \\ mahlo\ \alpha\ x \qquad\qquad x \qquad \alpha \qquad . \end{cases} \tag{3}$$

序数

缺少关于 α 的归纳法，并不妨碍 $mahlo(\alpha, x)$对所有 α 和 x都有真值。这是因为 $mahlo(\alpha, x)$是绝对的，因为 $Club(x)$是一个 Δ_1 性质。因此，为了验证 $mahlo(\alpha, x)$所需的关于 α 的归纳法，可以在任何包含 x 和 α的模型 M 中进行。

引理 4.7（LZFC）对每个 α，句子 $mahlo(\alpha, x)$都是一阶的，并且对传递模型是绝对的。也就是说，对每个满足 ZFC 的传递模型 $M \models$，若 $\alpha, x \in M$，则 $mahlo(\alpha, x)$ 当且仅当 $M \models mahlo(\alpha, x)$。

证明。对 α 作简单归纳，并注意到 (3) 中各子句右侧的内容都是绝对的。

$\dashv$

请注意，仅马洛性质（即 1-马洛性质）就蕴含迭代局部化公理 Loc_n(ZFC)。

命题 4.8（LZFC）对于每个 $n \in \omega$，如果 M 是 Mahlo，那么 $M \models Loc_n$(ZFC)。

证明。证明与命题 4.2 的证明类似，故略去。 ⊣

回顾一下，基数 κ 的闭无界集恰好是正规（即严格递增且连续）函数 $f: \kappa \to \kappa$ 的值域（例如参见 [6, 第 92] 页）。对于每个无界 $X \subseteq M$ （尤其是每个闭无界集），我们在上文（见（2））定义了关联函数 F_X: $On^M \to On^M$，它是单调不减而非严格递增的，并且满足 $F_X(\alpha) \geq \alpha$。这类函数若连续，也可称为正规函数。[8] 显然，这样的每个函数在任意序数之上都有不动点，一如通常情形。利用满足 F_X 为正规的闭无界集X，我们可以将 M 的闭无界集与 κ的闭无界集联系起来。

定义 4.9 如果闭无界集 $X \subseteq M$ 的关联函数 F_X是正规函数，则称 $X \subseteq M$ 为正规闭无界集。

给定 $M \models$ZFC，令

$$U_M = \{M_\alpha : \alpha \in M\}$$

为 M的典型闭无界集。对于每个 $X \in Club(M)$，令

$$X^* = X \cap U_M.$$

由引理 4.5 $X^* \in Club(M)$ 得。

引理 4.10 对于每个 $X \in Club(M)$， X^* 是一个正规闭无界集。

证明。由于根据 4.4 (b)， F_{X^*} 已经是单调不减的，因此只需证明 F_{X^*} 是连续的，也就是说，对于每个极限序数 α， $F_{X^*}(\alpha) = \sup\{F_{X^*}(\beta): \beta < \alpha\}$。现在， X^* 的元素都是集合 M_β。令 $X^- = \{\beta \in On^M : M_\beta \in X^*\}$。那么，根据定义，对于每个 β，

$$F_{X^*}(\beta) = \text{least}\{\gamma : (\exists x \in X^*) M_\beta \subseteq x \subseteq M_\gamma\} = \text{least}\{\gamma \in X^- : M_\beta \subseteq M_\gamma\}.$$

[8]如果 f 只是单调不减的，即 $\alpha < \beta \to f(\alpha) \leq f(\beta)$，那么 $rng(f)$ 可能有界，这会使 f变得平凡。但如果 $rng(f)$ *is* 无界，例如 $f(\alpha) \geq \alpha$，那么可以放宽对单调性的严格要求。函数 F_X就是这种情况。

因此，对于每个 $\beta<\alpha$， $M_\beta \subseteq M_{F_{X^*}(\beta)}$ 且 $M_{F_{X^*}(\beta)} \in X^*$。所以

$$\bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta = M_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} M_{F_{X^*}(\beta)} = M_\gamma, \tag{4}$$

其中 sup$\{F_{X^*}(\beta)\colon\ \beta<\alpha\}=\gamma$。但是 $\{M_{F_{X^*}(\beta)}\colon\ \beta<\alpha\}\subseteq X^*$，且链 $\{M_{F_{X^*}(\beta)}\colon \beta<\alpha\}$属于 M。因此，由于 X^*是闭无界集，$\bigcup_{\beta<\alpha} M_{F_{X^*}(\beta)} = M_\gamma \in X^*$。于是由 (4) 可得 $F_{X^*}(\alpha)\leq\gamma$。另一方面，根据 F_{X^*} 的单调性（见 4.4 (a)），$F_{X^*}(\alpha)\geq$ sup$\{F_{X^*}(\beta)\colon\ \beta<\alpha\}=\gamma$。所以，$F_{X^*}(\alpha)=\gamma$，如所需。⊣

鉴于引理 4.10，一个可定义的 $Y\subseteq M$ 是驻定的，当且仅当它与 M 的所有形如 X^* （其中 $X\in Club(M)$）的正规闭集相交。对于每个满足 ZFC 的模型$M\models$，令 $ht(M)$（M的高度）为M中的序数的上确界，也就是说，$ht(M)=M\cap On$。

回顾:

(i) 若 κ是强不可达的，则其为 0-Mahlo。

(ii) 若 κ 以下的 α-Mahlo 基数所成的集合是 κ的平稳子集，则 κ 是（$\alpha+1$）-Mahlo。

(iii) 对于极限序数 α，若对所有 $\beta<\alpha$， κ 都是 β-Mahlo，则 κ 是 α-Mahlo。

命题 4.11 (i) 设 $M\models$ ZFC 且 $ht(M)=\alpha$。若 $X\in Club(M)$，则 $\{\beta<\alpha:\ M_\beta\in X^*\}$ 是 α的一个闭无界集。

(ii) (ZFC) 若 κ 是 β-Mahlo，且 $\beta<\kappa$，则 V_κ 是 β-Mahlo。

证明。(i) 设 $X\in Club(M)$，并设 $X^-=\{\beta<\alpha:\ M_\beta\in X^*\}$。我们必须证明 X^- 是 α的闭无界集。设 $\beta<\alpha$。显然，$rng(F_{X^*})\subseteq X^-$。由于 F_{X^*} 是正规集，它有一个不动点 $\gamma>\beta$。现在，$F_{X^*}(\gamma)=\gamma$ 意味着$\gamma\in X^-$，因此 X^- 是无界的。进一步，设 $\{\beta_\xi:\xi<\delta\}$ 是 X^-的递增序列。那么 $\{M_{\beta_\xi}:\ \xi<\delta\}$ 是 X^*的递增序列。若$\beta=$ sup$\{\beta_\xi:\ \xi<\delta\}$，则 $M_\beta=\bigcup_{\xi<\delta} M_{\beta_\xi}$；并且根据 X^*的闭性，有 $M_\beta\in X^*$。因此 $\beta\in X^-$，且 X^- 是闭的。

(ii) 对 β 使用归纳法。若 κ 是 0-Mahlo，则 κ 是强不可达的，因此 $V_\kappa\models$ ZFC，从而根据 (3)，V_κ 是一个 0-Mahlo模型。

假设该命题对 β 成立，并令 κ 为（$\beta+1$）-Mahlo。那么集合$Y=\{\lambda<\kappa:\ \lambda$ 是 β-Mahlo$\}$，且在 κ中驻定。令 $Y^+=\{V_\lambda:\ \lambda\in Y\}$。$Y$和 Y^+ 在 V_κ中都是可定义的。由归纳假设，对每个$x\in Y^+$，x 都是一个 β-马洛模型。因此，只需证明 Y^+ 在 V_κ 中驻定；或者，根据 4.10，只需证明它与所有满足 $X\in Club(V_\kappa)$ 的闭无界集 X^* 都有交集。令$X\in Club(V_\kappa)$。由于 $V_\kappa\cap On=\kappa$，根据 (i)，集合 $X^-=\{\alpha<\kappa:\ V_\alpha\in X^*\}$ 是 κ中的一个闭无界集。因此 $Y\cap X^-\neq\emptyset$，从而 $Y^+\cap X^*\neq\emptyset$。

若 β 是极限序数，则该断言可由定义立即推出。 ⊣

5 Π^1_1-不可描述模型

接下来的问题是，能否合理地定义类似于更高阶大基数的模型。Mahlo 之后的下一个候选概念是弱紧致模型。不过，众所周知，弱紧致基数有若干等价刻画，例如通过分割性质、树性质、紧致性性质、 Π^1_1-不可描述性等（例如参见 [6], §17）。尽管最直观的刻画是分割性质，但似乎最适合我们语境的是 Π^1_1-不可描述性。回顾一下，若对每个 $U \subseteq V_\kappa$ 和每个 Π^n_m 句子 ϕ （其前束范式包含从 $\forall$ 开始的 m 次 n 阶量词交替），只要 $(V_\kappa, \in, U) \models \phi$，就存在 $\alpha < \kappa$ 使得 $(V_\alpha, \in, U \cap V_\alpha) \models \phi$，则称基数 κ 是 Π^n_m-不可描述的。以下是标准结果（证明参见 [6, 第 297] 页）。

定理 5.1（Hanf-Scott）基数 κ 是弱紧的，当且仅当它是 Π^1_1-不可描述的。

定义 5.2（LZFC）若传递模型 $M \models$ ZFC 满足以下条件，则称其为 Π^1_1-不可描述的：对于每个 $U \in Def(M)$ 和每个 Π^1_1 句子 ϕ，若 $(M, \in, U, Def(M)) \models \phi$，则存在一个传递模型 $N \in M$，使得 $U \cap N \in Def(N)$ 且 $(N, \in, U \cap N, Def(N)) \models \phi$。

在上述记号中， $Def(M)$、 $Def(N)$ 表示 ϕ二阶量词的取值范围。Π^1_1-不可描述性是一阶可定义的，并且对传递模型是绝对的。也就是说，对于任意满足 $M \in K$ 的传递模型 K，“M 是 Π^1_1- 不可描述的 ” 当且仅当 $K \models$ “M 是 Π^1_1- 不可描述的 ”。

存在 Π^1_1-不可描述模型（可以一致地假设其存在）是以下事实的推论：

命题 5.3（ZFC）如果 κ 是弱紧的，那么模型 V_κ 是 Π^1_1-不可描述的。

证明。这直接由 5.1 和下面的引理 5.4 得出。 ⊣

引理 5.4（ZFC）设 κ 是一个 Π^1_1-不可描述基数。那么对于每个$U \in Def(V_\kappa)$，以及 $\mathcal{L}_2 \cup \{S\}$ 的每个 Π^1_1 句子 ϕ（其中 $\mathcal{L}_2$ 扩充了二阶变量，而 S(·) 是解释为 U 的一元谓词），若

$$(V_\kappa, \in, U, Def(V_\kappa)) \models \phi,$$

那么存在 $\alpha < \kappa$，使得 $U \cap V_\alpha$ 在 $(V_\alpha, \in)$ 中是一阶可定义的，并且 $(V_\alpha, \in, U \cap V_\alpha, Def(V_\alpha)) \models \phi$。

证明。设 κ 是 Π^1_1-不可描述的。设 $U \in Def(V_\kappa)$，并设 $U = \{x \in V_\kappa : V_\kappa \models \theta(x)\}$，其中 θ是一阶公式。再设 $\phi = \forall X \psi(X)$是一个 Π^1_1 句子，其中 $\psi(X)$不含二阶变量。假设 $(V_\kappa, \in, U, Def(V_\kappa)) \models \phi$。令 $\sigma = \forall x(\mathrm{S}(x) \leftrightarrow \theta(x))$。显然，$(V_\kappa, \in U, Def(V_\kappa)) \models \sigma$，且 σ是一阶的。因此

$$(V_\kappa, \in, U, Def(V_\kappa)) \models \forall X \psi(X) \wedge \sigma,$$

或者等价地

$$(V_\kappa, \in, U) \models (\forall X)(X \in Def(V_\kappa) \to \psi(X)) \wedge \sigma. \tag{5}$$

现在众所周知，$Def(V_\kappa)$在 V_κ上是 Δ^1_1-可定义的。[9] 因此 $(\forall X)(X \in Def(V_\kappa) \to \psi(X)) \wedge \sigma$ 是 Π^1_1，故由 κ的 Π^1_1-不可描述性，存在 $\alpha < \kappa$ 使得

$$(V_\alpha, \in, U \cap V_\alpha) \models (\forall X)(X \in Def(V_\alpha) \to \psi(X)) \wedge \sigma. \tag{6}$$

根据 σ的定义，$(V_\alpha, \in, U \cap V_\alpha) \models \sigma$蕴含 $U \cap V_\alpha = \{x \in V_\alpha : V_\alpha \models \theta(x)\}$，也就是说，$U \cap V_\alpha \in Def(V_\alpha)$。此外，$(V_\alpha, \in, U \cap V_\alpha) \models (\forall X)(X \in Def(V_\alpha) \to \psi(X))$蕴含

$$(V_\alpha, \in, U \cap V_\alpha, Def(V_\alpha)) \models (\forall X)\psi(X),$$

或（V_α，$\in$，$U \cap V_\alpha$，Def（V_α））$\models \phi$，如所要求。 $\dashv$

命题5.5 若 M 是ZFC的一个Π^1_1-不可描述模型，则对于每个 $\alpha \in On^M$，M 都是 α-Mahlo。

证明。对 α 进行归纳。由于 M 是一个 ZFC模型，它是 0-Mahlo。令 $\alpha = 1$。我们需要证明 $(x, \in) \models \mathrm{ZFC}\}$ 中的 $\{x \in M$ 是驻定的。令 $C \in Club(M)$。存在一个一阶公式 $\theta(x)$，使得 $x \in C \leftrightarrow M \models \theta(x)$。令 $\sigma = \forall x(\mathrm{S}(x) \leftrightarrow \theta(x))$。$C$ 是由 $\theta(x)$ 可定义的闭无界集这一事实，可通过写出

$$(M, \in, C, Def(M)) \models \sigma \wedge \text{“}\{x : \mathbf{S}(x)\} \text{ is a club”}.$$

[9]即，$X \in Def$（V_κ）：=（$\exists \phi$）（$\forall x$）（$x \in X \leftrightarrow Sat$（$\phi$，$x$））， 其中 Sat（ϕ，x）是关于 V_κ上的带参数一阶公式的 Δ^1_1 满足谓词。

句子 $\sigma \wedge$ "$\{x : \mathrm{S}(x)\}$ 是闭无界集"是一阶的，因此，根据 Π^1_1-不可描述性，存在 $N \in M$, $N \models$ ZFC，使得

$$(N, \in, C \cap N, Def(N)) \models \sigma \wedge \text{“}\{x : \mathbf{S}(x)\} \text{ is a club”}.$$

这意味着 $\theta(x)$ 在 N 中定义了 $C \cap N$，且 $C \cap N$ 是 N 的一个闭无界集。因此，如果 $N_\alpha = V^N_\alpha$ 对于 $\alpha \in N$ 成立，我们就可以利用选择公理进行归纳，选取集合 $x_\alpha \in C \cap N$, $\alpha \in M$，使得 $N_\alpha \cup (\bigcup_{\beta<\alpha} x_\beta) \subseteq x_\alpha$。如果 $X = \{x_\alpha : \alpha \in N\}$，那么显然 $X \in M$, $X \subseteq C$，并且 X 是一条链。因此 $\bigcup X \in C$。但是 $\bigcup X = N$，所以 $N \in C$。由此可知，任意闭无界集 C（属于 M）都包含一个 ZFC 模型 $N \models$。因此，$\{x \in M : (x, \in) \models \text{ZFC}\}$ 在 M 中是驻定的。

假设 M 是 $(\alpha + 1)$-Mahlo。令 $C \subseteq M$ 再次表示由 $\theta(x)$ 在 M 中定义的闭无界集，并令 σ 如上所述。那么

$$(M, \in, C, Def(M)) \models \sigma \wedge \{x : \mathbf{S}(x)\} \text{ is a club } \wedge \forall X(X \text{ is a club} \rightarrow$$

$$\exists y(y \in X \wedge mahlo(\alpha, y)).$$

最后一个公式是 Π^1_1 关于 $(M, \in, C, Def(M))$，它表明 C 是一个闭无界集，并且可定义集合 $\{x \in M : (x, \in) \text{ 是 } \alpha\text{-Mahlo}\}$ 是 M 的一个驻定集。根据定义 5.2，存在 $N \in M$, $N \models$ ZFC，使得

$$(N, \in, C \cap N, Def(N)) \models \sigma \wedge \{x : \mathbf{S}(x)\} \text{ is a club } \wedge \forall X(X \text{ is a club} \rightarrow$$

$$\exists y(y \in X \wedge mahlo(\alpha, y)).$$

这表明 $C \cap N$ 是由 $\theta(x)$ 在 N 中定义的 N 的一个闭无界集，并且包含在 N 中的 α-马洛模型集合是 N 的一个驻定子集。因此，N 是 $(\alpha + 1)$-Mahlo。此外，根据与之前相同的论证，我们可知 $N \in C$。所以，任意的 M 的闭无界集 C 都包含一个 $(\alpha + 1)$-Mahlo 模型。因此，集合 $\{x \in M : (x, \in) \text{ 是 } (\alpha + 1)\text{-Mahlo}\}$ 在 M 中是驻定的，因此 M 是 $(\alpha + 2)$-Mahlo。

假设 α 是极限序数，且 M 是 α-Mahlo。要证明 M 是 $(\alpha + 1)$-Mahlo，证明过程与之前基本相同。

最后，如果 α 是极限序数，且该断言对所有 $\beta < \alpha$ 都成立，那么根据 α-Mahlo 的定义，该断言对 α 也成立。⊣

QUESTION. 还有哪些大基数性质（可测性、强紧致性等）可以调整以适用于 ZFC 模型?

6 ZFC 的局部化扩展

在第 5 节中，我们已经考察了形如 Loc(ZFC) 的 Loc(ZFC $+$ Loc(ZFC))、Loc(ZFC $+$ Loc(ZFC $+$ Loc(ZFC))) 等扩展。在这里，我们将考察更一般的扩展，即对于各种与 ZFC 独立的句子 ϕ，形如 Loc(ZFC $+\phi$) 的局部化原则。然而，为了使 Loc(ZFC $+\phi$) 有意义，我们首先必须假定 ZFC $+\phi$ 不仅是一致的，而且具有一个传递模型。因此，类比于公理 TM(ZFC)（“ZFC 具有一个传递模型”），对于每一个这样的 ϕ，都必须接受

$$(TM(\mathrm{ZFC}+\phi)) \qquad\qquad \exists x(Tr(x)\wedge(x,\in)\models \mathrm{ZFC}+\phi).$$

对于若干自然的句子，如 $V=L$、连续统假设、 $V\neq L$、 ¬连续统假设等，可以在 ZFC 中证明（通过通常的强迫技术、可构造集等），TM(ZFC) $\rightarrow TM$(ZFC $+\phi$)。[10] 同一证明也可以在 LZFC 中（相对化地）进行。事实上，给定一个传递的 ZFC 模型 $M\models$，根据 Loc(ZFC)，存在一个传递的 N，使得 $M\in N$。在 N 中，我们可以找到一个 ZFC 的可数模型 M'，然后通过强迫扩展它，例如得到一个满足 ZFC $+$ ¬连续统假设的模型 $M'[G]$。

在下文作为 $Loc(\cdots)$ 的参数出现的公式中，我们允许使用常量“c”。这不是参数，而是在那些已在 ZFC 中证明为集合的可定义类（如 $\mathcal{P}(\omega)$、 ω_1 等）中取值。下文将此类称为“项”。出于同样的原因，作为参数出现在 $Loc(\cdots)$ 的参数公式中的序数也是可定义的。

公理 Loc（ZFC $+\phi$）虽然本质上是局部的，却可能对宇宙 V 本身产生全局后果。例如：

引理 6.1（LZFC）设 c是一个项。那么 Loc（$ZFC+V=L$（c）） $\rightarrow V=L$（c）。

证明。假设 Loc（ZFC $+V=L$（c）） 且 $V\neq L$（c）。设 $a\in V-L$（c）。那么存在一个ZFC的传递模型 M，使得 $\{c,a\}\in M$ 且$M\models V=L$（c）。然而，$a\in M=L$（c）$^M\subseteq L$（c），矛盾。⊣

更一般地，给定一组句子 Γ，我们可以将 LZFC 扩展为

$$\mathrm{LZFC}_\Gamma=\mathrm{LZFC}+\{Loc(\mathrm{ZFC}+\phi):\phi\in\Gamma\}$$

[10] 然而，如果ZFC是一致的，就无法在ZFC中证明蕴含式 TM（ZFC） $\rightarrow TM$（ZFC $+TM$（ZFC））；否则，ZFC $+TM$（ZFC） $\vdash Con$（ZFC $+TM$（ZFC）），这与哥德尔不完备性定理相矛盾。特别地，如果ZFC是一致的，它无法证明存在一个传递模型的强迫扩张 $M[G]$，其中包含一个ZFC的传递模型。

并考察其一致性以及对 V 的影响。以下是关于 LZFC$_\Gamma$ 一致性的一条简单的一般性事实。

命题 6.2 如果 Γ 是一个句子集合，且 $\{\phi, \neg\phi\} \subseteq \Gamma$ 对某个Σ_1^{ZFC}或 Π_1^{ZFC}句子 ϕ成立，那么 LZFC$_\Gamma$ 是不一致的。

证明。设 ϕ 是一个 Σ_1^{ZFC}句子（ Π_1^{ZFC}的情形相同）。这意味着，对于某个 Δ_0 公式ϕ_1， $\phi \leftrightarrow \exists x \phi_1(x)$在每个 ZFC模型中都成立。ZFC$_\Gamma$ 包含公理 Loc（ZFC $+\ \phi$）和 Loc（ZFC $+\ \neg\phi$）。根据前者，存在一个传递的 M，使得 $M \models$ ZFC $+\ \phi$。于是$M \models \exists x \phi_1(x)$，因此对于某个 $a \in M$， $M \models \phi_1(a)$。根据 Loc（ZFC $+\neg\phi$），存在 N，使得 $a \in N$ 且 $N \models$ ZFC $+\neg\phi$。于是 $N \models \forall x \neg\phi_1(x)$。但是$N \models \phi_1(a)$，因为 ϕ_1 是绝对的。矛盾。$\dashv$

任意合理的集合 Γ 是否会影响幂集公理、分离公理、替代公理等公理的状态？（请记住，LZFC 本身与 ZFC 相容。）对于幂集公理，答案是肯定的。我们证明，如果 Γ 包含句子 CH 和 ¬CH，那么 LZFC$_\Gamma$ 否证幂集公理。

给定一个项 c 和一个传递模型 M，令 c^M 表示 c关于 M的相对化。若对于每个传递的 M都有$c \subseteq M \Rightarrow c^M = c$，则称项 c是稳定的。例如， $\mathcal{P}(\omega)$ 和 $H(\omega_1)$ 是稳定项，而 ω_1 不是。

命题 6.3 令 c 为一个稳定项。则理论

$$\mathrm{LZFC} + Loc(\mathrm{ZFC} + |c| = \omega_1) + Loc(\mathrm{ZFC} + |c| \neq \omega_1) + \text{“}c \text{ exists”} + \text{“}\mathcal{P}(\omega) \text{ exists”}$$

不一致。

证明。假设上述理论是一致的，并令 K 为其一个模型。在 K 中， c 和 $\mathcal{P}$（ω）是集合。根据 Loc（ZFC $+\ |c| = \omega_1$）和配对公理，我们可以选取 ZFC 的一个模型 $M \in K$，使得 $\{c, \mathcal{P}(\omega)\} \subset M$ 且 $M \models |c| = \omega_1$。最后一个关系表明，在 M 中存在一个双射 h： $c^M \to \omega_1^M$。由于 c 是稳定项， $c^M = c$。此外，由于 $\mathcal{P}(\omega) \in M$，根据引理 3.2 (ii)， $\omega_1^M = \omega_1 \in M$。因此， c 和 ω_1 在 M 和 $M \models c \sim \omega_1$ 中都是绝对的。所以 $K \models c \sim \omega_1$ 也是如此。令 h： $c \to \omega_1$ 是 K 中的一个双射。根据 Loc（ZFC $+\ |c| \neq \omega_1$）和配对公理，存在一个模型 $N \in K$，使得 $\{c, h, \mathcal{P}(\omega)\} \subset N$ 且 $N \models |c| \neq \omega_1$。再次根据稳定性， $c^N = c$；根据 3.2 (ii)， $\omega_1^N = \omega_1$。因此 $N \models c \not\sim \omega_1$。但这与以下事实矛盾： N 已经包含一个双射 h： $c \to \omega_1$。$\dashv$

推论 6.4 (i) 对于每个稳定项 c，理论

LZFC $+ Loc$(ZFC $+ |c| = \omega_1$) $+ Loc$(ZFC $+ |c| \neq \omega_1$) $+$ "c存在" $+$幂集公理

不一致。

(ii) 特别地，该理论

$$\mathrm{LZFC} + Loc(\mathrm{ZFC} + |\mathcal{P}(\omega)| = \omega_1) + Loc(\mathrm{ZFC} + |\mathcal{P}(\omega)| \neq \omega_1) + \mathrm{Powerset},$$

或者，等价地，

$$\mathrm{LZFC} + Loc(\mathrm{ZFC} + \mathrm{CH}) + Loc(\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{CH}) + \mathrm{Powerset}$$

不一致。

证明。(i) 这由 6.3 立即得出，只需将"$\mathcal{P}(\omega)$ 存在"替换为更强的幂集公理。

(ii) 在上面的 (i) 中，我们令 $c = \mathcal{P}(\omega)$，它是稳定的。于是幂集公理推出"$\mathcal{P}(\omega)$ 存在"，结论随之得证。

[值得注意的是，对于这个特定的项 $c = \mathcal{P}(\omega)$，也可以如下证明该结论（无需援引 6.3）：假设 $\mathcal{P}(\omega)$ 是一个集合。取一个模型 M，使得 $\mathcal{P}(\omega) \in M$ 且 $M \models |\mathcal{P}(\omega)| = \omega_1$。然后取一个模型 N，使得 $M \in N$，因此 $M \subseteq N$，并且 $N \models |\mathcal{P}(\omega)| \neq \omega_1$。于是，要么 $N \models |\mathcal{P}(\omega)| < \omega_1$，要么 $N \models |\mathcal{P}(\omega)| > \omega_1$。显然第一种情况不成立。因此 $N \models |\mathcal{P}(\omega)| > \omega_1$。但由引理 3.1 (i)，$M \models |\mathcal{P}(\omega)| = \omega_1$ 和$M \subseteq N$ 推出 $N \models |\mathcal{P}(\omega)| \leq \omega_1$，矛盾。] $\dashv$

关于上一条推论的子句 (ii)，我们指出以下内容（请回忆，NM 是断言"存在一个 ZFC 的自然模型"）。

命题 6.5 该理论

$$\mathrm{LZFC} + Loc(\mathrm{ZFC} + \mathrm{CH}) + Loc(\mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{CH})$$

相对于 ZFC $+$NM 一致。

证明。这个证明是对命题 2.23 (iii) 中证明的简单加强。设 M 是一个 ZFC $+$ NM模型。那么 $H^M(\omega_1)$满足所讨论的理论。事实上，如果 $M_\kappa = V_\kappa^M$ 是一个自然的 ZFC模型（按 M的意义），那么由 2.23 (iii) 的证明可知，$H^M(\omega_1) \models Loc$(ZFC)。因此，对于每个 $x \in H^M(\omega_1)$，x都属于某个可数传递模型 $N \in H^M(\omega_1)$。现在，每个包含 x 的此类模型 N都可以通过泛型扩张为可数传递模型 N_1、N_2，分别满足 CH 和 $\neg$CH。由于

N_1、N_2也属于 $H^M(\omega_1)$，因此 $H^M(\omega_1)$同时满足 Loc(ZFC $+$CH) 和 Loc(ZFC $+\neg$CH)。⊣

最后，我们得到 6.3 的一个变体，其中删去了“$\mathcal{P}(\omega)$ 存在”。

命题 6.6 设 c 是一个稳定项，$\alpha \neq \beta$ 是两个不同的可定义序数。那么理论

$$\mathrm{LZFC} + Loc(\mathrm{ZFC} + |c| = \omega_\alpha) + Loc(\mathrm{ZFC} + |c| = \omega_\beta) + \text{“}c \text{ exists”}$$

不一致。

证明。我们在上述理论中工作，并假设 $\alpha < \beta$。c 是一个可定义集合，对包含它的模型是绝对的，因此由 Loc(ZFC $+|c| = \omega_\alpha$)，存在一个 ZFC 模型 M，使得 $c \in M$ 且 $M \models |c| = \omega_\alpha$。然后，由 Loc(ZFC $+|c| = \omega_\beta$)，存在一个 ZFC 模型 N，使得 $M \in N$ 且 $N \models |c| = \omega_\beta$。但是 $M \subseteq N$，而引理 3.1 $M \models |c| = \omega_\alpha$ 蕴含 $N \models |c| \leq \omega_\alpha$，即 $\beta \leq \alpha$，这与假设 $\alpha < \beta$ 矛盾。⊣

7 一个题外话：标准紧致性

出于引言中说明的原因，本文的目标之一是提升 ZFC 的传递模型在集合宇宙中的地位，使其成为一等公民，尤其是通过假定它们具有“无处不在性”。具体而言，每当我们在 LZFC 中谈论模型时，指的都是传递模型。鉴于各种紧致性概念所涉及的通常都是一般意义上的模型，将范围限制在传递模型便自然地导出了相应紧致性概念的细化版本。具体来说，在通常的紧致性中，我们从一组句子的每个有限子集都有模型，推断出这组句子本身有模型。由此自然产生了一个问题：如果语言 $\mathcal{L}'$ 扩展了集合论的语言 $\mathcal{L}$，我们能否根据 Σ 的某些部分存在传递模型，推断出语言 $\mathcal{L}'$ 中一组句子 Σ 存在传递模型？尽管这个问题与本文其余部分并无关联，但我们坚持使用传递模型，因此它有充分的动机，本节将对此加以讨论。上面提出的问题引出了如下定义。

定义 7.1（ZFC）如果对于有限语言 $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ 的每个句子集合 Σ（其中 $|\Sigma| = \kappa$），只要满足 $|A| < \kappa$ 的每个集合 $A \subseteq \Sigma$ 都有传递模型，就有传递模型，则称基数 κ 是标准紧致的。

第一个否定性结果是，经典紧致性定理的标准版本是错误的。

命题 7.2（ZFC 或 LZFC）存在一个 $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ 以及一个由 $\mathcal{L}'$ 中的句子构成的可数集合Σ，使得 Σ 的每个有限子集都有传递模型，而 Σ 没有。因此，ω 不是标准紧致的。

证明。令 $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c_n \colon n \in \omega\}$，并令 $\Sigma = \{c_{n+1} \in c_n \colon n \in \omega\}$ 为 $\mathcal{L}'$中的一个句子集合。显然，Σ 的每个有限子集都有传递模型，而 Σ 没有。⊣

接下来，我们来确认在温和的大基数假设下标准紧致基数确实存在。回顾一下，弱紧致基数的一个等价定义如下：如果无穷语言 $\mathcal{L}_{\kappa,\kappa}$中的任意句子集合 Σ 使用至多κ 个非逻辑符号且是 κ-可满足的（即，每个满足 $|A| < \kappa$ 的 $A \subseteq \Sigma$ 都可满足），那么 κ 就是弱紧致的。

还要回想一下，根据 Mostowski 定理 2.20 (ii)，如果 E 是定义在 X 上的二元关系，并且 (a) E 是良基的，且 (b) $(X, E) \models$ Ext，那么存在一个（唯一的）传递集 M，使得 $(X, E) \cong (M, \in)$。Ext 是通常的外延性公理，而良基性则由$\mathcal{L}_{\omega_1\text{中}\omega_1}$ 的一个句子表达如下：

$$\mathrm{Wf} := \neg(\exists_{n<\omega} x_n)\Big(\bigwedge_{n<\omega} (x_{n+1} \in x_n)\Big),$$

其中 $\exists_{n<\omega} x_n$ 是无限量词块$\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n \cdots$的缩写。每个传递集都满足 Ext 和 Wf。反过来，任何满足 $(X, E) \models$ Ext $\wedge$ Wf 的 $\mathcal{L}$-结构 (X, E)，都同构于一个传递模型。这是一个关键事实，我们可以据此证明以下结论：

引理 7.3 每个弱紧致基数 $\kappa > \omega$ 都是标准紧致的。

证明。设 $\kappa > \omega$ 是一个弱紧致基数，并设 Σ 是 $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ 的一组句子，使得 $|\Sigma| = \kappa$。假设每个满足$|A| < \kappa$的 $A \subseteq \Sigma$ 都有一个传递模型。设 $\Sigma' = \Sigma \cup \{\text{Ext, Wf}\}$。 Σ'是 $\mathcal{L}_{\omega_1,\ \omega_1}$的一组句子，因此也是 $\mathcal{L}_{\kappa,\ \kappa}$的一组句子。根据关于 Σ 的假设以及有关 Wf 的说明，每个满足 $|A| < \kappa$ 的 $A \subseteq \Sigma'$ 都有一个（传递）模型。由 κ的弱紧致性，Σ' 有一个模型（X，E）。由于该模型满足 Ext 和 Wf，因此它同构于一个传递模型 M。于是 Σ'，从而Σ，有一个传递模型。⊣

命题 7.4（ZFC） ω_1 不是标准紧致的。对于 ω_n也同样如此，对每个 $n \in \omega$都成立。

证明。令 $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{c\} \cup \{\dot{\alpha} : \alpha \leq \omega_1\}$，其中 c 和 $\dot{\alpha}$ 是常元。我们将找出一个 Σ，它否定 ω_1的标准紧致性。令 Σ 为 $\mathcal{L}'$中的以下句子所组成的集合:

(1) 对所有 $\alpha \leq \omega_1$， $Ord(c)$、 $Ord(\dot{\alpha})$。
（2）对所有 $\alpha < \beta \leq \omega_1$， $\dot{\alpha} < \beta$。
（3）对所有 $\alpha < \omega_1$， $c > \dot{\alpha}$。 （4）
$c < \dot{\omega_1}$。 （5） $\forall x$（$x < \dot{\omega_1} \to x$ 是可数的）。

显然 $|\Sigma| = \omega_1$。令 $A \subseteq \Sigma$ 满足 $|A| < \omega_1$。取某个 V_ξ 使得 $\omega_1 \in V_\xi$，并令 $\dot{\alpha}^{V_\xi} = \alpha$ 对所有 $\alpha \leq \omega_1$成立。于是我们很容易看出，对于某个解释 $c^{V_\xi} \in \omega_1$，$V_\xi \models A$ 成立。另一方面，假设存在一个传递结构（K， $\in$）使得 $K \models \Sigma$。虽然 K 不一定是 ZFC模型，但 $K \models Ord$（$\dot{\alpha}$）显然蕴含 $\dot{\alpha}^K$ 是一个序数。根据（2），映射$\alpha \mapsto \dot{\alpha}^N$ 是严格递增的。因此，对于每个 $\alpha \leq \omega_1$，都有 $\alpha \leq \dot{\alpha}^K$，从而 $\omega_1 \leq \dot{\omega_1}^K$。根据（5），每个 $x \in \dot{\omega_1}^K$ 都是可数的，因此特别有 $\dot{\omega_1}^K = \omega_1$。结合这一点以及（3）和（4），我们得到 $\alpha \leq \dot{\alpha}^K < c^K < \dot{\omega_1}^K = \omega_1$，从而对所有 $\alpha < \omega_1$都有$\alpha < c^K < \omega_1$，这就产生了矛盾。

对于 ω_n ，我们只需用定义 ω_n 的适当句子替换“α 可数”，即：“x 可数，或基数紧邻可数，或紧邻紧邻可数，或.....，或紧邻^n 可数”。⊣

弱紧致性（以及标准紧致性）的性质包含这样的条件：非逻辑符号的基数（或 Σ 的基数）为 $\leq \kappa$。若去掉这一条件，便得到强紧致性：如果对于 $\mathcal{L}_{\kappa,\ \kappa}$ 的每个句子集合 Σ，只要 Σ 是 κ-可满足的， Σ 就可满足，那么 κ 就是强紧致的。一个等价定义（见 [7, 第 37] 页）如下:

定义 7.5（ZFC） 若对任意集合 X， X 上的每个 κ-完备滤子都能扩张为 X 上的 κ-完备超滤子，则称基数 κ 是强紧致的。

命题 7.6（ZFC）设 $\lambda > \omega$ 是一个强紧致基数。那么每个满足 $\kappa \geq \lambda$ 的基数 $\kappa^{<\kappa} = \kappa$ 都是标准紧致的。

证明。该证明是通过使用超积对紧致性进行证明的一种变体（参见 [2, 推论 4.1.11]）。设 $\kappa \geq \lambda > \omega$，其中 λ 是强紧致的

，且 $\kappa^{<\kappa}=\kappa$。设 Σ 是语言$\mathcal{L}'\supseteq\mathcal{L}$ 中的一个无限句子集合，使得 $|\Sigma|=\kappa$。假设每个 $A\subseteq\Sigma$ （其中 $|A|<\kappa$ ）都有一个传递模型。由于 $\kappa^{<\kappa}=\kappa$，存在一个枚举 Σ_α、 $\alpha<\kappa$，枚举 A 的所有子集，其中Σ 满足 $|A|<|\Sigma|$。对每个 $\alpha<\kappa$ 选定并固定一个传递模型 $M_\alpha\models\Sigma_\alpha$。^^对于每个 $\phi\in\Sigma$，令 $\phi=\{\beta<\kappa:\ \phi\in\Sigma_\beta\}$。族 $E=\{\phi:\ \phi\in\Sigma\}$ 是^^κ-完备的，即，对于每个 $\gamma<\kappa$ 和每个 $\{\phi_\beta:\ \beta<\gamma\}\subseteq E$、 $\bigcap_{\beta<\gamma}\phi_\beta\neq\emptyset$。这是因为，对于每个 $\gamma<\kappa$ 和每个集合 $\{\phi_\beta:\ \beta<\gamma\}$，存在一个 $\delta<\kappa$^^使得 $\{\phi_\beta:\ \beta<\gamma\}=\Sigma_\delta$，因此 $\delta\in\bigcap_{\beta<\gamma}\phi_\beta$。于是，由 E 生成的 κ^上的滤子 E 是 κ-完备的。此外， E 是自由的；否则，某个 α 将属于所有 ϕ、 $\phi\in\Sigma$，从而 $\Sigma=\Sigma_\alpha$，这是错误的。按照 [2, 推论^4.1.11] 中的方法可以看出，如果 D 是 κ 上扩^张 E的任意超滤子，那么 $\Pi_{\alpha<\kappa}M_\alpha/D\models\Sigma$。也就是说，对于每个 $\phi\in\Sigma$,

$$\{\alpha<\kappa:M_\alpha\models\phi\}\supseteq\{\alpha<\kappa:\phi\in\Sigma_\alpha\}=\hat{\phi}\in D,$$

因此，根据超积基本定理。只需选择超滤子，使得其成为（同构于）一个传递模型。现在，这是一个完备滤子，因此也是完备的，因为。但强紧致基数是强紧致的，所以可以将其扩张为一个完备超滤子。由于且每个都是传递的，超积是良基的。因此，同构于一个传递的（，）。然后（，）符合要求。

由上一个结果可知，除非强紧致基数不一致，否则存在标准紧致基数且其为可达、奇异，甚至是后继基数这一情形是相容的。

致谢。非常感谢匿名审稿人仔细审阅稿件、指出其中一些严重缺陷，并提出许多其他改进建议。

参考文献

[1] J.Barwise，《可容许集与结构》，《数理逻辑展望》，Springer-Verlag，1975年。[2] C.C. Chang 和 H.J. Keisler，《模型论》，North Holland，1973年。[3] F.R. Drake，《集合论：大基数导论》，North Holland，1974年。

[4] A. Enayat, 《自同构与马洛基数》, 《算术与集合论的非标准模型》, A. Enayat 和 R. Kossak（编）, 《当代数学》第361卷（2004年）, 37—59页。[5] S. Feferman, 《公理化理论的超限递归序列》, 《符号逻辑杂志》27（1962年）, 259—316页。[6]T. Jech, 《集合论：第三千年版》, Springer-Verlag, 2003年。[7] A. Kanamori, 《高阶无穷》, 《数理逻辑展望》, Springer, 1997年。[8] R. Montague 和 R.L. Vaught, 《集合论的自然模型》, 《数学基础》XLVII（1959年）, 219—242页。[9] J. Myhill 和 D. Scott, 《序数可定义性》, 《纯数学专题讨论会论文集》第13卷第I部分, D. Scott（编）, 美国数学学会, 普罗维登斯, 1971年, 第271—278页。[10] T. Skolem, 《关于公理化集合论的若干评论》, 载于: 《从弗雷格到G ¨odel: 《数理逻辑资料选编》, 1879—1931年, Jean van Heijenoort（编）, 哈佛大学出版社, 第三次印刷, 1976年, 第290—301页。