不确定结构中的互模拟状态

Jurriaan Rot ！拉德堡德大学，奈梅亨，荷兰

Thorsten Wißmann ！拉德堡德大学，奈梅亨，荷兰 埃尔朗根-纽伦堡弗里德里希-亚历山大大学，德国

摘要

我们提出了一种称为不确定互模拟的范畴概念，用于研究互模拟与对相关系统缺乏知识相结合的情形。这种不确定性自然产生于自动机学习算法：在这类算法中，人们需要判断所观测到的两个行为是否来自黑盒系统中的同一内部状态，而该系统无法被透明地检查。我们将这种不确定性建模为一个带有偏序的集合函子，该偏序描述了学习博弈未来可能的发展。在此类函子上，我们基于提升给出了不确定互模拟的定义，并验证了其基本性质。除将其应用于作为自动机学习自然模型的 Mealy 机之外，我们的框架还可实例化为悬挂自动机上的一种现有兼容关系；悬挂自动机用于基于模型的测试。我们证明，不确定互模拟是两个状态能够由黑盒系统中的同一状态实现的必要但非充分条件。为弥补其中一个方向上的不足，我们通过余代数模拟刻画了不确定互模拟。

2012年 ACM 学科分类计算理论

关键词与短语余代数、关系提升、互模拟、Mealy 机、ioco

1 引言

受构造性数学的启发，Geuvers 和 Jacobs [5] 在余代数系统上引入了不相交关系，作为互模拟的补充。互模拟是行为等价的一种余归纳刻画，而不相交性则是归纳性的，并允许构造有限的行为差异证明。

尽管不相交性和互模拟只是同一事物的两面，但近期的 $L^{\#}$ 自动机学习算法 [20]证明了“不相交性”这一视角卓有成效。该算法采用 Angluin [1], 的主动学习场景，其中学习者仅凭自动机的黑盒行为，尝试重建其实现（具体而言，是 [20]中的 Mealy 机）。在 $L^{\#}$中，学习者的一项关键任务是确定两个输入词 w、 v 在黑盒中是否会到达相同状态，还是不同状态。在整个学习博弈过程中，学习者会不断获得更多观测。如果学习者在某个时刻发现，w 和 v 分别到达的状态 q_w、 q_v 具有不同的行为，那么 q_w 和 q_v 就可证明是不同的——称为不相交。为此，我们无需了解 q_w 和 q_v的完整语义；只需观察它们行为中某个方面，发现二者以不相容的方式有所不同即可。

一旦状态被证明是不相交的，它们在整个剩余学习博弈过程中都会保持这种关系，无论之后对黑盒进行何种进一步观测。因此，随着学习博弈的推进，不相交关系会单调增长。如果我们考虑互模拟，这种单调性的优美之处便不复存在：只要状态 q_w、 q_v 尚未被证明不同，就应当将它们视为互模拟吗？还是说，我们只是掌握的信息还不够充分？如果不知道黑盒中的状态数量，那么在学习过程中，我们永远无法以 100% 的确定性认为状态 q_w、q_v 是互模拟的。

在本研究中，我们通过引入不确定互模拟这一概念来弥补这一空缺。它表示两个状态可能互模拟，但我们对此并不确定，因为

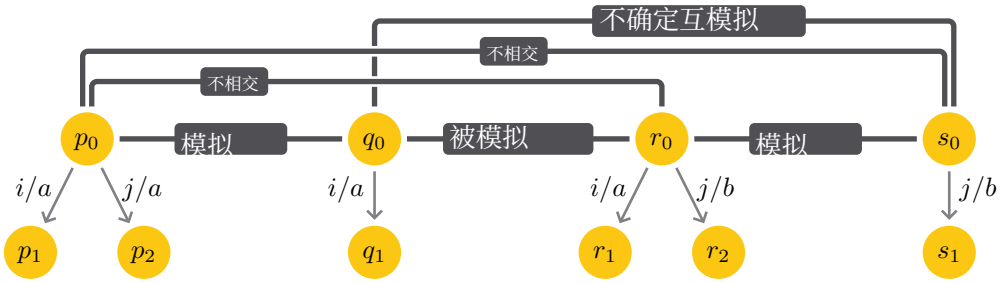


图 1 输入字母表 $\{i,\ j\}$ 和输出字母表 $\{a,\ b\}$的偏Mealy机。

我们尚未观察到任何能够否定互模拟的依据。Mealy机图 1 展示了这一核心思想：状态 p_0 和 r_0 不相交，因为在输入 j 下， p_0 的输出为 a ，而 r_0 则会产生不同的输出 b 。对于相同的输入 j，我们可以判断 p_0 和 s_0 不相交，尽管我们尚不了解 s_0 在输入 i下的行为。此外，状态 q_0 和 s_0 最终可能不相交，也可能互模拟，这取决于它们在输入 j下的输出。因此，我们称 q_0 和 s_0 为不确定互模拟。例如，如果我们尝试探索 q_0 在输入 j下的输出，那么根据该输出， q_0 将与 p_0 或 r_0相同。在确定这一点之前， q_0 由 p_0 和 r_0模拟。模拟是不确定互模拟的一种特殊情况，因为它不仅表示行为彼此兼容，还表示一种行为包含于另一种行为之中。

我们的目标是在余代数层面建立不确定互模拟理论，其中包括作为动机示例的 Mealy 机。使用互模拟关系和互模拟理论受益于丰富的范畴论。特别是，它们本身就是关系范畴 [7, 10]中的余代数。在这里，作用于关系上的余代数类型函子，是针对所关注系统的原始余代数类型函子的一个提升。

在本文中，我们明确处理学习场景中无处不在的知识缺失。形式上，我们通过为类型函子配备偏序来实现这一点。该偏序 $s \sqsubseteq t$ 表示，到目前为止观测到的行为 s 可能会在获得额外观测后扩展为行为 t 。该偏序立即导出松弛余代数态射的另外两个概念。

贡献。 在类型函子上赋予这样的偏序后， 我们将：

- 我们定义一种通用的系统等同性概念，称为不确定双模拟，它由类型函子的关系提升导出。我们展示该关系的一些基本性质，例如自反性和对称性。显然，不确定互模拟不具
- 传递性，因此不是等价关系。作为实例，我们将（部分）Mealy 机作为运行示例进行讨论。此外，我们还介绍悬挂自动机，在其中，不确定互模拟具体化为一种已有的兼容性
- 概念，该概念用于基于模型的测试中的$ioco$ 符合关系 [21]。一个标准结果是，标准的余代数互模拟等价于可通过余代数态射识别（在类型函子满足常见假设的条件下） [17]。
- 我们证明，对于 Mealy 机这一运行示例，不确定互模拟无法通过松弛余代数态射中的可识别性来刻画。相反，我们证明，不确定互模拟可通过两种定义的余代数模拟来刻画。具体而言，如果另一个余代数中存在一个状态同时模拟这两个状态，那么这两个状态就是不确定互模拟的（例如， r_0 在图 1 中同时模拟 q_0 和s_0 ）。
-

2 预备知识

我们首先确立后续技术论述中使用的基本余代数概念，参见例如 [10]。我们假设读者熟悉范畴论的基本概念。

▶ **定义 2.1.** 对于函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，一个 F-余代数 (C, c) 是一个对象 $C \in \mathcal{C}$（即载体），以及一个态射 $c\colon C \to FC$ *in* $\mathcal{C}$（即结构）。对于两个 F-余代数，余代数态射 $h\colon (C, c) \to (D, d)$ 是一个态射 $h\colon C \to D$，满足 $Fh \cdot c = d \cdot h$。我们用 $\mathsf{Coalg}(F)$ 表示 F-余代数范畴。

我们的余代数大多位于由集合和映射构成的范畴 Set 中，而主要示例是用于描述 Mealy 机的函子：

▶ **例 2.2.** 1. 固定输入符号集合 I 和 O 输出符号集合，考虑函子

$$\mathcal{M}_T\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set} \qquad \mathcal{M}_T X = (O \times X)^I.$$

一个 $\mathcal{M}_T$-余代数就是一个集合 C 以及一个映射 $c\colon C \to (O \times C)^I$，它将每个状态 $q \in C$ 和输入符号 $i \in I$ 映射到一个由输出符号和后继状态组成的有序对，该后继状态是 Mealy 机转移到的状态：$c(q)(i) \in O \times C$。我们记作

$$q \xrightarrow{i/o} q'$$

以指定 $c(q)(i) = (o, q')$。在函子的名称中，指标 T 应表示 Mealy机 是全定义的，也就是说，它对每个输入 $i \in I$都有定义。

2. 有限幂集函子 $\mathcal{P}_\mathsf{f}$ 将每个集合 X 映射为其有限子集的集合 $\mathcal{P}_\mathsf{f} X = \{S \subseteq X \mid S \text{ 有限}\}$，并将映射 $f\colon X \to Y$ 映射为直接像：$\mathcal{P}_\mathsf{f} f\colon \mathcal{P}_\mathsf{f} X \to \mathcal{P}_\mathsf{f} Y$，$\mathcal{P}_\mathsf{f} f(S) := \{f(x) \mid x \in S\}$。

余代数语义的一个典范域是终 余代数：

▶ 定义 *2.3*。终 F-余代数是 *Coalg(F)* 中的终对象。具体而言，余代数 (D, d) 是终的，当且仅当对于 *Coalg(F)* 中的每个 (C, c)，都存在唯一的余代数态射$h\colon (C, c) \to (D, d)$。如果它存在，我们将 F的终余代数记为 $(\nu F, \tau)$，并将对于 (C, c) 所诱导的唯一态射记为 $[\![-]\!]\colon (C, c) \to (\nu F, \tau)$。

▶ **例 2.4.** 最终的 $\mathcal{M}_T$-余代数由集合 $\nu\mathcal{M}_T = O^{I^+}$ 承载——即所有从 $I^+ \to O$ 非空词 I^+ 到 O的映射所组成的集合。

等价地，我们可以将语义 $\nu\mathcal{M}_T$ 刻画为满足以下条件的映射 $I^* \to O^*$：它们与词的前缀序良好地相互作用：

▶ **记号 2.5.** 对于词 $v, w \in I^*$（特别地，也包括非空词 $I^+ \subseteq I^*$），我们用 $v \leq w$ 表示 v 是 w的前缀。词 w 的长度记为 $|w| \in \mathbb{N}$。

于是，我们可以将 $\nu\mathcal{M}_T$ 刻画为保持词的长度和前缀的映射 $I^* \to O^*$：

$$\nu\mathcal{M}_T \cong \{f\colon I^* \to O^* \mid \text{for all } w \in I^*\colon |f(w)| = |w| \text{ and for all } v \leq w\colon f(v) \leq f(w)\}$$

3 LaxCoalgebra Morphism LacksKnowledge

在 Mealy 机的学习博弈中，学习者试图仅凭黑盒行为重构 Mealy 机的内部实现

$$c\colon C \to \mathcal{M}_T C = (O \times C)^I$$

。为此，假设有一个指定的初始状态 $q_0 \in C$，学习者的任务是构造一台行为与 q_0相同的 Mealy 机$[\![q_0]\!]$。处于黑盒环境意味着学习者既不知道 C，也不知道 c。相反，学习者可以向黑盒输入一个由输入字母表 I 中的输入符号组成的词 i_1，……，$i_n \in I$，这称为一次查询，然后观察输出符号o_1，……，$o_n \in O$。更准确地说，学习者观察到输出符号

$$o_k = [\![q_0]\!](\underbrace{i_1 \cdots i_k}_{\in I^+}) \in O \qquad \text{for every } 1 \le k \le n \qquad (\text{with } [\![-]\!] \text{ as in Example 2.4}).$$

通过此查询，黑盒会揭示初始状态在输入 i_1下的输出 $o_1 \in O$。但仅执行这次查询后，我们仍然不知道其他所有输入符号 $i_1' \in I, i_1' \neq i_1$ 对应的输出，而我们本可以用这些符号作为输入词的起始符号。

执行此类查询后，黑盒会返回初始状态 q_0，以便为下一次查询做好准备。在具体的学习场景中，例如可以通过重置所学习系统的实际硬件来实现这种重置到初始状态的操作。学习网络协议实现时，则通过为每个新的输入查询打开单独的网络连接（或会话）来实现这种重置行为。

$L^\#$ 算法（针对 Mealy 机）会将已执行输入查询的所有信息汇集到一棵观测树中。它将迄今为止实验所得的观测整合到单个数据结构中。然而，这种结构本身并不是一个$\mathcal{M}_T$-余代数，因为树中某些状态下，部分输入 $i \in I$ 对应的输出信息仍然缺失。

我们可以通过以下函子来建模这种知识缺失

$$\mathcal{M}\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set} \qquad \mathcal{M}X = (\{\textsf{?}\} + O \times X)^I.$$

元素‘?’表示我们尚不知道该转移。

▶ **记号 3.1.** 我们将偏函数简写为 $(X \rightharpoonup Y) := (\{\textsf{?}\} + Y)^X$.

因此，我们也可以写作 $\mathcal{M}X = (I \to O \times X)$。与 $\mathcal{M}_T$相比，$\mathcal{M}$-余代数$d\colon D \to \mathcal{M}D$ 中的状态 q 对于输入 $i \in I$可能未定义，即 $d(q)(i) = \textsf{?}$；也可能定义了转移，即我们同时有一个输出 $o \in O$ 和一个后继状态 $q' \in D$，满足

$$d(q)(i) = (o, q') \qquad \text{or using notation:} \qquad q \xrightarrow{i/o} q'.$$

$\mathcal{M}$ 中的这种偏性表示：每当学习者发送一个词 $w \in I^+$时，黑盒都会揭示处理 w过程中沿途所有转移的输出符号。因此，这种偏Mealy机（即 $\mathcal{M}$-余代数）中状态 $q \in D$ 的语义可以用以下方式刻画：

$$\nu\mathcal{M} := \{f\colon I^+ \rightharpoonup O \mid \text{for all } v \le w \text{ if } f(w) \in O \text{ then } f(v) \in O\}. \tag{1}$$

这个单调性条件描述的是：只要学习者观察到了输入词 $w \in I^+$ 对应的行为，我们也就观察到了所有前缀 $v \le w$ 对应的输出。

▶ **命题 3.2.** 终结 M-余代数 $(\nu M\ \tau)$ 由 (1) 及映射来刻画

$$\tau\colon \nu\mathcal{M} \to (I \rightharpoonup O \times \nu\mathcal{M}) \qquad \tau(f) = \quad i \mapsto \begin{cases} \textsf{?} & \text{if } f(i) = \textsf{?} \\ (o, w \mapsto f(i\,w)) & \text{if } f(i) \in O \end{cases}$$

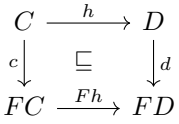


图 2 松弛 F-余代数态射 h 的图示记法：$(C, c) \sqsubseteq (D, d)$

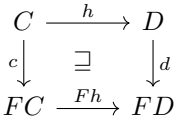


图 3 oplax$F$-余代数态射 h 的图示记法：$(C, c) \sqsupseteq (D, d)$

该结构将每个 $f \in \nu\mathcal{M}$ 映射为类型为 $\mathcal{M}\nu\mathcal{M}$ 的后继结构。对于 $i \in I$，此后继结构给出 $\tau(f)(i) \in \{?\} + O \times \nu\mathcal{M}$。

在学习过程中，学习者可能能够在观察到输入 i 上状态 q 的输出后修改余代数。在这个意义下，我们增加了知识，而这可以通过偏函数上的通常序来建模：

▶ **定义 3.3**。对于偏函数 t、s：$A \rightharpoonup B$，我们规定偏序

$$t \sqsubseteq_{A \rightharpoonup B} s \iff \forall i \in I : t(i) \in \{s(i), ?\}.$$

函子 $MX = (I \rightharpoonup O \times X)$ 继承了偏映射的偏序集结构 (MX, ν)。

这种等价意味着，对于每个输入 $i \in I$，$t(i)$ 的值要么未定义（$t(i) = ?$），要么与另一个后继结构中的第 i 个条目一致（$t(i) = s(i)$）。偏序本身表示，如果我们获得了关于完整 Mealy 机的更多信息，行为可能如何得到补全。也就是说，偏序展示了未来学习过程中可能出现的选项。

这一原则也适用于其他系统类型，因此我们通常作如下假设（例如 [8]）：

▶ **假设 3.4.** 固定一个函子 $F_{\mathsf{Pos}} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Pos}$，并定义：$F := U \cdot F_{\mathsf{Pos}}$，其中 $U : \mathsf{Pos} \to \mathsf{Set}$ 是通常的遗忘函子。令 $\sqsubseteq_{FX}$ 为 $F_{\mathsf{Pos}}X$ 上的序，即有 $F_{\mathsf{Pos}}X = (FX, \sqsubseteq_{FX})$。

F_{Pos} 的函子性意味着，对于每个 $f : X \to Y$，映射 $Ff : FX \to FY$ 是单调的。这个偏序引出了余代数态射的一个宽松概念：

▶ 定义 *3.5*。松弛 F-余代数态射 $h : (C, c) \to (D, d)$ 是 F-余代数之间的一个映射 $h : C \to D$，满足对所有 $x \in C$，都有 $Fh(c(x)) \nu_{FD} d(h(x))$。我们在图 *2* 所示的图示中用 ν 标记方框，以表示松弛交换性。对偶地，余松弛 F-余代数态射 $h : (C, c) \to (D, d)$ 是一个映射 $h : C \to D$，满足对所有 $\overrightarrow{x} \in C$，都有 $Fh(c(x)) \; w_{FD} \; d(h(x))$，其图示如图 *3* 所示。相较之下，我们用○强调严格交换性。

松弛余代数态射也可以称为函数模拟。直观地说，$h : (C, c) \sqsubseteq (D, d)$ 表示 (D, d) 的转移至少与 (C, c) 一样多。反过来，$h : (C, c) \sqsupseteq (D, d)$ 表示 (C, c) 的转移至多与 (D, d) 一样多。

在学习博弈中，松弛余代数同态自然会出现，因为所有观测都会收集在一棵观测树中 (T, t)。这棵观测树是一个 F-余代数，它存在一个松弛的 F-余代数态射 $h : (T, t) \to (B, b)$，映射到需要学习的黑盒 (B, b)。图 4 展示了 Mealy 机的松弛态射示例。

当然，学习者只能看到观测树 (T, t)，但看不到 (B, b) 或 h。不过，学习者可以利用这样一个事实：存在某些松弛余代数态射，并据此推导出 (B, b) 的性质。$L^{\#}$ 学习算法 [20] 的正确性证明实际上依赖于这类松弛余代数态射的存在。

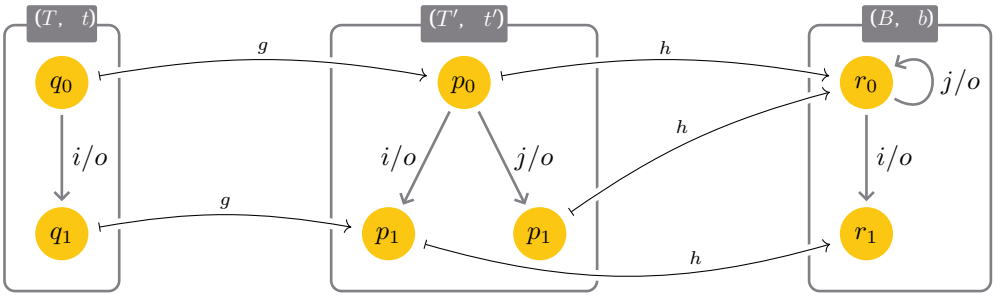


图 4 两个松弛$\mathcal{M}$-余代数态射 $g\colon (T,\ t) \sqsubseteq (T',\ t')$ 和 $h\colon (T',\ t') \sqsubseteq (B,\ b)$，其中 $\not{\mapsto} X = (\{?\} + O \times X)^I$，且 $I = \{i,\ j\}$，$O = \{o\}$。

符合关系。与自动机学习相关的一个应用是对基于状态的系统进行符合性测试。特别是，测试理论中的$ioco$ （**i**输入**o**输出**co**符合）关系 [18] 也很好地契合余代数理论，同时使用了函子上的非平凡序。我们关注的系统是悬挂自动机，它们是确定性标记转换系统和以下函子的余代数的一个子类：

▶**定义 3.6**。 对于至少在一个输入上有定义的偏映射，我们记作

$$(A \overset{\not\to}{\mathsf{ne}} B) := \{f\colon A \rightharpoonup B \mid \exists a \in A\colon f(a) \neq \mathbf{?}\}.$$

对于固定的输入集合 I 和输出集合 O，定义悬挂自动机函子

$$\mathcal{S}X := (I \rightharpoonup X) \times (O \overset{\not\to}{\mathsf{ne}} X).$$

按照现有的表述， [21, 18], 不难看出，悬挂自动机是该函子的余代数：

▶**定义 3.7**。悬挂自动机是一个有限的 $\mathcal{S}$-余代数，即一个有限的状态集合 C 和一个映射 $c\colon C \to \mathcal{S}C$。对于给定的余代数 (C, c) ，我们用? 表示输入转移，用!表示输出转移：

$$x \xrightarrow{?a} y \quad :\Longleftrightarrow \quad \pi_1(c(x))(a) = y \qquad and \qquad x \xrightarrow{!a} y \quad :\Longleftrightarrow \quad \pi_2(c(x))(a) = y$$

换言之，悬挂自动机是一个确定性标记转换系统，其标记集合划分为输入和输出。对于某些输入和某些输出，悬挂自动机在某个状态 x 可以转移到另一个状态。但每个状态都是非阻塞的，也就是说，对于每个状态 x ，至少存在一个输出 $o \in O$，使得 x 可以进行转移 $x \xrightarrow{!} o$。

规约与实现之间的一致性关系与交替形式模拟有关。现在不必给出详细定义（稍后会在定义5.10中回顾），因为我们可以直接通过反转函子$\mathcal{S}$输出部分的序来定义这种交替形式：

▶**定义 3.8**。对于 $(s_i, s_o) \in \mathcal{S}X$ 和 $(t_i, t_o) \in \mathcal{S}X$ ，我们定义：

$$(s_i, s_o) \sqsubseteq_{\mathcal{S}X} (t_i, t_o) \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \underbrace{s_i \sqsubseteq t_i}_{\text{in } I \rightharpoonup X} \quad and \quad \underbrace{t_o \sqsubseteq s_o}_{\text{in } O \rightharpoonup X}$$

换言之，沿着$\mathcal{S}$的序上升时，只要之后仍至少存在一个输出迁移，就可以添加输入迁移并移除输出迁移。

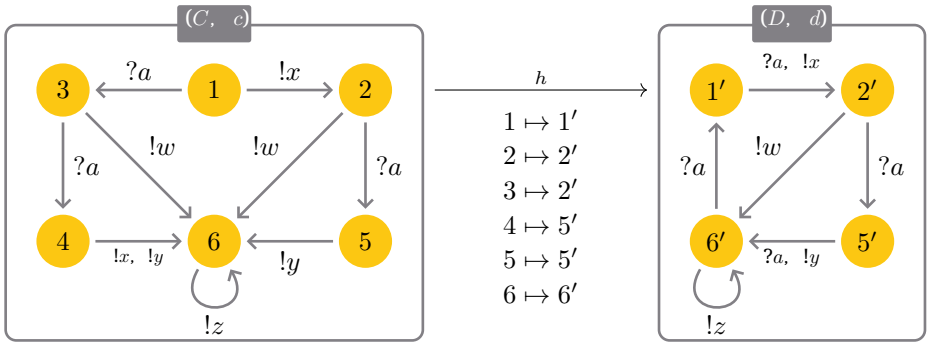


图 5 悬挂自动机以及它们之间的一个松弛 $\mathcal{S}$-余代数态射的示例。

▶ **示例 3.9**。 我们回顾 van den Bos et al. 的两个悬挂自动机示例。 [21, 图 1] 见图 5。根据$\mathcal{S}$ 上的序（定义 3.8），两者之间存在一个松弛余代数态射 $h\colon (C,c) \to (D,d)$，它将一些状态对应起来： $h(3) = h(2)$ 以及 $h(4) = h(5)$。映射 h 之所以只是一个松弛余代数态射，是因为在 (C,c) 中不存在从 5（或 4）到 6 的输入迁移 a，但在 (D,d) 中有 $5' \xrightarrow{?}{}^{a} 6'$。逆关系，在 (C,c) 中存在一个输出迁移 $4 \xrightarrow{!}{}^{x} 6$，但在 (D,d) 中不存在转移 $h(4) = 5' \xrightarrow{!}{}^{x} 6' = h(6)$。总结上述两点，我们得到：

$$\pi_1(\mathcal{S}h(c(5))) \sqsubsetneq \pi_1(d(h(5))) \quad \text{and} \quad \pi_2(\mathcal{S}h(c(4))) \sqsupsetneq \pi_2(d(h(4)))$$

函子上的偏序不仅放宽了态射的概念，还引出了一种新的余代数双模拟概念，我们将在第 5 节介绍。

4 余代数范畴 Rel 中的双模拟概念

本节通过关系提升的视角回顾余代数双模拟；详尽介绍请参见 [10]。我们先固定一些关于关系的记号。

▶ 记号 *4.1*. 给定关系 $R \subseteq X \times Y$和 $S \subseteq Y \times Z$，复合 $R \circ S$ 定义为： $R \circ S := \{(x,z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y\colon (x,y) \in R$ 且 $(y,z) \in Z\}$。我们将 R 的逆关系记为 $R^{\mathrm{op}} = \{(y,x) \mid (x,y) \in R\}$。集合 X 上的相等关系（亦称对角关系）记为 $Eq_X = \{(x,x) \mid x \in X\}$。给定映射 $f\colon X \to Y$和关系 $U \subseteq Y \times Y$，原像记为 $(f \times f)^{-1}(U) = \{(x_1,x_2) \mid (f(x_1)\ f(x_2)) \in U\}$。 f 的核关系定义为 $\ker f = \{(x_1,x_2) \mid f(x_1) = f(x_2)\}$。注意 $\ker f = (f \times f)^{-1}(Eq_Y)$。我们将积 $X \times Y$上的投影记为 $\pi_1\colon X \times Y \to X$和 $\pi_2\colon X \times Y \to Y$。

为了从结构角度研究余代数上的（双）模拟概念，我们考虑关系纤维化范畴：

▶ 定义 *4.2*。*Rel* 范畴的对象为 (X,R)，其中 X 是一个集合，且 $R \subseteq X \times X$，即 R 是 X 上的一个关系。*Rel* 中的态射 $f\colon (X,R) \to (Y,S)$ 是保持关系的映射 $f\colon X \to Y$，也就是说，$(x_1,x_2) \in R$蕴含 $(f(x_1)\ f(x_2)) \in S$。显然的遗忘函子为 $p\colon Rel \to Set$，由 $p(X,R) = X$给出。

遗忘函子 p 是一个纤维化；关于详细介绍，请参阅 Jacobs 著作 [9] 的导论章节。我们可以用无点的方式表达 Rel 中态射的保性质： $f\colon X \to Y$是 Rel 中从 (X, R) 到 (Y, S) 的映射，当且仅当

$$R \subseteq (f \times f)^{-1}(S).$$

等号扩展为函子 $\mathsf{Eq} : \mathsf{Set} \to \mathsf{Rel}$，定义为 $\mathsf{Eq}(X) = (X, \mathsf{Eq}_X)$ 且 $\mathsf{Eq}(f) = f$。这是良定义的，因为对于每个映射 $f\colon X \to Y$，都有 $\mathsf{Eq}_X \subseteq (f \times f)^{-1}(\mathsf{Eq}_Y)$。

为了研究 F-余代数上的关系——尤其是行为等价与包含关系的概念——我们将类型函子 F 从 Set 提升为 Rel 上的自函子 $\hat{F}$。

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{Rel} & \xrightarrow{\hat{F}} & \mathsf{Rel} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ \mathsf{Set} & \xrightarrow{F} & \mathsf{Set} \end{array}$$

对于所有集合函子，这样的提升都以一种规范的方式存在：

▶ **定义 4.3**。对于函子 $F\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$，关系提升 $\hat{F}\colon \mathsf{Rel} \to \mathsf{Rel}$ 定义为

$$\hat{F}(R \subseteq X \times X) = \{(x, y) \in FX \times FX \mid \exists t \in FR\colon F\pi_1(t) = x \text{ and } F\pi_2(t) = y\}.$$

因此，$\hat{F}$ 将 X 上的关系转换为 FX 上的关系。在继续之前，我们列出关系提升的若干标准性质：

▶ **引理 4**。**4** [10] 对于每个函子 $F\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$，都有
1. 单调性：如果 $R \subseteq S$，那么 $\hat{F}(R) \subseteq \hat{F}(S)$。*2.* 等式保持：$\mathsf{Eq} \circ F \subseteq F \circ \mathsf{Eq}$。*3.* 逆关系保持：$\hat{F}(R^{\mathsf{op}}) = (\hat{F}(R))^{\mathsf{op}}$ 对所有 $R \subseteq X \times X$ 都成立。*4.* 逆像保持：对于映射 $f\colon X \to Y$ 和关系 $S \subseteq Y \times Y$，我们有

$$\hat{F}((f \times f)^{-1}(S)) \subseteq (Ff \times Ff)^{-1}(\hat{F}(S))\,.$$

此外，如果 F 保持弱拉回，那么这里就是等式。

因此，单调性和逆像保持意味着，F 确实可以扩展为 a F 的提升，其在态射上的定义为 $\hat{F}(f) = F(f)$。

▶ **例 4.5.** 在我们将（部分）Mealy 机视为 $\mathcal{M}X = (\{?\} + O \times X)^I$ 的余代数这一例子中，关系 $R \subseteq X \times X$ 被提升为关系 $\hat{\mathcal{M}}R \subseteq \mathcal{M}X \times \mathcal{M}X$，其定义为

$$\begin{aligned}(s,t) \in \hat{\mathcal{M}}R \quad \text{iff} \quad \text{for all } i \in I\colon\ & (s(i) = ? \text{ and } t(i) = ?) \text{ or} \\ & (s(i), t(i)) \in \{((o,x),(o,y)) \mid o \in O, (x,y) \in R\}\end{aligned}$$

因此，后继结构 $s, t \in \mathcal{M}R$ 在 $R\,\mathcal{M}$ 下相关，当且仅当 s 和 t 对相同的输入 $i \in I$ 定义了转移，并且对于所有使 $s(i) = (o, x)$ 和 $t(i) = (o', y)$ 有定义的输入 $i \in I$，二者具有相同的输出 $o = o'$，且后继状态彼此相关 $(x, y) \in R$。

关系提升使人联想到关系 $R \subseteq C \times C$ 为双模拟的判据。然而，我们区分嵌套元素（或后继状态）上的关系 R 与结构（或直观而言，前驱状态）上的提升后的关系。若直观地令前驱状态与后继状态上的关系相同，则关系提升会如下产生互模拟 [7, 10]。

▶ **定义 4.6**。余代数 $c\colon C \to FC$ 的状态空间上的关系 $R \subseteq C \times C$ 若满足 $R \subseteq (c \times c)^{-1}(\hat{F}(R))$，则称为双模拟。若存在一个双模拟将状态 x 和 $y \in C$ 联系起来，则称这两个状态互模拟。

注意，$(c \times c)^{-1}(\hat{F}(-))\colon \mathsf{Rel}_C \to \mathsf{Rel}_C$ 是完备格 $\mathsf{Rel}_C = \mathcal{P}(C \times C)$ 上的单调映射，其中该格由 C 上的关系构成，并按包含关系排序。因此，双模拟是此映射的一个后不动点，而互模拟是最大的后不动点。根据 Knaster-Tarski 定理，它同时也是最大不动点。将互模拟刻画为单调映射的最大不动点，是经典余归纳理论中的标准做法 [15]。

▶ 备注 4.7（余代数的不交并）。在双模拟的定义中，我们考虑单个余代数 $c\colon C \to FC$ 的状态空间上的一个关系 R。这一双模拟概念可以直接推广到不同 F-余代数 $x \in C$ 和 $y \in D \xrightarrow{d} FD$ 的状态，因为我们可以在这些余代数 (C, c) 和 (D, d) 的不交并（即余积）上考虑双模拟概念：

$$C + D \xrightarrow{c+d} FC + FD \xrightarrow{[F\mathsf{inl}, F\mathsf{inr}]} F(C + D)$$

其中 inl: $C \to C + D$和 inr : $D \to C + D$是余积注入，而 $[\cdots]$表示分类讨论（即余积的泛映射性质）。因此，我们所说的 x和 y 互模拟，指的是在上述合并余代数中，inl(x) 和 inr(y) 互模拟。很容易看出，这种推广定义良好：在特殊情形下，若 $(D, d) := (C, c)$，则 C 中的状态 x, y互模拟，当且仅当 inl(x),inr(y)在 $C + C$上的余代数中互模拟。

▶ **例 4.8. </style}因此，M** 的关系提升（例 4.5）给出如下结果：余代数 $c\colon C \to \mathcal{M}C$ 上的双模拟是满足以下条件的关系 $R \subseteq C \times C$:

$$R \subseteq (c \times c)^{-1}(\hat{\mathcal{M}}R).$$

展开包含关系可得， R 是双模拟，当且仅当对于所有 $(x, y) \in R$ 和 $i \in I$:
1. $c(x)(i) =?\ c(y)(i)$ 当且仅当 $=?$; 2. 若 $c(x)(i) = (o, x') \in O \times C$，则对于某个 $y' \in C$，有 $(x', y') \in R$，且 $c(y)(i) = (o, y')$; 3. 若 $c(y)(i) = (o, y') \in O \times C$，则对于某个 $x' \in C$，有 $(x', y') \in R$，且 $c(x)(i) = (o, x')$。
例如，图 4 中的叶状态 q_1， p_1， p_2， r_1 两两互模拟。然而， q_0和 p_0 并不互模拟： q_0 无法模仿 p_0的 j-转移。同样， q_0 和 r_0 并不互模拟（ p_0 和 r_0 也不互模拟）。

为了仍然表达 q_0 和 p_0之间的兼容性，我们将在下一节放宽余代数互模拟等价的概念。

5 不确定互模拟

到目前为止，在讨论函子 F的余代数上的双模拟时，我们尚未考虑序 $\sqsubseteq$ 。将序纳入考虑后，我们引入不确定双模拟的概念。特别是在 Mealy 机的例子中，它刻画了一种等价关系，其中“未知”转移会被忽略。由于我们遵循这样的原则：双模拟概念是 Rel 中的余代数，因此定义 Rel 上的函子时只需用到序 $\sqsubseteq$ 。于是，所需的双模拟将成为该函子的余代数：

▶ **定义 5.1**。 F 的不确定关系提升定义在关系 $R \subseteq X \times X$ 上，如下所示

$$\hat{F}_{\sqsubseteq}(R) \ := \ \sqsubseteq_{FX} \circ \hat{F}(R) \circ \sqsupseteq_{FX}$$

▶ 注 5.2。定义 5.1 的灵感来自 Hughes 和 Jacobs [8]关于余代数上模拟的概念。在他们的工作中，余代数 (C, c) 上的模拟是满足以下条件的关系 R

$$R \subseteq (c \times c)^{-1}(\sqsubseteq_{FC} \circ \hat{F}(R) \circ \sqsubseteq_{FC})$$

F的提升 $\sqsubseteq \circ \mathsf{Rel}(F)(-) \circ \sqsupseteq$ 在前引文中称为*lax* 关系提升。

▶ **定义 5.3**。 余代数 $c\colon C \to FC$上的不确定双模拟 R是一个关系$R \subseteq C \times C$，满足 $R \subseteq (c \times c)^{-1}(\hat{}F_{\sqsubseteq}(R))$。状态 x、 $y \in C$ 称为不确定互模拟，如果存在一个将它们联系起来的不确定双模拟。相反， x、 $y \in C$ 称为不相交，如果不存在将它们联系起来的不确定双模拟。

这里的不确定性表示，在学习场景中，我们无法完全确定这两个状态是否互模拟。随着系统通过未来观测得到扩展，它们最终可能会被证明是非互模拟的。基于这一直觉，相反的性质称为不相交：两个状态一旦被区分，无论系统之后如何通过更多转移得到扩展，它们都将始终保持区分。

展开定义后，我们得到以下明确刻画：

▶ **引理 5.4.** 关系 $R \subseteq C \times C$ 在 $c\colon C \to FC$ 上是不确定双模拟，当且仅当对于每个 $(x, y) \in R$，都存在 $t \in FR$ 使得

$$c(x) \sqsubseteq F\pi_1(t) \qquad \textit{and} \qquad c(y) \sqsubseteq F\pi_2(t).$$

将见证 t 表示为选择函数时，我们等价地得到一个映射 $r\colon R \to FR$，使投影 π_1, π_2 成为 *oplax* 余代数态射 $(R, r) \sqsupseteq (C, c)$：

$$\begin{array}{ccccc} C & \xleftarrow{\pi_1} & R & \xrightarrow{\pi_2} & C \\ \downarrow{\scriptstyle c} & \sqsubseteq & \downarrow{\scriptstyle r} & \sqsupseteq & \downarrow{\scriptstyle c} \\ FC & \xleftarrow{F\pi_1} & FR & \xrightarrow{F\pi_2} & FC \end{array}$$

对于偏 Mealy 机，这一刻画具体化为：

▶ **引理 5.5.** 对于偏 *Mealy* 机 $c\colon C \to MC$，若 是自反关系 $R \subseteq C \times C$，则它是不确定双模拟，当且仅当对于所有 $(x, y) \in R$ 和 $i \in I$，都有：

$$x \xrightarrow{i/o} x' \textit{ and } y \xrightarrow{i/o'} y' \qquad \textit{imply} \qquad o = o' \textit{ and } (x', y') \in R. \tag{2}$$

当 x 或 y 未定义 i-转移时，对所有 $(x, y) \in R$ 和 $i \in I$，该条件都显然成立。在这一刻画中，我们采用一个较弱的假设，即 R 是自反的，以便在相关状态中只有一个定义了 i-转移的情况下，能够定义引理 5.4 的余代数结构 $r\colon R \to FR$。即使 R 不是自反的，每个不确定双模拟 R 也满足 (2)。反过来，对于每个满足 (2) 的关系 R，关系 $\mathsf{Eq} \cup R$ 是一个不确定双模拟（也就是说，我们隐式地将自反闭包作为一种 up-to 技术 [3]）。

引理 5.5 中的刻画导出了以下余归纳原理：

▶ **命题 5.6。** 偏 *Mealy* 机 $c\colon C \to MC$ 中的状态 x, y 不确定互模拟，当且仅当

$$\textit{for all } w \in I^+\colon \qquad [\![x]\!](w) \in O \textit{ and } [\![y]\!](w) \in O \qquad \Longrightarrow \qquad [\![x]\!](w) = [\![y]\!](w)$$

对偶地，x 和 y 不相交，当且仅当存在某个 $w \in I^+$，使得二者在该处都有定义但值不同：$\mathbf{?} \neq [\![x]\!] \neq [\![y]\!] \neq \mathbf{?}$。

回顾一下，状态 $x \in C$ 的终余代数语义是一个偏映射 $[\![x]\!]\colon I^+ \rightharpoonup O$（在 $\nu\mathcal{M}$ 中，命题 3.2）。该映射将每个输入词 $w \in I^+$ 映射到 w的运行中最后一次转移的输出符号（如果这样的运行存在）。如果所有所需的转移并非都存在，则该映射返回 **?** i。命题 5.6 中的刻画表明，两个状态是不确定互模拟的，当且仅当对于所有输入词 $w \in I^+$，只要两个行为 $[\![x]\!]$、$[\![y]\!]$ 有定义，它们就必须一致。

▶ **例 5.7。** 如果存在一个自然变换 $\top\colon 1 \to F$，使得 $\top_X$ 是 FX的最大元，那么任意 F-余代数中的所有状态都是不确定互模拟的。

▶ **例5.8**。 对于有限幂集函子 $\mathcal{P}_\mathsf{f}$上的包含序 $\subseteq$，任意 $\mathcal{P}_\mathsf{f}$-余代数 $c\colon C \to \mathcal{P}_\mathsf{f}C$中的任意两个状态 x， y都是不确定互模拟的。

▶ **例5.9.** 当序$\sqsubseteq$ onFX为离散偏序集结构时，我们便重新得到普通双模拟：$\sqsubseteq_{FC} := \mathrm{Eq}_{FC}$·

悬挂自动机这一特例已在文献中得到明确研究 [21]:

▶**定义5**。**10** [21, 定义。 15]。 悬挂自动机 c： $C \to \mathcal{S}C$上的关系 $R \subseteq C \times C$称为(ioco) 兼容关系，如果对所有$(x, y) \in R$，都有：
1. 对所有 $x \overset{a}{\longrightarrow}? x'$ 和 $y \overset{a}{\longrightarrow}? y'$，都有$(x', y') \in R$**2.** 存在 $o \in O$
使得 $x \overset{o}{\longrightarrow}! x'$, $y \overset{o}{\longrightarrow}! y'$，且$(x', y') \in R$。

▶**命题5.11.** 悬挂自动机上的自反关系是 *ioco* 兼容关系，当且仅当它是不确定双模拟。

在证明中，悬挂自动机的输出转换是非空偏映射 $C \to (O \overset{\mathsf{ne}}{\rightharpoonup} C)$ 这一点很重要。非空性意味着，只要关系 $R \subseteq C \times C$ 上存在余代数结构 $r\colon R \to \mathcal{S}R$，那么所有相关状态（$x, y$）$\in R$至少拥有一个共同的输出 $o \in O$。这一点通过 ioco 兼容性定义中使用存在量词的条件体现出来。

5.1 性质

在讨论了具体实例之后，我们现在统一建立不确定双模拟的一般性质。我们首先列出不确定关系提升的性质，这些性质与引理 4.4 类似。

▶ **引理 5.12**。 对于任意函子 $F_\mathsf{Pos}\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Pos}$，不确定关系提升具有以下性质：

1. 单调性：若 $R \subseteq S$，则 $\hat{}\, F_\sqsubseteq(R) \subseteq \hat{}F_\sqsubseteq(S)$。$\hat{}$*2.* 等式保持：*Eq* 。 $F \subseteq F_\sqsubseteq$ 。 *Eq*。*3.* 逆关系保持：对于所有 $R \subseteq X \times X$，$\hat{}\, F_\sqsubseteq(R^{\mathsf{op}}) = (\hat{}F_\sqsubseteq(R))^{\mathsf{op}}$ 。*4.* 逆像保持：对于映射 $f\colon X \to Y$ 和关系 $S \subseteq Y \times Y$，

我们有

$$\hat{F}_\sqsubseteq((f \times f)^{-1}(S)) \subseteq (Ff \times Ff)^{-1}(\hat{F}_\sqsubseteq(S))\,.$$

$\hat{}\,\hat{}$ 与 F 的情形类似，根据单调性和逆像保持，$F_\sqsubseteq$ 可扩展为 F 的一个提升。不确定互模拟具有自反性和对称性：

▶ **引理 5.13**。 任意余代数 Eq_C (C, c) 上的相等关系都是一种不确定双模拟；如果 $R \subseteq C \times C$ 是一种不确定双模拟，那么 R^{op} 也是。

不出所料，不确定互模拟不具有传递性：尽管两个状态 x 和 z 确定是非互模拟的（即不确定互模拟），但可能存在一个状态 y，它与 x 和 z 都不确定互模拟（例如图 1 中的 p_0、q_0、s_0）。类似地，众所周知，ioco 兼容性通常不具有传递性 [21, 例 17]。

缺乏传递性使得我们难以像通常的双模拟等价那样，通过态射是否能识别状态来刻画不确定互模拟。尽管如此，我们仍能证明一些保真结果，这与以下直觉相符：序 $\sqsubseteq$ 会增加转移（或其他信息）。两个状态不确定互模拟，意味着它们现有的转移行为不存在冲突，因此省略转移后，它们仍然不确定互模拟：

12 不确定结构中的互模拟状态

▶ **引理 5.14**。 不确定互模拟在 *oplax* 态射下保持：若 (C, c) 中的状态 x, y 不确定互模拟，那么对于每个 *oplax* 余代数态射 $h\colon (C, c) \to (D, d)$，状态 $h(x)$ 和 $h(y)$ 在 (D, d) 中不确定互模拟。

反过来，我们可以证明，如果两个状态能够通过松弛余代数态射被识别，那么它们就是不确定互模拟的。对于相应的（规范）关系提升 $\hat{F}$，证明中使用弱拉回保持性作为逆像保持的充分条件。对于不确定互模拟，我们将直接假设逆像保持，并称之为稳定性。这一术语沿用 Hughes 和 Jacobs [8], ，他们为其松弛关系提升定义了一个类似的条件。

▶**定义 5.15**。 若函子 F_{Pos} 在自反关系上与逆像交换，即当 S 为自反关系时，引理 *5.12* 第 *4* 项中的包含关系为等式，则称其为稳定的 。

▶ 注 5.16。与 [8], 中的变体不同，我们只要求引理 5.12.4 的逆命题对自反的 关系成立。原因是，即使对于 Mealy 机 $F = \mathcal{M}$，若去掉这一假设，引理 5.12.4 的逆命题也不成立。

▶ **例 5.17**。 $M_{\sqsubseteq}$ 是稳定的。

▶ **引理 5.18**。 设 F_{Pos} 是稳定的。则任意松弛余代数态射 $h\colon (C, c) \sqsubseteq (D, d)$ 都反映不确定 $\dot{\mapsto}$ 模拟，即如果 $R \subseteq C \times C$ 是一个自反的不确定双模拟关系，那么 $(h \times h)^{-1}(R)$ 也是如此。

因此，在稳定性假设下，如果余代数中的状态 x, y 被某个松弛同态 h 识别，那么它们是不确定互模拟的。

▶ **推论 5.19**。 设 F_{Pos} 是稳定的。松弛余代数态射 $h\colon (C, c) \sqsubseteq (D, d)$ 的核 $\ker h$ 是不确定双模拟。

这给出了不确定互模拟的一个刻画定理的一半（假设稳定性）：

$$\begin{array}{c}\text{States } x, y \text{ can be identified} \\ \text{by a lax coalgebra morphism}\end{array} \implies \begin{array}{c}\text{States } x, y \text{ are} \\ \text{uncertain bisimilar}\end{array} \tag{3}$$

对于标准互模拟，逆关系方向也成立：只要状态 x, y 是互模拟的（按通常意义），那么就可以通过一个（普通的）余代数态射将它们识别。然而，对于不确定互模拟，逆关系方向甚至在限制到树形 Mealy 机时也不成立：

▶ **例 5.20**。 考虑图 6 中的偏Mealy机$\mathcal{M}$，其中有 $I = \{v, w, i\}$ 和$O = \{a, b, o\}$。在该机器中， p和 q是不确定互模拟的，因为它们在所有有定义的输入词上的语义都相匹配，如图 7 所验证（使用命题 5.6）。然而，不存在满足 $f(p) = f(q)$ 的松弛余代数态射 $f\colon \mathcal{M} \sqsubseteq \mathcal{N}$。为说明这一点，首先注意到，对于任意这样的 f，我们可以推导出以下等式：

$$f(p) \xrightarrow{w/o} f(x) \quad \text{and} \quad f(q) \xrightarrow{w/o} f(y) \quad \text{implies} \quad f(x) = f(y)\,,$$

$$f(p) \xrightarrow{v/o} f(q) \xrightarrow{w/o} f(y) \quad \text{and} \quad f(q) \xrightarrow{v/o} f(q') \xrightarrow{w/o} f(z) \quad \text{implies} \quad f(y) = f(z)$$

因此 $f(x) = f(z)$。根据推论 5.19，这意味着 x和 z是不确定互模拟的；但i 证明了 x 和 z 不相交 —— 这是一个矛盾！因此，不存在这样的 $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ 满足 $f(p) = f(q)$。

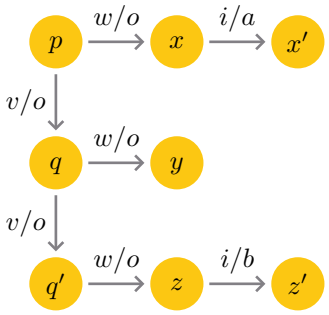


图 6 例 5.20 的 Mealy机 ...

$$
\begin{array}{ll}
[\![p]\!](w\ \ ) = o & [\![q]\!](w\ \ ) = o \\
[\![p]\!](wi\ ) = a & [\![q]\!](wi\ ) = ? \\
[\![p]\!](v\ \ ) = o & [\![q]\!](v\ \ ) = o \\
[\![p]\!](vw\ ) = o & [\![q]\!](vw\ ) = o \\
[\![p]\!](vv\ \ ) = o & [\![q]\!](vv\ \ ) = ? \\
[\![p]\!](vvw\ ) = o & [\![q]\!](vvw\ ) = ? \\
[\![p]\!](vvwi) = b & [\![q]\!](vvwi) = ? \\
[\![p]\!](vwi\ ) = ? & [\![q]\!](vwi\ ) = b
\end{array}
$$

图 7 ... 及其语义

5.2 通过模拟进行刻画

我们可以通过从函数模拟（即松弛余代数态射）转向由（松弛）态射构成的跨度所定义的适当模拟，来弥补（3）中逆向的失效。

对于函子 $F\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$（配备序 $\sqsubseteq$），可以通过多种方式定义余代数之间的模拟。Hughes 和 Jacobs [8]定义余代数 (C, c) 与 (D, d) 之间模拟的方式（另见注 5.2）对应于一个关系 $R \subseteq C \times D$ 和一个结构 $r\colon R \to FR$，使投影成为 oplax 态射和 lax 态射：

$$
\begin{array}{l}
\pi_1 : (R, r) \multimap (C, c) \\
\pi_2 : (R, r) \sqsupseteq (D, d)
\end{array}
\quad \text{that is, diagrammatically:} \quad
\begin{array}{ccccc}
C & \xleftarrow{\pi_1} & R & \xrightarrow{\pi_2} & D \\
\downarrow{\scriptstyle c} & \sqsubseteq & \downarrow{\scriptstyle r} & \sqsubseteq & \downarrow{\scriptstyle d} \\
FC & \xleftarrow{F\pi_1} & FR & \xrightarrow{F\pi_2} & FD
\end{array}
$$

请注意，由于同时使用了 lax 态射和 oplax 态射，这种模拟与引理 5.4 中的图略有不同。现在我们可以证明，这种基于跨度的模拟定义刻画了不确定互模拟：

▶ **命题 5.21**。 给定 F_{Pos} 是稳定的，对于余代数 c中的所有状态 $C \to FC$，x 和 y 满足以下等价条件：

1. x 和 y 是不确定互模拟的。2. 存在另一个余代数 $z \in D$ 中的一个状态$(D,\ d)$，以及一个符合 *Hughes* 和 *Jacobs* 风格的模拟 $S \subseteq C \times D$，使得$(x,\ z) \in S$ 并且$(y,\ z) \in S$。

第二项直观上意味着，状态 x 和 y 可以通过一个模拟来“识别”。将“松弛余代数态射”替换为“模拟”后，我们得到了 (3) 中蕴含关系的逆命题。在第一个方向（从上到下）的证明中，我们利用了在集合中，每个满射 $e\colon X \to Y$ 都有一个右逆 $a\colon Y \to X$（即满足 $e \circ a = \mathrm{id}_Y$），这一事实，并使用了选择公理。在第二个方向（从下到上）的证明中，我们利用了 F_{Pos} 的稳定性。

另一种略有不同的余代数上的模拟概念，源自通过开映射研究互模拟的方法 [11, 22]。这里，(C, c) 与 (D, d) 之间的模拟仍是一个关系 $R \subseteq C \times D$，并配备了一个余代数结构 $r\colon R \to FR$，使得

1. 投影 π_1 是一个余代数态射 $\pi_1\colon (R, r) \to (C, c)$，并且
2. 投影 π_2 是一个松弛余代数态射 $\pi_2\colon (R, r) \sqsubseteq (D, d)$：

$$
\begin{array}{ccccc}
C & \xleftarrow{\pi_1} & R & \xrightarrow{\pi_2} & D \\
\downarrow{\scriptstyle c} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle r} & \sqsubseteq & \downarrow{\scriptstyle d} \\
FC & \xleftarrow{F\pi_1} & FR & \xrightarrow{F\pi_2} & FD
\end{array}
$$

因此，任何开放映射式模拟也是 Hughes 和 Jacobs 风格的模拟。在我们的主要示例中，逆向包含关系也成立。为此，我们对函子施加另一个假设：

▶ **定义 5.22**。 若对于所有映射 $f\colon X \to Y$以及所有 $s \in FX, t \in FY$，都有

$$t \sqsubseteq_{FY} Ff(s) \qquad \Longrightarrow \qquad \textit{there is some } s' \sqsubseteq s \textit{ with } t = Ff(s'). \tag{4}$$

s' 背后的想法是，它是将 s 限制到 t 中已定义的那些转移上所得的结果，因此 $Ff\colon FX \to FY$将 s' 映射到 t:

▶ **例 5.23**。 用于部分 Mealy 机的函子 $\mathcal{M}$ 具有限制性：对于 $f\colon X \to Y$,$s \in \mathcal{M}X$，以及 $t \sqsubseteq_{\mathcal{M}Y} \mathcal{M}f(s)$，定义

$$s' \in \mathcal{M}X = (\{?\} + O \times X)^I \quad \text{by} \quad s'(i) = \begin{cases} ? & \text{if } t(i) = ? \\ s(i) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此定义使得 $s' \sqsubseteq s$ 成立，因为对于所有 $i \in I$，只要 $s'(i)$有定义（即 $s'(i) \neq ?$），那么 $s(i)$也有定义。不等式 $t \sqsubseteq_{\mathcal{M}Y} \mathcal{M}f(s)$意味着

$$(s'(i) = ? \iff t(i) = ?) \qquad \text{for all } i \in I$$

而且，对于 $i \in I$，只要 $s'(i) = (o, x)$，那么 $t(i) = s(i) = s'(i)$。因此，$\mathcal{M}f(s') = t$。

▶ 注 5.24. 在限制性的定义中，我们以 $t \sqsubseteq Ff(s)$ 作为条件，然后构造某个 s'，使得 $s' \sqsubseteq s$。因此，人们可能会认为其中隐藏着一个伽罗瓦连接。不过请注意，在偏 Mealy 机的例子中情况并非如此，因为 s' 的构造确实依赖于 s！因此，一般而言，无法构造伴随映射 $FY \to FX$。

▶ **引理 5.25. </style}如果 具有限制性，那么对于每个 oplax 态射 :** $(C, c) \sqsupseteq (D, d)$,— 存在一个结构 $c'\colon C \to FC$，使得对于所有 $x \in C$， $c'(x) \nu\ c(x)$，从而使 h 成为一个（真）余代数态射。

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{h} & D \\ {\scriptstyle c}\downarrow & \sqsupseteq & \downarrow{\scriptstyle d} \\ FC & \xrightarrow{Fh} & FD \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \exists c'\colon \qquad \begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{h} & D \\ {\scriptstyle c}\downarrow\ \sqsupseteq\ \downarrow{\scriptstyle c'} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle d} \\ FC & \xrightarrow{Fh} & FD \end{array}$$

这个引理将 Hughes/Jacobs 模拟转化为开映射风格的模拟：

▶**引理 5.26.** 已知 ν 具有限制性，则对于余代数上的任意关系$S \subseteq C \times D$，以下命题等价：$(C, c), (D, d)$:
1. 存在一个映射 $S \to FS$ 使得 S 成为 *Hughes* 和 *Jacobs* 风格的模拟。**2.** 存在一个映射 $S \to FS$ 使得 S 成为开映射中所用风格的模拟。

因此，我们可以结合引理 5.26 和前面的刻画命题 5.21：

▶**定理 5.27**。 已知 F_{Pos} 是稳定的且 ν 具有限制性，对于余代数 c中的所有状态 x, y，以下条件等价： $C \to FC$:
1. x 和 y 是不确定互模拟的。**2.** 在另一个余代数中存在一个状态 $z \in D$ $(D,\ d)$ 以及一个具有 *Hughes* 和 *Jacobs* 风格的模拟 $S \subseteq C \times D$，使得 $(x,\ z) \in S$ 且 $(y,\ z) \in S$。

3. 在另一个余代数中存在一个状态 $z \in D$ $(D,\ d)$ 以及一个开放映射式模拟$S \subseteq C \times D$，使得 $(x,\ z) \in S$ 且 $(y,\ z) \in S$。

▶ **例 5.28.** 对于部分 Mealy 机，当将这些 Mealy 机视为字母表 $I \times O$ 上的确定性标记转换系统时，模拟的抽象定义具体化为 (C, c) 与 (D, d) 之间的通常模拟概念：模拟是满足以下条件的关系 $R \subseteq C \times D$：对于所有 $(x, z) \in R$，只要 $x \xrightarrow{i/o} x'$，就存在某个 $z' \in D$，使得 $z \xrightarrow{i/o} z'$ 且 $(x', z') \in R$。命题 5.21 中的刻画表明，对于 $c\colon C \to \mathcal{M}C$ 中的所有状态 x, $y \in C$，我们有

$$\begin{array}{c} x \text{ and } y \text{ are} \\ \text{uncertain bisimilar} \end{array} \iff \begin{array}{c} \text{There is a state } z \text{ in some } d\colon D \to \mathcal{M}D \\ \text{such that } z \text{ simulates } x \text{ and } y \end{array}$$

▶**例 5.29.** 对于悬挂自动机上的兼容关系，也有类似的等价关系。在特定的模拟概念（称为余归纳 *ioco* 关系 [21，定义 4]）中，输入迁移按通常方向保留，而输出迁移则按逆关系方向保留。随后证明，悬挂自动机中的状态 x, y 兼容，当且仅当另一个悬挂自动机中存在状态 z，该状态同时符合（根据$ioco$ 关系） x 和 y [21, 引理 24.2]。

6 结论与未来工作

我们引入了不确定互模拟，这是一个用于在余代数层面的一般性上讨论行为兼容性的概念。其实例既包括部分 Mealy 机，也包括基于模型的测试中的$ioco$一致性关系。该框架专为自动机学习博弈中的知识缺失而设计。我们乐观地认为，这一推广为从 $L^{\#}$ 学习算法 [20] 迈向新的余代数学习算法提供了一个进展。此前的范畴框架 [2, 19, 6, 4]推广了 Angluin 的经典 L^* 算法；而在高度一般化的层面上发展一种 $L^{\#}$ 的变体可能会很有用，因为实验 [20] 表明，在 Mealy 机的情况下，这种方法性能更好。

到目前为止，我们已经证明，不确定互模拟等价于被同一个状态模拟。通过在终余代数上定义合适的模拟序，或许可以将类似的观察推广到终余代数。在此背景下，将我们的结果与 [14]中的相似商明确联系起来会很有意思。

标准的余代数互模拟等价也可以表述为：通过余代数模态逻辑 [16, 12] 的公式来刻画不可区分性。我们相信，不确定互模拟也可以用类似的术语来刻画。由于它是一种通过余归纳定义的关系，并涉及一种非标准的关系提升，因此 [13], 中的框架可能是一个很好的起点，尽管该框架并未提供逻辑的规范构造，而只提供了用于证明表达能力和充分性的基础设施。为了获得这样的逻辑，可以考虑将现有系统类型函子（例如 $\mathcal{M}_T$）中的模态迁移到涉及序和部分行为的函子（例如 $\mathcal{M}$）中，从而继承充分性乃至表达能力等性质。随后，这些具有区分作用的模态公式可以作为见证，用于否定不确定互模拟，即证明不相交性。

基于关系提升定义的不确定互模拟，使其适用于采用 [3] 中提出的余代数 up-to 技术。这有助于开发用于检验不确定互模拟的高效算法；这类算法尤其适合用于检验 ioco 规范之间的兼容性，相关研究见 [21]。

16 不确定结构中的互模拟状态

参考文献

1 Dana Angluin. 通过查询和反例学习正则集合。《信息与计算》，75(2):87–106，1987。2 Simone Barlocco、Clemens Kupke 和 Jurriaan Rot. 通过对偶性进行余代数学习。载于 FoSSaCS，《计算机科学讲义》第11425卷，第62–79页。施普林格，2019。3 Filippo Bonchi、Daniela Petrisan、Damien Pous 和 Jurriaan Rot. 余归纳 up-to 的一般论述。《信息学学报》，54(2):127–190，2017。4 Thomas Colcombet、Daniela Petrisan 和 Riccardo Stabile. 学习自动机与转换器：一种范畴论方法。载于 CSL，LIPIcs 第183卷，第15:1–15:17页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik，2021。5 Herman Geuvers 和 Bart Jacobs. 不相交性与双模拟之间的关系。《计算机科学逻辑方法》，第17卷，第3期，2021年7月。6 Gerco van Heerdt. CALF：范畴自动机学习框架。博士论文，伦敦大学学院，2020年10月。7 Claudio Hermida 和 Bart Jacobs. 纤维化情形下的结构归纳与余归纳。《信息与计算》，145(2):107–152，1998。8 Jesse Hughes 和 Bart Jacobs. 余代数中的模拟。《理论计算机科学》，327(1-2):71–108，2004。9 Bart Jacobs. 范畴逻辑与类型论。《逻辑与数学基础研究》第141卷。北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1999。10 Bart Jacobs. 《余代数导论：迈向状态与观测的数学》，《剑桥理论计算机科学丛书》第59卷。剑桥大学出版社，2016。11 André Joyal、Mogens Nielsen 和 Glynn Winskel. 开映射所导出的双模拟。《信息与计算》，127:164–185，1996。12 Clemens Kupke 和 Dirk Pattinson. 模态逻辑的余代数语义：综述。《理论计算机科学》，412(38):5070–5094，2011。13 Clemens Kupke 和 Jurriaan Rot. 余归纳谓词的表达性逻辑。《计算机科学逻辑方法》，17(4)，2021。14 Paul Blain Levy. 相似商作为终余代数。载于 FoSSaCS，《计算机科学讲义》第6604卷，第27–41页。施普林格，2011。15 Davide Sangiorgi. 《双模拟与余归纳导论》。剑桥大学出版社，2012。16 Lutz Schröder. 余代数模态逻辑的表达能力：局限与超越。《理论计算机科学》，390(2-3):230–247，2008。17 Sam Staton. 余代数双模拟概念之间的关系。《计算机科学逻辑方法》，7(1)，2011。18 Jan Tretmans. 基于标记迁移系统的模型测试。载于 Robert M. Hierons、Jonathan P. Bowen 和 Mark Harman 编，《形式化方法与测试：FORTEST 网络成果，修订精选论文》，《计算机科学讲义》第4949卷，第1–38页。施普林格，2008。19 Henning Urbat 和 Lutz Schröder. 自动机学习：一种代数方法。载于 LICS，第900–914页。ACM，2020。20 Frits Vaandrager、Bharat Garhewal、Jurriaan Rot 和 Thorsten Wißmann. 一种基于不相交性的主动自动机学习新方法。载于《系统构造与分析工具和算法》——第28届国际会议 TACAS 2022，《计算机科学讲义》。施普林格，2022年4月。21 Petra van den Bos、Ramon Janssen 和 Joshua Moerman. IOCO 的 n-完备测试套件。《软件质量期刊》，27(2):563–588，2019。22 Thorsten Wißmann、Jérémy Dubut、Shin-ya Katsumata 和 Ichiro Hasuo. 免费路径范畴。载于 Mikołaj Bojańczyk 和 Alex Simpson 编，FoSSaCS 2019，第523–540页，Cham，2019年4月。施普林格国际出版公司。

7 省略的证明与进一步细节

命题 3.2 的证明

对于余代数 $c\colon C \to \mathcal{M}C$，我们定义一个映射

$$[\![q]\!]\colon I^+ \to (\{?\} + O)$$

以 $q \in C$ 为参数，通过对 $w \in I^+$ 进行递归：

$$[\![q]\!](i) = \mathcal{M}!(c(q)(i)) \in (\{?\} + O \times 1) \cong (\{?\} + O).$$

$$[\![q]\!](i\,w) = \begin{cases} [\![p]\!](w) & \text{if } c(q)(i) = (o,p) \in O \times C \\ ? & \text{if } c(q)(i) = ? \end{cases}.$$

验证 $[\![q]\!]$ 的反单调性以及 $[\![-]\!]$ 是唯一的余代数态射是机械性的。◀

引理 5.4 的证明

给定余代数 $c\colon C \to FC$ 上的关系 $R \subseteq C \times C$，我们得到：
R 是不确定双模拟$\Leftrightarrow$ $R \subseteq (c \times c)^{-1}(\hat{}F_{\sqsubseteq}(R))\Leftrightarrow$ 对所有 $(x,y) \in R$，我们有 $(c(x)\ c(y)) \in \hat{}F_{\sqsubseteq}(R)\Leftrightarrow$ 对所有 $(x,y) \in R$，我们有 $(c(x)\ c(y)) \in \mathbf{v}_{FC} \circ \hat{}FR \circ \mathbf{w}_{FC}\Leftrightarrow$ 对所有 $(x,y) \in R$，存在 $t_x, t_y \in FC$ 使得 $c(x)\ \mathbf{v}\ t_x$，$(t_x, t_y) \in \hat{}FR$, $t_y\ \mathbf{w}\ c(y)\Leftrightarrow$ 对所有 $(x,y) \in R$，存在 $(t_x, t_y) \in \hat{}FR$ 使得 $c(x)\ \mathbf{v}\ t_x$, $c(y)\ \mathbf{v}\ t_y\Leftrightarrow$ 对所有 $(x,y) \in R$，存在 $t \in FR$ 使得 $c(x)\ \mathbf{v}\ F\pi_1(t)$, $c(y)\ \mathbf{v}\ F\pi_2(t)$（根据定义 4.3）

最后一个条件正是需要证明的内容。为证明图表的交换性，令$r\colon R \to FR$为一个映射，它为每个 $(x,y) \in R$选择一个满足上述性质的见证 $t \in FR$。那么，对于每个 $i \in \{1,2\}$ 以及所有 $(x,y) \in R$，我们有

$$F\pi_i(r(x,y)) \sqsupseteq c(\pi_i(x,y))$$

如所需。 ◀

引理 5.5 的证明

我们直接验证一般刻画（即“相等性封闭”）。给定 $c\colon C \to FC$ 上的任意关系 $R \subseteq C \times C$，考虑引理 5.4 所提供的 $r\colon R \to \mathcal{M}C$。为验证 (2)，考虑 $i \in I$、$(x,y) \in R$，以及转移

$$x \xrightarrow{i/o} x' \text{ and } y \xrightarrow{i/o'} y'.$$

根据 r的性质，我们有

$$c(x) \sqsubseteq \mathcal{M}\pi_1(r(x,y)) \text{ and } c(y) \sqsubseteq \mathcal{M}\pi_2(r(x,y)).$$

由于 $c(x)(i) = (o,\ x')$ 且 $c(y)(i) = (o',\ y')$，这些不等式意味着 $r(x,\ y)(i) = (o'',\ p)$，$p \in R$，其中

$$o = o'', x' = \pi_1 p, o' = o'', y' = \pi_2 p.$$

换言之，$o = o'' = o'$ 和 $(x,\ y)\ = p \in R$ 如所期望。

对于逆关系方向，设 $R \subseteq C \times C$ 是满足余归纳性质 (2) 的任意关系（不一定是自反的）。接着，我们定义一个 F-余代数结构

$$r\colon \mathsf{Eq} \cup R \to \mathcal{M}(\mathsf{Eq} \cup R)$$

当然，如果 R 本身已经是自反的，那么这直接就是 R 上的一个余代数：

$$r(x,y)(i) = \begin{cases} (o,(x',y')) & \text{if } x \xrightarrow{i/o} x' \text{ and } y \xrightarrow{i/o'} y' \\ (o,(x',x')) & \text{if } x \xrightarrow{i/o} x' \text{ and } c(y)(i) = \mathsf{?} \\ (o,(y',y')) & \text{if } c(x)(i) = \mathsf{?} \text{ and } y \xrightarrow{i/o} y' \\ \mathsf{?} & \text{if } c(x)(i) = \mathsf{?} \text{ and } c(y)(i) = \mathsf{?} \end{cases} \tag{5}$$

为了看出 r 的像确实限制在 $\mathcal{M}(\mathsf{Eq} \cup R)$ 上，请注意，在第一种情况下，根据 R 的性质 (2)，有 $(x',y') \in R$（我们还有 $o = o'$，但目前尚不需要）。在第二种和第三种情况下，我们分别利用 $(x',x') \in \mathsf{Eq} \cup R$ 和 $(y',y') \in \mathsf{Eq} \cup R$。应用引理 5.4 时，我们需要验证以下两个不等式：

$$\begin{array}{ccccc} C & \xleftarrow{\pi_1} & \mathsf{Eq} \cup R & \xrightarrow{\pi_2} & C \\ \downarrow{\scriptstyle c} & \sqsubseteq & \downarrow{\scriptstyle r} & \sqsupseteq & \downarrow{\scriptstyle c} \\ \mathcal{M}C & \xleftarrow{\mathcal{M}\pi_1} & \mathcal{M}(\mathsf{Eq} \cup R) & \xrightarrow{\mathcal{M}\pi_2} & \mathcal{M}C \end{array}$$

第一个不等式

$$c(x) \sqsubseteq \mathcal{M}\pi_1(r(x,y)) \quad \text{for all } (x,y) \in \mathsf{Eq} \cup R$$

直接成立，而在第二个不等式中

$$c(y) \sqsubseteq \mathcal{M}\pi_2(r(x,y)) \quad \text{for all } (x,y) \in \mathsf{Eq} \cup R$$

我们利用这样一个事实：由 R 满足 (2)，$r(x,\ y)(i)$ 的输出与 (5) 中分类讨论第一种情况里的 $c(y)(i)$ 的输出相匹配。◀

命题 5.6 的证明

在 $(\Rightarrow)$ 这个方向上，结论可直接由归纳规则 (2) 得出。在逆关系方向（$\Leftarrow$），考虑具有相容语义映射 $[\![x]\!]$、$[\![y]\!]$ 的状态 $x,\ y \in C$。定义关系

$$R := \{(x',y') \mid \exists w \in I^*\colon \text{both } x \text{ and } y \text{ have runs } x \xrightarrow{w} x' \text{ and } y \xrightarrow{w} y'\}$$

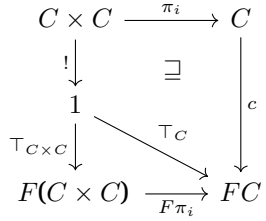
该关系满足性质 (2)，因此 $\mathsf{Eq} \cup R$ 是一个不确定双模拟，且 $(x,\ y) \in R$（因为在 R 的定义中，w 遍历所有单词）。◀

例 5.7 的详细说明

我们证明，对于任意 $c\colon\ C \to FC$，全关系 $R\colon = C \times C$ 是不确定双模拟。定义 $r\colon\ R \to FR$ 为

$$r :\equiv \left(R \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{\top_R} FR\right)$$

对于两个投影 $\pi_i\colon\ R \to C$、 $i \in \{1,\ 2\}$，我们有：



该方块松弛交换，因为 $\top_C$ 是最大元；该三角形交换，因为 $\top$ 是自然的。◀

例5.8 的详细内容

考虑 $\sqsubseteq := \subseteq$ 在 $\mathcal{P}_\mathsf{f}X$ 上。给定一个余代数 $c\colon\ C \to \mathcal{P}_\mathsf{f}C$，我们证明全关系$R := C \times C$是不确定互模拟。定义余代数结构 $r\colon\ C \times C \to \mathcal{P}_\mathsf{f}(C \times C)$ 如下：

$$r(x,y) := \{(x',x) \mid x' \in c(x)\} \cup \{(y,y') \mid y' \in c(y)\}$$

接下来，我们需要验证存在 oplax 余代数态射

$$\begin{array}{ccc} C \times C & \xrightarrow{\pi_i} & C \\ {\scriptstyle r}\downarrow & \supseteq & \downarrow{\scriptstyle c} \\ \mathcal{P}_\mathsf{f}(C \times C) & \xrightarrow[\mathcal{P}_\mathsf{f}\pi_i]{} & \mathcal{P}_\mathsf{f}C \end{array} \qquad \text{for } i \in \{1,2\}.$$

我们验证

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mathsf{f}\pi_1(r(x,y)) &= \mathcal{P}_\mathsf{f}\pi_1(\{(x',x) \mid x' \in c(x)\} \cup \{(y,y') \mid y' \in c(y)\}) \\ &= \{x' \mid x' \in c(x)\} \cup \{y \mid y' \in c(y)\} \\ &= c(x) \cup \{y \mid y' \in c(y)\} \\ &\supseteq c(x) = c(\pi_1(x,y)) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\mathsf{f}\pi_2(r(x,y)) &= \mathcal{P}_\mathsf{f}\pi_2(\{(x',x) \mid x' \in c(x)\} \cup \{(y,y') \mid y' \in c(y)\}) \\ &= \{x \mid x' \in c(x)\} \cup \{y' \mid y' \in c(y)\}) \\ &= \{x \mid x' \in c(x)\} \cup c(y) \\ &\supseteq c(y) = c(\pi_2(x,y)) \end{aligned}$$

如所期望的。 ◀

命题5.11的证明

($\Rightarrow$) 考虑一个 ioco 兼容关系 $R \subseteq C \times C$ 在 $c\colon\ \ C \to \mathcal{S}C$，其组件为 s

$$c = \langle c_?, c_! \rangle, \qquad c_?\colon C \to (I \rightharpoonup C),\ \text{and}\ c_!\colon C \to (O \overset{\text{ne}}{\rightharpoonup} C).$$

然后，我们将所需的映射 $r\colon\ \ R \to \mathcal{S}R$定义为 $r :=\langle r_?,\ \ r_!\rangle$，用于各个组件

$$r_?\colon R \to (I \rightharpoonup R) \text{ and } r_!\colon R \to (O \overset{\text{ne}}{\rightharpoonup} R)$$

$r_?$ 的定义类似于引理 5.5 的证明

$$r_?(x,y)(i) = \begin{cases} (x',y') & \text{if } x \xrightarrow{?i} x' \text{ and } y \xrightarrow{?i} y' \\ (x',x') & \text{else if } x \xrightarrow{?i} x' \\ (y',y') & \text{else if } . \xrightarrow{?i} .' \\ \textbf{?} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$r_!(x,y)(o) = \begin{cases} (x',y') & \text{if } x \xrightarrow{!o} x' \text{ and } y \xrightarrow{!o} y' \\ \textbf{?} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

现在可以直接验证

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\pi_k} & C \\ \downarrow{\scriptstyle r_?} & \sqsupseteq & \downarrow{\scriptstyle c_?} \\ (I \rightharpoonup R) & \xrightarrow{I \rightharpoonup \pi_k} & (I \rightharpoonup C) \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\pi_k} & C \\ \downarrow{\scriptstyle r_!} & \sqsubseteq & \downarrow{\scriptstyle c_!} \\ (I \overset{\rightarrow}{\mathsf{ne}} R) & \xrightarrow{I \rightharpoonup \pi_k} & (I \overset{\rightarrow}{\mathsf{ne}} C) \end{array} \quad \text{for all } k \in \{1,2\}.$$

因此，总体而言，每个投影都是一个 oplax 态射 $\pi_k : (R,r) \ni (C,c)$。
$(\Leftarrow)$ 给定一个余代数 $r\colon R \to \mathcal{S}R$，再次记作 $r = \langle r_?, r_! \rangle$，其投影对于 $k \in \{1,2\}$ 都是 oplax 态射 $\pi_k : (R,r) \sqsupseteq (C,c)$。我们验证 R 是一个（ioco）兼容关系：

1. 与引理 5.5 的证明中一样，关于输入的条件得到满足：每当我们有 $x \xrightarrow{?a} x'$ 和 $y \xrightarrow{?a} y'$ 时，由于 $r\colon R \to \mathsf{S}R$ 同时位于二者之上，$r_?$ 中必定存在一个针对输入 a 的转移，表明 $(x',y') \in R$。2. 对于 $(x,y) \in R$，非空偏映射 $r_!\colon R \to (O \overset{\rightarrow}{\mathsf{ne}} R)$ 为我们提供某个 $o \in O$ 以及 $(x',y') \in R$，使得 $r_!(x,y)(o) = (x',y')$。剩下要证明的是，x 和 y 也都具有针对输出 o 的转移。在这里，我们利用投影是 oplax 态射这一事实，并验证：$\pi_k : (R,r)$ w (C,c)，其中 $k \in \{1,2\} \Longrightarrow \mathsf{S}\pi_k(r(x,y))$ w $c(\pi_k(x,y))$，对于 $k \in \{1,2\}$。$\Longrightarrow (O \overset{\rightarrow}{\mathsf{ne}} \pi_k)(r_!(x,y))$ v $c_!(\pi_k(x,y))$，对于 $k \in \{1,2\}$（根据定义 3.8）。$\Longrightarrow (O \overset{\rightarrow}{\mathsf{ne}} \pi_1)(r_!(x,y))$ v $c_!(x)$，且 $(O \overset{\rightarrow}{\mathsf{ne}} \pi_2)(r_!(x,y))$ v $c_!(y) \Longrightarrow \pi_1(r_!(x,y)(o)) = c_1(x)(o)$，且 $\pi_2(r_!(x,y)(o)) = c_2(x)(o)$（对于上面的 $o \in O$，其中 $r_!(x,y)(o)$ 有定义）$\Longrightarrow x' = c_1(x)(o)$，且 $y' = c_2(x)(o)$ $\Longrightarrow x \xrightarrow{!o} x'$ 和 $y \xrightarrow{!o} y'$，如所需。

引理 5.12 的证明

^1. 单调性：由 F 的单调性立即得出。2. 等式保持：

$$\begin{aligned} \mathsf{Eq}_{FX} &\subseteq \sqsubseteq_{FX} \circ \sqsupseteq_{FX} && \text{（自反性）} \\ &= \sqsubseteq_{FX} \circ \mathsf{Eq}_{FX} \circ \sqsupseteq_{FX} && \text{（引理 4.4）} \\ &= \sqsubseteq_{FX} \circ \hat{F}(\mathsf{Eq}_X) \circ \sqsupseteq_{FX} \end{aligned}$$

3. 逆关系保持：

$$\begin{aligned}(\sqsubseteq_{FC} \circ \hat{F}(R) \circ \sqsupseteq_{FC})^{\mathsf{op}} &= (\sqsupseteq_{FC})^{\mathsf{op}} \circ (\hat{F}(R))^{\mathsf{op}} \circ (\sqsubseteq_{FC})^{\mathsf{op}} \\ &= \sqsubseteq_{FC} \circ \hat{F}(R^{\mathsf{op}}) \circ \sqsupseteq_{FC} && \text{(Lemma 4.4)}\end{aligned}$$

4. 逆像保持：

$$\begin{aligned}&\hat{F}_{\sqsubseteq}((f \times f)^{-1}(R)) \\ &= \sqsubseteq_{FX} \circ \hat{F}((f \times f)^{-1}(R)) \circ \sqsupseteq_{FX} \\ &\subseteq (Ff \times Ff)^{-1}(\sqsubseteq_{FY}) \circ \hat{F}((f \times f)^{-1}(R)) \circ (Ff \times Ff)^{-1}(\sqsupseteq_{FY}) && (Ff \text{ monotone}) \\ &\subseteq (Ff \times Ff)^{-1}(\sqsubseteq_{FY}) \circ (Ff \times Ff)^{-1}(\hat{F}(R)) \circ (Ff \times Ff)^{-1}(\sqsupseteq_{FY}) && \text{(Lemma 4.4)} \\ &\subseteq (Ff \times Ff)^{-1}(\sqsubseteq_{FY} \circ \hat{F}(R) \circ \sqsupseteq_{FY}) \\ &= (Ff \times Ff)^{-1}(\hat{F}_{\sqsubseteq}(R)) \,.\end{aligned}$$

◀

引理 5.13 的证明

对于自反性：

$$\mathsf{Eq}_C \subseteq (c \times c)^{-1}(\mathsf{Eq}_{FC}) \subseteq (c \times c)^{-1}(\hat{F}_{\sqsubseteq}(\mathsf{Eq}_C))$$

根据引理 5.12。

对于对称性：

$$\begin{aligned}R^{\mathsf{op}} &\subseteq ((c \times c)^{-1}(\hat{F}_{\sqsubseteq}(R)))^{\mathsf{op}} && \text{（}R\text{ 一个不确定双模拟，}(\text{–})^{\mathsf{op}}\text{ 单调）} \\ &= (c \times c)^{-1}(\hat{F}_{\sqsubseteq}(R)^{\mathsf{op}}) \\ &= (c \times c)^{-1}(\hat{F}_{\sqsubseteq}(R^{\mathsf{op}}))\end{aligned}$$

由引理 5.12。 ◀

引理 5.14 的证明

设 x，y 在 c 中：$C \to FC$ 由一个不确定双模拟 R 联系，该不确定双模拟由 $r\colon R \to FR$（引理 5.4）见证，并使投影成为 oplax 态射 π_1，π_2：$(R, r) \sqsupseteq (C, c)$。这些投影共同构成一个单射：

$$\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \colon R \longrightarrow C \times C.$$

对于一个 oplax 余代数态射 h：$(C, c) \sqsupseteq (D, d)$，考虑复合映射 $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle \circ (h \times h)$ 的像分解：

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\;e\;} & S \\ {\scriptstyle \langle \pi_1, \pi_2 \rangle}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \langle \pi_1', \pi_2' \rangle} \\ C \times C & \xrightarrow{\;h \times h\;} & D \times D \end{array} \tag{6}$$

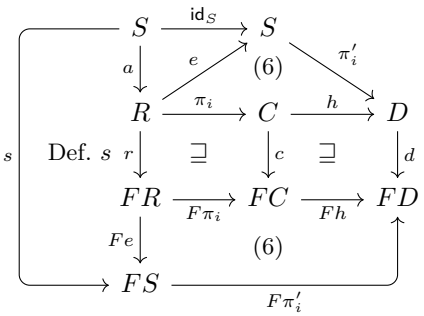
为避免歧义，我们使用 π_1'，π_2' 表示所得像 $S \subseteq D \times D$ 的投影。在集合（以及选择公理）的框架下，令 a：$S \to R$ 为满射 e：$R \to S$的一个分裂，即我们有

$e \circ a = \text{编号}_S.$

现在我们验证该余代数结构

$$s :\equiv \left(S \xrightarrow{a} R \xrightarrow{r} FR \xrightarrow{Fe} FS\right)$$

使 π_i' 成为一个 oplax 余代数态射（$S,\ s$）$\to$（$D,\ d$），对所有 $i \in \{1,\ 2\}$ 都成立。为此，取 e 该图：



for all $i \in \{1, 2\}$.

利用 F_{Pos} 的函子性，我们可以复合这些（松弛）交换的胞腔，从而最终得到：对于所有 $p \in S$，$F\pi_i'(s(p)) \sqsupseteq d(\pi_i'(p))$，如所需。◀

注 5.16 的证明

对于部分 Mealy 函子 $F = \mathcal{M}$，考虑集合的包含映射

$$X = \{x\} \xhookrightarrow{f} Y = \{x, y\}$$

以及定义在 Y 上的关系 $S := \{(x, y)\}$。固定输入 $I = 1$ 和输出 $O = 1$，于是 $\mathcal{M}$ 可简化为

$$\mathcal{M}X \cong \{?\} + X.$$

由此得到以下关系：

$$\begin{aligned}(f \times f)^{-1}(S) &= \emptyset\\ \hat{\mathcal{M}}((f \times f)^{-1}(S)) &= \{(?, ?)\}\\ \hat{\mathcal{M}}_{\sqsubseteq}((f \times f)^{-1}(S)) &= (\sqsubseteq_{\mathcal{M}X} \circ \hat{\mathcal{M}}(f \times f)^{-1}(S) \circ \sqsupseteq_{\mathcal{M}X}) = \{(?, ?)\}\end{aligned}$$

但另一方面，我们有：

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{M}}S &= \{(?, ?), (x, y)\}\\ \hat{\mathcal{M}}_{\sqsubseteq}S &= (\sqsubseteq_{\mathcal{M}Y} \circ \hat{\mathcal{M}}S \circ \sqsupseteq_{\mathcal{M}Y}) = \{(?, ?), (x, y), (?, y), (x, ?)\}\\ (\mathcal{M}f \times \mathcal{M}f)^{-1}(\hat{\mathcal{M}}_{\sqsubseteq}S) &= \{(?, ?), (x, ?)\}\end{aligned}$$

因此，$\hat{}\mathcal{M}\sqsubseteq((f \times f)^{-1}(S)) \not\supseteq (\mathcal{M}f \times \mathcal{M}f)^{-1}(\hat{}\mathcal{M}_{\sqsubseteq}S)$。 ◀

例 5.17 的证明

该验证与引理 5.5 的证明颇为相似。对于 $f\colon\ X \to Y$令 $S \subseteq Y \times Y$为自反的。为验证引理 5.12.4 的逆关系，考虑

$$(t, s) \in (\mathcal{M}f \times \mathcal{M}f)^{-1}(\sqsubseteq_{FY} \circ \hat{\mathcal{M}}(S) \circ \sqsupseteq_{FY})$$

定义 $w \in \mathcal{M}(X \times X)$ 如下：

$$w \quad := \quad i \mapsto \begin{cases} (o_1, (x_1, x_2)) & \text{if } t(i) = (o_1, x_1) \text{ and } s(i) = (o_2, x_2) \\ (o_1, (x_1, x_1)) & \text{if } t(i) = (o_1, x_1) \text{ and } s(i) = ? \\ (o_2, (x_2, x_2)) & \text{if } t(i) = ? \text{ and } s(i) = (o_2, x_2) \\ ? & \text{if } t(i) = ? \text{ and } s(i) = ?. \end{cases}$$

显然，我们有 $t \sqsubseteq \mathcal{M}\pi_1(w)$。由于 (t, s) 通过上述提升相关联，第一种情况下我们有 $o_1 = o_2$，因此也有 $s \sqsubseteq \mathcal{M}\pi_2(w)$。此外，我们有

$$\mathcal{M}(f \times f)(w) \in \mathcal{M}(S) \subseteq \mathcal{M}(Y)$$

这是因为 $(x_1, x_2) \in S$（在第一种情况下），并且因为 S 是自反的（在其他情况下）。利用 $\mathcal{M}$ 保持原像这一性质，我们得到

$$w \in \mathcal{M}((f \times f)^{-1}(S)).$$

ˆ根据 $\mathcal{M}$ 的定义，这意味着

$$(\mathcal{M}\pi_1(w), \mathcal{M}\pi_2(w)) \in \mathcal{M}((f \times f)^{-1}(S))$$

它们是以下命题的见证

$$(t, s) \in \sqsubseteq_{FX} \circ \mathcal{M}((f \times f)^{-1}(S)) \circ \sqsupseteq_{FX} = \hat{\mathcal{M}}_{\sqsubseteq}((f \times f)^{-1}(S)),$$

我们需要证明这一点。 ◀

引理 5.18 的证明

首先注意，对于所有 x，$y \in C$，如果 $d(h(x)) \mathbin{\hat{}} F_{\sqsubseteq}(R)\, d(h(y))$，那么，由于 h 是一个宽松的余代数态射，我们得到 $Fh(c(x)) \sqsubseteq_{FD} d(h(x)) \mathbin{\hat{}} F_{\sqsubseteq}(R)\ d(h(y)) \sqsupseteq_{FD} Fh(c(y))$，因此，根据$\sqsubseteq_{FD}$的传递性，有$Fh(c(x)) \mathbin{\hat{}} F_{\sqsubseteq}(R)\ Fh(c(y))$。也就是说，我们有：

$$(h \times h)^{-1} \circ (d \times d)^{-1}(\hat{F}_{\sqsubseteq}(R)) \subseteq (c \times c)^{-1} \circ (Fh \times Fh)^{-1}(\hat{F}_{\sqsubseteq}(R)). \tag{7}$$

我们按如下方式进行：

$$\begin{aligned} & (h \times h)^{-1}(R) \\ & \subseteq (h \times h)^{-1} \circ (d \times d)^{-1}(\hat{F}_{\sqsubseteq}(R)) && (R \text{ an uncertain bisimulation}) \\ & \subseteq (c \times c)^{-1} \circ (Fh \times Fh)^{-1}(\hat{F}_{\sqsubseteq}(R)) && (\text{by } (7)) \\ & = (c \times c)^{-1} \circ \hat{F}_{\sqsubseteq}((h \times h)^{-1}(R)) && (F_{\mathsf{Pos}} \text{ is stable}) \end{aligned}$$

因此，$(h \times h)^{-1}(R)$ 是一个不确定双模拟。 ◀

推论 5.19 的证明

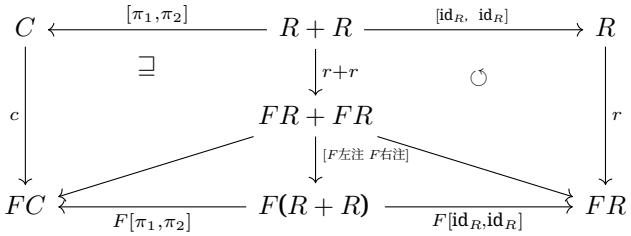
由引理 5.18 以及相等关系是一个双模拟这一事实（引理 5.13）可得 .

◀

命题 5.21 的证明

(⇒) 设 $r\colon\ R \to FR$是一个见证不确定双模拟（根据引理 5.4），且具有 $(x,y) \in R$.
通过图追踪，我们可以直接得到：

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dd, "c"'] & R+R \arrow[l, "{[\pi_1,\pi_2]}"'] \arrow[r, "{[\mathsf{id}_R,\ \mathsf{id}_R]}"] \arrow[d, "r+r"] \arrow[dl, phantom, "\sqsupseteq"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R \arrow[dd, "r"] \\
 & FR+FR \arrow[dl] \arrow[d, "{[F\text{左注}\ F\text{右注}]}"] \arrow[dr] & \\
FC & F(R+R) \arrow[l, "{F[\pi_1,\pi_2]}"] \arrow[r, "{F[\mathsf{id}_R,\mathsf{id}_R]}"'] & FR
\end{tikzcd}$$



所需的 $z \in R$ 只是对 $(x,\ y) \in R$，因为 $R+R$ 将 x 与 z 联系起来，也将 y 与 z 联系起来：

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{inl}(x,y) \xmapsto{[\pi_1,\pi_2]} x & \quad\text{and}\quad & \mathsf{inl}(x,y) \xmapsto{[\mathsf{id}_R,\mathsf{id}_R]} (x,y) = z \\
\mathsf{inr}(x,y) \xmapsto{[\pi_1,\pi_2]} y & & \mathsf{inr}(x,y) \xmapsto{[\mathsf{id}_R,\mathsf{id}_R]} (x,y) = z
\end{array}$$

这还不能证明该结论，因为这里的跨度通常并非联合单射。因此，定义关系 $S \subseteq C \times (R+R)$，作为映射的像分解

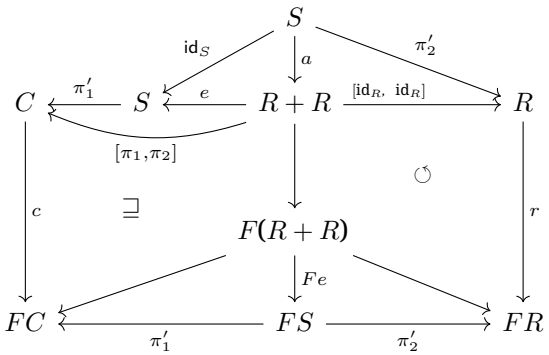
$$R+R \xrightarrow{[\mathsf{id}_R,\mathsf{id}_R]} R$$

也就是说

$$\begin{tikzcd}
R+R \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend left, "{[\mathsf{id}_R,\mathsf{id}_R]}"] & S \arrow[r, "{\langle \pi_1',\pi_2' \rangle}"] & C \times R
\end{tikzcd}$$

选取 e 的一个右逆，也就是某个映射 $a\colon\ S \to R+R$，满足 $e \circ a = \mathrm{id}_S$。这表明 S 的投影 π_1' 和 π_2' 具有所需性质：

$$\begin{tikzcd}
 & & S \arrow[dl, "\mathsf{id}_S"'] \arrow[d, "a"] \arrow[dr, "\pi_2'"] & \\
C \arrow[dd, "c"'] & S \arrow[l, "\pi_1'"'] & R+R \arrow[l, "e"'] \arrow[r, "{[\mathsf{id}_R,\ \mathsf{id}_R]}"] \arrow[dd] \arrow[dl, bend right, "{[\pi_1,\pi_2]}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R \arrow[dd, "r"] \\
 & \sqsupseteq & & \\
 & & F(R+R) \arrow[dl] \arrow[d, "Fe"] \arrow[dr] & \\
FC & & FS \arrow[ll, "\pi_1'"] \arrow[r, "\pi_2'"'] & FR
\end{tikzcd}$$



这里，余代数结构 $R+R$ 以及两个大胞腔的（松）交换性取自前面的图。上面对 z “识别” x 和 y的验证可直接适用于（x,z） $\in S$和（y,z） $\in S$。

(⇐) 考虑一个模拟 $S \subseteq C \times D$，即一个结构 $s\colon\ S \to FS$使投影成为 oplax 态射和 lax 态射：

$$\pi_1\colon (S,s) \mathrel{-\!\!\sqsupseteq\!\!\to} (C,c) \qquad \text{and} \qquad \pi_2\colon (S,s) \mathrel{-\!\!\sqsupseteq\!\!\to} (D,d)$$

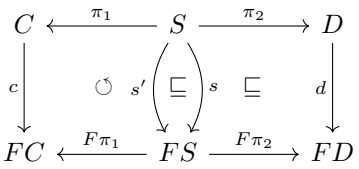
此外，假设存在某个 $z \in D$，使得 $(x, z) \in S$ 且 $(y, z) \in S$。由于 $\pi_2(x, z) = z = \pi_2(y, z)$，推论 5.19 表明 (x, z) 和 (y, z) 在余代数 (S, s) 中是不确定互模拟的（这里，我们利用了 F_{Pos} 是稳定的这一点）。由于 oplax 态射保持不确定互模拟（引理 5.14），我们得到 $x = \pi_1(x, z)$ 和 $y = \pi_2(y, z)$ 在余代数 (C, c) 中是不确定互模拟的。

引理 5.25 的证明

对于每个 $x \in C$，我们都有 $d(h(x)) \sqsubseteq Fh(c(x))$。因此，对于每个 $x \in C$，利用 F 是限制性的这一性质（对于 $s := c(x)$，$t := d(h(x))$），并将所得的 $s' \in FC$ 记为 $c'(x)$。这定义了一个映射 $c' \colon C \to FC$，满足 $c'(x) \sqsubseteq c(x)$（对所有 $x \in C$）且 $Fh(c'(x)) = d(h(x))$。◀

引理 5.26 的证明

由于每个余代数态射也是一个 oplax 态射，方向（$\Leftarrow$）显然。对于另一个方向（$\Rightarrow$），考虑一个结构 $s \colon S \to FS$，使得 $\pi_1 \colon (S, s) \sqsupseteq (C, c)$ 是一个 oplax 态射，且 $\pi_2 \colon (S, s) \sqsubseteq (D, d)$ 是一个 lax 态射。在 π_1 上应用引理 5.25，得到所需的映射 $s' \colon S \to FS$：



◀