arXiv:2303.15287v1 [math.LO] 27 Mar 2023

# 局部 ZFC 中的大型传递模型

Athanassios Tzouvaras

亚里士多德塞萨洛尼基大学数学系，541 24，希腊塞萨洛尼基，电子邮件：tzouvara@math.auth.gr

摘要

本文是对 [7], 的续篇，该文引入并考察了 ZFC 的局部版本 LZFC，并研究了具有类似大基数性质之性质的 ZFC 传递模型，即 Mahlo 模型和 $\Pi^1_1$-不可描述模型。类比之下，我们将这类模型称为“大型模型”，并将相关性质称为“大型模型性质”。本文延续这一思路，进一步考察与更强大基数相似的大型模型性质，即“可初等嵌入”、“可延拓”和“强可延拓”、“临界”和“强临界”、“自临界”和“强自临界”；这些性质的定义涉及初等嵌入。每种大型模型性质 $\phi$ 都会导出一个局部化公理 $Loc^{\phi}$(ZFC)，其断言每个集合都属于一个满足 $\phi$ 的 ZFC 传递模型。理论 LZFC$^{\phi}$ =LZFC+$Loc^{\phi}$(ZFC) 是理论 ZFC+“存在真类的大基数 $\psi$”的局部类比，其中 $\psi$ 是一种大基数性质。若 $sext(x)$ 表示强可扩展性，则可以证明 LZFC$^{sext}$ 可推出幂集公理和$\Sigma_1$-收集公理。为了在 LZFC 上否定 $V = L$，我们将强临界模型的存在性与一种风格迥异的公理——高模型公理（$TMA$）——结合起来。还可以通过 $TMA$ 加上公理 $GC$ 来否定 $V = L$，该公理断言“存在一个最大基数”，尽管目前尚不清楚 $TMA + GC$ 在 LZFC 上是否相容。最后，本文考察了 Vopˇenka 原理（$VP$）及其对 LZFC 的影响。可以证明，LZFC$^{sext} + VP$ 可推出幂集公理和替换公理，即完全恢复 ZFC。对于 LZFC$^{sext}$ 的某些较弱变体，情况也相同。此外，还证明理论 LZFC$^{sext}$+$VP$ 与 ZFC+$VP$ 等同。

数学主题分类（2010）：03E65、03E30、03E20。

关键词：局部 ZFC 理论、大型传递模型、可延拓和强可延拓模型、可嵌入模型、临界和强临界模型、公理 $TMA$ 和 $GC$、Vopˇenka 原理。

# 1 引言

在 [7] 中，我们开启了对一种称为 LZFC 的 ZFC 局部版本的研究。其主要公理记为 $Loc$(ZFC)，意为“每个集合都属于某个 ZFC 的传递模型”。具体而言，命题如下：

$$(Loc(\mathrm{ZFC})) \qquad \forall x \exists y (x \in y \wedge Tr(y) \wedge (y, \in) \models \mathrm{ZFC}). \tag{1}$$

LZFC 是理论 BST+$Loc$(ZFC)，其中 BST（意为“基本集合论”）由以下初等公理构成：空集、外延公理、配对公理、并集公理、笛卡尔积、“$\omega$ 存在”、 $\Delta_0$- 分离。实际上，BST 仅用于形式化 $Loc$(ZFC) 中涉及的“ZFC 模型”这一概念（见 [7]的注 2.6）。

LZFC 缺少幂集公理和替换公理，也缺少 $\in$- 归纳。[1] 这些原则只在传递集合模型中局部成立；作为补偿，这类模型遍布整个宇宙。鉴于这一点，LZFC 将我们的关注点从绝对无限基数转向 ZFC 的传递模型，并将后者视为不可达基数的类比。附加性质或更强的性质可以使模型表现得像更强的大基数。例如，在 [7] 中，我们定义并研究了 Mahlo 模型和 $\Pi^1_1$- 不可描述模型，分别作为 Mahlo 基数和弱紧基数的类比。依此类推，我们将这类模型称为 ZFC 的大型模型，将相应的性质称为大型模型性质。本文将继续探索新型的 ZFC 大型传递模型。首先，我们提出以下命题：

约定。本文中“模型”均指“ZFC 的传递模型”。

当然，并非所有大基数性质都能合理地类比到模型上。例如，以超滤子来表述的性质就是如此。缺少幂集公理时，即便把非主超滤子视为真类，也无法证明它们存在。另一方面，有些以超滤子来表述的性质，在 ZFC 中可以等价地改用初等嵌入来表述；初等嵌入这一概念尤其适合拥有大量局部模型的世界。因此，下一节所讨论的性质主要涉及嵌入的存在性。两者的区别在于，这些嵌入

[1]通常的正则公理在 LZFC 中成立。由于缺少完全分离公理，$\in$-归纳以及与之等价的 $On$-归纳均不存在。

大基数定义中所用的是映射 $j\colon V\to W$（其中$W$是一个内模型），它们是内在的，也就是说，可以在宇宙$V$中定义；而这里讨论的是模型$M$、$N$之间的嵌入 $j\colon M\to N$，它们通常是外在于 $M$和 $N$的。

本文的主要结果见第 3 节（定理 3.10）、第 5 节（定理 5.4 和命题 5.9）以及第 6 节（定理 6.3）。

本文结构如下。第 2 节简要回顾在 [7], 中引入的 $\Pi^1_1$-不可描述模型，并在引理 2.2 中给出对它们的一种更简单的刻画。

第 3 节介绍新的、更强的大型模型性质。每一种这样的性质 $\phi$（$x$）自然对应一个局部化原理 $Loc^\phi$（ZFC），其内容是“每个集合都属于一个满足 $\phi$ 的模型”。这些理论

$$\mathrm{LZFC}^\phi=\mathrm{LZFC}+Loc^\phi(\mathrm{ZFC})$$

以同样的思路扩展 LZFC，正如这些理论

$$\mathrm{ZFC}+\text{“there is a proper class of cardinals }\psi\text{”},$$

其中 $\psi$ 是一种大基数性质，它扩展了 ZFC。

首先，我们考察“（初等）可延拓的”模型，并证明每个这样的模型都是 $\Pi^1_1$-不可描述的。此外，我们定义了“强可延拓的”模型，并证明它们是宇宙 $V$ 的 $\Sigma_2$-初等子模型。特别是，如果 $sext$（$x$）表示强可扩展性这一性质，那么理论 $\mathrm{LZFC}^{sext}$ 可证明幂集公理和 $\Sigma_1$-收集公理。该理论及其变体也在第 6 节中得到广泛应用。

在第 4 节中，我们考察模型之间的初等嵌入 $j\colon M\to N$ 以及它们的“临界模型”。我们还引入了“强临界”等更强的概念，以及“自临界”和“强自临界模型”，并证明了对于各种性质 $\phi$，$\mathrm{ZFC}+Loc^\phi$ (ZFC) 的一些推论。显然，临界模型类似于可测基数。然而，由于这些嵌入 $j\colon M\to N$ 是外部的，它们存在所带来的推论远弱于可测基数存在所带来的推论。例如，仅有强临界模型的存在，似乎并不能在 LZFC 上推出 $V\neq L$。

为此，我们在第 5 节引入高模型公理（$TMA$），其大意是：对于每个序数 $\kappa$，都存在某个序数 $\alpha>\kappa$，使得存在高度任意大的模型，而这些模型不会将 $\alpha$ 塌缩为 $\kappa$。本节的主要结果之一（定理 5.4）表明，理论 $\mathrm{LZFC}+TMA$+“存在一个强临界模型”证明了 $V\neq L$。此外，我们还引入了最大基数公理（$GC$），即断言存在一个最大基数的（集合）。在

存在 $V = L$ 的情况下，这在 LZFC 上等价于 $\neg(TMA)$。因此，LZFC $+TMA+GC$推出 $V \neq L$。然而，LZFC+$TMA+GC$是否一致仍是一个悬而未决的问题。

在第 6 节中，我们考察将 Vop$\check{}$enka 原理（$VP$）加入 LZFC 后的影响。这些影响背后的关键事实，是 P. Vop$\check{}$enka、A. Pultr 和 Z. Hedrl$\acute{}$ın 的一项经典 ZFC 结果（简称 V-P-H）：对于每个集合 $A$，都存在一个关系$R \subset A \times A$，使得（$A$，$R$）没有非平凡自同态。第 6 节的主要结果是定理 6.3：若 $T$ 是一个理论，满足 LZFC $\subseteq T$ 且 $T \vdash$ V-P-H，则 ZFC $\subseteq T + VP$；也就是说，$T$ 完全恢复了 ZFC。LZFC$^{sext}$ 是这类理论的一个例子，此外还有它的一些较弱变体。而且，理论 LZFC$^{sext}+VP$ 与 ZFC+$VP$ 相同。目前尚不清楚仅凭 LZFC+$VP$ 是否就能恢复 ZFC。不过，如果 LZFC+$VP$ 能证明 V-P-H 或$Loc^{sext}$(ZFC)，那么确实可以恢复 ZFC。与此相关，文中还证明了 LZFC+$VP \vdash Loc^{ext}$(ZFC)。

## 2 $\Pi^1_1$ 不可描述模型

让我们回顾一下 [7] $\Pi^1_1$-不可描述性的定义。设 $\mathcal{L} = \{\in\}$，令 $\mathcal{L}_2$ 为添加了二阶变量的 $\mathcal{L}$，并令 $\mathcal{L}_2 \cup \{S, c_i\}$为添加了一元谓词 S(·) 的 $\mathcal{L}_2$，该谓词旨在解释为集合 $U$，并配有足够数量的一阶常元 $c_i$。当 $M$是 ZFC 模型时，常元 $c_i$ 被选作 $M$中元素 $c_i$的名称。 $Def(M)$ 表示由 $\mathcal{L}$的公式定义的 $M$子集的集合。由于 $Def(M)$ 是绝对的，并且可以在任何包含 $M$ 作为成员的 ZFC 模型 $N$ 内部构造，因此可以在 LZFC 中证明它存在。

定义 2.1（LZFC）如果一个 ZFC 模型 $M \models$ 满足以下条件，则称其为 $\Pi^1_1$-不可描述的：对于每个 $U \in Def(M)$ 以及 $\mathcal{L}_2(S, c_i)$ 的每个 $\Pi^1_1$ 语句 $\phi$，若 $(M, \in, U, Def(M)) \models \phi$，则存在一个模型 $N \in M$，使得 $U \cap N \in Def(N)$ 且 $(N, \in, U \cap N, Def(N)) \models \phi$。

实际上，在上述定义中，集合 $U \cap N$ 可以在 $N$ 中由与 $M$ 中的 $U$ 相同的公式定义，这大大简化了问题。事实上，给定一个无参数的一阶公式 $\theta(x, \bar{y})$、一个 ZFC 模型 $M$ 和 $\bar{c} \in M$，令 $\theta[M, \bar{c}]$，或简记为 $\theta[M]$，表示集合 $\{x \in M : M \models \theta(x, \bar{c})\}$。于是我们得到以下关于 $\Pi^1_1$-不可描述性的刻画（不包含在 [7] 中）。

引理 2.2 一个模型 $M \models$ZFC 是 $\Pi^1_1$-不可描述的，当且仅当对于每个不含参数的一阶公式 $\theta(x, \bar{y})$ 以及每个 $\Pi^1_1$ 句子 $\phi$，若 $(M, \in, \theta[M], Def(M)) \models \phi$ 且 $\bar{c} \in M$，则存在一个模型 $N \in M$

使得 $\bar{c} \in N$，$(N, \in, \theta[N], Def(N)) \models \phi$，并且 $\theta(x, \bar{c})$ 在 $M$与 $N$之间是绝对的（即，对于每个 $x \in N$， $M \models \theta(x, \bar{c}) \Leftrightarrow N \models \theta(x, \bar{c})$）。

证明。假设 $M$ 是 $\Pi_1^1$-不可描述的。令 $\theta(x, \bar{y})$ 是一个一阶公式， $\bar{c} \in M$，$U = \theta[M]$，并令 $\phi$是 $\mathcal{L}_2(S, c_i)$ 的一个 $\Pi_1^1$-公式，使得 $(M, \in, U, Def(M)) \models \phi$。令 $\sigma := \forall x(S(x) \leftrightarrow \theta(x, \bar{c}))$。于是 $(M, \in, U, Def(M)) \models \phi \wedge \sigma$，且 $\phi \wedge \sigma$是 $\Pi_1^1$。由 $\Pi_1^1$-不可描述性，存在一个模型 $N \in M$，使得 $U \cap N \in Def(N)$ 且 $(N, \in, U \cap N, Def(N)) \models \phi \wedge \sigma$。但是 $(N, \in, U \cap N, Def(N)) \models \sigma$ 意味着 $U \cap N = \{x : N \models \theta(x, \bar{c})\} = \theta[N]$，因此 $(N, \in, \theta[N], Def(N)) \models \phi$。此外，由于 $\theta[N] = \theta[M] \cap N$，可知对每个 $x \in N$，$M \models \theta(x, \bar{c}) \Leftrightarrow N \models \theta(x, \bar{c})$，即 $\theta(x, \bar{c})$ 在 $M$ 与 $N$ 之间是绝对的。

反过来，假设 $M$ 是一个满足引理假设的模型。我们证明 $M$是 $\Pi_1^1$-不可描述的。设 $U \in Def(M)$，并令 $\phi$为一个 $\Pi_1^1$句子，使得 $(M, \in, U, Def(M)) \models \phi$。令$U = \theta[M]$ ，其中某个 $\theta$。根据我们的假设，存在一个模型 $N \in M$，使得 $(N, \in, \theta[N], Def(N)) \models \phi$，且 $\theta$在 $M$与$N$之间是绝对的。由最后一个条件可知 $\theta[N] = \theta[M] \cap N$。因此 $(N, \in, U \cap N, Def(N)) \models \phi$。所以 $M$是 $\Pi_1^1$-不可描述的。⊣

文献 [7, 的命题 5.5] 证明了，对于每个 ZFC 模型 $M$， $\Pi_1^1$-不可描述性蕴含$\alpha$-Mahlo 性。 $\alpha$-Mahlo 性是我们形式语言 $\mathcal{L} = \{\in\}$ 中的一个绝对（即 $\Delta_1$）性质（见 [7]）。 $\Pi_1^1$-不可描述性这一性质也如此。它可以用以下绝对公式 $\pi_1^1 ind(x)$形式化：

$$\pi_1^1 ind(x) := [x \models \text{ZFC} \wedge (\forall y \in Def(x))(\forall \phi \in \Pi_1^1)(\exists z \in x)$$

$(z \models \text{ZFC} \wedge (x, \in, y, Def(x)) \models \phi \Rightarrow y \cap z \in Def(z) \wedge (z, \in, y \cap z, Def(z)) \models \phi)]$,

其中， $\Pi_1^1$ 是 $\mathcal{L}_2(S, c_i)$的 $\Pi_1^1$公式（编码）的集合。于是，对于任意满足 $M \in N$的模型 $M$、 $N$，“ $V$中的$M$是 $\Pi_1^1$-不可描述的”当且仅当 $N \models \pi_1^1 ind(M)$。

# 3 可延拓模型与强可延拓模型

本节介绍一些强于$\Pi_1^1$-不可描述性的 ZFC 模型性质。

定义 3.1 若存在一个模型 $N$，使得 $M \in N$ 且 $M \prec N$，则称模型 $M$ 为初等可扩张的，或简称可延拓的。

下一个引理表明，在上述定义中，条件“$M \in N$”是多余的。这是以下事实的结果：对于

ZFC 模型， $M \prec N$ 意味着 $N$ 也是 $M$的末端扩张；也就是说， $N$ 的序数扩展了 $M$的序数。细节留给读者。

引理 3.2 $M$ 可延拓，当且仅当存在一个模型 $N$ 使得 $M \prec N$。事实上，$M \prec N \Rightarrow M \in N$。

以下关于类 $On$ 的归纳方案不属于 LZFC。[2]

$$(\mathrm{Found}_{On}) \qquad \exists\alpha \in On\ \phi(\alpha) \rightarrow \exists\alpha \in On[\phi(\alpha) \wedge \forall\beta < \alpha \neg\phi(\beta)]$$

命题 3.3 (i) 在 LZFC 中：如果 $M$ 可延拓，那么 $M$ 是 $\Pi^1_1$-不可描述的。

(ii) 在 LZFC + $\mathrm{Found}_{On}$ 中：(i) 的逆命题不成立。也就是说，如果存在一个 $\Pi^1_1$-不可描述模型，那么就存在一个不可延拓的模型。

证明。(i) 假设 $M$ 不是 $\Pi^1_1$-不可描述的。那么，根据引理 2.2，存在一个 $\Pi^1_1$ 公式 $\phi$ 和一个一阶公式 $\theta$ ，使得 $(M, \in, \theta[M], Def(M)) \models \phi$；并且对于每个满足 $x \in M$ 的 ZFC 模型 $x \models$，要么 $\theta$ 在 $M$ 与 $x$之间不是绝对的，要么 $(x, \in, \theta[x], Def(x)) \not\models \phi$。这意味着 $(M, \in, \theta[M], Def(M)) \models \phi$并且 $M \models \psi_{\phi,\theta}$，其中 $\psi_{\phi,\theta}$ 是该一阶公式

$$\psi_{\phi,\theta} := \forall x[x \models \mathrm{ZFC} \wedge (\forall y \in x)(\theta^x(y) \leftrightarrow \theta(y)) \rightarrow (x, \in, \theta[x], Def(x)) \not\models \phi].$$

假设 $M$ 是可延拓的，即存在 $N$ 使得 $M \in N$ 和$M \prec N$。那么 $N \models \psi_{\phi,\theta}$，即，

$$N \models \forall x[x \models \mathrm{ZFC} \wedge (\forall y \in x)(\theta^x(y) \leftrightarrow \theta(y)) \rightarrow (x, \in, \theta[x], Def(x)) \not\models \phi]. \tag{2}$$

但是 $M \in N$, $M \models$ZFC，$(\forall y \in M)(\theta^M(y) \leftrightarrow \theta^N(y))$，因为 $M \prec N$，且 $(M, \in, \theta[M], Def(M)) \models \phi$。这与 (2) 矛盾，从而证明了该断言。

(ii) 假设（在 LZFC + $\mathrm{Found}_{On}$ 中）存在 $\Pi^1_1$-不可描述模型。根据 $\mathrm{Found}_{On}$ ，存在一个高度最小的此类模型 $M$ 。显然， $M$ 不可能包含 $\Pi^1_1$-不可描述模型。令 $\pi^1_1 ind(x)$ 为 $\Pi^1_1$-不可描述性质的形式化。如上所述，$\pi^1_1 ind(x)$ 是绝对的。那么 $M$ 不是可延拓的。假设

[2]参见引理 2.11], ，其中证明了 $\mathrm{Found}_{On}$ 等价于 $\in$-归纳方案

$$(\text{找到}^*) \qquad \exists x\phi(x) \rightarrow \exists x[\phi(x) \wedge \forall y \in x \neg\phi(y)]$$

在 LZFC 上。

反之。那么存在一个模型 $N$ 使得 $M \in N$ 并且$M \prec N$。由于 $\pi^1_1 ind(M)$ 和 $\pi^1_1 ind(x)$ 是绝对的，因此可得$N \models \pi^1_1 ind(M)$。所以 $N \models \exists x(x \models \mathrm{ZFC} \wedge \pi^1_1 ind(x))$。但这样一来$M \models \exists x(x \models \mathrm{ZFC} \wedge \pi^1_1 ind(x))$，这与 $M$ 不包含 $\Pi^1_1$-不可描述模型这一事实矛盾。⊣

作为 3.3 (ii) 的直接推广，我们有以下命题：

命题 3.4 (LZFC + $\mathrm{Found}_{On}$) 若 $\phi(x)$ 是关于模型的绝对性质，且 $M$ 是高度最小的模型，满足 $\phi(M)$，则$M$ 不可延拓。

与 Mahlo 性和 $\Pi^1_1$-不可描述性不同，后两者是绝对性质，而可延拓性的形式化由以下谓词给出：

$$ext(x) := [(x, \in) \models \mathrm{ZFC} \wedge (\exists y)((x, \in) \prec (y, \in))].$$

类比于大基数性质，我们可以将诸如 $ext(x)$、 $mahlo(x)$、 $\pi^1_1 in(x)$ 这样的性质（以及之后将引入的性质）称为大型模型性质。类似地，我们可以将存在性公理 $\exists x\ ext(x)$、 $\exists x\ mahlo(x)$ 等称为大型模型公理。此外，对每个大型模型性质 $\phi$，令

$$Loc^{\phi}(\mathrm{ZFC}) := \forall x \exists y(x \in y \wedge y \text{ transitive} \wedge \phi(y) \wedge y \models \mathrm{ZFC}).$$

也就是说， $Loc^{\phi}(\mathrm{ZFC})$ 表示每个集合 $x$ 都属于一个满足大型模型性质 $\phi$ 的模型。因此，我们将 $Loc^{\phi}(\mathrm{ZFC})$ 称为强局部化公理，因为它们强化了 $Loc(\mathrm{ZFC})$。此外，对于上述任意此类 $\phi$，我们用 $\mathrm{LZFC}^{\phi}$ 表示这样一个理论：将公理 $Loc(\mathrm{ZFC})$ 替换为 $Loc^{\phi}(\mathrm{ZFC})$ 后，由 LZFC 得到的理论。也就是说：

$$\mathrm{LZFC}^{\phi} := \mathrm{LZFC} + Loc^{\phi}(\mathrm{ZFC}) = \mathrm{BST} + Loc^{\phi}(\mathrm{ZFC}).$$

理论 $\mathrm{LZFC}^{\phi}$ 是 LZFC 的扩展，与形如以下形式的 ZFC 扩展颇为类似：

$$\mathrm{ZFC} + \text{“there is a proper class of cardinals } \psi\text{”},$$

对于某个大基数性质 $\psi$。在本节后文以及第 6 节中，我们将主要在理论 $\mathrm{LZFC}^{sext}$中工作，其中 $sext(x)$ 是强可扩展性这一性质（见下文定义 3.8）及其某些变体。

ZFC 的下一个结果是 [6, 定理 8.1] 的一个略微推广版本，将用于第 5 节和第 6 节。证明与标准证明类似，留给读者完成。

引理 3.5 (ZFC) 若存在序数 $\alpha < \beta$ 使得 $V_\alpha \prec V_\beta$，那么 $V_\alpha, V_\beta$ 是 ZFC 模型。更一般地，若 $\alpha > \omega$，$(V_\alpha, \in) \prec (A, \in)$ 且 $V_\alpha \in A$，对于某个传递集合 $A$，则 $V_\alpha \models$ ZFC。

对于每个公理化集合论 $T$（通常为 $T \supseteq$ZFC），令 $Loc(T)$ 表示关于 $T$ 的相应局部化原理，即:

$$Loc(T) := \forall x \exists y (x \in y \ \wedge \ Tr(y) \ \wedge \ (y, \in) \models T).$$

我们在 [7] 中已经看到，每个 Mahlo ZFC 模型都满足$Loc_n$(ZFC)，对每个 $n \in \omega$皆如此；这些性质通过以下子句归纳定义： $Loc_0$(ZFC) $= Loc$(ZFC) 且 $Loc_{n+1}$(ZFC) $=Loc$(ZFC$+ Loc_n$(ZFC))。更一般地，在 [7] 中，我们考察了对 $Loc$(ZFC) 的强化，其形式为 $Loc$(ZFC$+\phi$)，其中 $\phi$ 是添加到 ZFC 中的新公理。

句子 $Loc_n$(ZFC) 用来估量 Mahlo 模型相较于普通 ZFC 模型强多少。问题是，针对 $\Pi^1_1$-不可描述模型和初等可延拓模型，是否也存在类似的估量。我们将在下文看到，答案是肯定的。

我们已经看到，Mahlo 性、 $\Pi^1_1$-不可描述性和初等可延拓性依次增强（对于后两者，在 LZFC$+Found_{On}$ 中讨论时如此）。但一个自然的问题是：一种类中的模型在何种意义上比另一种类中的模型在内部更强？例如，$\Pi^1_1$-不可描述模型满足哪些 Mahlo 模型不满足的性质？接下来的两个引理为这种内部的递增强度提供了合理的依据。回想一下， $mahlo_\alpha(x)$ 是 [7] 中定义的性质 $mahlo(\alpha, x)$ 的缩写。

引理 3.6 若 $M$ 是 $\Pi^1_1$-不可描述的，则对所有 $\alpha \in On \cap M$，$M \models Loc^{mahlo_\alpha}$(ZFC)。

证明。设 $M$ 是 $\Pi^1_1$-不可描述的。取定某个 $a \in M$，并令 $\alpha \in On^M$。我们需要证明集合 $X = \{x \in M : a \in x \wedge x \models$ ZFC $\wedge mahlo(\alpha, x)\} \neq \emptyset$。令 $Y = \{x \in M : a \in x\}$。显然， $Y$ 是 $M$ 的闭无界集。根据 [7], 的命题 5.5，由于 $M$ 是 $\Pi^1_1$- 不可描述的， $M$ 是 $(\alpha+1)$-Mahlo。这意味着集合 $Z = \{x \in M : x \models$ ZFC$\wedge mahlo(\alpha, x)\}$ 在 $M$ 中是驻集。因此 $Z \cap Y \neq \emptyset$。但 $Z \cap Y = X$，所以 $X \neq \emptyset$。$\dashv$

引理 3.7 如果 $M$ 是可延拓的，那么 $M \models Loc^{\pi^1_1 ind}$(ZFC)。

证明。设 $M$ 是可延拓的，并设 $a \in M$。我们必须证明$X = \{x \in M : a \in x \wedge x \models$ZFC$\wedge \pi^1_1 ind(x)\} \neq \emptyset$。假设 $X = \emptyset$。由于 $\pi^1_1 ind(x)$ 和“$x \models$ ZFC”是绝对的，这等价于

$$M \models \forall x (a \in x \wedge x \models \text{ZFC} \rightarrow \neg \pi^1_1 ind(x)). \tag{3}$$

根据我们的假设，存在一个模型 $N$ 使得 $M \in M$ 和 $M \prec N$。于是，根据（3），

$$N \models \forall x(a \in x \wedge x \models \text{ZFC} \rightarrow \neg\pi_1^1 ind(x)). \tag{4}$$

但根据命题 3.3， $M$ 是 $\Pi_1^1$-不可描述的，即 $\pi_1^1 ind(M)$，后一个性质是绝对的。因此 $a \in M$、 $M \in N$、 $M \models$ZFC 且$N \models \pi_1^1 ind(M)$，这与 (4) 矛盾。
⊣

下面这种延拓性的强化，最终证明是一种有趣且强大的性质。

定义 3.8 若对于每个 $x$ ，都存在一个模型 $N$ 使得 $x \in N$ 且 $M \prec N$，则称模型 $M$ 是强可延拓的。

形式上，强可扩展性这一性质可写为:

$$sext(x) := [(x, \in) \models \text{ZFC} \wedge (\forall y)(\exists z)(y \in z \wedge (x, \in) \prec (z, \in))].$$

给定一个模型 $M$ ，记 $M \prec_{\Sigma_n} V$ ，如果每个 $\Sigma_n$ 句子 $\phi$（其参数来自 $M$）对于 $M$都是绝对的，即 $M \models \phi$ 当且仅当 $V \models \phi$。 [一个$\Sigma_n$ 公式是形如$(\exists \overline{x}_1)(\forall \overline{x}_2)\cdots(Q\overline{x}_n)\psi$的公式，其中 $\psi$ 有界，且 $\overline{x}_i$ 为变量组。 $\Pi_n$ 公式的情形类似。] 显然，$M \prec_{\Sigma_n} V$ 当且仅当 $M \prec_{\Pi_n} V$。

强可延拓模型的重要特征如下。

引理 3.9 设 $M$ 是强可延拓的。那么:

(i) $M \prec_{\Sigma_1} V$。因此，在 LZFC$^{sext}$ 中，每个集合都属于某个模型 $M \prec_{\Sigma_1} V$。

(ii) 实际上 $M \prec_{\Sigma_2} V$。

证明。固定一个强可延拓模型 $M$。

(i) 设 $\phi = (\exists \overline{x})\psi(\overline{x}, \overline{c})$ 是一个 $\Sigma_1$ 句子，其中 $\psi$ 有界且$\overline{c} \in M$。那么显然， $M \models (\exists \overline{x})\psi(\overline{x}, \overline{c})$ 蕴含 $V \models (\exists \overline{x})\psi(\overline{x}, \overline{c})$。反过来，假设 $V \models (\exists \overline{x})\psi(\overline{x}, \overline{c})$，并令 $V \models \psi(\overline{a}, \overline{c})$，其中某个元组为$\overline{a}$。由强可延拓性，存在一个模型 $N$ ，使得 $M \prec N$ 且$\overline{a} \in N$。由 $\psi$ 的绝对性， $N \models \psi(\overline{a}, \overline{c})$，这意味着$N \models (\exists \overline{x})\psi(\overline{x}, \overline{c})$。由于 $M \prec N$，可得 $M \models (\exists \overline{x})\psi(\overline{x}, \overline{c})$。[3]

(ii) 设 $\phi = (\exists \overline{x})(\forall \overline{y})\psi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})$ 是一个带有 $\psi$ 有界的 $\Sigma_2$ 句子，且$\overline{c} \in M$，并设 $M \models (\exists \overline{x})(\forall \overline{y})\psi(\overline{x}, \overline{y}, \overline{c})$。那么存在某个 $\overline{a} \in M$，使得 $M \models (\forall \overline{y})\psi(\overline{a}, \overline{y}, \overline{c})$。句子 $(\forall \overline{y})\psi(\overline{a}, \overline{y}, \overline{c})$ 是 $\Pi_1$，因此由上面的 (i)， $V \models$

[3]实际上，该条款的证明并不需要强可扩展性条件的全部强度。容易看出，对于 $M$，以下较弱的条件（称为“$\Sigma_1$-强可扩展性”）就足够了：对于每个 $x$ ，存在一个模型 $N$ ，使得 $x \in N$ 和 $M \prec_{\Sigma_1} N$。关于这一性质的更多内容，请参见第 6 节。

$(\forall \overline{y})\psi(\overline{a},\overline{y},\overline{c})$。因此，$V \models (\exists \overline{x})(\forall \overline{y})\psi(\overline{x},\overline{y},\overline{c})$。反过来，假设$V \models (\exists \overline{x})(\forall \overline{y})\psi(\overline{x},\overline{y},\overline{c})$。那么对于某个 $\overline{a}$，有 $V \models (\forall \overline{y})\psi(\overline{a},\overline{y},\overline{c})$。由 $M$ 的强可扩展性，存在一个模型 $N$，使得 $\overline{a} \in N$ 且$M \prec N$。由于 $N$ 是 $V$ 的传递子模型，$(\forall \overline{y})\psi(\overline{a},\overline{y},\overline{c})$ 是 $\Pi_1$，而后者在 $V$ 中成立，由此可得 $N \models (\forall \overline{y})\psi(\overline{a},\overline{y},\overline{c})$。因此，$N \models (\exists \overline{x})(\forall \overline{y})\psi(\overline{x},\overline{y},\overline{c})$。由此可得 $M \models (\exists \overline{x})(\forall \overline{y})\psi(\overline{x},\overline{y},\overline{c})$。⊣

已经有 $Loc^{sext}$(ZFC) 部分恢复了 ZFC。也就是说：

定理 3.10 (i) LZFC$^{sext}$ ⊢幂集公理。

(ii) LZFC$^{sext}$ ⊢ $\Sigma_1$-收集公理。

证明。(i) 设 $a$ 是一个集合，且 $M$ 是一个强可延拓模型，使得 $a \in M$。设 $b = \mathcal{P}^M(a)$ 是 $M$ 中 $a$ 的幂集公理，即 $M \models b = \mathcal{P}(a)$。谓词 $y = \mathcal{P}(x)$ 是 $\Pi_1$，因此由 3.9 (i)，$V \models b = \mathcal{P}(a)$，所以 $b$ 是 $a$ 的绝对幂集。

(ii) 设 $\phi(x,y,\overline{c}) = (\exists \overline{z})\psi(x,y,\overline{z},\overline{c})$ 是一个带有参数 $\overline{c}$ 的公式，设 $a$ 是一个集合，且 $(\forall x \in a)(\exists y)\phi(x,y,\overline{c})$ 为真（在 $V$ 中）。我们必须证明存在一个集合 $b$，使得 $(\forall x \in a)(\exists y \in b)\phi(x,y,\overline{c})$。在 LZFC$^{sext}$ 中，我们可以选取一个模型 $M$，使得 $a,\overline{c} \in M$，且 $M$ 是强可延拓的。由 3.9 (ii)，$M \prec_{\Pi_2} V$，并且根据假设$V \models (\forall x \in a)(\exists y)\phi(x,y,\overline{c})$，或者

$$V \models (\forall x \in a)(\exists y)(\exists \overline{z})\psi(x,y,\overline{z},\overline{c}).$$

最后一个公式是 $\Pi_2$，因此 $M \models (\forall x \in a)(\exists y)(\exists \overline{z})\psi(x,y,\overline{z},\overline{c})$。由于 $M$ 满足收集公理，存在一个 $b \in M$ 使得

$$M \models (\forall x \in a)(\exists y \in b)(\exists \overline{z})\psi(x,y,\overline{z},\overline{c}).$$

再次由 $M \prec_{\Pi_2} V$，

$$V \models (\forall x \in a)(\exists y \in b)(\exists \overline{z})\psi(x,y,\overline{z},\overline{c}),$$

即 $V \models (\forall x \in a)(\exists y \in b)\phi(x,y,\overline{c})$，正如所需。 ⊣

此外，对于每个 $\alpha \in On$，无需沿着 $On$ 进行归纳（即 Found$_{On}$），便可在 LZFC$^{sext}$ 中定义集合 $V_\alpha = \mathcal{P}^\alpha(\emptyset)$。而且，与 ZFC 的情形一样，$V_\alpha$ 是 $V$ 的集合近似，并包含所有强可延拓模型。

命题 3.11 在 LZFC$^{sext}$ 中，以下结论成立：

(i) 给定任意特定的序数 $\alpha$，对于所有 $\beta \leq \alpha$，都存在具有通常 ZFC 性质的传递集 $V_\beta = \mathcal{P}^\beta(\emptyset)$，即 $V_{\beta+1} = \mathcal{P}(V_\beta)$；对于极限 $\beta$，则有 $V_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} V_\gamma$。此外，对于每个满足 $\alpha \in M$ 的强可延拓模型 $M$，都有 $M_\beta := V_\beta^M = V_\beta$，对所有 $\beta \leq \alpha$ 均成立。

(ii) 谓词"$x = V_\alpha$"是可定义的，因此类 $\{V_\alpha : \alpha \in On\}$ 也是可定义的。(iii) 对于每个强可延拓的 $M$，都存在 $\alpha$ 使得 $M = V_\alpha$。(iv) $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$。此外，存在任意大的 $\alpha$ 使得 $V_\alpha \prec_{\Sigma_2} V$。

证明。（i）给定一个序数 $\alpha$，由 $Loc^{sext}$（ZFC），取一个强可延拓的 $M$，使得 $\alpha \in M$。根据定理 3.10（i）以及在 $M$内部进行的归纳，

$$M_\beta = V_\beta^M = (\mathcal{P}^\beta(\emptyset))^M = \mathcal{P}^\beta(\emptyset) = V_\beta$$

对所有 $\beta \leq \alpha$均成立。

（ii） $V_\alpha$ 可以在任何包含 $\alpha$的强可延拓模型中，通过在 $\alpha$ 之前进行归纳来定义；由于定理 3.10（i），这些步骤都是绝对的。具体而言，"$x = V_\alpha$"写作:

$$(\exists f)[dom(f) = \alpha + 1 \ \wedge \ (\forall \beta < \alpha)(f(\beta + 1) = \mathcal{P}(f(\beta)) \wedge$$

$$(\forall \beta \leq \alpha)(\beta \text{ limit } \Rightarrow f(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} f(\gamma)) \ \wedge \ f(\alpha) = x].$$

（iii）设 $M$ 是强可延拓的。我们可以证明 $\alpha = \min\{\beta : \beta \notin M\}$（即 $M$的高度）存在，而无需调用 Found$_{On}$。事实上，给定 $M$，只需由 $Loc$（ZFC）取一个模型 $N$，使得 $M \in N$。那么显然， $\alpha = \min\{\beta : \beta \notin M\}$在 $N$中存在。由上面的（i）可知， $V_\alpha$也存在，并且对每个 $\beta \in M$，都有 $V_\beta = M_\beta$，因此

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta = M.$$

（iv）给定 $x$，由 $Loc^{sext}$（ZFC）可得存在一个强可延拓的 $M$，使得 $x \in M$。但由上面的（iii），对某个 $\alpha$有 $M = V_\alpha$，因此$\bigcup_\alpha V_\alpha = V$。此外，由 3.9（ii），对每个强可延拓的 $V_\alpha$，都有 $V_\alpha \prec_{\Sigma_2} V$。⊣

$Loc^{sext}$(ZFC) 的一致性强度是什么？令人惊讶的是，它并不高于强不可达基数的存在性。具体而言，有如下结论。

命题 3.12 (ZFC) 如果 $\kappa$ 是强不可达基数，那么 $V_\kappa \models Loc^{sext}$(ZFC)。

证明。众所周知，若 $\kappa$ 是强不可达基数，则集合 $C = \{\alpha < \kappa : (V_\alpha, \in) \prec (V_\kappa, \in)\}$ 是闭无界的（见 [4, p.171]）。给定 $\alpha < \beta$ 属于 $C$，我们有 $V_\alpha \prec V_\kappa$ 和 $V_\beta \prec V_\kappa$，因此$V_\alpha \prec V_\beta$。由于 $C$ 在 $\kappa$中共尾，立刻可得，对每个$\alpha \in C$， $V_\alpha$ 在 $V_\kappa$中都是强可延拓的。此外，每个 $x \in V_\kappa$ 都属于$V_\alpha$，其中某个 $\alpha \in C$，所以 $V_\kappa \models Loc^{sext}$(ZFC)。⊣

另一个问题：对于 ZFC 的哪些基数 $\kappa$， $V_\kappa$ 是强可延拓的？注意，在 3. 的证明中，若12 $\kappa$ 是宇宙中最小的强不可达基数，那么对每个 $\alpha \in C$， $V_\alpha$ 都是强可延拓模型，而且 $V_\alpha \prec V_\kappa$，但 $\alpha$ 并非强不可达。因此，在 ZFC 的语境下， $V_\kappa$的强可延拓性甚至不要求 $\kappa$是不可达基数。不过，如果我们需要关于 $\kappa$ 的充分条件，以便 $V_\kappa$ 是强可延拓的，就必须提升到强基数。回顾如下结果。

定义 3.13（ZFC）基数 $\kappa$ 是 $\alpha$-强的，当且仅当存在一个初等嵌入 $j$：$V \to W$ 使得 $\kappa$ =crit($j$)，$j(\kappa) > \alpha$ and$V_{\kappa+\alpha} \subseteq W$。如果对每个 $\alpha$， $\kappa$ 都是 $\alpha$-强的，那么 $\kappa$ 是强的。

引理 3.14（ZFC）如果 $\kappa$ 是强基数，那么 $V_\kappa$ 是强可延拓模型。

证明。设 $\kappa$ 是强的，且 $x$ 是一个集合。我们需要找到一个模型 $M$，使得 $V_\kappa \prec M$ 且 $x \in M$。取 $\alpha > \kappa$ 使得 $x \in V_\alpha$ 且$\kappa + \alpha = \alpha$。由于 $\kappa$ 是 $\alpha$-强的，存在 $j: V \to W$，满足 crit($j$) $= \kappa$,$j(\kappa) > \alpha$ 且 $V_\alpha = V_{\kappa+\alpha} \subseteq W$。因此，对每个 $\beta \leq \alpha$，都有 $V_\beta = W_\beta$。由于 crit($j$) $= \kappa$， $V_\kappa \prec j(V_\kappa) = W_{j(\kappa)}$。此外 $V_\alpha = W_\alpha \subset W_{j(\kappa)}$，因此$x \in W_{j(\kappa)}$。所以对于 $M = W_{j(\kappa)}$， $M$ 符合要求。⊣

# 4 初等嵌入与临界模型

## 4.1 初等嵌入

本节将借助初等嵌入，定义具有某些大基数类似性质的 ZFC 模型。设 $M, N$ 是 ZFC 模型，且 $j: M \to N$ 是一个初等嵌入。若 $j$ 非平凡，则存在一个关于 $j$ 的临界序数 crit($j$)，也就是说，存在最小序数 $\alpha \in M$，使得 $j(\alpha) > \alpha$。此外，我们可以看到，crit($j$) 在 $M$ 中是不可达基数。（这一点的证明基本见于[2]。）更一般地，若集合 $x$ 满足 $j \restriction x = id$，而 $j(x) \neq x$，则称它对 $j$ 是临界的。令 Crit($j$) 表示 $j$ 的临界集。在选择公理 $Loc$（ZFC）的框架下，给定 $M$、$N$ 和 $j$ :$M \to N$，Crit($j$) 是 LZFC 中的一个集合，因为它可以在每个满足 $\{M, N, j\} \subset K$ 的 ZFC 模型 $K$ 中（绝对地）定义。以下两个引理陈述了任意 ZFC 模型之间初等嵌入的一些基本事实。这些证明大多是标准的，散见于 [4], [5], 等文献中（通常以习题的形式出现）。为方便读者，我们在此概述其中一些证明。

引理 4.1（LZFC）设 $j: M \to N$ 是 ZFC 模型之间的非平凡初等嵌入。那么：

(i) crit($j$) 存在。

（ii）如果 $\kappa = \text{crit}(j)$，那么 $j\restriction M_\kappa = id$ （其中按通常记号 $M_\kappa = V_\kappa^M$）。因此 $M_\kappa \in \text{Crit}(j)$。特别地，对于每个 $A \in M_\kappa$， $\mathcal{P}(A)^M = \mathcal{P}(A)^N$。反之，如果 $K \in \text{Crit}(j)$ 是一个模型，那么 $ht(K) = \kappa$。

（iii）如果 $\kappa = \text{crit}(j)$，那么 $M_\kappa$ 是 $M$ 的最大传递临界集；事实上，如果 $x$ 是 $M$ 的传递集合且 $j\restriction x = id$，那么 $x \subseteq M_\kappa$。

（iv）如果 $\kappa = \text{crit}(j)$，那么 $\mathcal{P}(\kappa)^M \subseteq \mathcal{P}(\kappa)^N$。

（v）如果 $\kappa = \text{crit}(j)$，那么 $M \models$ “$\kappa$ 是强不可达的”。因此 $M_\kappa \models$ ZFC。如果再加上 $N = M$，那么对于每个 $n \in \omega$， $M \models$ “$\kappa$ 是 $n$-不可析的”。[4]

（vi）对于每个一阶结构 $A \in M$， $j\restriction A : A \to j(A)$ 是一个初等嵌入。如果再加上 $A \in \text{Crit}(j)$，那么 $A \prec j(A)$。特别地，对于临界 $\kappa$， $M_\kappa \prec j(M_\kappa)$。

证明。（i）对于 ZFC，证明 $j$ 有临界点的内容见 [5, 命题 5.1 (b)]，该处讨论的是 $M \models$ 选择公理的情形。要在 LZFC 中证明这一点，给定 $M, N, j$，只需借助 *Loc*(ZFC) 选取一个 $K \models$ ZFC 模型，使得$M, N, j \in K$，并在 $K$中进行讨论。

条款 (ii)–(iv) 留给读者。

(v) 设 $\kappa = \text{crit}(j)$。在 [2, 第 338] 页中，证明了（在 ZFC 中），如果 $V$ 是一个 ZFC 模型，且 $j : V \to V$是一个初等嵌入（通常是相对于 $V$的外部嵌入），并且 crit($j$) $= \kappa$，那么 $\kappa$ 是不可达基数。实际上，同一证明也适用于一般的初等嵌入 $j : M \to N$。具体来说，设 $j : M \to N$ 是一个非平凡初等嵌入，并设 $\kappa = \text{crit}(j)$。我们首先证明 $M \models$ “$\kappa$是正则的”。显然， $\kappa$是一个极限序数。反设存在 $\alpha < \kappa$ 和一个共尾的 $f : \alpha \to \kappa$, $f \in M$。那么 $dom(f) = \alpha$，因此 $dom(j(f)) = j(\alpha) = \alpha$。此外，对于每个 $\beta < \alpha$，若 $f(\beta) = \gamma$，则 $\gamma < \kappa$，所以$j(\beta) = \beta$ 且 $j(\gamma) = \gamma$。因此， $j(f)(\beta) = j(f)(j(\beta)) = j(f(\beta)) = j(\gamma) = \gamma = f(\beta)$。由此 $dom(j(f)) = dom(f)$，并且对每个 $\beta \in dom(f)$，都有 $j(f)(\beta) = f(\beta)$，所以 $j(f) = f$。但是，由于 $f''\alpha$ 在 $\kappa$ 中共尾，$j(f)''\alpha = f''\alpha$ 应当在 $j(\kappa) > \kappa$ 中共尾，矛盾。

接下来，假设 $\kappa$ 在 $M$中不是强极限，即存在 $\alpha < \kappa$ 使得 $M \models |\mathcal{P}(\alpha)| \geq \kappa$。现在，由于 $\alpha < \kappa$，根据上面的 (ii)， $\mathcal{P}(\alpha)^M = \mathcal{P}(\alpha)^N$。令 $g \in M$ 为一个满射 $g : \mathcal{P}(\alpha)^M \to \kappa$。由于 $j(\mathcal{P}(\alpha)^M) = \mathcal{P}(\alpha)^N = \mathcal{P}(\alpha)^M$，如前所述可得 $j(g) = g$。但这样一来， $j(g) = g$就必须是从 $\mathcal{P}(\alpha)^N$ 到 $j(\kappa) > \kappa$的满射，这就产生了矛盾。至此，证明了 $\kappa$ 在 $M$中是强不可达的。因此，$M \models$ “$V_\kappa$ 是一个 ZFC 模型”，这意味着 $M_\kappa \models$ZFC。最后，若 $N = M$，则 [2] 中的定理 2.12 的证明在此处也适用，从而说明临界 $\kappa$ 对每个 $n \in \omega$都是 $n$-不可描述的。

(vi) 对于 $A$ 语言中的每个公式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$，以及每个

[4]基数 $\lambda$ 若对于每个划分 $f : [\lambda]^{n+1} \to \{0, 1\}$ 都存在一个平稳齐次集 $H \subseteq \lambda$，则称其为 $n$-*ineffable*。

$a_1, \ldots, a_n \in A$，鉴于满足关系的绝对性，我们有：

$$A \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow M \models (A \models \phi(a_1, \ldots, a_n)) \Leftrightarrow$$

$$N \models (j(A) \models \phi(j(a_1), \ldots, j(a_n)) \Leftrightarrow j(A) \models \phi(j(a_1), \ldots, j(a_n)),$$

这意味着 $j\restriction A : A \to j(A)$ 是一个初等嵌入。若$A \in \mathrm{Crit}(j)$，则对于 $a_i \in A$，$j(a_i) = a_i$；而 $j(A) \neq A$。因此$A \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \Leftrightarrow j(A) \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$，即 $A \prec j(A)$。⊣

定义 4.2 若存在某个 $N$ 使得有一个非平凡初等嵌入$j : M \to N$，则称 ZFC 的模型 $M$ 可初等嵌入，或简称为可嵌入。若存在一个初等嵌入 $j : M \to N \subseteq M$，则称 $M$ 为内嵌入的。最后，若存在一个（非平凡）初等嵌入 $j : M \to M$，则称 $M$ 为自嵌入的。

初等可嵌入性与初等可延展性（在上一节中讨论）之间的关系并不十分明确。可以说可延展性更强，因为若 $M$ 是可延拓的且 $M \prec N$，那么相对于平凡嵌入 $id$，$M$ 也可嵌入 $N$。但可嵌入性的本质恰恰在于存在非平凡嵌入，由此产生临界点。这两个概念很可能不可比较。

如我们在3.7中所见，如果 $M$ 是初等可扩张的，那么 $M \models Loc^{\pi^1_1 ind}$(ZFC)。但如果 $M$ 可嵌入，甚至是自嵌入的，那么 $M$不太可能满足哪怕 $Loc$(ZFC)。不过，以下结论成立。

引理4.3 (i) 如果 $M$ 可嵌入，那么 $M \models$“存在一个模型 $x$，使得 $x \models$ ZFC $+ Loc$(ZFC)”。

(ii) 如果 $M$ 是自嵌入的，且 $j : M \to M$ 是一个满足$\kappa = \mathrm{crit}(j)$的嵌入，那么基数 $j^n(\kappa)$在 $M$中是 $n$-不可失效的。

证明。令 $j : M \to N$ 为一个初等嵌入。由4.1 (v)可知，若$\kappa = \mathrm{crit}(j)$，则 $M \models$ “$\kappa$ 是强不可达基数”。但于是 $M \models (V_\kappa \models$ZFC $+ Loc$(ZFC))。也就是说，所讨论的满足$x \models$ ZFC $+ Loc$(ZFC)的模型 $x \in M$ 是 $M_\kappa$。

（ii）由 4.1（v）。 ⊣

初等可嵌入性由以下谓词形式化：

$emb(x) := [x \models$ ZFC $\wedge (\exists y)(\exists j)(y \models$ ZFC $\wedge\ j : x \to y$ 是初等嵌入。)].

## 4.2 临界模型和强临界模型

定义 4.4 $M$ 称为临界的，如果存在模型 $N$、$K$，使得 $M \in N$，并且存在初等嵌入 $j : N \to K$，使得$M \in$Crit($j$)。

该性质也可形式化为 $\Sigma_1^{\mathrm{ZFC}}$谓词:

$$crit(x) := [x \models \mathrm{ZFC} \ \wedge \ (\exists y)(\exists z)(\exists j)$$

($x \in y \ \wedge \ y \models$ ZFC $\ \wedge \ z \models$ ZFC $\ \wedge \ j:\ y \to z$ 是初等嵌入$\wedge \ x \in$ Crit($j$)].)

临界模型大致类似于 ZFC 中的可测基数。它们的一致性强度不高于后者。

引理 4.5（ZFC）若 $\kappa$ 是可测基数，则 $V_\kappa$ 是临界的。

证明。设 $\kappa$ 是 ZFC 中的可测基数，并设 $j: V \to W$ 是初等嵌入（其中 $W \subseteq V$），且 crit($j$) $= \kappa$。显然 $j{\restriction}V_\kappa = id$，而 $j(V_\kappa) \neq V_\kappa$。因此，只需找到模型 $M$、$N$，使得 $j{\restriction}M:\ M \to N$ 且 $V_\kappa \in M$。令 $M = j(V_\kappa) = W_{j(\kappa)}$，并令 $N = j(M)$。显然，$M$、$N$ 是 ZFC 模型，因为 $V_\kappa$ 如此，$V_\kappa = W_\kappa \in W_{j(\kappa)} = M$，并且若 $j' = j{\restriction}M$，则 $j': M \to N$ 是初等嵌入，且 $V_\kappa \in$Crit($j'$)。⊣

引理 4.6（LZFC）若 $M$ 是临界的，则 $M$ 是可延拓的。因此，在 LZFC 上，$Loc^{crit}$（ZFC）$\Rightarrow Loc^{ext}$（ZFC）。

证明。设 $M$ 在 LZFC 中是临界的。那么存在 $N$、$K$、$j$，使得$M \in N$、$j:\ N \to K$ 是一个初等嵌入，且 $M \in$ Crit($j$)。由引理 4.1（vi），$M \prec j(M)$。因此 $M$ 是可延拓的。⊣

下面给出一种合理的临界性强化:

定义 4.7 设 $M$ 是一个模型，$x$ 是一个集合。若存在模型 $N$、$K$ 以及一个初等嵌入$j:\ N \to K$，使得 $\{M, x\} \subset N$ 且 $M \in$ Crit($j$)，则称 $M$ 为 $x$-强临界。若 $M$ 对每个 $x$都是 $x$-强临界的，则称 $M$ 是强临界的。 $M$

下面给出强临界性的一种更简单的刻画。

引理 4.8（LZFC） $M$ 是强临界的，当且仅当对于每个满足 $M \in N$ 的模型 $N$，都存在一个模型 $K$ 和一个初等嵌入 $j:N \to K$，使得 $M \in$Crit($j$)。

证明。该条件是必要的。设 $M$ 是强临界的，并设 $N$ 是一个满足 $M \in N$的模型。根据定义，$M$ 是 $N$-临界的，也就是说，存在模型 $R$、$S$，满足 $\{M, N\} \subset R$，以及一个初等嵌入$j:\ R \to S$，使得 $M \in$ Crit($j$)。令 $j' = j{\restriction}N$ 且令 $K = j(N)$。于是，根据引理 4.1 (vi)，$j': N \to K$ 是一个初等嵌入，且 $M \in$ Crit($j'$)。反过来，假设该条件对 $M$成立，并设 $x$ 是一个集合。由 $Loc$（ZFC），存在一个 ZFC 模型 $N$，使得

$\{M, x\} \subset N$。根据我们的条件，存在 $K$ 以及一个初等嵌入 $j\colon N \to K$，满足 $M \in \mathrm{Crit}(j)$。因此，对于每个 $x$，$M$ 都是 $x$-强临界的，故它是强临界的。⊣。

命题 4.9 (LZFC) 设 $M$ 是一个高度为 $\kappa$ 的强临界模型。则：

(i) 对每个序数 $\alpha > \kappa$，$L_\alpha$ 都可嵌入到某个临界点为 $\kappa$ 的 $L_\beta$ 中。特别地，存在一个共尾类 $C \subseteq On$，使得对每个 $\alpha \in C$，$L_\alpha$ 都是 ZFC 模型，并且 $L_\alpha$ 可嵌入到某个临界点为 $\kappa$ 的 $L_\beta$ 中。

(ii) 若进一步有 $V = L$，则存在一个共尾类 $C \subseteq On$，使得对每个 $\alpha \in C$，$L_\alpha$ 都是 ZFC 模型，$M \in L_\alpha$ 和 $L_\alpha$ 可嵌入到某个具有临界模型 $M$ 的 $L_\beta$ 中。

证明。(i) 假设 $M$ 是一个高度为 $\kappa$ 的强临界模型。设 $\alpha > \kappa$。由强临界性，存在模型 $N$、$K$，使得 $\{\alpha, M\} \subset N$，并且存在一个初等嵌入 $j\colon N \to K$，满足 $\mathrm{Crit}(j) = M$；因此 $\mathrm{crit}(j) = \kappa$。于是 $L_\alpha \in N$。若 $j' = j{\restriction}L_\alpha$，则由引理 4.1 (vi)，$j'\colon L_\alpha \to L_{j(\alpha)}$ 是一个非平凡初等嵌入，且 $\mathrm{crit}(j) = \kappa$。至于第二个断言，设

$$C = \{\alpha \in On : \alpha > \kappa \wedge L_\alpha \models \mathrm{ZFC}\}.$$

由 $Loc$(ZFC)，$C$ 在 $On$ 中共尾。根据前面的论证，对于每个 $\alpha \in C$，都存在一个模型 $N$，使得 $\alpha \in N$，并且存在一个嵌入 $j\colon N \to K$，使得 $\kappa = \mathrm{crit}(j)$。于是 $j{\restriction}L_\alpha\colon L_\alpha \to L_{j(\alpha)}$ 也具有临界点 $\kappa$。

(ii) 如果 $V = L$，那么 $M \in L$，并且如果我们令

$$C = \{\alpha \in On : M \in L_\alpha \wedge L_\alpha \models \mathrm{ZFC}\},$$

那么根据与上面相同的论证，$C$ 是所需的。现在的区别在于，如果 $\alpha \in C$ 且 $j{\restriction}L_\alpha\colon L_\alpha \to L_{j(\alpha)}$，那么 $M \in \mathrm{Crit}(j)$，而不只是 $\kappa = \mathrm{crit}(j)$。⊣

存在一个强临界模型这一假设，在 ZFC 上并不比 $Loc$(ZFC)+ “存在一个可测基数”更强。

引理 4.10 ZFC+$Loc$(ZFC)+“$\kappa$ 是一个可测基数”证明了 $V_\kappa$ 是强临界的。特别地，在 ZFC+“存在不可达基数的真类”+ “$\kappa$ 是一个可测基数”中也能证明同样的结论；此外，在理论 ZFC+“存在一个由 $V_\alpha$组成的真类，使得 $V_\alpha \models$ZFC+“$\kappa$ 是一个可测基数”中亦然。[5]

[5]在 [7, 命题 2.23] 中指出，$Loc$(ZFC) 并不比“存在一个不可达基数的真类”更强，其中后一原理记作 $IC^\infty$。另见 [7, 脚注 6]

证明。设 $\kappa$ 是可测的，且 $x$ 是一个集合。令 $j: V \to W$ 为宇宙的一个初等嵌入，其中 $\kappa =$crit($j$)。由 $Loc$(ZFC)，存在一个 ZFC 模型 $N \models$，使得 $\{V_\kappa, x\} \subset N$。令 $j' = j{\restriction}N$。那么 $j(N)$ 也是一个 ZFC 模型，并且 $j'$: $N \to j(N)$ 是一个初等嵌入，其中 $V_\kappa \in$Crit($j$)。因此，对每个$x$， $V_\kappa$ 都是 $x$-强临界的。⊣

看起来，如果不假设 $Loc$(ZFC)，就不太可能证明 4.10 的推论；也就是说，单凭 ZFC+“存在一个可测基数”，无法证明强临界模型存在。不过，在 ZFC+“存在一个强基数”下可以做到（见定义 3.13）。

引理 4.11 (ZFC) 如果 $\kappa$ 是强基数，那么 $V_\kappa$ 是强临界的。

证明。设 $\kappa$ 是强基数，且 $x$ 是一个集合。只需证明$V_\kappa$ 是 $x$-强临界的。设 $V_\alpha$ 满足 $\{x, V_\kappa\} \subset V_\alpha$。由于$\kappa$ 是 $\alpha$-强的，存在一个 $j: V \to W$，其中 $W$ 是内模型，且满足 $j(\kappa) > \alpha$ 和 $V_{\kappa+\alpha} \subseteq W$。于是 $j(\kappa)$ 在 $W$ 中是不可达基数，因此 $W_{j(\kappa)} \models$ ZFC。并且对每个 $\beta \leq \kappa + \alpha$，都有 $V_\beta = W_\beta$，因此$V_\alpha = W_\alpha \subseteq W_{j(\kappa)}$。设 $K = W_{j(\kappa)}$。那么 $x, V_\kappa \in K$。如果 $j' = j{\restriction}K$ 和$N = W_{j^2(\kappa)}$，那么模型 $K$，$N$ 以及初等嵌入$j'$: $K \to N$ 共同见证了 $V_\kappa$ 是 $x$-强临界的。⊣

通过要求初等嵌入是内嵌入或自嵌入，可以进一步加强临界模型和强临界模型的概念。

定义 4.12 设 $M$ 是一个模型， $x$ 是一个集合。若存在模型 $N$ 和初等嵌入 $j: N \to N$ （分别地，若存在模型 $N$、$K$，使得 $K \subseteq N$，以及初等嵌入 $j: N \to K$），满足 $\{M, x\} \subset N$ 且 $M \in$ Crit($j$)，则称 $M$ 为 $x$-自临界的（分别地，为 $x$-内临界的）。若对每个 $x$， $M$ 都是 $x$-自临界的（分别地， $x$-内临界的），则称其为强自临界的（分别地，强内临界的）。

强内临界模型存在这一命题的一致性强度并不高。具体而言，以下结论成立。

引理 4.13（ZFC）若 $\kappa$ 是可测基数，并且存在真类的 $V_\alpha$，使得 $V_\alpha \models$ZFC（即，若 $NM^\infty$ 成立），则 $V_\kappa$ 是一个强内临界模型。

---

我们用 $NM$ 表示公理“存在一个自然模型”（即，存在一个满足 $V_\alpha \models$ ZFC 的 $V_\alpha$）。令 $NM^\infty$ 表示公理“存在真类个自然模型”。显然，在 ZFC 上有 $IC^\infty \Rightarrow NM^\infty \Rightarrow Loc$ (ZFC)。在较弱的大基数假设下，这些蕴含关系都不可逆。

证明。我们需要证明，对每个 $x$，都存在一个模型 $M$，使得 $\{V_\kappa, x\} \subseteq M$，并且存在一个 $j: M \to N \subseteq M$，满足 $V_\kappa \in$ Crit($j$)。令 $U$ 是 $\kappa$-完备的 $\kappa$ 上的超滤子。根据 $NM^\infty$，存在一个 $V_\alpha$，使得 $\{V_\kappa, x, U\} \subseteq V_\alpha$ 且 $V_\alpha \models$ ZFC。于是 $\kappa$ 在 $V_\alpha$ 中是可测的，因此存在一个初等嵌入 $j: V_\alpha \to V_\alpha^\kappa/U \subseteq V_\alpha$，且 crit($j$) $= \kappa$。因此 $V_\kappa \in$Crit($j$)。⊣

然而，强自临界模型存在的一致性强度似乎要高得多。我们将证明，假设存在某种秩到秩初等嵌入（在 ZFC 中），即可证明它们的一致性。回忆一下，若存在初等嵌入 $j: V_\lambda \to V_\lambda$，使得 crit($j$) $= \kappa$（见[5, 第 325] 页），则称基数 $\kappa$ 为 $\mathrm{I}_3$, ，记作 $\mathrm{I}_3(\kappa)$。$\mathrm{I}_3$ 基数对每个 $n < \omega$都是 $n$-巨大基数。不过，我们需要更强的条件。

定义 4.14（ZFC）若对每个 $\alpha > \kappa$，都存在 $\lambda \geq \alpha$ 和一个初等嵌入 $j: V_\lambda \to V_\lambda$，使得 crit($j$) $= \kappa$，则称基数 $\kappa$ 为强 $\mathrm{I}_3$, ，记作 $\mathrm{SI}_3(\kappa)$。

引理 4.15（ZFC）若 $\mathrm{SI}_3(\kappa)$，则 $V_\kappa$ 是强自临界的。

证明。假设 $\mathrm{SI}_3(\kappa)$。那么，给定 $x$，存在 $\lambda > \kappa$、 $rank(x)$，以及一个初等嵌入 $j: V_\lambda \to V_\lambda$，使得 crit($j$) $= \kappa$。但于是$V_\kappa \in$ Crit($j$)。因此，对每个 $x$， $V_\kappa$ 都是 $x$-自临界的，故 $V_\kappa$ 是强自临界的。⊣

## 4.3 ZFC $+ Loc$(ZFC) $+ \cdots$

正如 [7, 第 584], 页所指出的，ZFC $+ Loc$(ZFC) 是理论 ZFC $+$ “存在真类的不可达基数”的一种温和替代。因此，ZFC $+ Loc^{\pi^1_1 ind}$(ZFC) 是 ZFC $+$ “存在真类的弱紧基数”的一种温和替代。这里的“温和”意为“局部”，即不涉及大基数。更一般地，对于作为一种大模型性质的 $\phi(x)$，理论 ZFC $+ Loc^{\phi}$(ZFC) 和 ZFC $+ Loc$(ZFC) $+ \exists x \phi(x)$，或者 ZFC $+ Loc$(ZFC) 与公理 $Loc^{\phi}$(ZFC)和 $\exists x \phi(x)$的某种组合，再加上 $\mathrm{Found}_{On}$ 或某些替换公理，似乎都值得研究。在这类理论中，人们预期能证明什么？以下结果可能在预期之列：

(a) 存在具有特殊闭包性质的 ZFC 模型，例如自然模型。

(b) “内部强”模型的存在性，即满足 ZFC+某个大基数性质。（由引理 4.1 (v) 可知，ZFC $+ Loc$(ZFC)+“存在一个可嵌入模型”证明了存在一个满足 ZFC+“存在一个强不可达基数”的模型 $M \models$。）

(c) 大基数的存在（即恢复）。

(d) 对日常数学产生某些影响的结果。（如果根据经典大基数公理的类似能力进行判断，这类结果最不可能被证明。）

下面的结果属于上述 (a) 组。

命题 4.16 ZFC $+ Loc$(ZFC)+“存在一个 $V_\alpha$-强临界模型 $M$”，对于某个 $V_\alpha$ 使得 $M \subseteq V_\alpha$，证明了“存在一个 ZFC 的自然模型”。

证明。设 $M$ 是 $V_\alpha$-临界的，使得 $M \subseteq V_\alpha$ 在 ZFC+$Loc$(ZFC) 中，对于某个 $\alpha$。那么存在模型 $N$、$K$ 以及一个初等嵌入$j: N \to K$，使得 $M \in$ Crit($j$) 且 $V_\alpha \in N$。由此可知，对于每个 $\xi \leq \alpha$，都有 $N_\xi = V_\xi$。令 $ht(M) = \beta$。由于 $M \subseteq V_\alpha$，我们有 $\beta \leq \alpha$，因此 $N_\beta = V_\beta$。此外，crit($j$) $= \beta$ 且 $N_\beta \in$ Crit($j$)。根据引理 4.1 (v)，$N_\beta \models$ ZFC。由此可知 $V_\beta \models$ ZFC，即 ZFC 具有一个自然模型。[另一种证明：由于 $V_\beta \in$ Crit($j$)，我们有 $V_\beta = N_\beta = K_\beta$。由此可知 $j(V_\beta) = K_{j(\beta)}$ 且 $V_\beta = K_\beta \in K_{j(\beta)}$，因为 $j(\beta) > \beta$。因此 $V_\beta \prec K_{j(\beta)}$ 且 $V_\beta \in K_{j(\beta)}$。所以根据引理 3.5，$V_\beta \models$ZFC。
] ⊣

下一个结果加强了前一个结果，属于第 (c) 组。

命题 4.17 ZFC+$Loc$(ZFC)+“存在一个强临界模型”证明了存在一个强不可达基数。

证明。令 $\kappa$ 为一个基数。根据 ZFC 的反射原理，满足以下条件的序数 $\alpha$ 构成一个真类：对每个 $\kappa < \alpha$, $V_\alpha \models$，“$\kappa$ 是强不可达的”蕴含“ $\kappa$ 是强不可达的”。因此，给定一个强临界模型 $M$，存在 $\alpha$ 使得 $M \in V_\alpha$，并且对每个 $\kappa$,

$$V_\alpha \models \text{“}\kappa \text{ is strongly inaccessible”} \Rightarrow \kappa \text{ is strongly inaccessible.} \quad (5)$$

固定这样一个 $V_\alpha$。由 $M$的强临界性，存在模型 $N, K$以及初等嵌入 $j: N \to K$，使得 $V_\alpha \in N$ （因此$\{M, V_\alpha\} \subset N$），且 $M \in$ Crit($j$)。令 $\kappa = ht(M)$。于是 $\kappa =$crit($j$)，并由引理 4.1 (v)，$N \models$ “$\kappa$ 是强不可达的”。由于 $V_\alpha \in N$，更有 $V_\alpha \models$ “$\kappa$ 是强不可达的”。因此，根据 (5)，$\kappa$ 是强不可达的。⊣

令 $scrit(x)$ 为表示“$x$ 是一个强临界模型”的公式。由 4.17 的证明可立即得到以下结论。

推论 4.18 ZFC+$Loc^{scrit}$(ZFC) 证明“存在一个不可达基数组成的真类”。

命题 4.19 ZFC+$Loc$(ZFC)+ “存在一个强自临界模型”证明了：存在一个基数 $\kappa$，它对每个$n \in \omega$都是 $n$-不可达的。

证明。证明与 4.17 的证明类似。给定一个强自临界 $M$，令 $\kappa = ht(M)$。由反射原理，存在 $V_\alpha$使得 $M \in V_\alpha$，$V_\alpha$ 包含所有映射 $f$： $[\kappa]^n \to \{0,1\}$，对每个 $n$，并且

$$V_\alpha \models \text{“}(\forall n)(\kappa \text{ is } n\text{-ineffable})\text{”} \Rightarrow (\forall n)(\ \kappa \text{ is } n\text{-ineffable}). \qquad (6)$$

显然，如果某个函数 $f : [\kappa]^n \to \{0,1\}$ 具有一个平稳齐次子集 $X \subseteq \kappa$，那么 $X \in V_\alpha$。令 $N$ 为满足$V_\alpha \in N$的模型。由强自临界性，存在一个初等嵌入$j$： $N \to N$，使得 $M \in$ Crit($j$)。由于 $\kappa = ht(M)$，可推出$\kappa \in$ crit($j$)。根据引理 4.1 (v)， $N \models$ “$\kappa$对每个 $n \in \omega$都是 $n$-不可达的”。然后，按照我们选择 $N$ 的方式，显然 $V_\alpha \models$ “$\kappa$ 对每个 $n \in \omega$都是 $n$-不可达的”。因此，根据 (6)， $\kappa$ 对每个 $n \in \omega$都是 $n$-不可达的。⊣

令 $sscrit(x)$ 为表示“$x$ 是一个强自临界模型”的公式。由命题 4.19 的证明可得:

推论 4.20 对任意 $n \in \omega$，ZFC+$Loc^{sscrit}$(ZFC) 都能证明“存在一类真类 $n$-不可达基数”。

# 5 LZFC 与 $V = L$。高模型公理

本节考察 LZFC 与 $V = L$，尤其是与 $V \neq L$ 的关系。下文将用到 ZFC 中以下众所周知的事实（例如参见 [4, 定理 18.20], [3, 定理 4.3] 和 [5, 定理 9.12 、 9.17]）。

定理 5.1（ZFC）(i) 以下各项等价:

(a) $0^\#$ 存在。(b) 存在一个初等嵌入 $j : L \to L$。(c) 存在一个初等嵌入 $j : L_\alpha \to L_\beta$，其中 $\alpha$、$\beta$ 是极限序数，且 crit($j$) $= \kappa < |\alpha|$。(ii) 若 $0^\#$ 存在，则存在一个序数真类 $\alpha$，使得$L_\alpha \prec L$。(iii) 若 $0^\#$ 存在，则对每个无限 $x \in L$， $|\mathcal{P}(x)^L| = |x|$。

首先，关于 LZFC + $V = L$ 的一致性，我们注意到以下事实:

引理 5.2 (i) 如果 ZFC+“存在一个不可达基数”是一致的，那么 ZFC+$Loc$(ZFC) $+V=L$ 也是一致的。

(ii) 如果 ZFC+“$0^{\#}$ 存在”是一致的，那么 ZFC+$Loc^{sext}$(ZFC) $+V=L$ 也是一致的。

证明。(i) 在 [7, 命题 2.23 (ii)] 中已经看到，如果 $\kappa$ 是 ZFC 宇宙 $V$中的强不可达基数，那么 $V_\kappa \models$ ZFC $+ Loc$(ZFC)。由此可以直接得出 $L_\kappa \models$ ZFC $+Loc$ (ZFC) $+V=L$。

(ii) 设 $M$ 是一个满足 ZFC+“$0^{\#}$ 存在”的模型。只需证明 $L^M \models Loc^{sext}$(ZFC)。根据 5.1 (ii)， $M$ 中存在一个由模型 $L_\alpha$ 构成的共尾类，且满足 $L_\alpha \prec L^M$。于是，如同命题 3.12 的证明，这些模型全都是强可延拓的，因此 $L^M \models Loc^{sext}$(ZFC)。⊣

鉴于 $0^{\#}$ 的存在是 ZFC 中反驳 $V=L$ 的标准手段，问题在于需要哪些“大模型公理”才能在 LZFC 中反驳 $V=L$ 。根据 5.2 (ii)，即使加入 $Loc$(ZFC)的强化公理，例如 $Loc^{sext}$(ZFC)， $V=L$ 仍然是一致的。

因此，下面我们将尝试一些新公理，以获取有关局部模型内部真理的信息，例如它们如何看待某些集合的基数。比如，假设给定一个集合 $x$ 。由 $Loc$(ZFC) 可以直接推出，存在一个集合 $y$ 和一个 ZFC 模型 $M$，使得 $\{x,y\}\subset M$ 且 $M\models |x|<|y|$。为简单起见，且不失一般性，我们可以只讨论序数，而不讨论任意集合。因此，陈述

$$(\forall\kappa)(\exists\alpha>\kappa)(\exists M)(\alpha\in M\wedge M\models |\kappa|<|\alpha|)$$

是 LZFC 的一个定理。现在让我们把问题稍微变难一些。设给定 $\kappa$ 。是否存在一个 $\alpha>\kappa$ ，使得对每个 $\delta\geq\alpha$，都存在一个模型 $M$ ，满足 $\delta\in M$ （等价地， $ht(M)>\delta$）且 $M\models|\alpha|>|\kappa|$? 这就是陈述:

$$(\forall\kappa)(\exists\alpha>\kappa)(\forall\delta\geq\alpha)(\exists M)(\delta\in M\wedge M\models|\kappa|<|\alpha|). \qquad (7)$$

(7) 表明，对每个 $\kappa$ ，都存在一个 $\alpha>\kappa$ ，使得有任意“高”的模型不会将 $\alpha$ 压缩为 $\kappa$。我们将称 (7) 为高模型公理，简称 $TMA$。如下所示， $TMA$是一条一致性强度较弱的原则:

引理 5.3 (i) ZFC $+Loc$(ZFC) $\vdash TMA$。

(ii) 如果 $\lambda$ 是 ZFC $+$ $Loc$(ZFC) 中的极限基数，那么 $H(\lambda)$ $\models$LZFC $+TMA$。更一般地，如果 $N\models$LZFC 且 $N$没有最大基数，那么 $N\models TMA$。

证明。（i）给定 $\kappa$，只需选取一个（绝对）基数 $\alpha$ 使得$\kappa<\alpha$。对于每个 $\delta\geq\alpha$ ，根据 $Loc$（ZFC）选取一个模型 $M$ 使得$\delta\in M$。那么显然 $M\models|\kappa|<|\alpha|$。

（ii）设 $\lambda$ 是理论 ZFC $+ Loc$（ZFC）中的一个极限基数。由 $Loc$（ZFC）可知，$H$（$\lambda$）满足 $Loc$（ZFC）。事实上，设 $x \in H$（$\lambda$），即 $|TC$（$x$）$| < \lambda$。根据 $Loc$（ZFC），存在一个 ZFC 模型 $M$ 使得$x \in M$。于是，根据勒文海姆–斯科伦定理，存在 $M$的一个初等子模型$N$，其中包含 $TC$（$x$）和 $|N| < \lambda$。若 $N$是 $N$的传递塌缩$^{-}$ $^{-}$ $^{-}$，则 $x \in N$、 $N \models$ ZFC，且 $N \in H$（$\lambda$）。现在设 $\kappa_0 \in H$（$\lambda$）。由于$\lambda$ 是一个极限基数，存在一个基数 $\mu \in H$（$\lambda$）使得 $\kappa_0 < \mu$。对于每个序数 $\delta \geq \mu$，如前所述，根据 $Loc$（ZFC）选取一个模型 $K$ 使得 $\delta \in K$。那么显然 $K \models |\kappa_0| < |\mu|$。根据勒文海姆–斯科伦定理，可以选择¨使得 $|K| < \lambda$。因此 $H$（$\lambda$） $\models TMA$。更一般命题的证明相同。⊣

现在我们可以看出，如果将 $TMA$ 添加到理论 LZFC+“存在一个强临界模型”中，那么 $V = L$ 不成立。

定理 5.4 LZFC+TMA+“存在一个强临界模型”证明了 $V \neq L$。

证明。我们假设 LZFC+$TMA$+“存在一个强临界模型”+$V = L$。只需导出矛盾即可。设 $M$ 是强临界的，且 $ht$(M) $= \kappa_0$。根据 $TMA$，存在一个 $\alpha_0 > \kappa_0$，使得

$$(\forall \delta \geq \alpha_0)(\exists N)(\delta \in N \wedge N \models |\kappa_0| < |\alpha_0|). \tag{8}$$

由于 $V = L$、 $M \in L$，因此根据命题 4.9 (ii)，存在极限序数 $\beta_0$、 $\gamma_0$，使得 $\alpha_0 < \beta_0 \leq \gamma_0$，以及一个初等嵌入 $j$： $L_{\beta_0} \rightarrow L_{\gamma_0}$，满足 $M \in$ Crit($j$)。因此 crit($j$) $= \kappa_0$。根据 $V = L$， $j \in L$。所以，对于某个 $\delta > \gamma_0$， $j \in L_\delta$。由 (8) 可知，存在一个 ZFC 模型 $N$，其中包含 $\delta$ 和 $N \models |\kappa_0| < |\alpha_0|$，因此 $N \models |\kappa_0| < |\beta_0|$。特别地， $L^N \models |\kappa_0| < |\beta_0|$。此外，$j \in L^N$，因为 $j \in L_\delta \in L^N$。于是， $L^N$ 是一个 ZFC 模型，其中包含一个初等嵌入 $j$： $L_{\beta_0} \rightarrow L_{\gamma_0}$，该嵌入的临界点为 $\kappa_0$，并且满足 $L^N \models |\kappa_0| \lhd |\beta_0|$。但由于序数 $\kappa_0$ 和 $|\kappa_0|^{L^N}$ 在 $L^N$ 中等势，所以也有 $L^N \models \kappa_0 < |\beta_0|$。根据定理 5.1 (i)， $L^N \models$ “$0^\#$ 存在”。这与 $L^N \models V = L$ 的事实矛盾。⊣

问题5.5 我们能否从前一个定理的假设中去掉 $TMA$，也就是说，LZFC+“存在一个强临界模型”能否证明 $V \neq L$?

我们已经在引理 5.3 (ii) 中看到，在没有最大基数的任何 LZFC 宇宙中， $TMA$都成立。因此，我们来关注这一最后的性质。回顾一下，在 LZFC 中，序数 $\alpha$ 称为基数，是指不存在 $\beta < \alpha$ 使得 $\alpha \sim \beta$（这与 ZFC 中的定义完全相同）。此外， $x$的（绝对）基数记作 $|x|$，是满足 $x \sim \alpha$的最小 $\alpha$ （如果存在）。然而，由于缺少 $\in$-归纳，我们无法

确保对任意给定的集合 $x$ $|x|$ ， $|x|$ 都存在。但仍可在表达式 $|x| = |y|$、 $|x| \leq |y|$、 $|x| < |y|$ 中继续使用符号 $|x|$ ，这些表达式具有通常的含义（即 $x$、 $y$等之间存在双射或单射）。下文我们用 $GC$ 表示“存在最大基数”这一命题，即:

$$(GC) \qquad (\exists\kappa)(\forall y)(|y| \leq |\kappa|).$$

$GC$ 的一个特例是公理（$\forall x$）（$|x| \leq \omega$），我们通常将其称为“所有集合都是可数的”。

引理 5.6 在 LZFC 中，以下命题等价:
(i) $GC$ （:= （$\exists\kappa$） （$\forall y$） （$|y| \leq |\kappa|$） ）。
(ii)（$\exists\kappa$） （$\forall\alpha$） （$|\alpha| \leq |\kappa|$） 。(iii)
（$\exists x$） （$\forall\alpha$） （$|\alpha| \leq |x|$） 。(iv)
（$\exists x$） （$\forall y$） （$|y| \leq |x|$） 。

证明。(i)⇒ (ii) 和 (ii)⇒ (iii) 显然成立。

(iii)⇒(iv): 假设 $x_0$ 是一个满足 (iii) 的集合，并令 $y$ 为任意给定的集合。我们需要证明 $|y| \leq |x_0|$。在包含$y$的模型 $M$ 中进行推理，可以找到一个序数 $\alpha$ ，使得 $|\alpha| = |y|$。由 (iii) 可得 $|\alpha| \leq |x_0|$。因此 $|y| \leq |x_0|$。

(iv)⇒(i): 假设 $x_0$ 是满足 (iv) 的集合，并像之前一样找到一个序数 $\kappa$ ，使得 $|x_0| = |\kappa|$。令 $y$ 为任意给定的集合。由 (iv) 可知 $|y| \leq |x_0|$，因此 $|y| \leq |\kappa|$。
⊣

引理 5.7 LZFC $+\neg(GC) \vdash TMA$。

证明。引理 5.3 (ii) 中基本上已经证明了这一点。假设 LZFC 中不存在最大基数，并令 $\kappa$ 为一个序数。那么存在一个序数 $\alpha > \kappa$ ，使得 $|\kappa| < |\alpha|$。那么对于每个 $\delta \geq \alpha$ 以及每个满足 $\delta \in M$ 的模型 $M$ ，显然 $M \models |\kappa| < |\alpha|$。因此，$TMA$ 成立。⊣

5.7 的逆命题尚未解决。

问题 5.8 LZFC $+ GC + TMA$ 一致吗?

我们在此能够证明的只有以下结论:

命题 5.9 LZFC $+ GC + V = L \vdash \neg(TMA)$。
特别是,
LZFC +“每个集合都是可数的” $+ V = L \vdash \neg(TMA)$。

证明。假设 LZFC $+ GC + V = L$。我们需要证明 $\neg(TMA)$，即

$$(\exists\kappa)(\forall\alpha > \kappa)(\exists\delta)(\forall M)(\delta \in M \Rightarrow M \models |\kappa| = |\alpha|) \qquad (9)$$

为真。根据假设，存在一个序数 $\kappa$ 使得 $\forall\alpha(|\alpha| \leq |\kappa|)$。固定这样一个 $\kappa_0$。只需证明

$$(\forall\alpha > \kappa_0)(\exists\delta)(\forall M)(\delta \in M \Rightarrow M \models |\kappa_0| = |\alpha|). \qquad (10)$$

选取一个 $\alpha > \kappa_0$。由于 $|\alpha| \leq |\kappa_0|$，存在一个（在 $V$ 中的）双射 $f\colon \kappa_0 \to \alpha$。由于 $V = L$, $f \in L$。因此，存在一个 $\delta$ 使得 $f \in L_\delta$。那么 $\delta$见证了 (10) 的真值，因为如果 $M$ 是一个满足$\delta \in M$的 ZFC 模型，那么 $L_\delta \in M$，因此 $f \in M$。所以 $M \models |\alpha| = |\kappa_0|$。⊣

由 5.7 和 5.9 可立即得出，$\neg(TMA)$ 与 $GC$ 在 LZFC+$V = L$ 上等价，即，

推论 5.10 LZFC $+ V = L \vdash \neg(TMA) \Leftrightarrow GC$。

推论 5.11 (i) LZFC $+ \neg(GC) + \neg(TMA)$ 不一致。
(ii) 如果 ZFC+$Loc$(ZFC) 一致，那么 LZFC+$\neg(GC)+TMA$ 也一致。

(iii) 如果 ZFC $+Loc$(ZFC) $+ V = L$ 一致，那么 LZFC $+ GC + \neg(TMA)$ 也一致。

证明。(i)由引理 5.7 得出。(ii)由引理 5.3 (ii) 得出。(iii)由命题 5.9 得出。⊣

在结束本节之前，我们来考察以下关于 $TMA$ 的合理变体:

$(TMA_1)$ $\quad (\forall x)(\exists\alpha)(\forall\delta \geq \alpha)(\exists M)(\{x, \delta\} \subset M \wedge M \models |x| < |\alpha|).$

$(TMA_2)$ $\quad (\forall x)(\exists y)(\forall\delta)(\exists M)(\{x, y, \delta\} \subset M \wedge M \models |x| < |y|).$

关于 $TMA$、$TMA_1$ 和 $TMA_2$ 的相对强度，显然，在 LZFC 上有 $TMA_1 \Rightarrow TMA$ 和 $TMA_1 \Rightarrow TMA_2$。

引理 5.12 LZFC $+ \neg(GC) \vdash TMA_1$，因此 LZFC $+ \neg(GC) \vdash TMA_2$。

证明。与引理 5.7 的证明类似。 ⊣

命题 5.13 (i) LZFC $+ GC + V = L \vdash \neg(TMA_2)$。
(ii) LZFC $+ GC + V = L \vdash \neg(TMA_1)$。

证明。与命题 5.9 的证明类似。 ⊣

推论 5.14 $TMA$、$TMA_1$、$TMA_2$ 和 $\neg(GC)$ 在 LZFC $+ V = L$ 上彼此等价。

证明。由 5.12 和 5.13 可立即得出。 ⊣

最后，我们在此给出一项具有独立意义且可能具有应用价值的结果： $Loc$(ZFC) 在强迫扩张下保持不变。[6]

命题 5.15 ZFC 模型 $+Loc$(ZFC) 的任意泛型扩张也是 $Loc$(ZFC) 的模型。

证明。设 $M \models$ ZFC $+ Loc$(ZFC)， $\mathbb{P} \in M$ 是一个强迫概念，且 $G \subseteq \mathbb{P}$是 $M$-泛型。为证明 $M[G] \models Loc$(ZFC)，取$a \in M[G]$。只需找到 $M_1 \in M[G]$，使得 $M_1 \models$ZFC 且$a \in M_1$。设 $\dot{a} \in M$ 是 $\mathbb{P}$ 的一个 $a$-名称。由于 $M \models Loc$(ZFC)，存在$N \in M$，使得 $\{\mathbb{P}, \dot{a}\} \subset N$，并且 $N$ 是按$M$意义下的一个 ZFC 模型。现在 $N \subseteq M$，且 $G$是 $M$-泛型，因此 $G$也是 $N$-泛型，所以$N[G] \models$ZFC。此外， $\dot{a}$是按 $N$ 意义下的一个 $\mathbb{P}$-名称，因此 $a \in N[G]$且 $N[G] \in M[G]$。于是 $N[G]$就是所需的模型。⊣

# 6 Vop̌enka 原理

在强大基数性质中，Vop̌enka 原理（$VP$）似乎尤其契合 LZFC 的背景。本节将证明，若将 $VP$ 加入强化版的 LZFC，就能恢复 ZFC。

回顾一下， $VP$ 是一种公理模式，而非单个公理，定义如下：给定一个含有一个自由变量的公式 $\phi$（$x$），令 $X_\phi$ 表示 $\phi$ 的扩展 $\{x : \phi(x)\}$。那么显然，“$X_\phi$ 是一个真类”是一阶陈述。特别地，下面的表达式是一阶陈述：

（$VP_\phi$）如果 $X_\phi$ 是某种固定一阶语言下结构的真类，那么存在不同的 $x$、$y \in X_\phi$，以及一个初等嵌入 $j : x \to y$，

（其中 $j : x \to y$ 可以是平凡的，即 $x \prec y$）。于是 $VP = \{VP_\phi : \phi \in \mathcal{L}\}$。 $VP$ 是适用于 LZFC 的一种颇有吸引力的公理模式，这是因为根据 $Loc$（ZFC），每个集合都属于一个由 ZFC 模型构成的真类。事实上，对于每个集合 $x$，令 $\mathcal{M}(x)$ 表示包含 $x$ 的 ZFC 模型类。也就是说，

$$\mathcal{M}(x) = \{y : x \in y \ \wedge Tr(y) \ \wedge \ (y, \in) \models \text{ZFC}\}.$$

引理 6.1 (LZFC) 对每个 $x$， $\mathcal{M}(x)$ 都是真类。

[6]泛型扩张还保留相关原理 $NM^\infty$ 和 $IC^\infty$，如上文脚注 5 所述。

证明。 $Loc$(ZFC) 意味着对于每个 $x$， $\bigcup \mathcal{M}(x) = V$。因此，若 $\mathcal{M}(x)$ 是集合，那么 $V$ 也是集合。但根据 $\Delta_0$- 分离，$R = \{x \in V\colon\ x \notin x\}$ 也同样是集合，于是罗素悖论再次出现。⊣

$VP$ 下文所确立结果的来源有两个：

首先，在真类的语境中， $VP$ 可作为集合存在性原理。具体而言，$VP$ 是如下形式的蕴含："如果$X_\phi$ 是真类，那么某某情况成立"。取其逆否命题，等价地说就是："如果某某情况不成立，那么 $X_\phi$ 是一个集合"。

其次，是 P. Vopˇenka、A. Pultr 和 Z. Hedrl´ın 关于刚性图的一个经典定理。给定一个集合 $A$ 和一个二元关系 $R \subset A \times A$，我们称（$A$， $R$）为一个图。给定一个图（$A$， $R$），若映射 $f\colon A \to A$ 满足对所有 $x$、$y \in A$，都有（$x$， $y$）$\in R \Rightarrow$（$f$（$x$） $f$（$y$））$\in R$，则称其为一个自同态。若图（$A$， $R$）的唯一自同态是恒等映射，则称该图是刚性的。Vopˇenka-Pultr-Hedrl´ın（V-P-H）结果 [8] 如下：

定理 6.2（V-P-H [8]）（ZFC）对于任意无限集合 $A$，存在一个二元关系 $R \subset A \times A$，使得图 $(A, R)$ 是刚性的。[7]

下文将定理 6.2 称为"V-P-H"。V-P-H 最初是在 ZFC 中证明的。目前尚不清楚它能否在 LZFC 中证明，但正如我们将看到的，LZFC 的一些合理的"局部风格"扩展可以证明它。下一个定理是本节的主要结果。

定理 6.3 若 $T$ 是一个满足 LZFC $\subseteq T$ 且 $T \vdash$V-P-H 的理论，则 ZFC $\subseteq T + VP$。

证明。设 $T$ 如上所述。只需证明 $T + VP$ 能证明替换公理和幂集公理。因此，该定理可直接由接下来的两个引理推出。⊣

引理 6.4 设 $T$ 是一个满足以下条件的理论：LZFC $\subseteq T$ 且 $T$ 证明 V-P-H。则：(i) $T + VP \vdash \Delta_0$-替换公理。(ii) $T + VP + \Delta_0$-替换公理 $\vdash$ 替换公理。(iii) $T + VP \vdash$ 替换公理。

[7]定理 6.2 给出了一个真类，其成员都是 $individually$刚性结构。正如 [1], 第 278–279 页所述，在证明这一结果后，P. Vopˇenka 认为，不仅可以构造这样一个由各自刚性的结构组成的真类，也可以构造一个 $rigid\ in\ itself$ 的结构真类。也就是说，他认为存在一个结构真类，其中任意两个不同元素之间都不存在非平凡同态（粗略地说，这与我们今天所说的 $VP$ 相反）。随后，他戏谑地提出了这一猜想的 $negation$，也就是我们现在所称的 $VP$，只是为了"逗弄"其他数学家，最终让他们证明一件他认为肯定是错的事情。

证明。(i) 设 $T$如上所述，并在 $T + VP$中进行讨论。为证明 $\Delta_0$-替换公理，设 $\phi(x, y)$ 是一个 $\Delta_0$ 公式，满足 $(\forall x)(\exists! y)\phi(x, y)$。照例，这定义了一个类映射 $F_\phi : V \to V$，使得 $F_\phi(x) = y$ 当且仅当 $\phi(x, y)$。固定一个集合 $A$。我们必须证明类 $B = F''_\phi A = \{F_\phi(x) : x \in A\}$ 是一个集合。根据假设，V-P-H 在 $T$中成立，因此固定一个二元关系 $R \subset A \times A$，使得 $(A, R)$ 是刚性的。对于每个 $b \in B$，考虑结构 $K_b = (A \times \{b\}, R_b, E_b)$，其中$R_b$是 $A \times \{b\}$ 上由 $R$诱导的二元关系，即，

$$((x, b), (y, b)) \in R_b \iff (x, y) \in R,$$

且 $E_b$ 是 $A \times \{b\}$ 上由以下方式定义的一元关系：

$$(x, b) \in E_b \iff F_\phi(x) = b.$$

设 $\mathcal{Z} = \{K_b : b \in B\}$。我们声称，只需证明 $\mathcal{Z}$ 是一个集合。假设 $\mathcal{Z}$ 是一个集合。显然，存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得 $B \subseteq \bigcup^n \mathcal{Z} = s$，并且 $s$ 是一个集合。因此，

$$B = \{y \in s : (\exists x \in A)(F_\phi(x) = y)\} = \{y \in s : (\exists x \in A)\phi(x, y)\}.$$

由于公式 $(\exists x \in A)\phi(x, y)$ 是 $\Delta_0$，且 $\Delta_0$-分离公理在$T$ 中成立（因为 LZFC $\subseteq T$，且 $\Delta_0$-分离公理在 LZFC 中成立），所以 $B$ 是一个集合。

现在来验证 $\mathcal{Z}$ 是一个集合。为导出矛盾，假设 $\mathcal{Z}$ 是一个真类。于是根据 $VP$，存在 $b$、$c \in B$、$b \neq c$，以及一个初等嵌入 $f : K_b \to K_c$。$f$ 诱导出映射$g : A \to A$，使得对每个 $x \in A$，$f(x, b) = (g(x), c)$。容易看出，$g : (A, R) \to (A, R)$ 是一个自同态。事实上，由 $f$ 的初等性可知，

$$(x, y) \in R \Leftrightarrow ((x, b), (y, b)) \in R_b \Leftrightarrow (f(x, b), f(y, b)) \in R_c \Leftrightarrow$$

$$((g(x), c), (g(y), c)) \in R_c \Leftrightarrow (g(x), g(y)) \in R.$$

由（$A, R$）的刚性，$g = id_A$，因此对每个 $x \in A$, $f(x, b) = (x, c)$。但接着，对每个 $x \in A$，我们有：

$$F_\phi(x) = b \Leftrightarrow (x, b) \in E_b \Leftrightarrow f(x, b) \in E_c \Leftrightarrow (x, c) \in E_c \Leftrightarrow F_\phi(x) = c,$$

这就矛盾了，因为 $b \neq c$。

(ii) 现在我们在 $T + VP+\Delta_0$-替换公理中工作，并证明完全替换公理成立。这个证明在很大程度上与上文条款 (i) 的证明相似。设 $\phi(x, y)$ 是一个公式，使得 $(\forall x)(\exists! y)\phi(x, y)$，并设 $F_\phi(x) = y$ 当且仅当 $\phi(x, y)$。我们再次固定一个集合 $A$，并证明如果$B = F''_\phi A$，那么 $B$是一个集合。我们像之前一样定义结构 $K_b$，并令 $\mathcal{Z} = \{K_b : b \in B\}$。与 (i) 的证明唯一不同之处在于，我们如何从 $\mathcal{Z}$ 是一个集合推断出 $B$ 是一个集合。由于现在 $\phi$ 需要

不是 $\Delta_0$，而且 LZFC 中没有完全分离公理，因此先前的论证行不通。但我们可以使用 $\Delta_0$-替换公理。鉴于后者，要证明 $B$ 是一个集合，只需证明$\mathcal{Z}$ 是一个集合，因为映射 $\mathcal{Z} \ni K_b \mapsto b \in B$ 是 $\Delta_0$-可定义且满射的。接下来我们完全按照 (i) 中的做法继续。也就是说，我们假设 $\mathcal{Z}$是一个真类，并导出同样的矛盾。

(iii) 由 (i) 和 (ii) 立即得出。 ⊣

引理 6.5 设 $T$ 是一个理论，使得 LZFC $\subseteq T$，且 $T$ 证明 V-P-H。则 $T + VP + \Delta_0$-替换公理 $\vdash$ 幂集公理。因此，由 6.4 (i) 可得，$T + VP \vdash$ 幂集公理。

证明。设 $T$ 如上所述，并反设结论不成立，即在 $T+VP+\Delta_0$-替换公理中，存在一个无限集合 $A$，使得 $\mathcal{P}(A)$ 是一个真类。只需导出矛盾即可。固定这样一个集合 $A$。再由 V-P-H 定理，固定一个二元关系 $R \subset A \times A$，使得 $(A, R)$ 是刚性的。对于每个集合 $X \in \mathcal{P}(A)$，考虑一阶结构 $S_X = (A, R, X)$，其中 $X$ 被解释为一元谓词。令 $\mathcal{X} = \{S_X : X \in \mathcal{P}(A)\}$。映射 $\mathcal{X} \ni S_X \mapsto X \in \mathcal{P}(A)$ 是 $\Delta_0$-可定义且满射的，因此由于 $\mathcal{P}(A)$ 是一个真类，$\mathcal{X}$ 也是真类。由 $VP$，存在 $X, Y \in \mathcal{P}(A)$、$X \neq Y$ 以及一个初等嵌入 $f\colon S_X \to S_Y$，即 $f\colon (A, R, X) \to (A, R, Y)$。特别地，$f\colon (A, R) \to (A, R)$ 是一个自同态，因此 $f = id_A$，因为 $(A, R)$ 是刚性的。现在，对于每个 $x \in A$，$S_X \models X(x) \Leftrightarrow S_Y \models Y(f(x))$，或者 $x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y$。由于 $f = id_A$，可得 $X = Y$，矛盾。⊣

定理 6.3 的证明。鉴于引理 6.4 和 6.5，定理 6.3 的证明完成。⊣

注记 6.6 注意，如果不需要一般的幂集公理，而只想证明 $\mathcal{P}(\omega)$ 是一个集合，那么在 LZFC $+ VP + \Delta_0$-替换公理中即可简单地证明这一点，无需定理 V-P-H，只需利用 $\omega$的刚性。也就是说，对每个 $X \subseteq \omega$，只需考虑结构 $K_X = (\omega, S, 0, X)$，其中 $S$是 $\omega$的后继运算，而 $X$ 是一元谓词。然后完全按照 6.5 的证明进行，并利用 $(\omega, S, 0)$ 具有刚性的事实，即可得出 $\mathcal{P}(\omega)$ 是一个集合。

接下来让我们探讨这样一个问题：LZFC 是否足以证明 V-P-H? 这需要考察 ZFC 中的证明（另见 [1,引理 2.64]，其中给出了更简洁的版本）。证明的思路是，给定一个集合 $A$，先将 $A$ 与形如 $\lambda + 2$的序数对应起来（使用 $AC$），然后巧妙地利用具有可数共尾性的序数$\alpha < \lambda + 2$来定义 $R$。接着通过对 $\lambda + 2$作归纳，证明 $(\lambda + 2, R)$ 的刚性，即对于每个自同态 $f$，$f(\beta) = \beta$，对每个 $\beta < \lambda + 2$均成立。因此，性质“$\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$”发挥着

构造 $R$的关键作用。这个性质可用一个 $\Sigma_1$ 句子表达，因此该构造并非绝对。这意味着，如果我们在 LZFC 中工作，给定一个集合 $A$，选取一个满足 $A \in M$的模型 $M$，并在 $A$ 上定义一个关系 $R$，使得 $M \models$ “$(A, R)$ 是刚性的”，我们便无法确定 $(A, R)$ 确实是刚性的。因此，LZFC 似乎不足以证明 V-P-H，至少按 ZFC 中证明后者的方式是如此。[8] 但是，如果给定一个集合 $A$，我们能够选取一个满足 $A \in M$且满足 $M \models \mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ 当且仅当 $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ 的模型 $M$，那么在 $M$中构造 $R$ 就能保证 $(A, R)$ 具有绝对刚性。

由此我们得到如下定义。该定义看起来相当特设，但它恰好给出了扩展 LZFC 以证明 V-P-H 所需的最低要求。

定义 6.7（LZFC）如果对于每个序数 $\alpha \in M$，$\mathrm{cf}^M(\alpha) = \omega \Leftrightarrow \mathrm{cf}(\alpha) = \omega$，则称模型 $M$ 为特殊模型。[9]

令 $spec(x)$ 表示性质“$x$ 是特殊模型”的形式表达式。照 usual 记法，$\mathrm{LZFC}^{spec} = \mathrm{LZFC} + Loc^{spec}(\mathrm{ZFC})$。

定理 6.8 $\mathrm{LZFC}^{spec} \vdash$ V-P-H。因此 ZFC $\subseteq \mathrm{LZFC}^{spec} + VP$。

证明。令 $A$ 为一个集合。根据 $Loc^{spec}$(ZFC)，我们可以选取一个特殊模型 $M$，使得 $A \in M$。在 $M$ 内应用 V-P-H，我们按照标准证明构造一个 $R \subset A \times A$，使得 $(A, R)$ 在 $M$ 中是刚性的。具体而言，我们将 $A$ 与 $M$ 的一个序数 $\lambda + 2$ 相对应，并按照 V-P-H 定义 $R$。我们断言 $(\lambda + 2, R)$ 是绝对刚性的。事实上，设 $f$ 是 $(\lambda + 2, R)$ 的一个自同态，且不属于 $M$。根据 $Loc$(ZFC)，存在一个模型 $N$，使得 $M \subset N$ 且 $f \in N$。由于 $M$ 是特殊的，对于每个 $\alpha < \lambda + 2$，$N \models \mathrm{cf}(\alpha) = \omega$ 当且仅当 $M \models \mathrm{cf}(\alpha) = \omega$，当且仅当 $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$。因此，在 $N$ 中可以通过归纳证明，对于每个 $\beta < \lambda + 2$，$f(\beta) = \beta$，这与在 $M$ 中对 $M$ 的自同态所作的证明完全相同。由此可得 $f = id$。另一个断言由定理 6.3 得出。⊣

现在，特殊模型与第 3 节中讨论的强可延拓模型有关，尤其是它们作为 $V$ 的 $\Sigma_1$-初等子模型这一性质（见引理 3.9 (i)）。正如脚注 3 中已经指出的，要具备这一性质，并不需要强可延拓性的全部强度，只需要其中的 $\Sigma_1$ 部分。因此，下面是一种介于特殊模型与强可延拓模型之间的性质。

定义 6.9 如果对于每个 $x$，都存在一个模型 $N$，使得 $x \in N$ 且 $M \prec_{\Sigma_1} N$，则称模型 $M$ 是 $\Sigma_1$-强可延拓的。

[8] 当然，不能排除在 LZFC 中以一种与 [8]，本质不同的方式证明 V-P-H 的 $new$ 证明的可能性。[9] 这种特定的“特殊模型”与经典模型论中所说的特殊模型并无关联。

令 $\Sigma_1 sext(x)$ 表示表达“$x$ 是 $\Sigma_1$-强可延拓的”的公式。

引理 6.10 (i) 若 $M$ 是 $\Sigma_1$-强可延拓的，则 $M \prec_{\Sigma_1} V$。

(ii) 对每个 $M$,

$$sext(M) \Rightarrow \Sigma_1 sext(M) \Rightarrow spec(M).$$

LZFC$^{spec}$ $\subseteq$LZFC$^{\Sigma_1 sext}$ $\subseteq$ LZFC$^{sext}$。

证明。(i) 设 $M$ 是 $\Sigma_1$-强可延拓的，并设 $\exists \overline{x} \phi(\overline{x}, \overline{c})$ 是一个满足 $\overline{c} \in M$ 的 $\Sigma_1$ 句子，使得 $V \models \exists \overline{x} \phi(\overline{x}, \overline{c})$。那么，对某个 $\overline{a}$，有 $V \models \phi(\overline{a}, \overline{c})$。由 $\Sigma_1$- 强可延拓性，存在一个模型 $N$，使得 $\overline{a}$、$\overline{c} \in N$ 和 $M \prec_{\Sigma_1} N$。由于 $\phi$ 是有界的，因此 $N \models \phi(\overline{a}, \overline{c})$。于是 $N \models \exists \overline{x} \phi(\overline{x}, \overline{c})$，所以 $M \models \exists \overline{x} \phi(\overline{x}, \overline{c})$ 也成立。

(ii) 第一个蕴含显然。另一个蕴含由 (i) 以及谓词“cf($\alpha$) $= \omega$”是 $\Sigma_1$ 这一事实得出。

(iii) 由 (ii) 立即可得。 ⊣

推论 6.11 LZFC$^{\Sigma_1 sext} \vdash$ V-P-H。因此

$$\mathrm{ZFC} \subseteq \mathrm{LZFC}^{\Sigma_1 sext} + VP \subseteq \mathrm{LZFC}^{sext} + VP.$$

证明。由 6.10 (iii)，LZFC$^{\Sigma_1 sext}$ 比 LZFC$^{prec}$更强。因此该断言由 6.8 得出。 [或者，也可由 6.10 (i) 得证。注意，“($A, R$) 是刚性的”这一陈述本身是 $\Pi_1$。因此，如果 $(A, R) \in M$, $M$是 $\Sigma_1$-强可延拓的，并且 $M \models$“($A, R$) 是刚性的”，那么 $(A, R)$ 是绝对刚性的。] ⊣

推论 6.12 (i) LZFC$^{\Sigma_1 sext} \vdash$ 幂集公理。

(ii) 在 LZFC$^{\Sigma_1 sext}$ 中，我们有 $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$，其中 $V_\alpha = \mathcal{P}^\alpha(\emptyset)$。如果 $M$是 $\Sigma_1$-强可延拓的，则 $M = V_\alpha$ 对某个序数 $\alpha$成立。

证明。与命题 3.10 (i) 和命题 3.11 的证明一样，这两个断言都只需用到这样一个事实：每个集合都属于一个模型 $M$，使得 $M \prec_{\Sigma_1} V$；根据 6.10 (i)，这一点在 LZFC$^{\Sigma_1 sext}$ 中成立。⊣

我们看到，理论 LZFC$^{spec}$、LZFC$^{\Sigma_1 sext}$ 和 LZFC$^{sext}$ 是 6.3 中理论 $T$ 的合理实例；该理论加入 $VP$ 后便可恢复 ZFC。此外，如命题 3.12 所示，LZFC$^{sext}$ 的一致性强度（因而前述其余理论的一致性强度）不高于存在一个强不可达基数这一命题的一致性强度。

我们还可以进一步证明，对于某些前述理论，$T$与 ZFC$T + VP$是相同的。实际上，只需证明 ZFC $+ VP \vdash Loc^{sext}$(ZFC) 即可。为此，我们需要用到可扩展基数，并回顾其定义（参见 [4, 第 379 页及后续内容]）。

定义 6.13 基数 $\kappa$ 是可扩展的，当且仅当对于每个 $\alpha > \kappa$，都存在一个 $\beta$ 和一个初等嵌入 $j\colon V_\alpha \to V_\beta$，使得 $\kappa =$crit($j$)。

可延拓基数非常大。每个可延拓基数都是超紧致的，因此也是强的。所以根据引理 3.14，如果 $\kappa$ 是可延拓的，那么 $V_\kappa$ 是强可延拓的。

引理 6.14 在 ZFC 中，$+VP$ 存在真类的可延拓基数。

证明。见 [4] 的引理 20.25 及其证明之后紧接着的备注。⊣

定理 6.15 ZFC+ $VP \vdash Loc^{sext}$(ZFC)。因此

$$\mathrm{LZFC}^{sext} + VP \subseteq \mathrm{ZFC} + VP.$$

证明。假设 ZFC $+VP$，并令 $x$ 为一个集合。由 6.14 可知，存在一个可延拓基数 $\kappa$，使得 $x \in V_\kappa$。每个可延拓基数都是强的；因此，根据引理 3.14，$V_\kappa$ 是一个强可延拓模型。于是每个 $x$ 都属于一个强可延拓模型，因此 $Loc^{sext}$(ZFC) 为真。⊣

定理 6.16 理论 (a) ZFC $+VP$、(b) LZFC$^{sext} + VP$、(c) LZFC $^{\Sigma_1 sext} + VP$、(d) LZFC$^{spec} + VP$ 是相同的。

证明。由 6.8、6.10 (iii) 和 6.15 可得

$$\mathrm{ZFC} + VP \subseteq \mathrm{LZFC}^{spec} + VP \subseteq \mathrm{LZFC}^{\Sigma_1 sext} + VP \subseteq$$

$$\mathrm{LZFC}^{sext} + VP \subseteq \mathrm{ZFC} + VP.$$

⊣

由 6.14 和 6.15 可知，$VP$ 与 ZFC 结合时有强推论。但若与 LZFC 结合呢？特别是，以下问题尚无定论。

问题 6.17 LZFC $+ VP$ 能证明 V-P-H 吗?

问题 6.18 LZFC$+VP$ 能证明 $Loc^{sext}$(ZFC)（或较弱的原则 $Loc^{\Sigma_1 sext}$(ZFC)、$Loc^{spec}$(ZFC) 中的某些原则）吗?

如果上述问题中任一个的答案是肯定的，那么 LZFC$+VP$ 也能恢复 ZFC，因此本节的结果可以得到显著改进。然而，我们所能证明的只有以下内容。

命题 6.19 LZFC $+ VP \vdash Loc^{ext}$(ZFC)。

证明。设 $a$ 是 LZFC+$VP$ 宇宙中的一个集合。我们必须证明，存在一个 ZFC 的可延拓模型 $M$，使得 $a \in M$。设 $\mathcal{U} = \{(M, \in, \{x\}_{x \in TC(\{a\})}) : M \in \mathcal{M}(a)\}$。鉴于上面的 6.1，很容易看出 $\mathcal{U}$ 是一个真类。根据 $VP$，存在 $M \neq N$ 属于 $\mathcal{M}(a)$，以及一个初等嵌入

$$j : (M, \in, \{x\}_{x \in TC(\{a\})}) \to (N, \in, \{x\}_{x \in TC(\{a\})}).$$

若 $j = id$，则 $M \prec N$；因此 $M$ 是可延拓的。令 $j \neq id$。由 $j$ 的定义，$j \restriction TC(\{a\}) = id$。令 $\kappa = \mathrm{crit}(j)$。根据引理 4.1 (iii)，$M_\kappa$ 是由 $j$ 固定的 $M$ 的最大传递子集，因此 $TC(\{a\}) \subseteq M_\kappa$。于是 $a \in M_\kappa$。此外，根据 4.1 (v)，$M_\kappa \models$ ZFC；并且根据 4.1 (vi)，$M_\kappa \prec j(M_\kappa) = N_{j(\kappa)}$。因此 $M_\kappa$ 是一个可延拓模型，且 $a \in M_\kappa$。⊣

致谢 我谨感谢匿名审稿人，他们发现了本文先前草稿中的若干错误。

## 参考文献

[1] J. Ad´amek 和 J. Rosick´y，《局部可表范畴与可接近范畴》，伦敦数学会讲义丛书，第 189 卷，剑桥大学出版社，1994 年。[2] P. Corazza，初等嵌入的谱 $j : V \to V$，《纯粹与应用逻辑年刊》139（2006），327-399。[3] K. Devlin，《可构造性》，数学逻辑展望丛书，第 6 卷，施普林格，1984 年。[4] T. Jech，《集合论》，第三千年版，施普林格，2003 年。[5] A. Kanamori，《高阶无穷》，数学逻辑展望丛书，施普林格，1997 年。[6] R. Montague 和 R.L. Vaught，《集合论的自然模型》，《数学基础》XLVII（1959），219-242。[7] A. Tzouvaras，《公理的局部化》，《数学逻辑档案》49（2010），第 5 期，571-601；以及《公理的局部化》的勘误，《数学逻辑档案》50（2011），第 3 期，513。[8] P. Vopˇenka、A. Pultr 和 Z. Hedrl´ın，《任意集合上都存在刚性关系》，《卡罗琳大学数学评论》6（1965），149-155。