基于XVoxel的特征模型参数化设计优化

Ming Li、Chengfeng Lin、Wei Chen、Yusheng Liu、Shuming Gao、Qiang Zou*

计算机辅助设计&图形学国家重点实验室，浙江大学，中国杭州，*310027*

arXiv:2303.15316v1 [cs.CE] 17 Mar 2023

摘要

参数化优化是一种重要的产品设计技术，在现代参数化特征建模CAD范式中尤为如此。然而，要充分发挥其潜力，需要在CAD与CAE之间建立闭环（即CAD/CAE集成），并实现设计修改和仿真更新的自动化。传统上，人们通常采用模型转换的方法来构建这一闭环，但这种工作方式难以自动化，且需要人工输入。因此，整个优化过程过于繁琐，难以实际应用。为解决这一问题，本文提出一种新的参数化优化方法，该方法基于一种名为扩展体素（XVoxels）的统一模型表示方案。该方案将特征模型与体素模型融合为一种新的语义体素概念，其中体素部分负责有限元求解，语义部分则负责提供高层信息，以捕获设计意图和仿真意图。这样，该方案便能在设计模型与分析模型之间建立直接映射，进而实现设计修改时仿真结果的自动更新，反之亦然，从而有效地形成CAD与CAE之间的闭环。此外，本文还提供了用于操作XVoxel模型的稳健高效几何算法，以及用于仿真XVoxel模型的高效数值方法（基于近期提出的有限胞元法）。通过一系列复杂度逐渐提高的案例研究验证了所提出方法的有效性。特别是，与现有的FCM方法相比，计算效率最高提升了55.8倍。

关键词：设计优化；参数化建模；特征模型；扩展体素（XVoxels）；语义体素；有限元法（FCM）；计算机辅助设计/计算机辅助工程集成

1. 引言

设计优化因能够提高产品质量、降低成本并缩短产品上市时间，已被公认为产品设计领域的主流工业实践之一 [1]。优化可以通过多种方式实现，其中参数化优化是主要方法之一 [2]。它通过外部定义的目标函数，对嵌入基于特征的CAD模型中的、具有工程意义的参数进行优化 [3]。这类设计优化已应用于众多领域，包括汽车、造船和航空航天工业。

尽管参数化优化在现代基于特征的CAD [4], 中非常重要且有益，但要充分实现它并非易事。其运行依赖于CAD与CAE之间的闭环，其中包含自动设计修改和仿真更新 [5, 6]。由于CAD模型和CAE模型中存储的信息内容不同，构建这样的闭环十分困难 [1]。具体而言，CAD模型旨在准确描述设计，以便自动处理制造和装配过程中的各种查询。它通常由特征历史、几何约束和参数定义组成（这些内容共同涵盖设计意图） [4]。CAE模型则包含边界条件、材料分布以及适用于有限元法或类似方法的体网格，这些内容涵盖仿真意图 [5, 7]。

为解决CAD模型与CAE模型之间的不一致，通常采用模型转换方法。如图1所示，典型的转换过程从特征模型开始，依次经过边界表示（B-rep）生成、模型简化、体网格生成和边界条件设定等步骤，最终形成可用于有限元求解的仿真模型。随后，求解结果将用于对特征模型进行参数修改，以开展下一次优化迭代。重复这些步骤即可获得优化后的设计。

尽管其概念较为简单，但转换过程中存在若干技术难题。通常，模型简化和网格生成步骤难以自动化，并且需要人工输入 [8–11], 设计优化与调整无法直接反馈到CAD建模操作中 [12], 重要的设计意图在转换后可能会丢失 [5, 7]。在迭代设计优化的背景下，这种低效性将被大幅放大，因此整个过程过于繁琐，难以接受。据报道，在上述基于转换的过程中，人工干预约占总体设计时间的80% [5, 13]。

鉴于上述问题，人们认为，能够完整、紧凑且关联地表示

*通讯作者。电子邮箱：qiangzou@cad.zju.edu.cn （Qiang Zou）

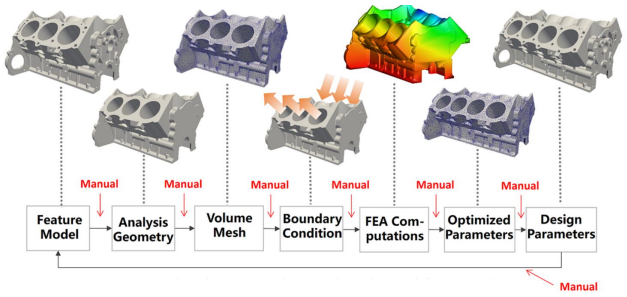


图 1. 基于转换的传统参数化设计优化流程。

计算机辅助设计和计算机辅助工程模型内容的统一表示方案，是一种备受期待的参数化设计优化方法 [5]。本文沿着这一方向，提出一种名为扩展体素（XVoxel）的新表示方案，以解决这一问题。该方案本质上采用语义体素（将在第 3 节详细介绍），其中体素部分负责有限元求解，语义部分则负责承载高层信息，以捕捉设计意图和仿真意图。总而言之，XVoxel模型具有以下优势：

- 设计和仿真意图可以在设计、仿真和优化的循环中得到保留；而在基于转换的方法中，这些意图会丢失，必须重新构建。相关细节见第 3.1 节和第 4.3 节。

- 分析几何体和体网格可以通过虚拟方式生成。因此，有可能避免耗时且不稳健的模型简化和网格生成，并在优化迭代过程中良好保留边界条件。相关细节见第 3.3 节和第 3.4 节。

- 设计参数的修改与仿真结果的更新可以自动、局部地关联，从而实现设计、仿真和优化之间自动且高效的循环。相关细节见第 3.2 节和第 4.3 节。

- 结合虚拟域技术与材料感知形函数，可以在粗略的XVoxel模型上高效仿真特征模型，同时保持较高精度。相关细节见第 4.1 节和第 4.2 节。

以下各节将首先在第 2 节回顾现有的参数化优化方法。第 3 节将详细介绍 XVoxel 模型。第 4 节和第 5 节将分别介绍基于 XVoxel 的仿真和设计优化。第 6 节将给出应用示例及与现有方法的比较，最后在第 7 节总结全文。

2. 相关工作

参数化优化旨在针对特定性能指标寻找最优设计参数。相关方法包括基于转换的优化、基于统一模型的优化，以及参数驱动的拓扑优化。

2.1. 基于转换的参数优化

基于转换的参数优化在实践中已成为事实标准，但对于复杂的 CAD模型 或边界条件，可能需要大量人工工作，以确保所有转换步骤能够依次完成 [1, 6]。典型的转换流程包括模型简化、体网格生成、边界条件设定和设计修改。尽管已经取得了进展，并且可以利用特征抑制 [8], 直接建模 [14], 虚拟拓扑 [15, 16], 等方法简化几何体，但现有方法要么适用范围受限，要么存在稳健性问题，因此仍需要大量人工干预。非结构网格（例如四面体网格）的生成几乎已经是一个解决的问题 [17, 18]。然而，自动生成结构网格仍然是一个尚未解决的问题；在要求较高计算精度和效率的应用中，结构网格更具优势 [19]。

在实际操作中，边界条件大多由人工指定，因此，在设计优化过程中，特征模型与其仿真之间可能需要循环数千次，这需要投入大量人力。显然，这是不可接受的。解决这一问题的一种常见方法是指定固定边界条件或施加简单的变化载荷，例如用于拓扑优化 [20]。然而，这些方法会限制所研究问题的范围。通过引入细胞建模和等效化的概念来定义仿真意图，从而在更广泛的意义上解决了这一问题 [5, 7]。这种方法与本研究的理念相似，但并未使用标准体素进行仿真。人工干预显然会降低设计效率，并使设计优化难以实现自动化，甚至可能完全无法自动化。

还需注意，在基于转换的参数优化中，底层有限元网格会在每个设计更新步骤中发生变化，导致设计空间也随之改变。因此，这通常会导致优化收敛不稳定。

2.2. 统一模型驱动的参数优化

现有的统一模型驱动的参数优化方法主要包括等几何分析（IGA）、嵌入式域方法或二者的组合。

Hughes等人提出的等几何分析（IGA） [21], 在设计和分析中采用统一的几何表示方案，即 NURBS（非均匀有理 B 样条）。基本上，它摒弃了显式网格，而是利用 NURBS 曲面的节点矢量和样条基，直接生成用于有限元求解的单元和形函数 [22]。由于省去了网格生成步骤（原则上如此），IGA 为计算机辅助设计与计算机辅助工程的紧密集成提供了支持，可实现自动设计优化；其优势不仅体现在集成方面，还包括更高的仿真精度和效率 [2, 23–25]。

然而，IGA 仅适用于具有规则参数域的曲面模型。对于由裁剪 NURBS 曲面或三维体模型组成的一般形状，必须对其边界进行四边形网格划分，或对其体积进行六面体网格剖分，而这两者本身都是颇具挑战性的研究课题。本文将介绍的 XVoxel 方法不存在这一问题，因为它不涉及 B-rep 模型或网格剖分过程。当提供给 IGA 的 B-rep 模型较为复杂，导致模型简化时出现稳健性问题，且四边形/六面体网格划分困难时，这一优势尤为明显。不过，需要指出的是，IGA 仿真精度更高，且可直接将 B-rep 模型作为输入，而 XVoxel 无法做到这一点。因此，在此类情况下，IGA 更为适用。

与以设计模型（即 NURBS）为核心的 IGA 不同，有限胞元法（FCM）等嵌入域方法 [26] 关注的是另一侧，即网格。无论设计模型如何变化，它都使用相同的规则背景网格（例如网格）进行有限元求解。因此，在优化过程中修改设计模型时，无需进行网格生成。这主要通过高阶有限元和对非拟合本质边界条件的弱施加来实现。FCM 也曾与 IGA 结合使用，以兼具二者的优势 [27, 28],，但其中大多数研究并未探讨其在特征模型上的应用。最近，Wassermann等人 [29] 研究了在构造实体几何模型上实施 FCM 的问题，重点探讨了不同基本体的点包含分类问题；而本研究则关注特征模型参数化优化的整体集成流程图。

本研究将嵌入域方法与基于特征的方法相结合，以便在背景网格（其本质上纯粹是几何性的）中嵌入设计语义和仿真语义；背景网格充当通用数据结构，而嵌入的语义则在设计修改与仿真更新之间建立自动关联。

2.3. 参数驱动的拓扑优化

研究人员致力于CAD模型的参数化优化，主要关注如何找到描述特定CAD零件的最优形状参数，但很少探讨如何将设计语义融入优化过程。

Chen等人考虑使用R函数进行具有拓扑变化的设计优化 [3, 30]。Zhu等人提出了一种针对发生参数修改的CAD模型的直接仿真方法 [31] ，采用一种称为PGD（适当广义分解）的模型降阶技术 [32]。Schulz等人通过预计算开发了一种探索工具，用于交互式探索和优化参数化CAD模型 [33] 。最近，Hafner等人提出了一种基于扩展有限元法（XFEM）的通用形状优化方法，称为X-CAD，适用于CAD模型 [34]。这些方法无需复杂的模型转换过程，而是在嵌入式背景网格上运行，以实现整个过程的自动化。

为保持设计意图，应调整CAD模型的特征参数或特征历史[35]。在特定CAD特征的约束条件下进行拓扑优化，已引起研究者的关注。Zhang及其同事针对实际工程设计，对这一主题进行了广泛研究 [36–39]。最近，Guo提出了一种新颖的MMC（可移动变形组件）拓扑优化方法 [40–42], ，该方法在拓扑优化过程中采用变形杆作为基本特征，以便于几何控制。然而，大多数方法只研究了抽象的单一参数化特征，未考虑设计历史。最近，Liu和To [12] 首次将CAD模型的特征建模历史纳入设计优化过程。本研究沿着这一方向展开，但采用一种更自动、高效的方法，即 XVoxel，通过在整体优化过程中嵌入设计意图来优化特征参数。

3. XVoxel模型

本节介绍特征、体素及其组合而成的XVoxels，并介绍用于构建和操作XVoxel模型的数据结构与算法。

3.1. 从特征和体素到*XVoxels*

目前尚无广受认可的特征定义。本文采用的定义由 Shah [4] 给出：特征是模型形状中具有一定工程意义的通用部分。粗略而言，特征是 CAD模型中的几何实体集合，可用作信息容器来承载领域特定属性，例如材料和边界条件。特征模型由一组特征构成，其组合方式类似于传统的构造实体几何，如图 2 所示。实际上，如今几乎所有商用 CAD 系统都使用特征作为内部表示，以构建和 / 或编辑其 CAD 模型 [43]。用户首先定义几何实体的拓扑，然后指定彼此相关的几何约束条件，从而设计特征。特征可定位在空间中的任意位置，也可相对于现有特征定位（同样通过几何约束条件实现）。因此，CAD模型的几何实体以关联式和层次化的方式存储。随后，这些特征的参数变化可按预定义方式自动传播 [44]。这正是实现参数化设计优化的基础。

体素是空间中的立方体状元素，体素模型是由体素集合构成的、表示感兴趣三维几何形状的模型。体素模型可以存储为被几何形状占据的体素数组，也可以存储为一个网格，其中的二进制标签表示每个体素与几何形状之间的占据关系；另见图 3。前一种存储方案通常用于表示静态几何体，后一种则用于表示动态几何体（因此本研究选择了后一种方案）。

本文提出将特征与体素结合，即将特征嵌入体素中。传统的 CAD/CAE 集成

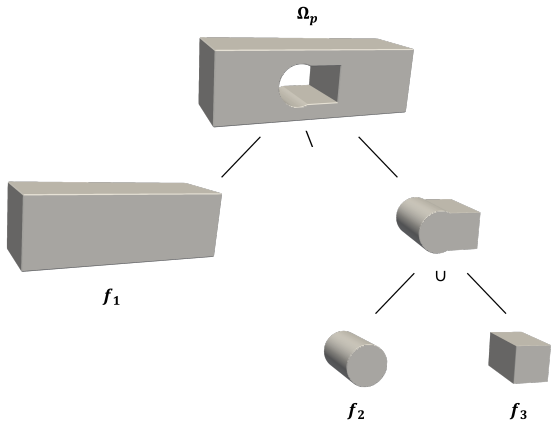


图 2. 一个构造实体几何示例。

方法始终将特征用作信息容器，以存储设计意图（例如形状参数化）和仿真意图（例如网格划分过程和边界条件）[45]。在本文中，体素是承载设计意图和仿真意图的信息容器。这一转变引出了语义体素的概念（本文将其命名为 XVoxels ）。这样做的主要优点是，可以大幅避免显式生成分析几何体和网格，进而实现 CAD 与 CAE 之间自动化的闭环。接下来的几个小节将对此进行说明。首先介绍用于表示 XVoxel 模型的具体数据结构，以及用于操作这些模型的一些基本操作。

3.2. XVoxel 表示与操作

XVoxel模型由两个部分组成：特征列表和体素属性数组，如图 3 所示。特征列表实际上是一个无序的特征集合（已关联边界条件、材料属性等）。体素属性将每个体素与占据该体素的特征相关联。模型中存储了三种特征属性：特征占据状态、特征性质和特征历史。对于一个体素，特征占据状态描述该体素被某个特征完全占据还是部分占据；特征性质表示占据该体素的特征是在添加材料还是在减去材料；特征历史则指该体素所有占据特征的优先顺序。

例如，考虑图 3 中的模型，并聚焦于特征 F1。它占据了蓝色体素。位于其边界上的体素为部分占据，而其内部的体素为完全占据。图 3b 中的加号表示被占据的体素为正（与 F1 的性质相同）。按照相同原理，可以为特征 F2 和 F3 生成另外两个体素属性数组，如图 3b 所示。按时间顺序组合这三个体素属性数组（即 F1 → F2 → F3），便得到一个 XVoxel模型，其中每个体素都保留一个有序的三元组列表（特征索引、特征性质、占据完整度），如图 3b 最右侧的四个列表所示。

在 XVoxel 模型中，确定模型的实际形状仅取决于 XVoxel 的性质，即单个 XVoxel 的属性列表中最后一个特征的性质。这是因为无论最后一个特征是添加材料还是去除材料，它都会覆盖之前的所有操作。一种例外情况是，最后一个特征仅部分占据某个 XVoxel；此时，该 XVoxel 的性质是属性列表中最后几个特征的复合结果，具体而言，是从最后一个完全占据该 XVoxel 的特征一直到列表末尾的所有特征共同决定的。下文将此类 XVoxel 称为具有复合性质的 XVoxel。在使用 XVoxel 进行属性仿真时，下一小节将提出专门的算法来处理这种情况。

上述陈述似乎意味着，无需存储 XVoxel 的所有历史特征性质，只需存储最后一个（或最后几个）即可。实际上，保存这些信息是为了便于执行 XVoxel 操作，具体如下文所述。尤其是，与传统特征建模方法在执行特征布尔运算后立即丢弃负特征性质不同，我们持续存储负特征性质这一新颖思路，使所有操作都能以局部、高效且稳健的方式进行。

特征添加 此操作通过使用用户指定的特征参数值实例化所选特征类，来创建一个新特征。实例化后，根据特征的形状范围确定其占据哪些体素，然后将该特征的属性（即上文所述的三元组）追加到这些体素的属性列表末尾。此添加操作是根据给定特征模型构建 XVoxel模型的基础。我们只需按照模型中各特征的时间顺序，依次重复此操作。

特征删除 只需将选定的特征从 XVoxel 模型的特征列表中移除，并相应更新特征依赖关系，同时从相关 XVoxels 的属性列表中删除其属性。为了便于检索相关 XVoxels，我们还将每个特征与其在 XVoxel 数据结构中占据的 XVoxel 索引列表关联起来（在特征添加过程中即可轻松记录）。对于每个相关的 XVoxel，我们在线性搜索其属性列表中对应的特征条目，找到后将其从当前位置移除。（请注意，在实际操作中，由于每个 XVoxel 中的属性以链表形式存储，因此需要通过后处理步骤修正列表中剩余条目的链接指针。）如果启用了并行计算，我们可以同时搜索并移除所有 XVoxels 中的相应条目，而无需建立从特征到相关体素的关联。也可以并行删除多个特征。不过需要注意的是，为避免在删除同一 XVoxel 中的特征属性时发生竞态条件，在移除某个特征条目的操作期间，我们会锁定该列表。

参数编辑 此操作会修改特征的参数值。在后台，我们首先将该特征从 XVoxel 模型中删除，然后按照它在特征历史中的原始优先顺序，将修改后的版本重新添加到 XVoxel 模型中。因此，无需额外的算法。考虑到特征之间通常相互依赖 [46], 上述两个步骤会进行调整，将正在编辑的特征的依赖特征也纳入其中。

特征重排 此操作会修改特征的顺序（前提是不破坏特征依赖关系）。我们只需更新

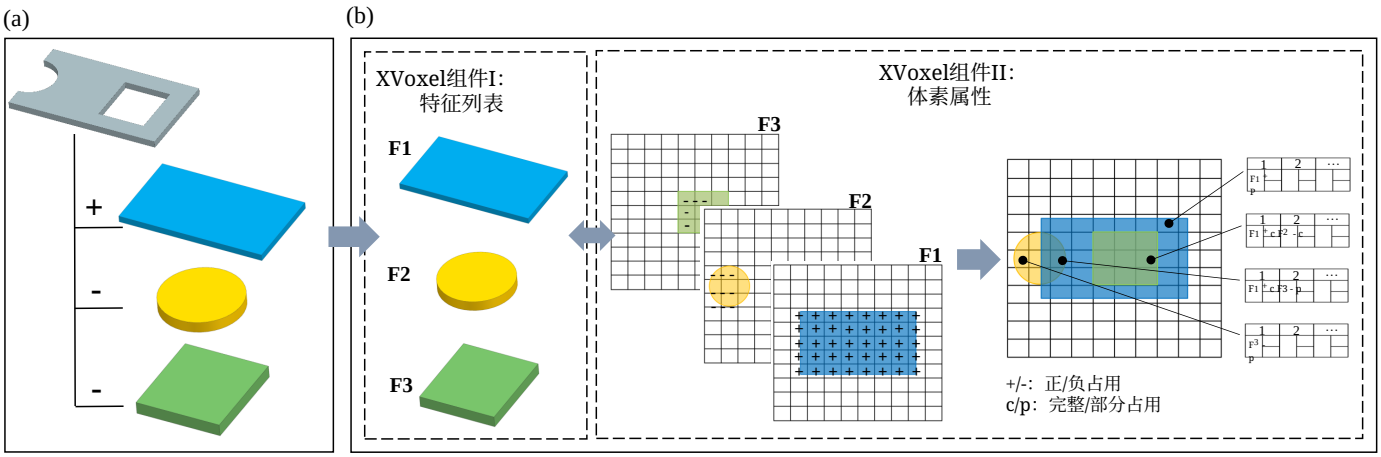


图 3. XVoxel数据结构示意图：(a) 一个特征模型（加号表示布尔加法，减号表示布尔减法）；(b) 对应的XVoxel模型。

各个 XVoxels 的属性列表中的顺序，以适应重排。

如上所示，除加法操作中需要确定由待添加特征占据的体素外，上述操作均不涉及耗时且不稳健的几何计算。所有操作都归结为对某个链表中的条目进行操作，因此易于实现，稳健且高效。确定被占据体素的关键任务是以与XVoxel模型相同的分辨率，将给定特征的形状体素化。请注意，此处对单个特征形状进行体素化，这些形状通常是长方体或球体等基本体，而非所有特征组合而成的整体形状，后者通常较为复杂。已有许多算法可用于将特征的B-rep模型体素化；鉴于Young和Krishnamurthy [47]提出的方法效率很高，本研究采用了该方法。在特征实例化过程中，通常可直接获取特征的B-rep模型；几乎所有现代商用CAD建模器都提供此功能。

3.3. 虚拟模型简化

模型简化[1] 是指移除一些对仿真意义不大的设计特征（例如较小的钻孔）。如果使用XVoxel 模型，这项任务就会变得十分简单。我们需要做的只是应用上一小节所述的删除操作。唯一的问题是，与传统的基于特征的模型简化方法类似，直接移除某个特征可能会导致持久命名问题，最终破坏设计—分析循环。具体而言，在特征建模中，各特征相互依赖，以实现参数更改的自动传播 [44]。移除某个特征会使所有与其相关的依赖关系变得未定义，进而使整个模型失效，这就是所谓的持久命名问题[1] 。

[1]需要指出的是，比模型简化更为普遍的概念是模型理想化，后者还包括额外的降维任务 [10, 48, 49]。由于 XVoxel 模型是三维的，因此其当前形式无法处理降维后的几何体。作者希望在未来的研究中扩展 XVoxel，使其能够表示低维几何体。

依赖关系变得未定义，进而使整个模型失效，这就是所谓的持久命名问题 [50]。

为解决这一问题，我们对删除操作进行了细微调整。第 3.2 节中的删除操作会直接从 XVoxel 模型的特征列表中移除一个特征。相反，我们保留该特征，但通过将特征列表与位掩码关联，使其对体素属性透明；位掩码中的 0 元素表示相应位置的特征已被虚拟移除。这样既避免了棘手的持久命名问题，同时模型简化过程中也不涉及实际的几何操作。这样做的另一个好处是，一旦边界条件与某些特征关联起来，即使发生设计修改，它们也能在整个优化迭代过程中保持不变，因为这些特征被完整地存储在 XVoxel 模型中。

3.4. 点成员分类

传统上，模型简化之后的下一步是生成边界贴合网格，以供后续仿真任务使用。然而，这一领域仍有许多重要问题尚未得到解答 [21]。本研究将该问题重新表述为高斯积分点选择中的点成员分类（PMC）问题，并将其与近期开发的用于物理仿真的 FCM 方法结合起来。该方法将计算物理域（即特征模型的几何形状）嵌入更大的规则网格（如网格）中，然后将有限元计算转换到嵌入网格上 [26]。（下一节将详细介绍 FCM。）这种工作方式与 XVoxel 模型十分契合。

如果一个 XVoxel 具有正性质且完全占据，则它完全位于模型形状内部。随后，可以完全按照传统有限元法的方式计算该 XVoxel 的刚度矩阵。如果一个 XVoxel 具有复合性质，则该 XVoxel 穿过模型形状的边界。根据 FCM，需要对体素进行细分，以生成此类边界 XVoxels 的刚度矩阵，而这又依赖于

点成员分类（PMC）算子，用于确定边界 XVoxel 内的一个采样积分点相对于模型形状是位于内部、边界上还是外部。

由于 XVoxel 模型为每个 XVoxel 预先记录了特征占据状态的历史，因此，针对整体模型形状的 PMC 问题可以转换为一系列针对单个特征的简单得多的 PMC [51]。该转换包括三个主要步骤：(1) 筛选相关特征；(2) 针对每个筛选出的特征评估 PMC；(3) 汇总评估结果，得出最终的 IN/ON/OUT 判定。显然，并非所有占据某个 XVoxel 的特征都会对其最终形状（即 XVoxel 的哪些部分为实体或空 void）产生贡献。根据 XVoxel 的属性列表，候选特征包括从最后一个具有完全占据属性的特征到末端特征之间的所有特征（见第 3.2 节）。因此，筛选步骤只需从属性列表末端向前追溯，直到找到第一个具有完全占据属性的条目即可。

确定相关特征后，接下来确定查询积分点与每个特征之间的 IN/ON/OUT 关系。设相关特征表示为f_1, f_2、$\cdots$、f_n，其对应的隐式表示表示为 ϕ_1、ϕ_2、$\cdots$、ϕ_n。在本文中，特征隐式化首先通过足够高精度的三角剖分，将其 B-rep 模型转换为三角形，然后为这些三角形构建 KD树，以便快速查询给定点与该特征之间的（近似）有符号距离，方法类似于 [52] 中介绍的方法。需要注意的是，当然还存在其他可选方法 [53], ，而我们选择此方法是因为其简单高效。给定点 **x** 相对于特征 f_i 的 IN/ON/OUT 状态由 ϕ_i**(x)** 的符号确定：

$$\begin{cases} \phi_i(\mathbf{x}) > 0 & \rightarrow \quad \mathbf{x} \text{ IN } f_i, \\ \phi_i(\mathbf{x}) = 0 & \rightarrow \quad \mathbf{x} \text{ ON } f_i, \\ \phi_i(\mathbf{x}) < 0 & \rightarrow \quad \mathbf{x} \text{ OUT } f_i. \end{cases} \tag{1}$$

为了将各个分类结果汇总为最终的 IN/ON/OUT 判定，我们再次利用存储在每个 XVoxel 中的特征历史。首先，从相关特征集中过滤掉被分类为 OUT 的特征，因为它们对材料添加/移除过程没有任何贡献。然后，最终的 IN/ON/OUT 判定与最后一个剩余相关特征的性质相同：如果其性质为正，则材料会被添加到查询点，最终判定为 IN/ON ；否则，最终判定为 OUT。这是因为最后一次材料移除/添加操作会覆盖之前的所有操作。

总之，这些方法共同构成了一种从 XVoxel 模型生成适用于 FCM 求解的“网格”的方法。该网格并非显式生成，而是通过结合承载 XVoxel 模型的固定网格与专为 XVoxel 模型开发的隐式 PMC 算子来实现。因此，该方法易于实现。不过需要注意的是，在特征隐式化过程中使用三角剖分会引入误差，从而可能导致 PMC 中出现误分类。事实上，这通常是可以接受的，因为我们能够进行高精度三角剖分。此外，由于 FCM 具有积分特性，因此对这类误分类并不十分敏感。

4. 基于 XVoxel 的仿真

本文将采用遵循类 FCM 框架的虚拟域方法开展仿真 [26],，该方法可直接处理体素模型。我们从两个方面提高了这种方法较低的计算效率：（1）引入材料感知分段矩阵值形函数，依据先前研究 [54]，称为 CBN（曲线桥接节点）形函数；（2）利用 XVoxel 模型的局部计算特性。

4.1. 基于 *XVoxel* 的仿真所用的有限单元法（*FCM*）

FCM 的基本思想是使用简单的规则结构网格来近似解场。这是通过将虚拟域思想与高阶有限元的优势相结合来实现的，从而避免了成本高昂、甚至耗费大量人力的网格划分过程。

图 4 通过一个二维线弹性问题阐释了 FCM 的概念。设 $\Omega_p \in \mathbb{R}^2$ 为物理域，Γ_D为狄利克雷边界，Γ_N 为承受外部载荷 $\boldsymbol{\tau}$的诺伊曼边界。研究 Ω_P上的线弹性分析问题，以求得满足以下条件的位移 **u**

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall\, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \tag{2}$$

其中

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_p} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\, \mathrm{dV} = \int_{\Omega} H(\mathbf{x}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\, \mathrm{dV}, \tag{3}$$

and

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega_p} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{dV} + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}\, d\Gamma = \int_{\Omega} H(\mathbf{x}) \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}\, \mathrm{dV} + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}\, d\Gamma, \tag{4}$$

其中，$H^1(\Omega)$ 和 $H_0^1(\Omega)$ 是常见的索博列夫向量空间，**f**为体力，$\boldsymbol{\sigma}$**(u)** 是通过胡克定律定义的二阶应力张量，

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \quad \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \tag{5}$$

其中 **D** 为四阶弹性张量。

在此，式 (3) 和式 (4) 中，计算域通过引入由 Heaviside 函数$H(\Phi(\mathbf{x}))$ 定义的虚拟域材料，从 Ω_P 转换为嵌入域 Ω，

$$H(\Phi(\mathbf{x})) = \begin{cases} 1, & \text{if } \Phi(\mathbf{x}) > 0, \\ \alpha, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{6}$$

其中 Φ 是特征模型 Ω_P 的符号距离函数（SDF），α 是一个较小的正系数，例如 10^{-8}，用于避免刚度矩阵条件不良。在 FCM 中，通常采用 Nitsche 方法 [55] 弱施加狄利克雷边界条件；此处不再赘述。

按照经典的Galerkin有限元方法，方程（2）的解**u(x)**可近似表示为每个规则网格上高阶形状（基）函数$\mathbf{N}^{\alpha}$**(x)**的线性组合

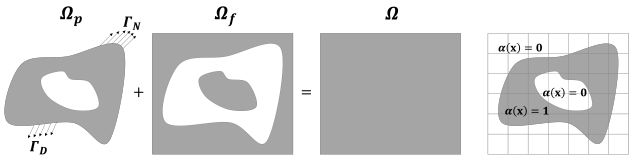


图 4. 嵌入域 Ω 由物理域 Ω_p 和虚拟域 Ω_f组成，Ω_f的影响通过材料参数 10^{-q}进行惩罚。

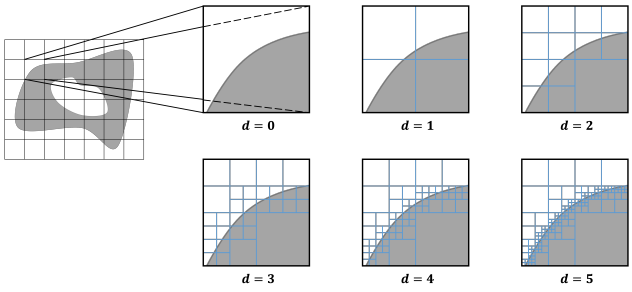


图 5. 在二维中，自适应高斯积分会递归细化，逐步趋近物理域（灰色区域）的边界，从而形成有限单元的四叉树结构（细蓝色网格和粗黑色网格）；此处展示了深度从 0 到 5 的四叉树。沿边界的体素称为切割体素。

（或体素）$\Omega^\alpha \subset \Omega$。具体而言，$\mathbf{x} \in \Omega^p$ 中任意一点的整体位移都可以通过组装求和进行插值

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{N}(\mathbf{x})\mathbf{Q} = \sum_{\alpha=1}^{M} \mathbf{N}^\alpha(\mathbf{x})\,\mathbf{Q}^\alpha, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{7}$$

其中，$\mathbf{N}(\mathbf{x})$ 是由基函数 $\mathbf{N}^\alpha(\mathbf{x})$ 构成的集合，$\mathbf{Q}$ 是由$\mathbf{Q}^\alpha$构成的集合，即每个体素 Ω_α对应一个位移向量。

因此，式（2）中的位移$\mathbf{Q}$ 可通过求解以下线性系统得到

$$\mathbf{K}\mathbf{Q} = \mathbf{F}, \tag{8}$$

其中，刚度矩阵和载荷向量由规则网格（或 XVoxels）上的单元刚度矩阵 $\mathbf{K}_\alpha$ 和单元载荷向量组装而成

$$\mathbf{K} = \sum_\alpha \mathbf{K}^\alpha, \quad \mathbf{F} = \sum_\alpha \mathbf{F}^\alpha. \tag{9}$$

FCM 将网格生成所面临的挑战转移到了式（3）和式（4）中不连续被积函数的数值积分上。通常采用自适应高斯积分来提高精度，见图 5。FCM 中的高阶形函数 $\mathbf{N}^\alpha(\mathbf{x})$ 需要大量高斯点，因此与有限元分析相比会产生巨大的计算成本，并且占据 FCM 计算成本的主要部分。

*4.2 CBN*形函数用于高效*FCM*计算

基于先前的研究 [54], ，本文引入材料感知的CBN形函数，以替代FCM中的高阶形函数，从而加快计算速度。

在我们采用的 CBN 版本中，通过在体素的每个面上引入十二个额外的虚拟节点，形成一个 4×4 网格单元，此外还包含原有的 4 个节点（一个三维 XVoxel 总计 80 个节点）。这些 CBN 节点上的位移收集为向量 $\mathbf{Q}$，并作为求解计算的自由度。

式（7）中的高阶形函数$\mathbf{N}^\alpha$ 由以下函数替代，该函数由细网格上的线性形函数通过变换矩阵 $\tilde{\mathbf{\Phi}}^\alpha$组成：

$$\mathbf{N}^\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^{\alpha,h}(\mathbf{x})\,\tilde{\mathbf{\Phi}}^\alpha, \quad \mathbf{x} \in \Omega^\alpha \tag{10}$$

其中，$\mathbf{N}^{\alpha,h}(\mathbf{x})$表示$\Omega^\alpha$细网格上节点形函数的组装。

CBN变换矩阵 $\tilde{\mathbf{\Phi}}^\alpha$ 旨在将CBN节点值映射为Ω^α中的内部值。该矩阵由边界插值矩阵 $\mathbf{\Psi}$ 和边界–内部˜变换矩阵$\mathbf{M}^\alpha$的乘积得到，如下所示：

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}^\alpha = \tilde{\mathbf{M}}^\alpha\,\mathbf{\Psi}, \tag{11}$$

˜其中，$\mathbf{\Psi}$ 和$\mathbf{M}^\alpha$ 将位移从CBN映射到边界节点，再映射到Ω^α中的全部细网格节点。

边界插值矩阵 $\mathbf{\Psi}$ 将 CBN 节点值映射为 Ω^α的细网格边界节点值。该矩阵通过在目标面上构造双三次 B´ézier 插值曲面，并将 CBN 作为控制点而得到。矩阵 $\mathbf{\Psi}$ 通过计算该曲面在面内细网格节点处的值，并将这些值按行收集为矩阵形式，从而得到网格六个面上的所有值 α。

˜变换矩阵 $\mathbf{M}^\alpha$ 将边界节点值映射为 Ω^α中细网格的节点值。该矩阵由对 Ω^α 的细网格进行局部仿真，并结合平衡方程得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_b & \mathbf{k}_{bi} \\ \mathbf{k}_{ib} & \mathbf{k}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_b \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{12}$$

其中，$\mathbf{k}_b$、$\mathbf{k}_i$、$\mathbf{k}_{bi}$、$\mathbf{k}_{ib}$ 分别是 Ω^α上局部刚度矩阵 $\mathbf{k}^\alpha$ 的子矩阵；$\mathbf{q}_b$、$\mathbf{q}_i$ 分别是边界节点和内部节点的向量；$\mathbf{f}_b$ 是通过谐波分析形成的边界节点外露力向量 [54]。

由第二行可得关系式 $\mathbf{q}_i = \mathbf{M}^\alpha\mathbf{q}_b$，对于 $\mathbf{M}^\alpha = -\mathbf{k}_i^{-1}\mathbf{k}_{ib}$ = $[\;]^T$。因此，将 $\mathbf{q}$ 和$\mathbf{q}$组装为$\mathbf{q}$ $\mathbf{q}$、$\mathbf{q}$后，可得到 $\mathbf{M}$的形式，

$$\tilde{\mathbf{M}}^\alpha = [\mathbf{I}_{2b}, -\mathbf{k}_i^{-1}\mathbf{k}_{ib}]^T, \tag{13}$$

其中$\mathbf{I}_{2b}$ 是 $2b \times 2b$ 单位矩阵。

求得CBN形函数后，按照经典的Galerkin有限元方法，也可以类似地求解式（2）中的线性弹性问题。更多技术细节请参阅 [54]。

4.3. 基于*XVoxel*的特征模型局部仿真

下面将结合CBN，基于FCM仿真方法，提出一种用于修改后特征模型仿真的XVoxel方法。

通常通过更新特征参数来修改特征模型，这可能会改变最终边界表示模型的拓扑和几何形状。只要特征模型发生更新，就需要重新计算每个体素的单元刚度矩阵 $\mathbf{K}^\alpha$

，这也是计算成本的主要来源。配备局部体素更新功能的FCM 可通过两种方式加速计算：(a) 每个完整体素或空体素的单元刚度矩阵都相同；边界上的体素称为切割体素；(b) 未受更新特征影响的体素，其单元刚度矩阵保持不变。情况 (a) 可通过预计算策略轻松解决。对于情况 (b)，可通过 PMC 算法（见第 3.4 节）更新并查询体素-特征成员关系表，从而增量更新单元刚度矩阵。该算法可快速定位受更新特征影响的体素，称为活跃体素，因此只需重新计算这些体素的刚度矩阵。这可以显著降低计算成本。

5. 基于XVoxel的参数化设计优化

使用XVoxels，参数化设计优化在受控仿真精度下基于固定的规则网格进行，并直接更新特征参数。在此过程中，推导关于设计参数的灵敏度，以更新参数。XVoxel 的局部性信息可通过有限差分或推导出的解析表达式高效计算灵敏度。

设Ω_p为一个包含特征$f_1, f_2、\cdots、f_n$的CAD模型。为便于说明，假设每个特征f_i仅包含一个参数p_i。研究经典的柔顺度最小化问题，以求得优化后的设计参数$\mathbf{p} = (p_1, p_2、\cdots、p_n)$：

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{p}} C(\mathbf{u},\mathbf{p}) = \mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u}, \\ &\text{s.t.} \begin{cases} \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F}, \\ V = \int_\Omega H(\Phi(\mathbf{x},\mathbf{p}))\mathrm{d}\Omega \le \bar{V}, \\ \underline{p}_i \le p_i \le \bar{p}_i, i = 1,2\ldots,n, \end{cases} \end{aligned} \tag{14}$$

其中，V和$\bar{V}$分别为总结构体积和最大体积约束，使用Heaviside函数$H(\cdot)$表示结构边界，p_i和$\bar{p}_i$分别为设计变量p_i的下界和上界。

优化问题式（14）采用基于数值梯度的方法——全局收敛移动渐近线法（GCMMA） [56] 求解，以确保设计优化中的稳健收敛。该方法利用优化目标函数和约束条件相对于设计变量 $\mathbf{p}$ 的梯度，将原始非凸问题近似为一组凸子问题，所得梯度如下。

梯度计算遵循链式法则。首先考虑刚度矩阵$\mathbf{K}$关于设计参数p_i的灵敏度。为简洁起见，将 $\psi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}$ 改写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i}\int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}H(\Phi(\mathbf{x},\mathbf{p}))\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Omega \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}\frac{\partial H(\Phi)}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Omega \psi(\mathbf{x})\frac{\partial H(\Phi)}{\partial \Phi}\frac{\partial \Phi}{\partial p_i}\,\mathrm{d}\Omega. \end{aligned} \tag{15}$$

上述方程的关键在于计算Heaviside函数的导数。我们引入Dirac δ函数$\hat{\delta}(\Phi)$

$$\hat{\delta}(\Phi) = \nabla H(\Phi)\cdot\frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|} = \frac{\mathrm{d}H(\Phi)}{\mathrm{d}\Phi}\nabla\Phi\cdot\frac{\nabla\Phi}{\|\nabla\Phi\|} = \frac{\mathrm{d}H(\Phi)}{\mathrm{d}\Phi}\|\nabla\Phi\|, \tag{16}$$

其中

$$\|\nabla\Phi\| = \sqrt{\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2}. \tag{17}$$

因此，式（15）可改写为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_i} &= \int_\Omega \psi(\mathbf{x})\frac{\partial H(\Phi)}{\partial\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\,\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Omega \psi(\mathbf{x})\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\frac{1}{\|\nabla\Phi\|}\left(\frac{\partial H(\Phi)}{\partial\Phi}\|\nabla\Phi\|\right)\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_\Omega \psi(\mathbf{x})\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\frac{1}{\|\nabla\Phi\|}\hat{\delta}(\Phi)\mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega_p} \psi(\mathbf{x})\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\frac{1}{\|\nabla\Phi\|}\mathrm{d}\Gamma, \end{aligned} \tag{18}$$

其中，$\partial\Omega_p$表示特征模型Ω_p的边界。这样，灵敏度的体积分就转化为边界积分。

根据式（6）中 $\Phi(\mathbf{x},\mathbf{p})$ 的表达式，对于式（18）进一步有

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Phi(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial\phi_j}\cdot\frac{\partial\phi_j}{\partial p_i}, \tag{19}$$

$$\|\nabla\Phi(\mathbf{x},\mathbf{p})\| = \left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\Phi(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial\phi_j}\nabla\phi_j\right\|. \tag{20}$$

注意到设计变量p_i仅与一个特征f_i相关，因此有

$$\frac{\partial\phi_j}{\partial p_i} = 0, \quad j \ne i. \tag{21}$$

令$S_i = \frac{\partial\Phi}{\partial(\mathbf{x},\mathbf{p})}\frac{\partial}{\partial\phi_i}$表示由构造实体几何树中$f_i$的父分岔节点定义的逻辑运算，且$S_i \in \{-1, 1\}$。因此，式（18）的积分域可由整个特征模型 Ω 的边界 $\partial\Omega_p$ 缩减为特征f_i的边界，即特征f_i的计算。

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial p_i} = \frac{\partial\Phi(\mathbf{x},\mathbf{p})}{\partial\phi_i}\cdot\frac{\partial\phi_i}{\partial p_i} = S_i\frac{\partial\phi_i}{\partial p_i}, \tag{22}$$

这避免了冗余积分。

同理，我们有

$$\|\nabla\Phi(\mathbf{x},\mathbf{p})\| = \|S_i\nabla\phi_i\| = \|\nabla\phi_i\| \tag{23}$$

对于沿特征f_i边界分布的求积点。

因此，式（18）中的灵敏度可简化为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_i} &= \int_{\partial\Omega_p}\psi(\mathbf{x})\frac{\partial\Phi}{\partial p_i}\frac{1}{\|\nabla\Phi\|}\mathrm{d}\Gamma \\ &= \int_{\partial f_i} S_i\psi(\mathbf{x})\frac{\partial\phi_i}{\partial p_i}\frac{1}{\|\nabla\phi_i\|}\mathrm{d}\Gamma. \end{aligned} \tag{24}$$

随后，我们考虑结构柔度C的灵敏度，

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial p_i} &= \frac{\partial \mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{\partial p_i}\mathbf{u} + \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial \mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{\partial p_i}\mathbf{u} + \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{-1}\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_i}\mathbf{u}\right) \\ &= 2\frac{\partial \mathbf{F}^{\mathrm{T}}}{\partial p_i}\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_i}\mathbf{u}.\end{aligned} \tag{25}$$

为简化起见，假设载荷$\mathbf{F}$与特征设计变量相互独立，则上述方程中的第一项为零。根据式（24）中的刚度矩阵灵敏度，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial p_i} &= -\mathbf{u}^{T}\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_i}\mathbf{u} \\ &= -\mathbf{u}^{T}\Big(\int_{\partial f_i} S_i\psi(\mathbf{x})\frac{\partial \phi_i}{\partial p_i}\frac{1}{\|\nabla\phi_i\|}\mathrm{d}\Gamma\Big)\mathbf{u} \\ &= -\mathbf{u}^{T}\Big(\int_{\partial f_i} S_i\mathbf{B}^{T}\mathbf{D}\mathbf{B}\frac{\partial \phi_i}{\partial p_i}\frac{1}{\|\nabla\phi_i\|}\mathrm{d}\Gamma\Big)\mathbf{u}.\end{aligned} \tag{26}$$

在我们的数值实现中，我们使用三维三角形（二维线段）近似模型的结构边界，以进行自适应积分；示意见图 6。

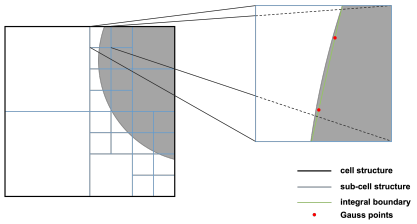


图 6. 灵敏度计算（二维），采用有限胞元（粗黑色网格）的自适应边界积分：在每个子单元（细蓝色网格）中，边界用线段（绿色）近似，并沿线段布置高斯求积点（红色）。

6. 数值算例与讨论

我们提出的基于XVoxel的方法用于特征模型的参数化设计优化，并已在配备 Intel Core i7-12700 3.6 GHz CPU 和 64GB RAM 的计算机上使用 Matlab 实现。本文展示了五个不同的示例以说明该方法的有效性：前三个示例针对交互式编辑过程中的仿真，用于测试其计算精度和效率；后两个示例展示其在基于特征的设计优化中的应用。所有CAD模型的尺寸均以微米为单位，材料的杨氏模量为$E = 2e^{11}Pa$，泊松比为$\nu = 0.3$。在FCM计算中，除第一个示例外，所有示例的八叉树细化深度为$d = 3$，形函数阶次为$p = 2$；第一个示例中$d = 4$且$p = 3$。

XVoxel 的局部性特征通过活跃体素数量（即受局部特征更新影响的体素数量）来衡量，并与 FCM 进行比较。XVoxel 或 FCM 的保真度则通过其相对于基准的位移残差（按前 10% 计算）来衡量：

$$r_u = \frac{\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0\|}{\|\mathbf{u}_0\|}, \tag{27}$$

其中$\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_0$ 分别为计算得到的位移和基准位移。

实验设置和结果汇总于表 1 中，包括网格尺寸、自由度、计时（每步/迭代）、活跃体素数量和相对误差 $r_{\mathbf{u}}$。在所有这些示例中，均采用 Ansys Workbench 22R1 中四面体网格上的有限元分析仿真结果作为基准。我们测试了另外三种方法，以展示该方法的仿真精度和效率：标准有限胞元法 [26]，XVoxel-FM（将 FCM 与 XVoxel 结合）、基于 CBN 的 FCM [54]XVoxel-CBN；后两种是我们提出的方法。为确保比较公平，有限元分析和 XVoxel 的自由度设置得大致相同。

从表 1 可以看出，FCM（XVoxel）的误差低至 0.005%，展现出很高的精度。FCM 和 XVoxel-FCM 的仿真精度始终相同，而 CBN-FCM 的精度与它们非常接近。其他示例的误差可能更高，这是因为需要在精度和效率之间取得平衡。请注意，FCM（XVoxel）可以通过体素细化或升阶达到指定精度 [26]。在所有示例中，有限元分析的效率远高于 FCM，而 XVoxel-FCM 凭借局部计算提高了效率，使计算时间与有限元分析相近。XVoxel-CBN 由于采用分段线性形函数，大幅提高了 XVoxel-FCM 的效率。我们还需再次指出，与有限元分析相比，FCM 或 XVoxel（无论是 FCM 还是 CBN 版本）的一项显著优势是其体素化过程比有限元分析的四面体网格剖分容易得多，也稳健得多。

6.1. 示例*#1*：用于仿真精度测试的*L*形模型

首先在图7所示的经典L形模型上测试了所提出方法的精度。该模型由两个立方体和一个圆角组合而成。模型的上表面固定，右表面受到向下牵引力$\tau = 100N/$毫米^2。有限元分析的四面体网格包含6.3K个单元，FCM包含768个体素。

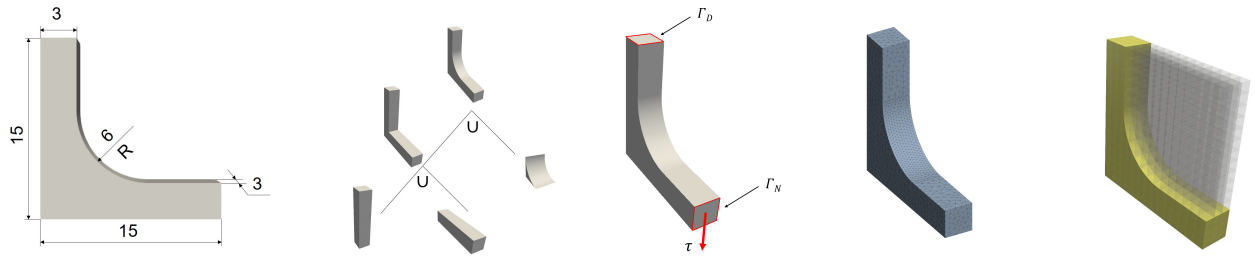
圆角半径从6毫米逐步减小至2毫米，步长为 −1毫米。各步骤的仿真误差、活跃体素数量和计时结果分别绘于图8(a)、(b)、(c)中。有限元分析与XVoxel-FCM的近似结果非常接近，误差$r_{\mathbf{u}} = 0.03\%$；从图9(a)、(b)所示的位移范数和冯·米塞斯应力分布中也可以观察到这一点。我们还从图9(c)和图8(b)、(c)中注意到，在此示例中，FCM与XVoxel-FCM的活跃体素数量和计算时间完全相同。这是因为L形模型形状规则，FCM中的切割单元恰好就是活跃体素。

6.2. 示例 *#2*：用于仿真效率测试的连接器模型

第二项测试在图 10 所示的发动机连接件上进行，用于测试 XVoxel 处理更复杂模型的能力。模型固定在其左侧孔上，并在右侧孔上承受水平和垂直牵引力。有限元分析四面体网格包含 23K 个单元，而 XVoxel 网格包含 7.9K 个单元

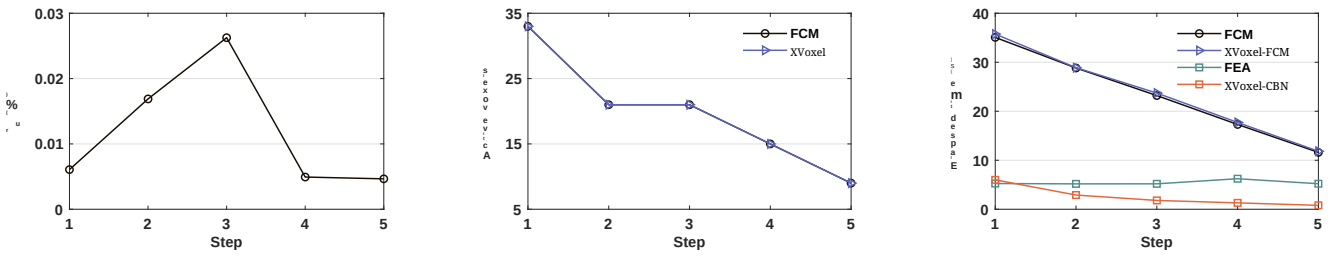
表 1：XVoxel 在测试数值算例中的性能汇总，并与采用有限元分析和 FCM 的方法进行比较（标准 FCM、结合 FCM 与 XVoxel 的 XVoxel-FCM，以及结合基于CBN的有限胞元法与 XVoxel 的 XVoxel-CBN）。其中，d 是用于单元积分的八叉树细化深度，p 是形函数的阶次。

示例	步（迭代）	网格尺寸		DOFs			耗时（每步/迭代）				活动体素数量		r_u (%)
		FEA	FCM（XVoxel）	FEA	FCM（XVoxel-FCM）	XVoxel-CBN	FEA	FCM	XVoxel-FCM	XVoxel-CBN	FCM	XVoxel	
#1	1	13,801	675	63,372	63,480	47,280	5.3	35.1	35.1	6.0	33	33	0.0061
	2	14,118		64,833			5.2	28.8	28.9	2.9	21	21	0.0169
	3	13,807		63,600			5.2	23.2	23.7	1.8	21	21	0.0263
	4	13,844		63,714			6.2	17.3	17.7	1.3	15	15	0.0049
	5	13,908		64,029			5.2	11.6	11.8	0.8	9	9	0.0047
#2	1	22,789	4,004	109,632	108,135	255,024	8.5	44.9	44.9	13.8	1,182	1,182	0.0328
	2	22,579		108,777			7.3	44.2	6.3	1.1	1,182	121	0.0825
	3	22,326		108,006			7.2	42.6	9.4	1.8	1,182	183	0.0812
	4	22,465		109,350			7.3	44.3	9.8	2.1	1,185	189	0.1555
	5	22,611		109,569			7.3	43.7	5.6	1.4	1,191	128	0.3221
	6	22,326		108,336			8.5	40.2	8.5	1.4	1,141	227	0.0263
#3	1	222,816	39,775	1,019,364	998,325	2,365,080	22.1	140.1	143.1	80.9	6,040	6,040	0.0928
	2	217,244		1,001,976			19.7	151.5	33.9	5.2	6,048	397	1.0381
	3	218,659		1,006,104			21.6	152.0	35.0	6.0	6,156	491	1.1859
	4	215,383		996,989			23.1	166.2	35.3	5.4	6,356	412	1.3995
	5	215,185		996,513			20.8	161.3	28.0	1.1	6,369	97	1.4215
	6	214,206		991,353			23.5	167.1	35.8	4.5	6,545	458	1.4720
	7	216,983		1,002,681			21.0	168.0	31.0	3.3	6,561	216	1.4834
	8	215,132		997,344			20.9	174.4	34.8	3.9	6,681	325	2.5318
	9	214,288		993,975			18.0	181.3	30.3	2.0	6,789	190	2.3235
	10	216,411		1,004,442			21.3	210.0	29.5	2.2	6,633	102	2.4980
	15	214,690		992,787			23.7	201.5	48.2	9.0	5,837	677	2.7177
	20	213,749		992,295			23.5	223.4	42.6	5.5	6,485	459	3.0647
#4	1		9,100		240,975	250,638		1,490.8	130.3	55.2	2,256	2,256	
	10							1,411.0	109.6	25.2	2,174	308	
	30							1,401.8	101.3	24.8	2,166	274	
	100							1,467.5	102.4	25.3	2,172	255	
#5	1		33,150		279,265	282,006		146.0	148.0	60.4	4,592	4,592	
	10							141.5	85.8	30.7	3,904	1,644	
	30							156.0	92.7	33.2	3,952	1,611	
	100							166.6	97.2	32.6	3,962	1,486	



(a) (b) (c) (d) (e)

图7. 示例#1. (a) L形模型的参数（毫米），半径 R 从 6 逐渐变化到 2，步长为 −1；(b) 模型的构造实体几何；(c) 边界条件，其中 γ_D 固定，$\tau = 100$ N/毫米^2 在 γ_N中；(d) 包含 6,325 个四面体单元的有限元分析网格；(e) 包含 $3 \times 15 \times 15$ 个体素的 FCM（XVoxel）网格。



(a) 相对误差r_u (b) 活跃体素数量 (c) 计时

图8. 图7中示例#1的性能统计：(a) XVoxel与FCM之间的位移残差r_u；(b) FCM和XVoxel的活跃体素数量；(c) 四种方法的计时：有限元分析、FCM、XVoxel-FCM（基于FCM的XVoxel）和XVoxel-CBN（基于CBN的XVoxel）。

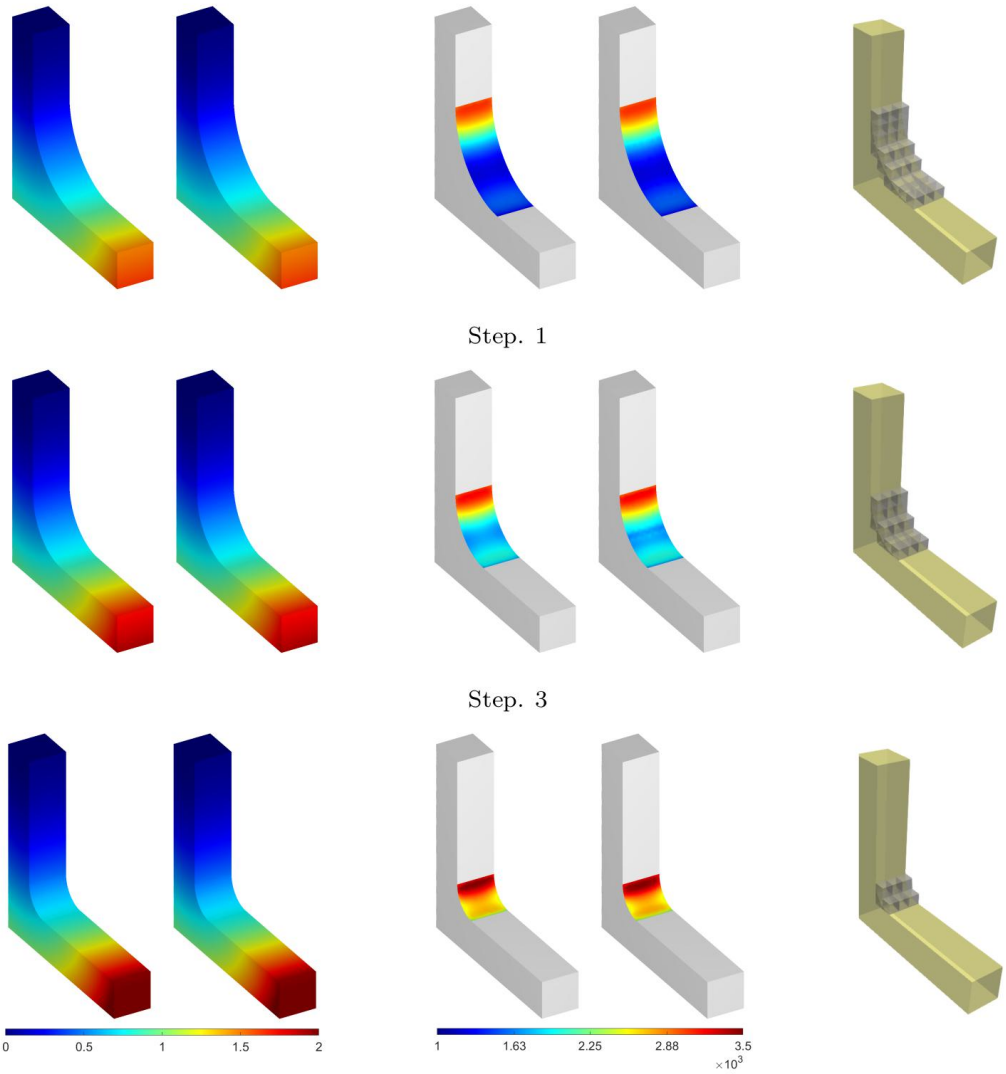


图 9. 编辑步骤 1、3 和 5 中 L形模型的结果。(a)：有限元分析（左）和 FCM/XVoxel（右）得到的位移范数（毫米）；(b)：有限元分析（左）和 FCM/XVoxel（右）得到的冯·米塞斯应力（MPa）；(c)：XVoxel 的活跃体素（灰色）。

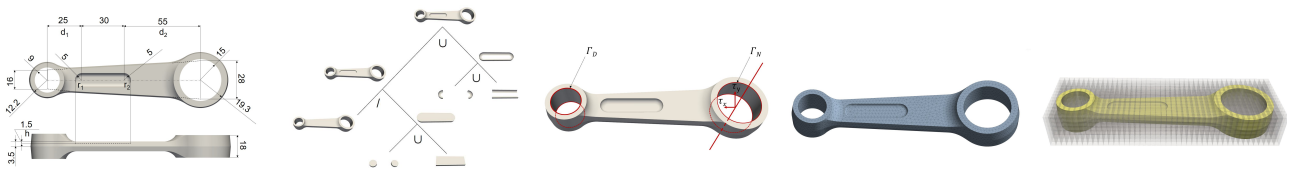
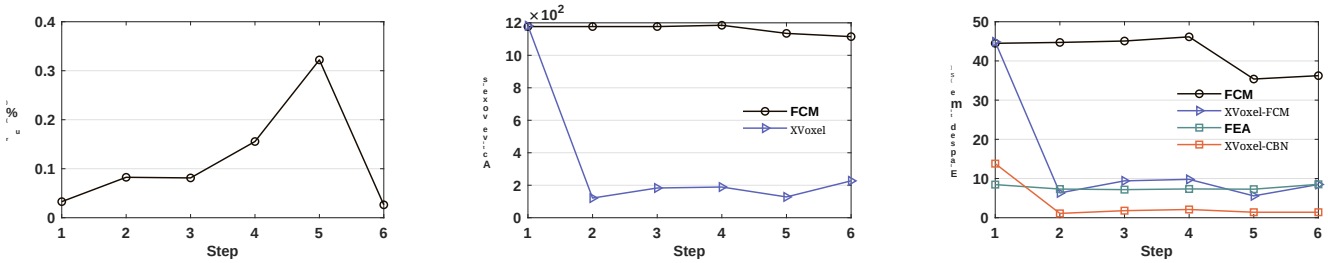


图 10. 示例 #2。(a) 活塞模型的参数，其中修改后的变量为 d_1, d_2, r_1, r_2 和 h；(b) 模型的构造实体几何；(c) 边界条件，其中 Γ_D 固定，且将 $\tau_x = 100N/m^2$ 和 $\tau_y = 200$ N/m^2 作为（正弦）承压载荷施加于 Γ_N；(d) 步骤 1 中包含 22,789 个四面体单元的有限元分析网格；(e) 包含 $55 \times 16 \times 9$ 个体素的 FCM（XVoxel）网格。



（a）相对误差$r_{\mathbf{u}}$　　（b）活跃体素数量　　（c）计时

图 11。 图 10 中示例 #2 的性能统计：(a) XVoxel 与 FCM 之间的位移残差 r_u；(b) FCM 和 XVoxel 的活跃体素数量；(c) 四种方法有限元分析、FCM、XVoxel-FCM 和 XVoxel-CBN 的计时。

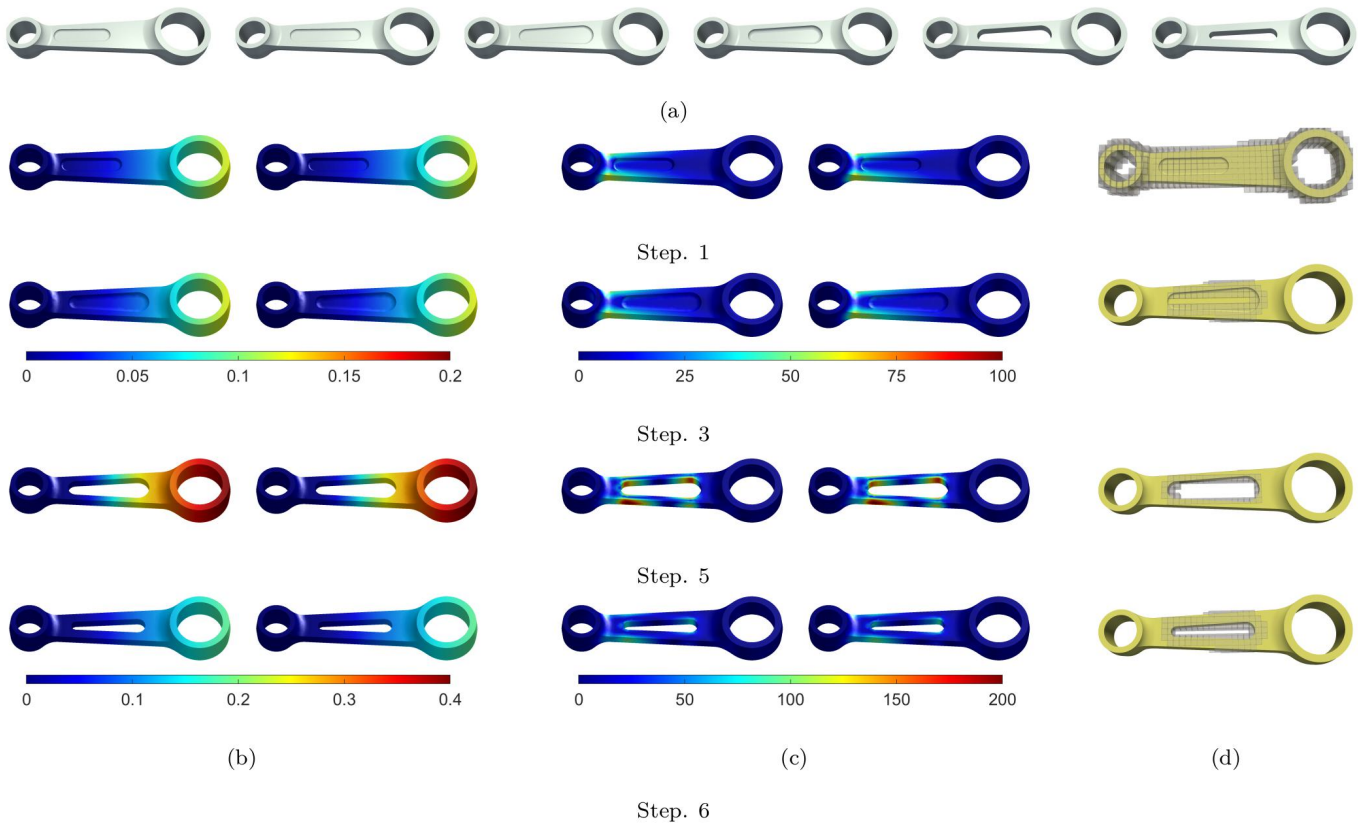


图 12。 (a)步骤 1 至 6 的模型：具有一对对称凹槽的初始模型；修改 $d1$ 和 $d2$ 以平移凹槽；增大右侧圆柱体的半径$r2$；增加凹槽的深度 h；增加凹槽的深度h 使其贯穿模型；减小半径r_1 和r_2 以缩窄凹槽；编辑步骤 1、3、5 和 6 中连接器模型的结果；(b) 有限元分析（左）和 FCM/XVoxel（右）得到的位移范数（毫米）；(c) 有限元分析（左）和 FCM/XVoxel（右）得到的冯·米塞斯应力（MPa）；(d) XVoxel 的活跃体素（灰色）。

体素。图 12(a) 中的连接器模型通过以下六个特征操作进行了修改:

1. 添加一对由两个圆柱体及其切线构成的内槽。注意，连接器两侧对称，因此我们只考虑一侧的设计参数。2. 通过将参数 d_1从 25 改为 30、将 d_2 从 55 改为 40，平移这两个圆柱体。3. 将右侧圆柱体的半径 r_2 从 5 改为 7.5。4. 将内槽的深度 h 从 1.5 改为 2.5。5. 将设计参数 h 从 2.5 改为 3.5，并移除圆角，使内槽贯穿整个模型。6. 将设计参数 r_1 从 5 改为 3、将 r_2 从 7.5 改为 5。

从图 11(a) 中的曲线以及图 12(b) 和 (c) 中仿真结果的对比可以看出，XVoxel 与有限元分析的结果非常接近，最大误差为$r_{\mathbf{u}}$ = 0.33%。我们还从图 12(d) 以及图 11(b) 和 (c) 中注意到，在模型修改过程中（第一步之后），XVoxel（XVoxel-FCM 和 XVoxel-CBN）的计算时间远少于 FCM，因为其局部体素更新大幅减少了活跃体素数量。

6.3. 示例*#3*：拓扑剧烈变化且载荷变化的泵模型

通过图13中的复杂泵模型，进一步测试了所提出的方法处理拓扑剧烈变化和变化载荷的能力。泵的底部固定，顶部和外侧分别施加200*N*和100*N* 的力。有限元分析包含216K个四面体单元，而FCM（XVoxel）包含40K个体素。模型按以下步骤进行编辑，在此过程中，模型的拓扑和外部载荷均发生变化：

1. 输入一个由不同圆柱体组成的初始模型。 2. 添加圆角特征f_1。 3. 添加由一个立方体和一个圆柱体组成的特征f_2。 4. 添加由四个圆柱体并集构成的负特征f_3。 5. 添加负特征f_4。 6. 添加特征f_5。 7. 添加由四个球体组成的特征f_6。 8. 添加负特征 f_7。 9. 添加由一个立方体和一个圆柱体组成的特征f_8。 10. 添加负特征f_9。 11-15. 将设计参数d_1 从76以-4为步长改为56

16-20. 将设计参数d_1 从50修改到70，步长为4。

修改过程中生成的模型如图14(a)-(c)所示，相应的活跃体素见图14(b)。图15对相对误差、活跃体素数量和计时结果进行了比较，表明XVoxel具有较高的仿真精度和效率，这一点已在示例#1和#2中得到证实。

我们特别从图15(b)中观察到，XVoxel 的主动体素数量仅约为 FCM 的 1/4，这表明，无论特征形状和特征操作多么复杂，XVoxel 都能有效地选择主动体素。这一优点使 XVoxel-FCM 的效率比 FCM 提高了 4 倍；而 XVoxel-CBN 的效率甚至提高了 50 倍。在修改设计时，这种效率提升对于获得交互式仿真反馈非常有用。

6.4. 示例*#4*：用于参数化设计优化的支架模型

首先，在图16所示的非对称支架模型上测试了所提出的方法进行基于特征的参数化设计优化的能力。该模型具有一个由若干圆柱体和棱柱体构成的负凹槽特征。模型固定于左侧孔，并在右侧孔处承受 $100\sqrt{5}$N的轴向载荷。该模型离散为9.1K个体素，用于基于FCM（XVoxel）的仿真。

设计目标是在体积比为 0.9 的约束下，通过改变凹槽的位置和尺寸，使支架的合规性最小化。设计变量为：四个角部圆的圆心x_i、y_i 和半径r_i (i=1, 2, 3, 4)，其内切圆半径r_5，以及外接圆半径r_6,r_7,r_8（位于二维平面内）。为生成有效几何体，相关几何约束条件表述如下：

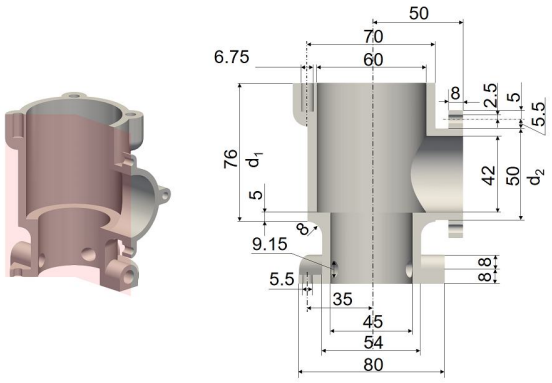
$$
\begin{cases}
\mathbf{Ku} = \mathbf{F}, \\
V \le 0.9V_0, \\
\|(x_i, y_i) - O_5\| + r_i = r_5, & i = 1, 2 \\
\|(x_i, y_i) - O_6\| - r_i = r_6, & i = 3, 4 \\
\|(x_i, y_i) - O_7\| - r_i = r_7, & i = 1, 4 \\
\|(x_i, y_i) - O_8\| - r_i = r_8, & i = 2, 3 \\
x_i^{min} \le x_i \le x_i^{max}, & i = 1, ..., 4 \\
y_i^{min} \le y_i \le y_i^{max}, & i = 1, ..., 4 \\
r_j^{min} \le r_j \le r_j^{max}, & j = 1, ..., 8
\end{cases}
$$

其中V_0 为原始模型的体积，O_i表示二维圆心的坐标，并且设置x_i、y_i和r_j 的取值范围，以确保特征不会移出支架。

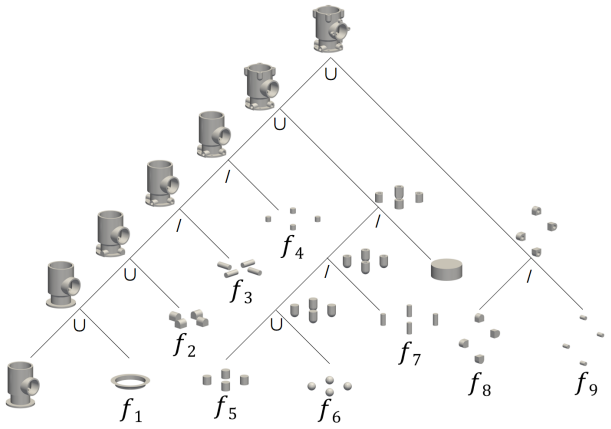
图17(a)展示了优化过程中的一些中间结构，其中凹槽逐渐增大，以满足体积约束，同时向左侧移动以提升性能。图17(b)还绘制了应力分布，图17(c)则以灰色显示了活跃体素。

优化在迭代 100 次后停止，优化过程中始终保留了特征及其相关约束条件；收敛曲线如图 18(a) 所示。优化期间，XVoxel 的活跃体素数量仅约为 FCM 的 1/8，效率大幅提升；另见图 18(b) 和 (c)。与 FCM 相比，XVoxel-FCM 和 XVoxel-CBN 的效率分别提升了约 13× 和 50× 。通过在优化过程中保留特征列表，针对活跃体素进行局部重计算，大幅加快了仿真速度。

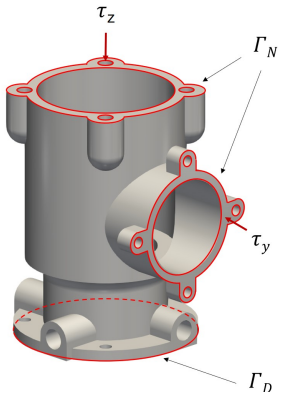
如图 18(a) 所示，柔顺度曲线并非稳步变化，而是先迅速上升至峰值，然后下降。这是因为柔顺度对体积非常敏感



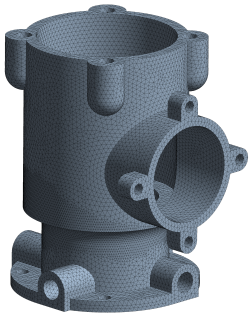
(a)



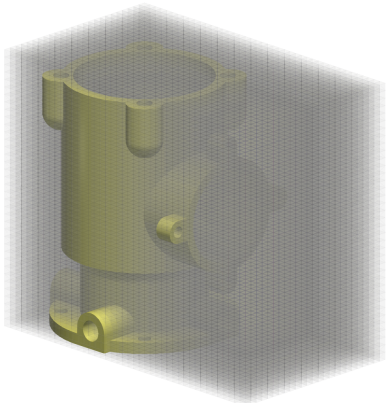
(b)



(c)



(d)



(e)

图13. 示例#3。（a）第10步泵模型的参数（毫米），其中d_1和d_2是步骤 11 – 20中要修改的变量；（b）第10步模型的构造实体几何，其中f_i是步骤 1 – 10中要添加的特征，i = 1, ..., 9；（c）边界条件，其中 γ_D固定，$\tau_z = 200N$和 $\tau_y = 100N$；（d）第10步的有限元分析网格，包含216,411个四面体；（e）包含 $25 \times 43 \times 37$ 个体素的FCM（XVoxel）网格。

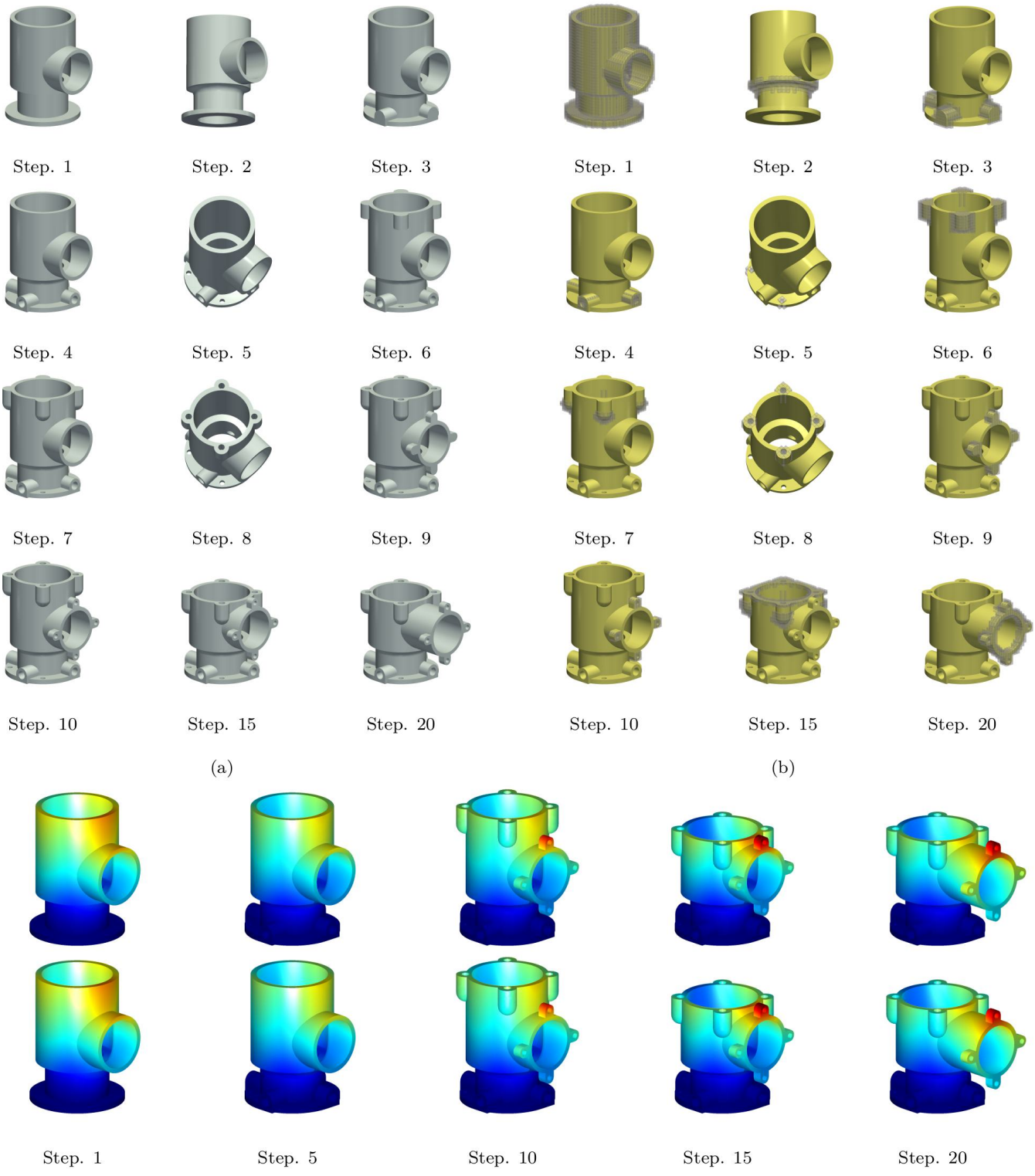
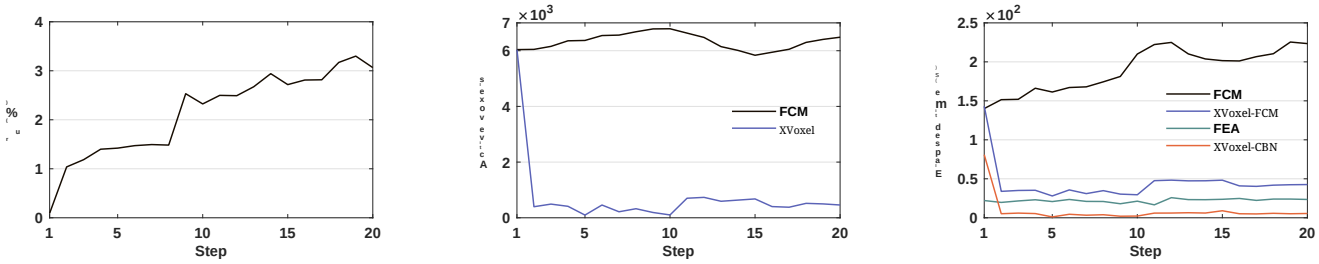
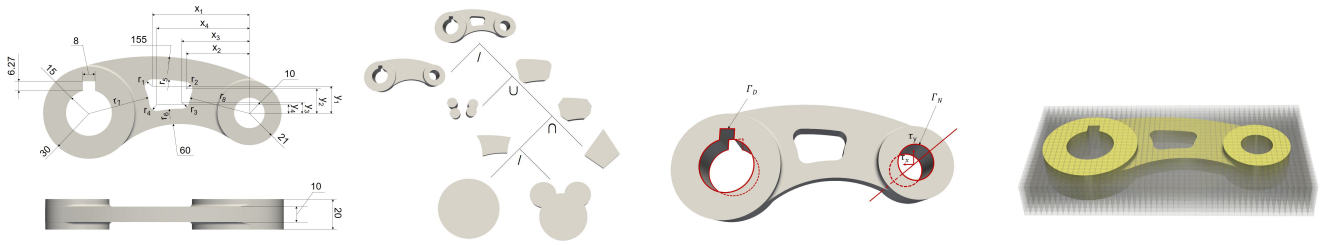


图14. (a) 编辑步骤1-10、15和20中的模型，(b) XVoxel在编辑步骤1-10、15和20中的活跃体素（灰色），(c) 泵模型在编辑步骤1、5、10、15和20中的仿真结果。有限元分析（上）和FCM/XVoxel（下）的位移范数（毫米）。



（a）相对误差r_u　　（b）活跃体素数量　　（c）计时

图15。 图13中示例#3的性能统计：(a) XVoxel与FCM之间的位移残差r_u；(b) FCM和XVoxel的活跃体素数量；(c) 有限元分析、FCM、XVoxel-FCM和XVoxel-CBN四种方法的计时。



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

图16。 示例#4。(a) 模型的参数（毫米）。通过改变形成凹槽的相切圆柱的位置和半径，对凹槽的位置和尺寸进行优化，其中设计变量为x_i、y_i和rj（i=1、2、...、4；j=1、2、...、8）；(b) 模型的构造实体几何；(c) 边界条件，其中Γ_D固定，并在Γ_N上施加$\tau_x = 100N$、 $\tau_y = 200N$（正弦）承压载荷；(d) 包含$52 \times 25 \times 7$个体素的FCM（XVoxel）网格。

在达到指定的体积限制之前，变化量和体积因子主导着优化。也就是说，优化会在初始阶段迅速减小体积，使其趋近指定的体积限制（见同一图中的体积曲线）。达到峰值后（第10次迭代），优化算法（即全局收敛移动渐近线法）会在保持体积高于限制的同时，有效降低合规。这一过程对应图18(a)中的下降阶段。

在进行优化时，本例的灵敏度是通过有限差分得出的。若不妥善处理，计算成本会非常高，因为需要对全部16个设计参数进行完整的有限元重新计算。相比之下，XVoxel 在有限差分计算中所需的活跃体素少得多，因为每次有限差分过程只改变一个特征参数；示意图另见图17(d)。

6.5. 示例*#5*：用于拓扑变化情况下参数化设计优化的轴承支架模型

在图19所示的轴承支架模型上测试了所提出的方法处理复杂参数化设计优化及结构拓扑变化的稳健性。设计模型、构造实体几何树、边界条件和离散体素分别见图19(a)、(b)、(c)和(d)。FCM（XVoxel）包含33K个体素，体积比约束设为0.6。

该模型包含11个CBS（闭合B样条）负特征，每个特征有24个控制半径和2个位置坐标，其中每个特征的第一个和最后一个半径是用于实现高阶几何连续性的驱动参数。为确保这些特征能够形成拓扑复杂的有效结构，特征f_1 和f_2 仅限沿y轴移动，特征$f_3, f_4, f_5, f_7, f_8, f_9$ 固定不动，而特征f_6, f_{10} 和f_{11}仅沿指定平面移动；另请参见图19(a)。总计有$(24 - 2 + 2) \times 11 - 14 = 250$ 个设计变量。

示例的中间结果见图20，性能统计见图21。如图20所示，在优化过程中，CBS特征逐渐扩展以满足体积约束，导致轴承支架的臂部和基座部分发生剧烈的拓扑变化；经过35次迭代后，优化达到收敛。基于XVoxel的优化成功处理了这些拓扑变化。

XVoxel模型的活跃体素数量约为FCM的一半，而XVoxel-FCM在每次迭代中的速度约比FCM快1.3×倍。与示例#4相比，速度提升幅度小得多，因为CBS特征在支架模型中的分布更广，因此产生了更多活跃体素。尽管如此，XVoxel-CBN的效率仍提升了约 5× 。再次证明，所提出的方法在基于特征的设计优化框架中依然稳健，能够处理这类具有大量设计变量和剧烈拓扑变化的大规模模型。

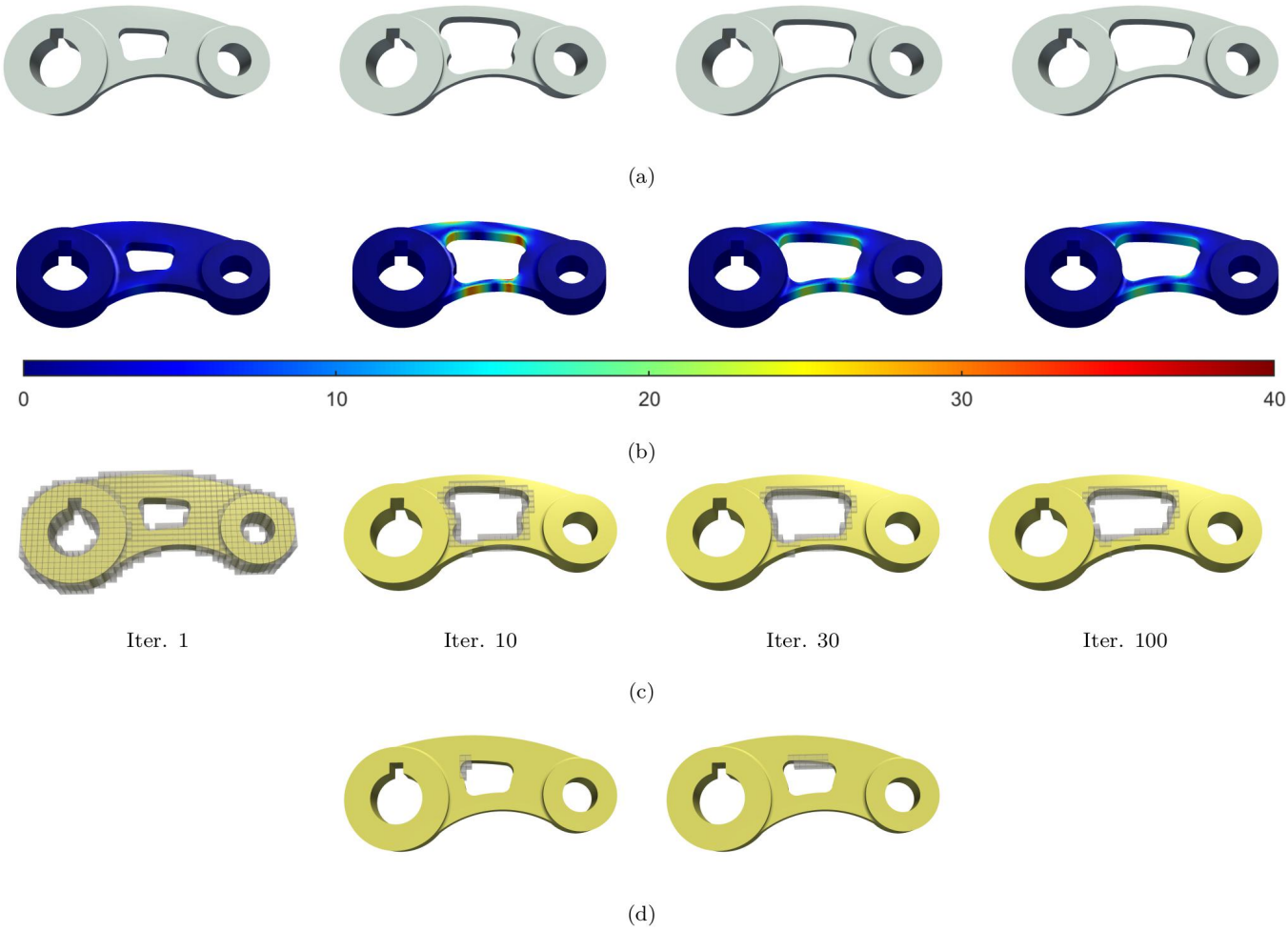
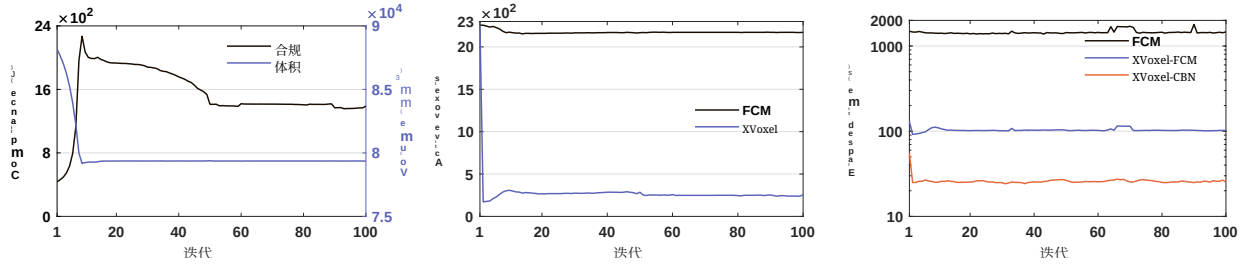


图17. 支架模型在第1、10、30和100步优化迭代中的结果：(a) 模型；(b) FCM/XVoxel 的冯·米塞斯应力（MPa）；(c) XVoxel 的活跃体素（灰色）；(d) 在第一次迭代中，计算相对于x_1,y_1,r_1（左）和r_5（右）的灵敏度时使用的活跃体素（灰色）。



(a) 合规性和体积的收敛曲线 (b) 活跃体素数量 (c) 计时

ume

图18。 图16中示例#4的性能统计：(a) XVoxel和FCM的合规与体积收敛曲线；(b) FCM和XVoxel的活跃体素数量；(c) FCM、XVoxel-FCM和XVoxel-CBN三种方法的计时。

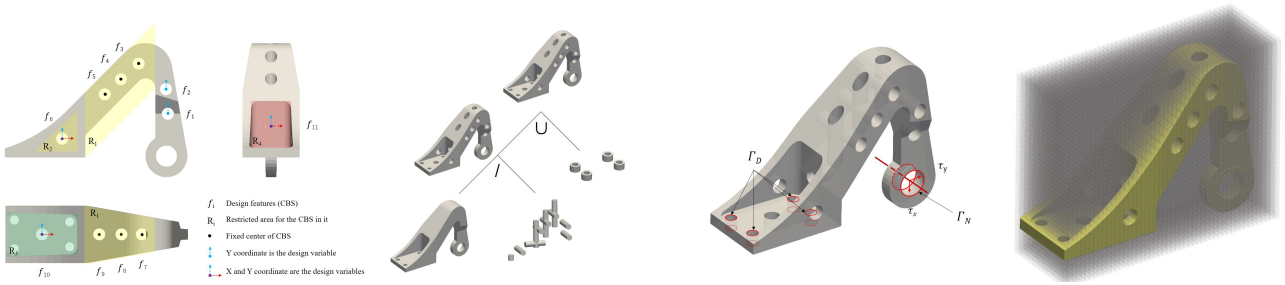


图19。 示例#5。(a) CBS（闭合B样条）设计特征f_i、i = 1、.....、11，以及R_1受限区域（黄色），用于fi、j = 3、4、5、7、8、9、R_2受限区域（黄色）；f_6, R_3受限区域（绿色），用于f_{10}；以及R_4受限区域（红色），用于f_{11}。f_i、i = 1、2的x坐标，以及fi、i = 3、4、5、7、8、9的x、y坐标均为固定值。设计变量总数为250，每个特征包含22个控制半径以及未固定的x、y坐标；(b) 模型的构造实体几何；(c) 边界条件，其中Γ_D固定，$\tau_x = 100N$和$\tau_y = 100N$以（正弦）承压载荷的形式施加于Γ_N；(d) 包含$50 \times 17 \times 39$个体素的FCM（XVoxel）网格。

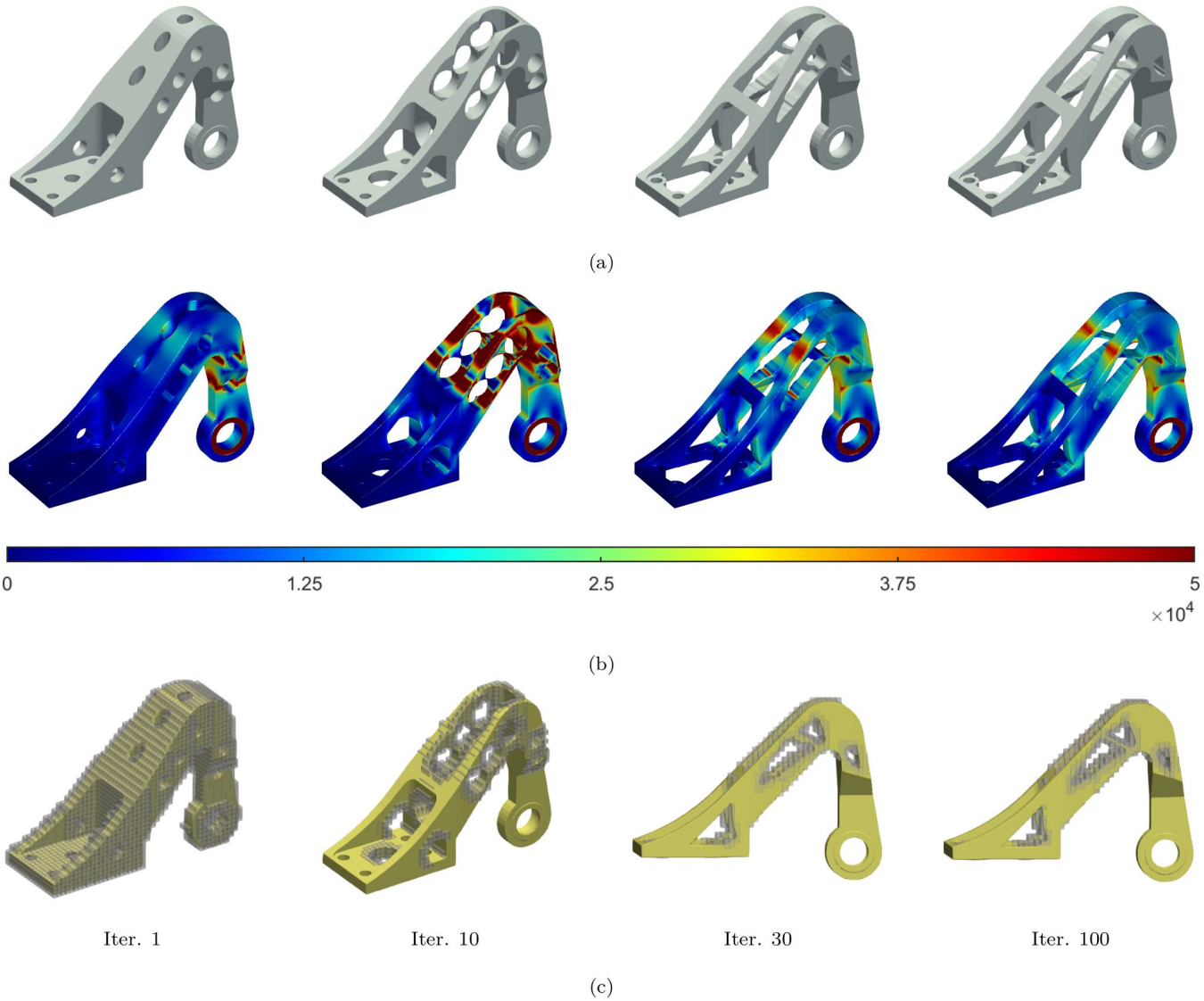
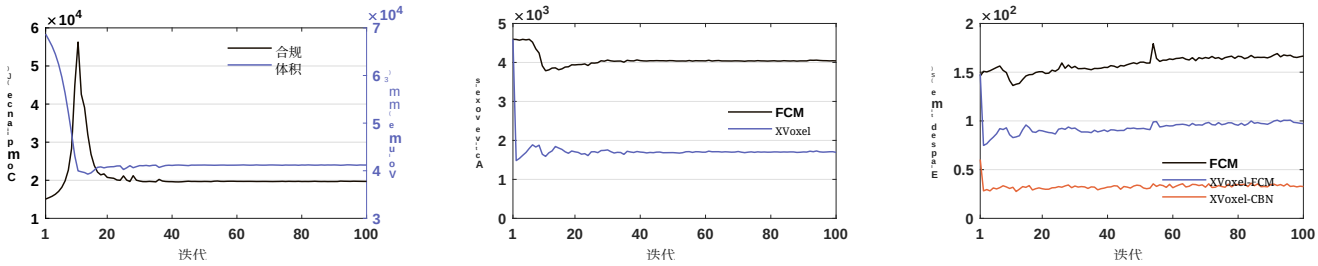


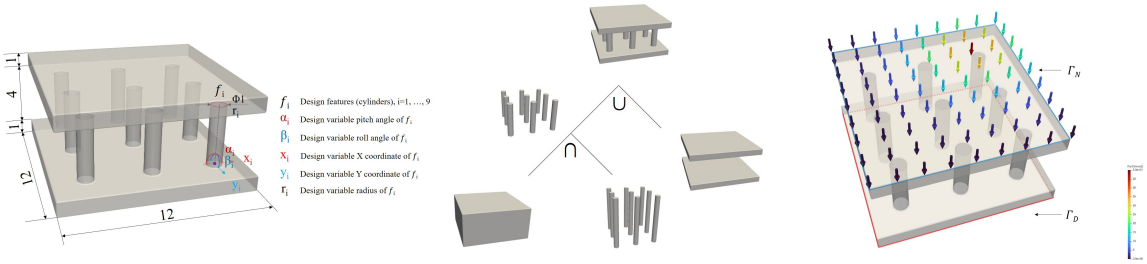
图20。 轴承支架模型在步骤1、10、30和100的优化迭代结果：(a) 模型；(b) FCM/XVoxel的冯·米塞斯应力（MPa）；(c) XVoxel的活跃体素（灰色）。



（a）合规性和体积的收敛曲线　　（b）活跃体素数量　　（c）计时

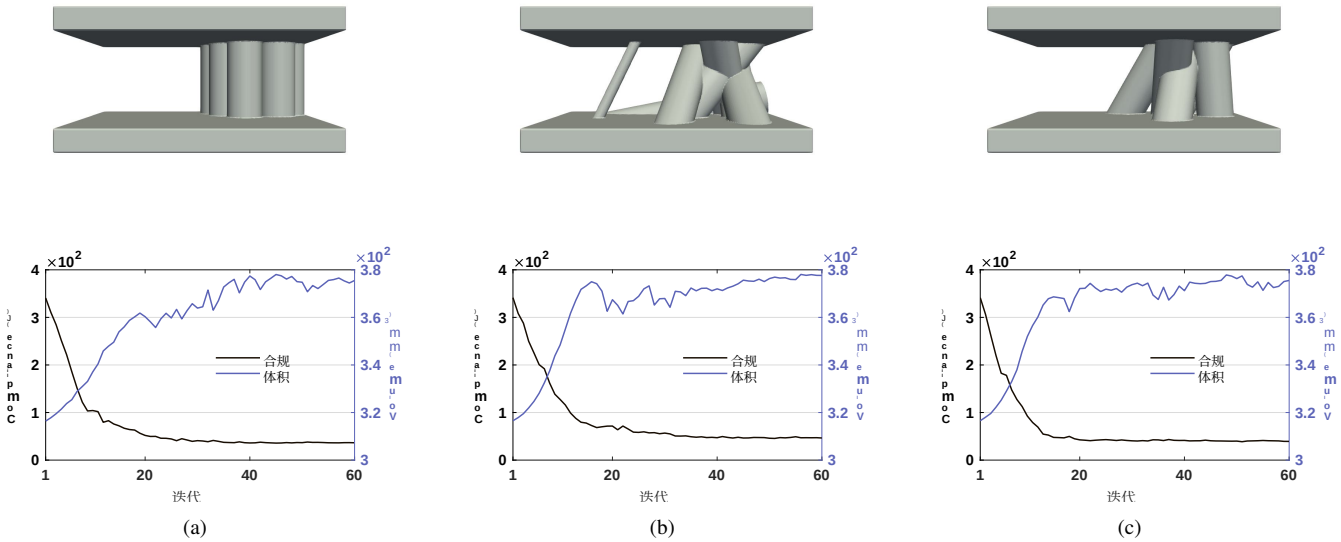
ume

图21。 图19中示例#5的性能统计：(a) XVoxel和FCM的合规性与体积收敛曲线；(b) FCM和XVoxel的活跃体素数量；(c) 三种方法FCM、XVoxel-FCM和XVoxel-CBN的计时。



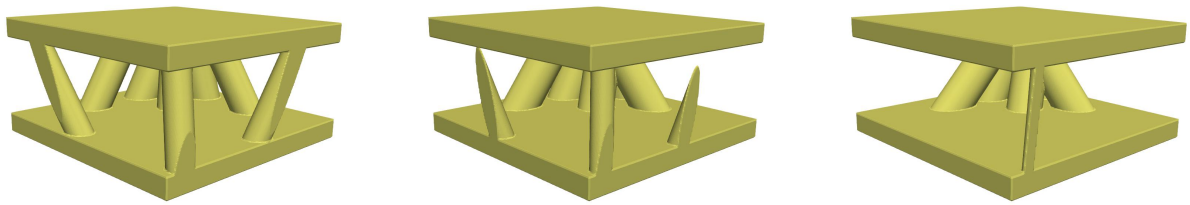
(a)　　(b)　　(c)

图22。示例 #6。（a）模型的参数（毫米），其中设计变量为x_i、y_i、α_i、β_i和r_i，适用于$i = 1、2、...、9$；（b）模型的构造实体几何；（c）边界条件，其中Γ_D固定，Γ_N由径向衰减力场$F(x, y) = F_c \cos(\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}/(9\sqrt{2}) \cdot \frac{\pi}{2})^8$施加，其中$F_c = 50N$，$x_c = x_c = 9$毫米，$0 \le x, y \le 12$。



(a)　　(b)　　(c)

图23. 优化模型与收　　敛曲线：结构柔度和圆柱体积：(a) x_i、y_i和r_i作为设计变量；(b) α_i、β_i和r_i作为设计变量；(c) 全部5个设计变量；见　图22。



(a) 循环 14　　(b) 循环 17　　(c) 循环 20

图 24. 图 20(c) 中优化过程中消失的特征。

表 2：FCM、XVoxel-FCM 和 XVoxel-CBN 在所测试数值算例上的性能比较。该表展示了网格规模、自由度数量、总耗时和总加速比。

示例	网格尺寸	DOFs		计时结果（总步数/迭代次数）			总加速比（基于 FCM）	
		FCM（XVoxel-FCM）	XVoxel-CBN	FCM	XVoxel-FCM	XVoxel-CBN	XVoxel-FCM	XVoxel-CBN
#1	675	63,480	42,280	116.0	117.2	12.8	0.990	9.06
#2	4,004	108,135	255,024	259.9	84.5	21.6	3.08	12.0
#3	39,775	998,325	2,365,080	3,801.4	883.6	174.6	4.30	21.8
#4	9,100	240,975	250,638	145,022.8	10,321.3	2,597.2	14.1	55.8
#5	33,150	279,265	282,006	15,849.0	9,358.5	3,278.5	1.69	4.83

6.6. 示例 *#6*：含有不同圆柱支撑的承载板

最后，我们进一步使用图22中的示例，测试该方法处理位置、尺寸或方向各异的特征的能力。我们还测试了该方法在优化过程中删除构造历史中不必要特征的潜力。该模型包含两块由中间的9个圆柱体支撑的板。每个圆柱特征包含5个设计变量，包括位置坐标 x_i、y_i、方向 α_i、β_i，以及半径 r_i（$i = 1, \ldots, 9$）。顶板的上表面受到辐射力 F 的作用，其定义为 $F(x, y) = F_c \cos\left(\sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}/(9\sqrt{2}) \cdot \frac{\pi}{2}\right)^8$，~~其中 $F_c = 50N$，~~ $x_c = x_c_ = 9$毫米，$0 \le x, y \le 12$；底板的下表面则固定不动，如图22(c)所示。通过优化 x_i、y_i和 r_i；α_i、β_i 和 r_i；以及所有变量，在体积分数为圆柱体原始体积的1.2倍时进行了三种不同的测试。

优化结构和收敛曲线如图 23 所示。所有情况均实现了可靠收敛，得到的结构合规值分别为 39.3、47.1 和 36.0。可以看出，完全变量优化的收敛速度最快。同时请注意，图 24(c) 中的三个设计特征在优化过程中可以移出设计区域，这表明该方法能够自动移除不必要的特征。在这种情况下，我们可以方便地将这些特征从特征列表中删除。图 24 还展示了这些特征的变化。

6.7. 讨论与局限性

正如从上述示例中可能已经注意到的，尽管我们的 XVoxel 方法所得的最终结果可以发生拓扑变化，但其整体形状仍遵循与优化前初始设计相似的结构模式。这是因为该方法面向基于特征的 CAD 和参数化优化，在这些场景中，特征语义（因此也包括整体形状）通常需要得到保留。例如，最终结果的边界表示始终由光滑的参数化曲面构成；边界不可能呈现离散的自由形状（SIMP 或体素密度法 [20] 则是如此）。

因此，我们的方法更适用于精细或半精细设计调整等情形。尺寸变化和拓扑变化可以很大（如图 20 中的示例所示），但不能截然不同。如果需要进行此类设计更改，则应使用其他方法，例如体素密度法。出于同样的原因，我们的方法需要以与最终结果相差不大的初始设计作为输入。这与体素密度法等方法不同，后者甚至可以输入一个与最终结果毫无相似之处的块体。

7. 结论

本文提出了一种基于XVoxel的特征模型参数化设计优化方法。所提出的方法结合了体素模型的局部规则性与特征模型的全局语义信息，以促进CAD与CAE之间的自动关联。通过进一步集成XVoxels、FCM和CBN，无需进行CAD模型与CAE模型之间劳动密集型的转换，即可高效且稳健地循环执行设计修改与仿真更新。通过具有复杂拓扑变化和变化载荷的多种数值算例，验证了所提出方法的有效性

。与现有的FCM方法相比，计算效率最高提升了55.8倍，见表 2。

我们将所提出的 XVoxel 方法视为朝着一项长期研究目标迈出的另一种尝试：建立一种统一模型表示方案，能够完整、紧凑且关联地表示计算机辅助设计模型和计算机辅助工程模型的内容。该方法基于一种名为语义体素的新概念，具有无需进行边界表示模型简化和网格生成的优势。这两个过程可能会给现有方法带来特殊挑战；例如，当几何形状复杂时，等几何分析所需的四边形/六面体网格划分绝非易事。因此，当待优化的设计以特征模型的形式给出且整体形状复杂时，XVoxel 通常比其他方法更适用。

这里指出了 XVoxel 方法几个值得关注的改进方向。如第3.3节和第4.3节所述，XVoxel 模型可以大幅降低仿真对模型简化的依赖，并可直接用于指导适用于仿真的模型简化过程。然而，就目前形式而言，该方法仍无法处理降维，而降维是模型理想化的另一项重要步骤 [10, 48, 49]。将降维纳入该方法是我们团队后续将开展的研究之一。另一个值得关注的改进方向是，目前所提出的方法仅在 Matlab 中实现，以验证其概念。未来，我们很感兴趣将其基于商业或开源特征建模器（例如 Open CASCADE）进一步实现，并将其发布为开源插件。

在工业设计优化中，创新设计往往需要在较大的设计空间内进行大量优化，但时间资源有限。因此，优化过程中需要对设计空间采用降维技术。所提出的 XVoxel 方法由于对输入模型具有较强的通用性，因而很适合与降维方法（例如参数化模型嵌入） [57], 相结合。这种有趣的结合是我们未来的研究方向之一。另一个改进方向是提高所提出方法的效率。目前，我们使用八叉树查找高斯点，导致仿真耗时较长。如果结合某种自适应网格划分方法（例如 [58]），所提出的方法可以大幅提速。

还值得注意的是，同一模型可能对应多种通过布尔运算实现的构造方式。不同的构造方式可能具有不同的设计变异空间，相应的优化过程也会有所不同。因此，在使用我们的方法之前，需要仔细考虑构造方式。目前形式的所提出的方法仅针对给定模型进行参数化优化，无法自动找到合适的构造方式。这种自动选择机制是未来研究中一个很有意义的方向。此外，如果提供的是 B-rep 模型，则需要进行边界表示到构造实体几何的转换（例如， [59]中介绍的方法），所提出的方法才能正常运行。所提出的方法的另一项局限是，优化结果会受到仿真所用单元尺寸的影响，这是使用 FCM 进行仿真的结果（详细讨论见 [60] ）。目前，还没有有原则的方法来选择最佳单元尺寸，通常的做法是通过经验调整来找到合适的单元尺寸。

致谢

本研究得到国家重点研发计划（编号：2020YFC2201303）、国家自然科学基金（编号：62102355、61872320）、浙江省自然科学基金（编号：LQ22F020012）以及浙江省重点研发计划（编号：2022C01025）的部分资助。

参考文献

[1] V. Shapiro, I. Tsukanov, A. Grishin，计算机辅助设计/计算机辅助工程集成中的几何问题，《工程计算与信息科学杂志》11 (2) (2011)。[2] S. D. Daxin, J. M. Prajapati，基于无网格方法的参数化形状优化技术：综述，《结构与多学科优化》56 (5) (2017) 1197–1214。[3] J. Chen, V. Shapiro, K. Suresh, I. Tsukanov，具有拓扑变化和参数化控制的形状优化，《工程数值方法国际期刊》71 (3) (2007) 313–346。[4] J. J. Shah, M. M¨antyl¨a，参数化与基于特征的 CAD/CAM：概念、技术与应用，John Wiley and Sons，1995。[5] F. Boussuge, C. M. Tierney, H. Vilmart, T. T. Robinson, C. G. Armstrong, D. C. Nolan, J. C. L´eon, F. Ulliana，在本体中捕获仿真意图：CAD 与 CAE 集成应用，《工程设计杂志》30 (10-12) (2019) 688–725。[6] F. Boussuge, C. G. Armstrong, C. M. Tierney, T. T. Robinson，将张量分解应用于从 CAD 装配模型准备 CAE 模型，《计算机辅助设计》152 (2022) 103372。[7] D. C. Nolan, C. M. Tierney, C. G. Armstrong, T. T. Robinson，定义仿真意图，《计算机辅助设计》59 (2015) 50–63。[8] H. Zhu, C.-H. Menq，通过自动圆角/倒圆角抑制简化 B-rep 模型，以实现高效的自动特征识别，《计算机辅助设计》34 (2) (2002) 109–123。[9] Inna, Turevsky, Sankara, Hari, Gopalakrishnan, Krishnan, Suresh，计算板弯曲中任意形状特征拓扑敏度的高效数值方法，《工程数值方法国际期刊》79 (13) (2009) 1683–1702。[10] L. Fine, L. Remondini, J. C. Leon，通过理想化算子自动生成有限元分析模型，《工程数值方法国际期刊》49 (1-2) (2000) 83–108。[11] M. Li, B. Zhang, R. R. Martin，多边界特征的二阶去特征误差估计，《工程数值方法国际期刊》100 (5) (2015) 321–346。[12] J. Liu, A. C. To，具有动态特征形状和建模历史演化的基于 CAD 的拓扑优化系统，《机械设计杂志》142 (7) (2019) 1–25。[13] Y. Bazilevs, V. M. Calo, J. A. Cottrell, J. A. Evans, T. J. R. Hughes, S. Lipton, M. A. Scott, T. W. Sederberg，使用 T 样条的等几何分析，《计算机在应用力学与工程中的方法》199 (5-8) (2015) 229–263。[14] Q. Zou, H.-Y. Feng，实体 CAD 模型的推拉式直接建模，《工程软件进展》127 (2019) 59–69。[15] A. Sheffer, T. Blacker, J. Clements, M. Bercovier，虚拟拓扑构造及其应用，Springer Berlin Heidelberg，Berlin，Heidelberg，1997，第247–259页。[16] C. M. Tierney, L. Sun, T. T. Robinson, C. G. Armstrong，使用虚拟拓扑操作生成分析拓扑，《计算机辅助设计》85 (2017) 154–167。

[17] H. Si，TetGen，一种基于Delaunay的高质量四面体网格生成器，《ACM数学软件汇刊》41 (2) (2015) 1–36。[18] Y. Hu, T. Schneider, B. Wang, D. Zorin, D. Panozzo，野外快速四面体网格剖分，《ACM图形学汇刊》39 (4) (2020) 117–1。[19] T. Blacker，自动共形六面体网格剖分的约束、挑战与机遇，《计算机工程》17 (2001)。[20] M. P. Bendsoe, O. Sigmund，拓扑优化：理论、方法与应用，Springer，2003。[21] T. Hughes, J. Cottrell, Y. Bazilevs，等几何分析：CAD、有限元、NURBS、精确几何与网格加密，《计算机在应用力学与工程中的方法》194 (39-41) (2005) 4135–4195。[22] K. Li, X. Qian，通过边界积分进行等几何分析与形状优化，《计算机辅助设计》43 (11) (2011) 1427–1437。[23] X. Qian，基于 NURBS 的等几何形状优化中的完整解析灵敏度，《计算机在应用力学与工程中的方法》199 (29) (2010) 2059–2071。[24] Y.-D. Seo, H.-J. Kim, S.-K. Youn，使用裁剪样条曲面的等几何拓扑优化，《计算机在应用力学与工程中的方法》199 (49) (2010) 3270–3296。[25] X. Xie, S. Wang, M. Xu, N. Jiang, Y. Wang，使用移动可变形组件的层次样条等几何拓扑优化，《计算机在应用力学与工程中的方法》360 (2020) 112696。[26] D. Schillinger, M. Ruess，有限胞元法：CAD 与基于图像的几何模型高阶结构分析背景下的综述，《计算工程方法档案》22 (3) (2015) 391–455。[27] E. Rank, M. Ruess, S. Kollmannsberger, D. Schillinger, A. D¨uster，几何建模、等几何分析与有限胞元法，《计算机在应用力学与工程中的方法》249-252 (2012) 104–115。[28] W. Yingjun, David, J., Benson，参数化的基于LSM的结构拓扑优化，《计算力学》57 (1) (2016) 19–35。[29] B. Wassermann, S. Kollmannsberger, T. Bog, E. Rank，从几何设计到数值分析：在构造实体几何上直接采用有限胞元法，《计算机与数学及其应用》74 (7) (2017) 1703–1726。[30] J. Chen, M. Freytag, V. Shapiro，构造表示几何模型的形状灵敏度，《计算机辅助几何设计》25 (7) (2008) 470–488。[31] L. Zhu, M. Li, R. R. Martin，经历参数修改的 CAD 模型直接模拟，《计算机辅助设计》78 (2016) 3–13。[32] F. Chinesta, A. Ammar, E. Cueto，适当广义分解用于求解多维模型的最新进展与新挑战，《计算工程方法档案》17 (4) (2010) 327–350。[33] A. Schulz, J. Xu, B. Zhu, C. Zheng, E. Grinspun, W. Matusik，CAD 模型的交互式设计空间探索与优化，《ACM图形学汇刊》36 (4) (2017) 157。[34] C. Hafner, C. Schumacher, E. Knoop, T. Auzinger, M. Bcher, X-CAD：使用扩展有限元优化 CAD 模型，《ACM图形学汇刊》38 (6) (2019) 1–15。[35] Q. Zou, H.-Y. Feng，直接建模中 CAD 模型信息不一致性解决的决策支持方法，《高级工程信息学》44 (2020) 101087。[36] J.-H. Zhu, W.-H. Zhang, L. Xia，航空器与航天结构设计中的拓扑优化，《计算工程方法档案》23 (4) (2016) 595–622。[37] L. Jiu, W. Zhang, L. Meng, Y. Zhou, L. Chen，一种面向CAD的结构拓扑优化方法，《计算机与结构》239 (2020) 106324。[38] W. Zhang, Y. Zhou, J. Zhu，拓扑优化中具有实体与空腔的特征定义综合研究，《计算机在应用力学与工程中的方法》325 (2017) 289–313。[39] Y. Zhou, W. Zhang, J. Zhu, Z. Xu，具有符号距离函数的特征驱动拓扑优化方法，《计算机在应用力学与工程中的方法》310 (2016) 1–32。[40] X. Guo, W. Zhang, W. Zhong，显式进行拓扑优化并几何上——一种基于新型移动可变形组件的框架，《应用力学杂志—美国机械工程师学会汇刊》81 (8) (2014)。[41] X. Guo, X. Zhao, W. Zhang, J. Yan, G. Sun，考虑载荷不确定性的多尺度鲁棒设计与优化，《计算机在应用力学与工程中的方法》283 (2015) 994–1009。[42] W. Zhang, J. Chen, X. Zhu, J. Zhou, D. Xue, X. Lei, X. Guo，基于移动可变孔洞（MMV）方法的显式三维拓扑优化，《计算机在应用力学与工程中的方法》322 (2017) 590–614。[43] Q. Zou, H.-Y. Feng，一种基于几何—拓扑不一致性跟踪的二次曲面边界表示模型鲁棒直接建模方法，《计算机工程》38 (4) (2022) 3815–3830。[44] J. J. Shah，参数化 CAD 设计：构造技术的分类与比较，载于：国际几何建模研讨会，Springer，1998，第 53–68 页。[45] S. H. Lee，一种采用基于特征的多分辨率与多抽象层次建模技术的 CAD–CAE 集成方法，《计算机辅助设计》37 (9) (2005) 941–955。[46] Q. Zou, H.-Y. Feng，利用几何扰动进行直接建模的变分边界表示模型分析，《计算设计与工程杂志》6 (4) (2019) 606–616。[47] G. Young, A. Krishnamurthy，实体模型多级体素表示的 GPU 加速生成与渲染，《计算机与图形学》75 (2018) 11–24。[48] C. G. Armstrong，有限元分析的建模要求，《计算机辅助设计》26 (7) (1994) 573–578。[49] C. S. Chong, A. S. Kumar, K. Lee，用于非流形几何模型生成的自动实体分解与简化，《计算机辅助设计》36 (13) (2004) 1357–1369。[50] V. Shapiro, D. L. Vossler，什么是实体参数族？，载于：第三届 ACM 实体建模与应用研讨会论文集，1995，第 43–54 页。[51] J. Rossignac，IBNC：用于多面体的集成边界与自然 CSG（综述、简化及既有方法整合），《计算机辅助设计》50 (2022) 103296。[52] C. Wang, Y. Chen，自由曲面的加厚以实现实体制造，《快速成型期刊》19 (6) (2013) 395–406。[53] M. W. Jones, J. A. Baerentzen, M. Sramek，三维距离场：技术与应用综述，《IEEE 可视化与计算机图形学汇刊》12 (4) (2006) 581–599。[54] M. Li, J. Hu，利用曲线桥接节点分析非分离尺度的异质结构，《计算机在应用力学与工程中的方法》392 (2022) 114582。[55] M. Juntunen, R. Stenberg，适用于一般边界条件的 Nitsche 方法，《计算数学》78 (267) (2009) 1353–1374。[56] C. Zillober，移动渐近线法的全局收敛版本，《结构优化》6 (3) (1993) 166–174。[57] A. Serani, M. Diez，参数化模型嵌入，《计算机在应用力学与工程中的方法》404 (2023) 115776。[58] J. Qian, Y. Zhang，从边界表示模型自动生成适用于非流形 CAD 装配体的非结构化全六面体网格，《计算机工程》28 (2012) 345–359。[59] V. Shapiro, D. L. Vossler，用于边界到 CSG 转换的分离，《ACM图形学汇刊》（TOG）12 (1) (1993) 35–55。[60] A. D¨uster, J. Parvizian, Z. Yang, E. Rank，适用于三维固体力学问题的有限胞元法，《计算机在应用力学与工程中的方法》197 (45-48) (2008) 3768–3782。