arXiv:2303.15275v1 [cs.CG] 27 Mar 2023

二维广义平衡幂图的解析表示

Christian Jung[1] Claudia Redenbach[1]

[1]RPTU Kaiserslautern-Landau

Gottlieb-Daimler-Straße 48，67663 凯泽斯劳滕，德国

摘要

镶嵌是对胞状材料和多晶材料微观结构进行建模的重要工具。经典镶嵌模型包括Voronoi图和拉盖尔镶嵌，其单元均为多面体。由于这些模型的单元具有凸性，因此对于包含可能具有各向异性晶粒及曲线边界的数据而言，它们可能过于受限。目前已有若干推广模型。广义平衡幂图的单元由椭圆距离诱导，从而产生更加多样的结构。迄今为止，用于计算广义平衡幂图的方法仅限于以标签图像形式表示的离散化版本。在本文中，我们推导了二维广义平衡幂图的顶点和边的解析表示。在此基础上，我们提出了一种计算整个图的新算法。

关键词

Voronoi图、拉盖尔镶嵌、各向异性、非凸性、曲线边界、圆锥曲线

1 引言

镶嵌在许多研究领域中发挥着重要作用，包括计算几何、计算机图形学、材料科学和随机几何。镶嵌可以理解为空间被划分为若干子集，这些子集称为单元。一类经过深入研究的镶嵌是 Voronoi 类镶嵌，它们由 $\mathbb{R}^d$ 中的有限个点生成。空间中的每个点都被分配给按照给定距离度量 d 与其距离最近的生成元。根据 d 的选择，可以得到种类繁多的镶嵌模型。 [11] 对这一背景下研究过的距离函数和镶嵌进行了综述。

在采用欧氏距离的情况下，可得到 Voronoi图 [30] 。为每个生成元赋予权重 $w_i \in \mathbb{R}_{>0}$ 后，两点之间的幂距离 $x,\ p_i \in \mathbb{R}^d$定义为 dist$(x,\ p_i,\ w_i) = ||x - p_i||^2 - w_i$。由该

幂距离诱导的镶嵌模型称为幂图或拉盖尔镶嵌。它可以看作是 Voronoi图的第一种推广，其权重可用于控制单元的大小。Voronoi图和拉盖尔镶嵌的单元都是凸多胞体，其边界是超平面的子集。用于计算这些模型的算法已在 CGAL [9],voro++ [44]或 Neper [29]等软件中实现。

Voronoi图和拉盖尔镶嵌已被用于重建和随机建模二维和三维胞状材料，例如铝合金中的多晶结构或泡沫 [25, 34, 24, 35, 43, 40, 26]。现有多种算法可用于优化生成元的配置，使所得镶嵌相对于某种差异度量，尽可能良好地描述给定结构。这些优化技术包括模拟退火 [23], 交叉熵方法 [41, 32] 和Metropolis-Hastings算法 [39]。此外，还可以生成具有预定义单元面积的拉盖尔镶嵌 [6]。

然而，单元的凸性使这些模型在近似真实世界的微观结构时受到很大限制，因为后者可能具有弯曲的单元边界和显著的各向异性。借助阿波罗尼斯图（也称为加性加权Voronoi图或Johnson-Mehl镶嵌）可以获得非凸的胞元形状。该图由加性加权欧氏距离诱导。类似地，乘性加权Voronoi图由按标量因子加权的欧氏距离诱导。这两种模型都具有弯曲的单元边界。其单元边界的解析描述已为人所知 [15, 48]，并且已有用于其仿真的算法 [12, 19, 20, 16]。集合Voronoi图 [37] 是对阿波罗尼斯图的推广。其单元通过到任意形状对象的最小欧氏距离定义。集合Voronoi图的解析表示很难推导，在大多数情况下必须依赖近似算法。在 [47], 中，几何对象由有限数量的点进行采样，并据此计算Voronoi图。将生成元属于同一对象的单元合并后，所得边为相连的线段。

体素化 Voronoi 类镶嵌也已用于重建多晶材料 [21, 1]。软件 DREAM.3D [13, 14]使用区域生长算法扩展一组初始生成元；每个生成元均由一组连通且带有标签的像素构成，扩展过程持续进行，直到每个像素都被赋予唯一标签。

一种基于椭圆距离的镶嵌模型已在 [22]中作为各向异性 Voronoi 图提出。它可能具有曲线边界，且一个单元可能只有一个或两个邻居单元。此外，单元不必连通；在这种情况下，生成元至少会缺失于该单元的一部分区域。这些区域称为孤立单元部分。 [7] 研究了各向异性 Voronoi 图不存在孤立单元部分的条件，并且可以证明，其对偶图是三角剖分 [8]。 [3]对利用各向异性 Voronoi 图重建微观结构进行了初步探索。

广义平衡幂图（GBPD） [1] 通过为其椭圆生成元赋予权重，扩展了各向异性Voronoi图。其生成元可以解释为加权椭球。与拉盖尔镶嵌相比，这带来了更多样的单元形状和尺寸。在多晶体近似中，GBPD被证明优于参数较少的模型（如拉盖尔镶嵌） [46], ，但也伴随着

更高的计算成本。生成元的配置通常通过主成分分析 [1] 进行估计，而权重则可根据各个晶粒尺寸 [42]推导得到。模型评估与比较主要基于这些图的离散化版本，通常通过统计像素不匹配来完成。为提高初始近似的准确性，已有多种优化技术，包括线性整数规划方法 [1], 、模拟退火 [45] 或基于梯度下降的方法 [31]。

然而，这些 GBPD 应用都基于对 GBPD 的近似计算。其中大多数采用离散化形式，例如标签图像 [38, 45, 1, 2]；对于二维情形，则通过相交水平集进行仿真 [28]。已有研究提出了一种可用于构造 GBPD 的刻画方法 [5]。然而，该方法无法描述图的拓扑和几何。据我们所知，目前尚无可用的显式算法或实现。

本文提出一种解析计算二维 GBPD 的方法。我们发现，顶点是圆锥曲线的交点，而 GBPD 的边可以用参数方程描述。我们的算法优势在于，它是一种易于实现的显式算法。该算法还对图的边和顶点进行了几何刻画，据此可以直接计算单元周长和单元面积。

本文结构如下。第 2 节介绍镶嵌的基本定义，并引入 GBPD；随后在第 3 节总结其性质。第 4 节首先推导图的边的参数表示，并说明如何计算其顶点。在此基础上，我们概述一种计算整个 GBPD 的算法。此外，我们还给出计算各单元周长和面积的公式。最后，第 5 节总结全文，并展望未来研究方向。

2 镶嵌

设 S 为一个度量空间。 S 的镶嵌是由闭集 $T = \{C_i \subset S \mid i \in \mathbb{N}\}$ 组成的可数集合，并满足

1. $\bigcup_i C_i = S$，2. 对所有 $i \neq j$， $\mathring{C}_i \cap \mathring{C}_j = \emptyset$，其中 $\mathring{C}_i$ 表示 C_i 的内部，3. 对所有有界 $B \subset S$，# $\{C_i \in T \mid C_i \cap B \neq \emptyset\} < \infty$

闭集 C_i 称为该镶嵌的单元。

设 $P = \{p_1, \ldots, p_n\} \subset S$，其中 $2 \leq n < \infty$，且 dist a 是定义在 S 上的一个（可能带权的）距离度量。由下式给出的单元

$$C_i = \{x \in S \mid \mathrm{dist}(x, p_i) \leq \mathrm{dist}(x, p_j) \ \forall \ p_j \in P\}$$

定义空间 S 的一种镶嵌。点 $p_i \in P$ 称为单元 C_i 的种子或生成元，而 P 称为该镶嵌的生成元集合。

由距离诱导的单元集合

$$\mathrm{dist}(x,p_i)=\mathrm{dist}_V(x,p_i)\coloneqq\|x-p_i\|_2$$

定义Voronoi图。
Voronoi图的一种推广是拉盖尔镶嵌。它由球体 S_1、……、S_n 生成，并由幂距离诱导。对于一个以 p_i为中心、半径为 r_i的球体 S_i，幂距离定义为

$$\mathrm{dist}(x,p_i)=\mathrm{dist}_L(x,p_i,r_i)\coloneqq\|x-p_i\|_2^2-r_i^2.$$

对于球体 S(p_i、r_i)外部的每个点 x，dist$_L$(x、p_i、r_i)是从 x 到球体 [33]的切线长度的平方。引言中给出的幂距离的另一种形式，可通过令 $w_i=r_i^2$得到。

另一种推广Voronoi图的镶嵌是乘性加权Voronoi图，它由距离所诱导的单元给出

$$\mathrm{dist}(x,p_i,\sigma_i)=\mathrm{dist}_W(x,p_i,\sigma_i)\coloneqq\frac{\|x-p_i\|_2}{\sigma_i}$$

其中 σ_1、……、$\sigma_n\in\mathbb{R}_{>0}$。
上述镶嵌的一种推广如下。设 M_1、……、M_n 为正定 $d\times d$矩阵，且 w_1、……、$w_n\in\mathbb{R}$。由下式诱导的单元集合

$$\mathrm{dist}(x,p_i)=\mathrm{dist}_G(x,p_i,M_i,w_i)\coloneqq(x-p_i)^\top M_i(x-p_i)-w_i \tag{1}$$

称为广义平衡幂图（GBPD）。
正定矩阵 M 可分解为

$$M=U\Lambda^{-1}U^\top \tag{2}$$

其中 $U=$(u_1、……、u_d) 是正交矩阵，$\Lambda=$diag(a_1、……、a_d) 是对角矩阵。考虑方程

$$(x-p)^\top M(x-p)-w=1. \tag{3}$$

对于 $y=$(y_1、……、y_d)$^T\coloneqq U^T$($x-p$)，方程 (3) 可化为

$$\frac{y_1^2}{a_1}+\ldots+\frac{y_d^2}{a_d}-w=1. \tag{4}$$

对于 $w=0$，方程 (4) 是椭球的一般方程。由于 y 是 ($x-p$) 的一个（保持长度的）旋转或反射，因此，(p,M) 可以解释为一个以 p 为中心、半轴为 $u_1,\ldots,u_d$、半轴长度为 $\sqrt{a_1},\ldots,\sqrt{a_d}$ 的椭球。因此，GBPD 的生成元可以看作是以非线性方式扩张、且在各个方向上的速度不同的椭球，由此可能产生各向异性的单元形状。注意，对每个权重都加上同一个常数不会改变该图。

因此，不妨设 $-1 < w$。方程 (4) 随后可改写为

$$\frac{y_1^2}{(1+w)a_1} + \ldots + \frac{y_d^2}{(1+w)a_d} = 1. \tag{5}$$

因此， w 可以解释为非线性缩放因子，以 $\sqrt{1+w}$为缩放倍数，在各个方向上等比例缩放椭球。
请注意，方程 (1) 中的距离不一定是度量，因为它可能取负值。

GBPD 是对拉盖尔镶嵌的推广，在 $M_i = I$ 且$w_i = r_i^2$时可得到拉盖尔镶嵌。它也是对乘性加权Voronoi图的推广，在 $w_i = 0$ 且 $M_i = 1/\sigma_i^2 I$时可得到该图。

3 GBPD 的性质

本文余下部分将聚焦于 $d = 2$的情形。本节将展示 GBPD 最重要的性质。生成元 i 由方程 (3) 所定义的缩放椭圆轮廓内的所有点表示。

图 1 展示了在一个 400×400 窗口内由 16 个椭圆生成的 GBPD，其中 w_i取值各不相同。左图中，所有 i 均为 $w_i = 0$ ；右图中， w_i则取自 $(-1, 3)$ 上的均匀分布，因此各单元的面积会变大或变小。

对于相较于其他权重非常小的值，生成元也可能拥有一个空单元，这一点可以在图 2 左图中看到。在这里，图 1 左图中的黑色生成元被赋予了 -100 的权重。位于另一个生成元内部的生成元也可能产生空单元，例如图 2 左图中的黑色生成元。

我们进一步注意到，单元的邻居数可能少于三个。图 2 右图对此进行了说明。恰好有两个邻居的单元也称为透镜。此外，单元不一定是连通的。

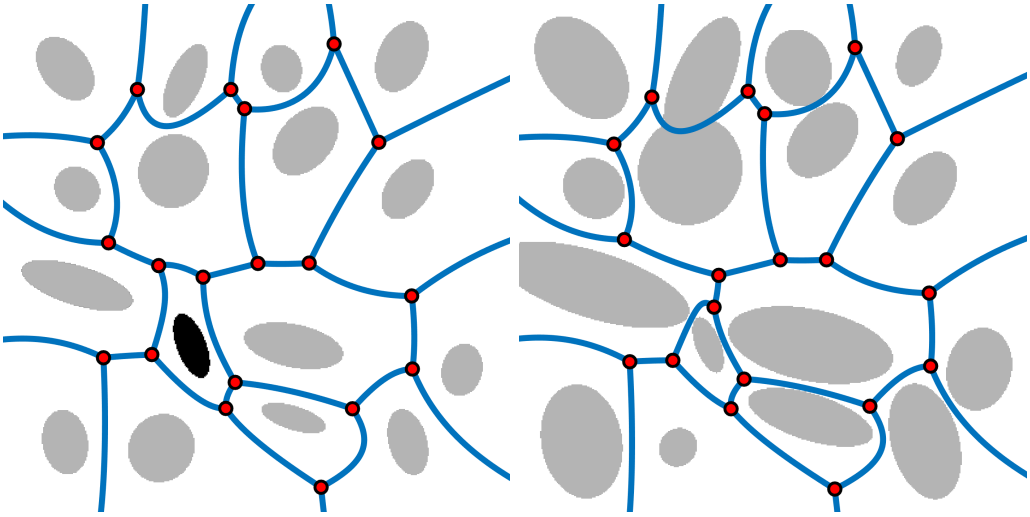

图 1：由一组 16 个生成元生成的 GBPD，左图中为 $w_i = 0$，右图中为从 $(-1,\ 3)$ 均匀分布中抽取的 w_i。

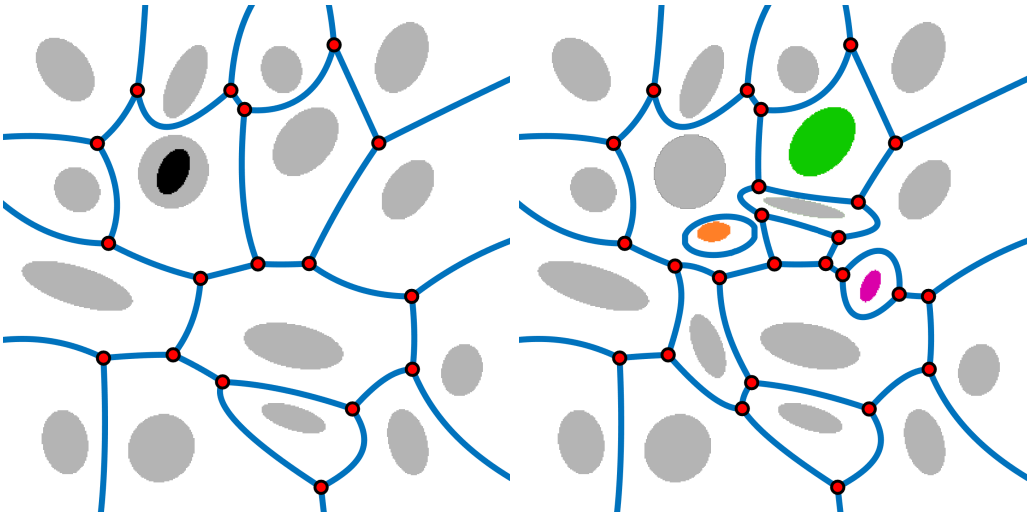

图 2：左：由一组 17 个生成元生成的 GBPD，其中两个生成元生成了空单元。右：由一组 19 个生成元生成的 GBPD。橙色生成元的单元有一个邻居，粉色生成元的单元有两个邻居，而绿色生成元生成的单元是不连通的。

4 GBPD 的计算

如 [5], 所指出， $\mathbb{R}^d$ 中的 GBPD 是 $\mathbb{R}^D$、 $D = d(d+3)/2$中的拉盖尔镶嵌在 $\mathbb{R}^D$ 所给出的 d-流形上的限制

$$\mathcal{Q} = \{\phi(x),\, x \in \mathbb{R}^d\}$$

with

$$\phi(x) = (x, \tilde{\phi}(x))$$

其中

$$\tilde{\phi}(x) = (x_r \cdot x_s,\, 1 \le r \le s \le d).$$

然而，实现这种构造 GBPD 的方法并不容易。据我们所知，目前尚无可用的实现。Boissonnat 等人 [5] 概述了一种计算 GBPD 顶点的算法，但没有给出计算整个图的算法。

本节提出一种仅基于 GBPD 定义的算法。

4.1 边

二维拉盖尔镶嵌的单元是凸多胞体，其边为直线段。GBPD 的单元不一定是凸的，因为单元的边通常是曲线。根据方程 (1)，两个生成元 i 和j 之间的等分线可表示为所有满足以下条件的 $q = (x,\ y)^T \in \mathbb{R}^2$

$$(q - p_i)^\top M_i (q - p_i) - w_i = (q - p_j)^\top M_j (q - p_j) - w_j \tag{6}$$

由此得到隐式方程

$$E_{ij} = (q - p_i)^\top M_i (q - p_i) - w_i - (q - p_j)^\top M_j (q - p_j) + w_j = 0. \tag{7}$$

With

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A_{ij} &:= M_i - M_j, \\
\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \end{pmatrix}^T = B_{ij} &:= -2(M_i p_i - M_j p_j), \\
c &:= p_i^T M_i p_i - p_j^T M_j p_j - w_i + w_j
\end{aligned}$$

且 A_{ij} 具有对称性，方程 (7) 等价于

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_{11}x + b_{12}y + c = 0. \tag{8}$$

也就是说，GBPD 的边是二次曲线的一部分，具体而言属于圆锥曲线。我们的目标是将圆锥曲线的隐式形式转换为参数表示

其形式为

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)). \end{aligned}$$

存在几种转换方法，包括基于最小 μ-基的方法、 [10], 直线束法 [17, 18] 和射影变换法。这里我们采用后者。详情见 [17]和 [18]。

其思路是用齐次坐标来描述圆锥曲线。通过平移和旋转，将圆锥曲线变换为已知参数表示的圆锥曲线。最后，将逆变换应用于该表示。

考虑齐次坐标向量 $z = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{u})^T$ 和

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{11}/2 \\ a_{12} & a_{22} & b_{12}/2 \\ b_{11}/2 & b_{12}/2 & c \end{pmatrix}.$$

对于 $\tilde{u} = 1$，方程 (8) 的齐次形式为

$$zDz^T = 0. \tag{9}$$

由于 D 具有对称性，因此可以通过 $S = T^{-1}DT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 对其进行对角化。当 S 至少有一个对角元素等于 0 时，该圆锥曲线由直线组成。对于更一般的情况 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \neq 0$，圆锥曲线的参数形式取决于 λ_i的符号。如果所有 λ_i 的符号都相同，则该圆锥曲线是虚圆锥曲线。在此处，由于原始圆锥曲线是实值的，并且经过实值变换后仍保持实值，因此这种情况无关紧要。令 $\mu_i = 1/\sqrt{|\lambda_i|}$，其余情况下的参数形式汇总于表 1 中。计算 $(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{u}(t))^T = T(\tilde{x}(t)\ \tilde{y}(t)\ \tilde{u}(t))^T$ 后，圆锥曲线在笛卡尔坐标中的参数形式为

$$\begin{aligned} E : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)). \end{aligned}$$

with

$$\begin{aligned} x(t) &= \hat{x}(t)/\hat{u}(t), \\ y(t) &= \hat{y}(t)/\hat{u}(t). \end{aligned} \tag{10}$$

λ_1	λ_2	λ_3	对象	参数形式
$+$ -	$+$ -	- $+$	椭圆或圆	$\tilde{x}(t) = (1-t^2)\mu_1$ $\tilde{y}(t) = 2t\mu_2$ $\tilde{u}(t) = (1+t^2)\mu_3$
$+$ -	- $+$	- $+$	双曲线	$\tilde{x}(t) = (1+t^2)\mu_1$ $\tilde{y}(t) = 2t\mu_2$ $\tilde{u}(t) = (1-t^2)\mu_3$
- $+$	$+$ -	- $+$	双曲线	$\tilde{x}(t) = 2t\mu_1,$ $\tilde{y}(t) = (1+t^2)\mu_1,$ $\tilde{u}(t) = (1-t^2)\mu_3$

表 1：圆锥曲线的参数形式。

4.2 顶点

GBPD 的顶点是到三个或更多生成元距离相等的位置。实际上，可以通过求 GBPD 的两条边 E_{ij}、E_{jk} 的交点来找到这些顶点，其中这两条边对应于同一个生成元。该过程可以通过圆锥曲线束方法 [36] 实现，这种方法已经作为 MATLAB 软件包 [27]实现。

两个圆锥曲线相交时，最多可能产生四个交点。这些点并不一定都属于 GBPD，因为它们可能属于另一个生成元的单元。通过计算这些点到每个生成元的距离，可以检查哪些顶点属于该图。

设 $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ 是曲线 E_{ij} 和 E_{jk} 的一个交点，且该点属于 GBPD。然后，可以通过求解关于 t 的二次方程（v_1, v_2） = （$x(t)$ $y(t)$），来求出与 v 对应的 E_{ij} （或 E_{jk}）在方程（10）中的参数 $t \in \mathbb{R}$ 。

4.3 模拟 GBPD 的算法

借助 GBPD 的边和顶点的解析表示，我们提出以下用于计算 GBPD 的算法:

1. 输入：生成元集合 $G = (p_i, M_i, w_i)$。2. 对每组三个生成元，计算其边的交点。对于每个交点，检查它是否为图的顶点。3. 对于至少产生一个 GBPD 顶点的每组三个生成元，为每一对 (i, j)、(j, k)、(i, k) 创建一个列表，并存储顶点。如果列表已存在，则追加顶点。4. 对于每个列表，绘制相应等分线的可见部分：对该等分线上的每个顶点，求解等分线 E_{ij} 的参数形式（参见方程 (10)），以得到 t 。按升序排列这些值，得到 $t_1 < t_2 < \ldots < t_{l-1} < t_l$。

如果对于 $\hat{t} = (t_i+t_{i+1})/2$，$(x(\hat{t})\ y(\hat{t}))$ 在所有生成元中距离 i 和 j 最近（否则就会存在另一个顶点），则从 t_i 到 t_{i+1} 的边属于该图。此外，还要检查从 $-\infty$ 到 t_1 以及从 t_l 到 ∞ 的边是否属于该图。

5. 对于不属于生成顶点的三元组的每一对生成元，通过检查 $(x(0)\ y(0))$ 是否比所有其他生成元更接近 i 和 j，来判断整个等分线是否属于该图。

6. 输出：GBPD 的边和顶点，包括邻接关系

为了对该算法进行运行时间分析，首先考虑一组 n 生成元，它们生成一个没有非连通单元且每个单元至少有三个邻居的 GBPD。这种镶嵌可以视为一个平面图。设 $|m|$、$|e|$、$|v|$ 分别为其中的单元数、边数和顶点数。由于我们只考虑连通单元，因此有 $|m| \leq n$，从而 $|m|$ 属于 $\mathcal{O}(n)$。平面图的欧拉公式还意味着 $|e|$ 和 $|v|$各自属于 $\mathcal{O}(n)$。

在算法的第 2 步中，计算 $\binom{n}{3}$ 个交点，并确定每个交点到所有 n 个生成元的距离。相对于输入规模 n而言，计算一条边的交点所需的时间是常数。总计得到 $\mathcal{O}(\binom{n}{3} \cdot n)$的时间复杂度。

在步骤 4 中，考虑 $\mathcal{O}(n)$ 条边线段，并分别计算它们到 n 个生成元的距离。等分线的计算时间相对于输入规模 n 为常数。总的来说，步骤 4 的时间复杂度为 $\mathcal{O}(n^2)$。

透镜仅由两个顶点和边组成，因此比常规单元简单。因此，如果允许 GBPD 包含透镜，面、边和顶点的数量之间的线性关系仍然成立。对于只有一个邻居的单元，这一结论也成立，因为它们仅由一条边和零个顶点组成。在这种情况下，还需要执行算法的步骤 5，额外耗时为 $\mathcal{O}(\binom{n}{2} \cdot n)$。因此，算法的总运行时间复杂度为 $\mathcal{O}(\binom{n}{3} \cdot n)$。

我们的运行时间分析仅针对连通单元，因此连通分量的数量不超过生成元的数量。若要将分析扩展到非连通单元，则需要更深入地了解 n 与连通分量数量之间的关系。

为验证该算法，我们给出两个示例。图3左侧显示一幅尺寸为 400×400 的 EBSD图像，图3中间显示利用 165 个生成元的 GBPD 进行的重建结果。这些生成元是按照 [1] 中所述，通过主成分分析（PCA）从 EBSD图像的多晶体中提取的。w_i 均设为 0。我们的算法输出的图的边以黑色显示。作为对比，我们还通过逐像素的“蛮力”方式计算该图，将图像中的每个像素分配给与其距离最近的生成元。由此得到一幅标签图像，其颜色取自原始 EBSD图像。

图3右侧的 GBPD 由 148 个生成元构成，其中心$p_i = (p_{i,\ 1}\ p_{i,\ 2})^T$、$p_{i,\ 1}$ 以及 $p_{i,\ 2}$ 均匀分布在 $[0, 400]$ 上，而 w_i 分布在 $[0, 50]$上。

M_i 通过方程 (2) 构造，其中正交矩阵 U_i 定义为

$$U_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

且 θ_i 在 $[0, \pi]$上均匀分布。长半轴长度 $\sqrt{a_{i,1}}$ 取自 $[10, 20]$ 上的均匀分布，短半轴长度 $\sqrt{a_{i,2}}$取自 $[0, 10]$上的均匀分布

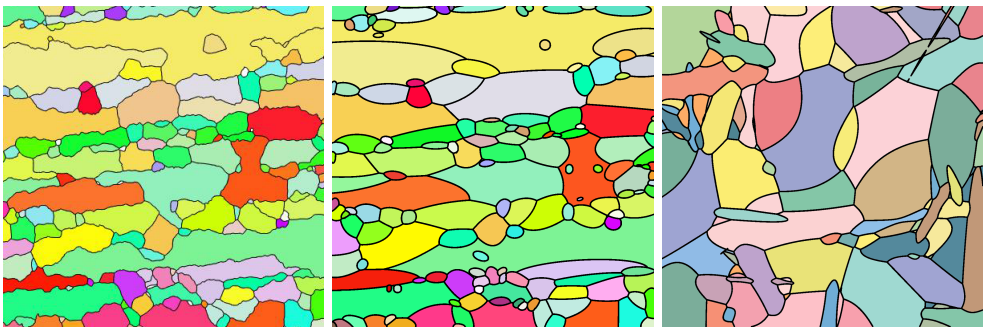

图3：左：从二维 EBSD图像中通过主成分分析提取出165个生成元。中：所得的 GBPD。右：由一组148个均匀分布的生成元生成的 GBPD。

4.4 单元周长和面积

利用上述算法，还可以解析地计算单元周长和面积。由 h 条边组成的单元，其周长可计算为

$$\sum_{i=1}^{h} \int_{t_1^i}^{t_2^i} \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial t}x(t)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial t}y(t)\right)^2}\, dt$$

其中， t_1^i 和 t_2^i 是分别对应于边 e_i的起点 v_1^i 和终点 v_2^i的参数。

要计算一个单元的面积，考虑一个连通单元。令 poly(V) 表示按顺时针或逆时针顺序遍历该单元的顶点 V 后得到的多边形， |poly(V)| 表示其面积。首先，计算 |poly(V)|。然后，计算 e_i 与从 v_1^i 到 v_2^i 的直线之间的面积；如果 e_i 位于多边形外部，就将其加到总面积中。否则，将其减去。实际操作中，可以对从 v_1^i 到 v_2^i 的直线进行平移和旋转，使得 v_1^i = (0，0) 且该直线位于 x 轴上。对 e_i 应用相同的变换。然后，直线与 e_i 之间的面积为

$$A_i = \int_{t_1^i}^{t_2^i} \left| \bar{y}(t) \left(\frac{\partial}{\partial t}\bar{x}(t)\right) \right| dt$$

其中，$(\bar{x}(t)\ \bar{y}(t))$ 是旋转边的参数表示。由此可得

$$A = |\operatorname{poly}(V)| - \sum_{i=1}^{n} A_i \mathbb{1}_{\operatorname{poly}(V)}(e_i) + \sum_{i=1}^{n} A_i \mathbb{1}_{(\operatorname{poly}(V))^C}(e_i)$$

对于总单元面积。
对于只有一个邻居的单元，可以直接通过计算椭圆或圆的面积来求得其面积。然后从其所包含的单元面积中减去该面积。对于透镜，只需将两个积分相加。对于不连通胞元，需要分别对单元的每个部分执行上述方法。

5 结论

在本文中，我们以参数形式推导出了GBPD的边的表示形式。其顶点对应于圆锥曲线的交点。基于此，我们提出了一种新颖且明确的算法，用于计算GBPD。用于计算单元周长和单元面积的解析公式也可以应用，并且已经实现。此外，还可以在算法运行期间存储该图的拓扑信息和邻接信息。从计算角度来看，还需要对该算法进行更高效的实现。如第4节所述，d维GBPD与 D维拉盖尔镶嵌有关，其中 $D = {}^{d(d+3)}/_{2}$。后者可以在 $\mathcal{O}(n^{\lceil \frac{D}{2} \rceil})$时间内构造，这表明我们的算法运行时间并非最优。然而，据我们所知，我们的算法是第一个能够显式计算二维GBPD的算法。

未来的工作中，该算法可应用于逆问题，例如重建细胞材料和多晶材料。这些材料的解析几何描述可用于定义更多优度度量，以评估其重建效果。

此外，我们重点研究将该算法扩展到三维。届时，该算法可用于重建泡沫或三维 EBSD图像等三维材料。

致谢

本研究得到德国联邦教育与研究部（BMBF） [项目资助，项目编号为 05M2020（DAnoBi）]。

参考文献

[1] Andreas Alpers、Andreas Brieden、Peter Gritzmann、Allan Lyckegaard 和 Henning Friis Poulsen。用于多晶体三维表示的广义平衡幂图。*Philosophical Magazine*, 95(9):1016–1028，2015年。

[2] Andreas Alpers、Maximilian Fiedler、Peter Gritzmann 和 Fabian Klemm。将晶粒图转换为图。*SIAM* 成像科学杂志，16(1):223–249，2023年。[3] Hellen Altendorf、F´elix Latourte、Dominique Jeulin、Matthieu Faessel 和 L. Saintoyant。通过各向异性镶嵌模型进行多尺度微观结构的三维重建。*Imag. Anal. & Stereol.*，33(2):121–130，2014年。[4]F. Aurenhammer。幂图：性质、算法与应用。*SIAM J. on Comput.*，16(1):78–96，1987年。[5] Jean-Daniel Boissonnat、Camille Wormser 和 Mariette Yvinec。曲线 *Voronoi* 图，第67–116页。Springer，柏林，海德堡，2006年。[6] D. P. Bourne、P. J. J. Kok、S. M. Roper 和 W. D. T. Spanjer。拉盖尔镶嵌与多晶微观结构：一种生成指定体积晶粒的快速算法。*Philosophical Magazine*，100(21):2677–2707，2020年。[7] Guillermo D. Canas 和 Steven J. Gortler。无孤立区域的各向异性 Voronoi 图。*Discret. & Comput. Geom.*，46:526–541，2011年。[8] Guillermo D. Canas 和 Steven J. Gortler。无孤立区域的各向异性 Voronoi 图的对偶是嵌入网格。载于第二十八届计算几何年度研讨会论文集，第219–228页，2012年。[9] CGAL 文档。https://www.cgal.org/documentation.html。访问日期：2023年2月13日。[10] Falai Chen、Liyong Shen 和 Jiansong Deng。利用 μ-基对二次曲面和三次曲面进行隐式化与参数化。*Comput.*，79:131–142，2007年4月。[11] Elena Deza 和 Michel-Marie Deza。第20章——Voronoi 图距离。载于距离词典，第253–261页。Elsevier，阿姆斯特丹，2006年。[12] Ioannis Emiris 和 Menelaos Karavelas。阿波罗尼斯图谓词：算法分析与实现。*Comput. Geom.*，33(1):18–57，2006年。[13] Michael Groeber、Somnath Ghosh、Michael D. Uchic 和 Dennis M. Dimiduk。用于三维多晶微观结构自动化分析与仿真的框架：第1部分：统计表征。*Acta Mater.*，56(6):1257–1273，2008年。[14] Michael Groeber、Somnath Ghosh、Michael D. Uchic 和 Dennis M. Dimiduk。用于三维多晶微观结构自动化分析与仿真的框架。第2部分：合成结构生成。*Acta Mater.*，56(6):1274–1287，2008年。[15] Martin Held。型腔加工的计算几何。Springer-Verlag，柏林，海德堡，1991年。

[16] Martin Held 和 Stefan de Lorenzo。《用于计算乘法加权 Voronoi 图的高效实用算法及其实现》。载于第 *28* 届欧洲算法年会（*ESA 2020*），第 173 卷，第 56:1–56:15 页。Schloss Dagstuhl–Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2020 年。[17] Christoph M. Hoffmann。《style id='6'>几何与实体建模：导论》。Morgan Kaufmann 出版公司，美国加利福尼亚州旧金山，1989年。[18] Christoph M. Hoffmann。参数曲线与隐式曲线和曲面之间的转换方法。技术报告，计算机科学系，普渡大学，1990年。[19] Menelaos I. Karavelas 和 Mariette Yvinec。二维动态加法加权 Voronoi 图。载于第 *10* 届欧洲算法年会论文集（*ESA 2002*），第 586–598 页，英国伦敦，2002年。施普林格出版社。[20] Deok-Soo Kim、Youngsong Cho 和 Donguk Kim。三维球的欧氏 Voronoi 图及其边追踪计算方法。*Comput.-Aid. Des.*，37(13):1412–1424，2005年。[21] Jarom´ır Kope˘cek、Jakub Stan˘ek、Stanislav Habr、Filip Seitl、Lukas Petrich、Volker Schmidt 和 Viktor Bene˘s。通过三维 EBSD 观察 AlMgSc 合金多晶微观结构的分析。*Imag. Anal. & Stereol.*，39(1):1–11，2020年。[22] Francois Labelle 和 Jonathan Richard Shewchuk。各向异性 Voronoi 图与有质量保证的各向异性网格生成。载于第十九届计算几何年会论文集，第 191–200 页，2003 年。[23] A. Liebscher 、 D. Jeulin 和 C. Lantu´ejoul。多晶材料的体视学重建。*J. of Microsc.*，258(3):190–199，2015年。[24] A. Liebscher 和 C. Redenbach。随机泡沫的 Laguerre 近似的弹性性质。*Int. J. of Solids and Struct.*，252:111722，2022年。[25]Andr´e Liebscher。随机泡沫的 Laguerre 近似。*Philos. Mag.*，95(25):2777–2792，2015年。[26]Allan Lyckegaard、Erik Mejdal Lauridsen、Wolfgang Ludwig、Richard Warren Fonda 和 Henning Friis Poulsen。关于使用 Laguerre 镶嵌表示三维晶粒结构。*Adv. Eng. Mater.*，13(3):165–170，2011年。[27]Pierluigi Taddei，圆锥曲线交点，MATLAB Central 文件交换平台（ https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/28318-conics-intersection，检索日期：2023年2月10日），2023年。[28] Thibaud Mouton 和 Eric B´echet。Vorosweep：一种快速的广义晶体生长 Voronoi 图生成算法。2014年。

[29] Neper 文档。https://rquey.github.io/neper/docs/neper.pdf。访问日期：2023年2月13日。[30] Atsuyuki Okabe、Barry Boots 和 Kokichi Sugihara。《style id='3'>空间镶嵌：Voronoi 图的概念与应用》。John Wiley & Sons, Inc.，美国纽约州纽约市，1992年。[31] Lukas Petrich、Orkun Furat、Mingyan Wang、Carl E. Krill III 和 Volker Schmidt。将三维镶嵌高效拟合至曲面多晶晶界。*Frontiers in Materials*，8，2021年。[32] Lukas Petrich、Jakub Stanˇek、Mingyan Wang、Daniel Westhoff、Ludek Heller、Petr Sittner、Carl Krill、Viktor Benes 和 Volker Schmidt。利用 Laguerre 镶嵌从不完整数据重构多晶材料中的晶粒。*Microscopy and Microanalysis*，25:1–10，2019年4月。[33] Claudia Redenbach。《style id='12'>随机Laguerre镶嵌》。学位论文，卡尔斯鲁厄大学，2007年。[34] Claudia Redenbach、Inga Shklyar 和 Heiko Andrae。用于具有显著胞元大小差异的闭孔泡沫弹性刚度模拟的 Laguerre 镶嵌。*International Journal of Engineering Science*，50(1):70–78，2012年。[35] Claudia Redenbach、Oliver Wirjadi、Stefan Rief 和 Andreas Wiegmann。用于过滤模拟的陶瓷泡沫建模。*Adv. Eng. Mater.*，13(3):171–177，2011年。[36]J¨urgen Richter-Gebert。《style id='23'>射影几何视角：实几何与复几何导论》。施普林格出版社柏林海德堡，2011年。[37] Fabian Schaller、Sebastian Kapfer、Myfanwy Evans、Matthias Hoffmann、Tomaso Aste、Mohammad Saadatfar、Klaus Mecke、Gary Delaney 和 Gerd Schr¨oder-Turk。非球形颗粒三维组装体的集合Voronoi图。*Philos. Mag.*，93:3993–4017，2013年9月。[38] Ondrej Sedivy、Jules Dake、Carl III、Volker Schmidt 和 Aleˇs J¨ager。利用由椭球生成的镶嵌模型描述铝合金中晶界的三维形貌。*Imag. Anal. and Stereol.*，36:5–13，2017年。[39] Filip Seitl、Lukas Petrich、Jakub Stanˇek、C. Krill、V. Schmidt 和 Viktor Benes。三维随机建模中 Gibbs-Laguerre 镶嵌的探索。*Methodol. and Comput. in Appl. Probab.*，23:669–693，2021年。[40] Prince Henry Serrao、Stefan Sandfeld 和 Aruna Prakash。OptiMic：用于生成优化多晶微观结构以开展材料模拟的工具。*SoftwareX*，15:100708，2021年。[41] Aaron Spettl、Tim Brereton、Qibin Duan、Thomas Werz、Carl III、Dirk Kroese 和 Volker Schmidt。将 Laguerre 镶嵌近似拟合至断层成像图像数据。*Philos. Mag.*，96:166–189，2016年1月。

[42] Kirubel Teferra 和 David Rowenhorst。广义平衡幂图的直接参数估计。*Philos. Mag. Lett.*，第 1–9 页，2018年。[43] T.F.W. van Nuland、J.A.W. van Dommelen 和 M.G.D. Geers。用于生成具有优先生长方向的多晶微观结构的各向异性 Voronoi 算法。*Comput. Mater. Sci.*，186:109947，2021年。[44] Voro++文档。http://math.lbl.gov/voro++/doc/。访问日期：2023年2月13日。[45] Ondˇrej ˇSediv´y、Tim Brereton、Daniel Westhoff、Leos Polivka、Viktor Benes、Volker Schmidt 和 Aleˇs J¨ager。使用具有曲面晶界的镶嵌模型对多晶材料中的晶粒进行三维重建。*Philos. Mag.*，96(18):1–24，2016年。[46] Ondˇrej ˇSediv´y、Daniel Westhoff、Jarom´ır Kopeˇcek、Carl E. Krill III 和 Volker Schmidt。描述多晶微观结构的镶嵌模型的数据驱动选择。*J. of Stat. Phys.*，172(5):1223–1246，2018年。[47] Simon Weis、Philipp Sch¨onh¨ofer、Fabian Schaller、Matthias Schr¨oter 和 Gerd Schr¨oder-Turk。Pomelo：用于计算任意形状非球形颗粒的一般集合 Voronoi 图的工具。*EPJ Web of Conf.*，140:06007，2017年3月。[48] Hans-Martin Will。空间加性加权 Voronoi 胞元的几何性质。技术报告，苏黎世联邦理工学院信息学系，苏黎世，1998年。