arXiv:2303.15320v1 [physics.class-ph] 22 Mar 2023

时变哈密顿-拉格朗日系统的诺特定理和李对称性

J¨urgen Struckmeier* 和 Claus Riedel重离子研究协会（GSI），普朗克街1号，64291 达姆施塔特，德国（2002年5月8日收到；2002年12月12日发表）

本文将回顾基于依赖于时间和空间坐标的点变换，对一般一类时变哈密顿系统进行的诺特对称性和李对称性分析。所得对称性以生成元的形式表示，其时间依赖系数可由一组常微分（“辅助”）方程的解给出。我们将阐明诺特辅助方程组与李辅助方程组之间的相互关系。与早期研究相比，我们将证明诺特方法的辅助方程适用于更广泛的一类势，并且存在不变量。作为示例，我们将求出含时开普勒系统的诺特对称性和李对称性。通过对相关辅助方程作适当解释，我们将证明时不变开普勒系统的龙格-楞次矢量可作为诺特不变量出现。此外，通过找出辅助方程的更多解——这些解依赖于已知的运动方程解轨迹——我们将进一步揭示开普勒系统的非局域不变量和对称性。通过说明这些不变量在不同对称算符的作用下保持不变，我们证明，对称变换与不变量之间并不存在唯一的对应关系。

PACS 编号：45.20.-d, 45.50.Jf

I. 引言

旨在分析给定动力系统特定性质的解析方法，可以有效利用 Lie [1] 和诺特 [2]所建立的无穷小对称变换形式体系。本文将回顾这些方法。具体而言，对于一大类显含时间的哈密顿系统，我们将基于点变换来推导诺特对称性和李对称性，其中变分取决于时间和空间坐标。对这两类方法进行并行处理，将使我们能够比较这两种对称性分析，并揭示它们之间紧密的联系及其差异。此外，我们还将参与当前关于这些对称性如何与给定动力系统的不变量相关联的讨论。

对称性分析的结果以对称变换生成元的形式给出。这些生成元的具体形式由时间依赖系数组成，这些系数是常微分（“辅助”）方程的解。为了获得这些解的完整“谱”，必须将辅助方程与系统的运动方程视为一个耦合方程组 [3–5]。随后可以看到，那些与运动方程的解相解耦的辅助方程特解，会给出系统“基本”对称性的生成元。

作为示例，我们推导含时开普勒系统的诺特对称性和李对称性分析。具体的辅助方程可直接由此前推导的一般表述得到。所有已知不变量和李对称性都将由这些辅助方程的解导出。特别是，定时开普勒系统的龙格-楞次矢量可通过适当解释相应的辅助方程，得到为经典诺特不变量——也就是说，它源自依赖于空间坐标矢量 $\boldsymbol{q}$ 和时间 t 的点变换。此外，通过求解相应辅助方程的其他解，我们将揭示此前未曾报道的开普勒系统的非局部诺特不变量和李对称性。

在不同的 Lie 和诺特对称性变换下，诺特不变量的变分将显示为零。由此我们证明，对称性与相关不变量之间并不存在唯一的对应关系。

我们首先回顾时空中的无穷小点变换及其生成元。这将有助于明确我们的符号表示，并使本文尽可能自洽。在此背景下，对诺特定理的简要介绍将极大地促进对一般哈密顿系统的诺特对称性分析以及后续李对称性分析的理解；该哈密顿系统由势$V(\boldsymbol{q},t)$所决定。

II. 无穷小点变换 NS

给定一个具有 n 个自由度的经典粒子动力系统，无穷小点变换是指将构型空间和时间中的“点”映射为其无穷小邻近“点”的变换：$(\boldsymbol{q},t)\ \mapsto(\boldsymbol{q}',t')$，其中撇号表示变换后的量。形式上，$(\boldsymbol{q},t)$ 时空中的这种点变换可以用无穷小参数 ε 定义为

$$t' = t\ +\delta t\,, \qquad \delta t\ = \varepsilon\xi(\boldsymbol{q},t)\,, \tag{1a}$$

$$q_i' = q_i + \delta q_i\,, \qquad \delta q_i = \varepsilon\eta_i(\boldsymbol{q},t)\,. \tag{1b}$$

为了推导由方程（1a）和（1b）定义的无穷小点变换的 $\dot{q}_i$ 和 $\ddot{q}_i$ 的变换规则，我们必须注意到，坐标 q_i 和时间 t 是同时变换的。量 $\delta\dot{q}_i$ 的由来是：$\dot{q}_i'$ 由变换

*电子邮箱地址：j.struckmeier@gsi.de

坐标 q_i' 对变换时间 t'的导数给出。根据变换规则（1a）和（1b），我们因此得到 [6]

$$\dot{q}_i' = \frac{dq_i'}{dt'} = \frac{dq_i + \varepsilon d\eta_i}{dt + \varepsilon d\xi} = \frac{\dot{q}_i + \varepsilon\dot{\eta}_i}{1+\varepsilon\dot{\xi}} = \dot{q}_i + \varepsilon\left(\dot{\eta}_i - \dot{\xi}\dot{q}_i\right) + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2)\,,$$

这意味着一阶变分 $\delta\dot{q}_i$ 为

$$\delta\dot{q}_i = \varepsilon\left[\dot{\eta}_i(\boldsymbol{q},t) - \dot{\xi}(\boldsymbol{q},t)\,\dot{q}_i\right]\,. \tag{1c}$$

因此，无穷小点变换 (1a) 和 (1b) 唯一确定了 $\dot{q}_i'$ 的映射。同样，我们可以从下式得到 $\ddot{q}_i'$ 的变换规则：

$$\ddot{q}_i' = \frac{d\dot{q}_i'}{dt'} = \frac{\ddot{q}_i + \varepsilon\left(\ddot{\eta}_i - \dot{\xi}\ddot{q}_i - \ddot{\xi}\dot{q}_i\right)}{1+\varepsilon\dot{\xi}} = \ddot{q}_i + \varepsilon\left(\ddot{\eta}_i - 2\dot{\xi}\ddot{q}_i - \ddot{\xi}\dot{q}_i\right) + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2)\,,$$

由此得到关于 ε 的一阶变分 $\delta\ddot{q}_i$，

$$\delta\ddot{q}_i = \varepsilon\left(\ddot{\eta}_i - 2\dot{\xi}\,\ddot{q}_i - \ddot{\xi}\,\dot{q}_i\right)\,. \tag{1d}$$

给定一个关于 n 维粒子位置向量和时间的任意解析函数 $u(\boldsymbol{q},t)$，由点变换 (1) 所诱导的函数变分 $\delta u = u(\boldsymbol{q}',t') - u(\boldsymbol{q},t)$ 为

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial t}\delta t + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial q_i}\delta q_i = \varepsilon\,\boldsymbol{U}\,u(\boldsymbol{q},t)\,,$$

算符 $\boldsymbol{U}$ 表示无穷小点变换 (1) 的生成元，

$$\boldsymbol{U} = \xi(\boldsymbol{q},t)\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n}\eta_i(\boldsymbol{q},t)\frac{\partial}{\partial q_i}\,. \tag{2}$$

任意解析函数 $v(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ 的变分 $\delta v = v(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t') - v(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ 为

$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial t}\delta t + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial v}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial v}{\partial\dot{q}_i}\delta\dot{q}_i\right) = \varepsilon\,\boldsymbol{U}'\,v(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\,,$$

这意味着生成元的第一个“延拓” $\boldsymbol{U}'$ 为 (2)

$$\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{U} + \sum_{i=1}^{n}\eta_i'\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\,,\qquad \eta_i' = \dot{\eta}_i - \dot{\xi}\dot{q}_i\,. \tag{3}$$

最后，任意解析函数 $w(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}},t)$ 的变分 $\delta w = w(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',\ddot{\boldsymbol{q}}',t') - w(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}},t)$ 可表示为

$$\delta w = \varepsilon\,\boldsymbol{U}''\,w(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\ddot{\boldsymbol{q}},t)\,,$$

其中 $\boldsymbol{U}''$ 是生成元 (2) 的第二个“延拓”，

$$\boldsymbol{U}'' = \boldsymbol{U}' + \sum_{i=1}^{n}\eta_i''\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_i}\,,\quad \eta_i'' = \ddot{\eta}_i - 2\dot{\xi}\ddot{q}_i - \ddot{\xi}\dot{q}_i = \frac{d}{dt}\eta_i' - \dot{\xi}\ddot{q}_i\,. \tag{4}$$

在第五节 B 部分，我们将利用生成元$\boldsymbol{U}$的二阶延拓 $\boldsymbol{U}''$，对一般的时变拉格朗日系统进行李对称性分析。在此之前，我们将在下一节回顾诺特定理时用到第一次延拓$\boldsymbol{U}'$。

III. 诺特定理回顾

诺特定理 [2, 7, 8] 将一个具有 n 个自由度的拉格朗日系统 $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ 的守恒量与使拉格朗日作用量 $L\,dt$ 保持不变的无穷小点变换 (1) 联系起来。现在，我们将推导这一从无穷小点变换 (1) 得出的特殊形式的定理。在式 (1) 定义的一般点变换中，我们恰好考虑那些使给定拉格朗日量 $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ 的作用量 Ldt 保持不变的变换，

$$L\big(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t\big)\,dt \stackrel{!}{=} L'\big(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t'\big)\,dt'\,. \tag{5}$$

请注意，为满足条件 (5)，我们允许拉格朗日量本身因点变换而改变其函数形式。由于根据哈密顿原理 $\delta\int L dt = 0$，系统的运动方程直接由作用量积分的变分得出，条件 (5) 意味着特定的对称变换 (1) 必须保持运动方程的形式。这意味着点变换 (1) 将作用量积分映射为同一作用量积分的另一种表示。换言之，我们并非将一个物理系统变换为另一个不同的系统，而是从一个无穷小偏移的“视角”考察给定的拉格朗日系统 $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$，以便识别其内在对称性。

引入规范函数 $f(\boldsymbol{q},t)$，L' 与 L 之间的函数关系可表示为，

$$L'\big(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t'\big) = L + \delta L + \cdots = L\big(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t'\big) - \varepsilon\frac{df}{dt} + \boldsymbol{O}(\varepsilon^2)\,. \tag{6}$$

要使关系式 (6) 一般成立，必要且充分的条件是 [7] $f(\boldsymbol{q},t)$ 仅依赖于 $\boldsymbol{q}$和 t，因为根据式 (1c)，变换 $\dot{\boldsymbol{q}}\mapsto\dot{\boldsymbol{q}}'$ 由 $\boldsymbol{q}\mapsto\boldsymbol{q}'$ 和 $t\mapsto t'$唯一确定。将式 (6) 代入不变拉格朗日作用量的条件 (5)，保留 ε的一阶项，得到

$$L\big(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t'\big)\,dt' = L\big(\boldsymbol{q},\,\dot{\boldsymbol{q}},t\big)\,dt + \varepsilon\frac{df(\boldsymbol{q},t)}{dt}\,dt\,. \tag{7}$$

另一方面，$L\big(\boldsymbol{q}'、\,\dot{\boldsymbol{q}}'、\,t'\big)$ 与$L\big(\boldsymbol{q}、\,\dot{\boldsymbol{q}}、\,t\big)$ 之间的联系由式 (3) 中的“扩展”算符 $\boldsymbol{U}'$ 确定，

$$L\big(\boldsymbol{q}',\dot{\boldsymbol{q}}',t'\big) = L\big(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t\big) + \varepsilon\,\boldsymbol{U}'\,L\big(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t\big)\,.$$

保留 ε 的一阶项，式 (7) 因而给出关于 $f(\boldsymbol{q},t)$ 的辅助方程，其中按照 $dt' = (1+\varepsilon\xi)\ dt$替换 dt'，

$$\frac{df(\boldsymbol{q},t)}{dt} = \dot{\xi} L + \boldsymbol{U}'\, L\,. \tag{8}$$

对于分别由式 (2) 和式 (3) 给出的算符 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{U}'$，式 (8) 的显式形式为

$$\frac{df(\boldsymbol{q},t)}{dt} = \dot{\xi}\, L + \xi\, \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\eta_i \frac{\partial L}{\partial q_i} + \left(\dot{\eta}_i - \dot{q}_i \dot{\xi}\right) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right). \tag{9}$$

我们可以将式 (9) 看作关于尚未指定函数 $\xi(\boldsymbol{q},t)$ 和 $\eta_i(\boldsymbol{q},t)$ 的条件。只有当点变换 (1) 的组成部分 ξ 和 η_i 满足式 (9) 时，它们才能使给定拉格朗日量 $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ 对应的拉格朗日作用量 $L dt$ 保持不变。

式 (9) 中的各项可以直接分解为一个全时间导数和一组包含欧拉-拉格朗日运动方程的项，

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left[f(\boldsymbol{q},t) - \xi\, L + \sum_{i=1}^{n} (\xi \dot{q}_i - \eta_i) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} (\xi \dot{q}_i - \eta_i) \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0\,. \end{aligned} \tag{10}$$

沿着由欧拉-拉格朗日方程的解给出的系统轨迹 $\left(\boldsymbol{q}(t)\ \dot{\boldsymbol{q}}(t)\right)$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,, \tag{11}$$

式 (10) 中相关的项为零。这意味着其余项的时间积分 I

$$I = \sum_{i=1}^{n} (\xi \dot{q}_i - \eta_i) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \xi L + f(\boldsymbol{q},t) \tag{12}$$

构成一个守恒量，即拉格朗日系统 $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ 的一个运动常数。式 (12) 给出的不变量与关于 $f(\boldsymbol{q},t)$ 的微分方程 (9) 一起，通常称为诺特定理。从初始条件 $(\boldsymbol{q}(t_0)\ \dot{\boldsymbol{q}}(t_0))$ 出发，系统的状态 $(\boldsymbol{q}(t)\ \dot{\boldsymbol{q}}(t))$ 由运动方程 (11) 唯一确定，而这些方程又由哈密顿原理 $\delta \int L dt = 0$ 导出。将无穷小变换后系统的变分 $\delta \int L' dt' = 0$ 用原坐标表示，除了运动方程 (11) 外，我们还得到由对称变换 (1) 保持不变的量 I。因此，条件 $\delta \int L' dt' = 0$ 可视为哈密顿原理的推广，它既给出运动方程，也给出由不变量 I体现的相空间对称关系。一般而言，关于 $f(\boldsymbol{q},t)$ 的式 (9) 取决于 $\boldsymbol{q}(t)$，因此也取决于运动方程 (11) 的解。

方程（10）表明，诺特不变量（12）伴随着系统轨迹的时间演化同时产生，而该轨迹是欧拉-拉格朗日方程（11）的解。或者，诺特定理也可以解释为一种以时间 t 为共同自变量的耦合微分方程组。该耦合方程组由欧拉-拉格朗日运动方程（11）和一个关于 $f(\boldsymbol{q},t)$ 的附加条件方程组成。从这个意义上说，它可以视为一个广义的 Ermakov [9] 系统，其随时间变化的解共同构成方程（12）中的不变量。

IV. 哈密顿描述中的诺特定理

根据勒让德变换的定义

$$L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, \dot{q}_i - H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) \tag{13}$$

该变换将给定的拉格朗日量 $L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)$ 映射为相应的哈密顿量 $H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$，由此可得到 L 的导数

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\,, \qquad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}\,. \tag{14}$$

将这些变换规则应用于从动力系统的拉格朗日描述到哈密顿描述的转换，并代入式（12）的诺特不变量，可立即得到

$$I = \sum_{i}^{n} (\xi \dot{q}_i - \eta_i)\, p_i - \xi \sum_{i=1}^{n} p_i\, \dot{q}_i + \xi\, H + f(\boldsymbol{q},t)\,,$$

这可化简为诺特定理的哈密顿表述

$$I = \xi H - \sum_{i=1}^{n} \eta_i p_i + f(\boldsymbol{q},t)\,. \tag{15}$$

由式（9）给出的 $f(\boldsymbol{q},t)$ 的条件方程，根据式（14）变换为

$$\dot{f}(\boldsymbol{q},t) = -\dot{\xi} H - \xi\, \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\dot{\eta}_i p_i - \eta_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right). \tag{16}$$

沿着系统轨迹，正则方程成立，

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{dq_i}{dt}\,, \qquad \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{dp_i}{dt}\,, \qquad \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt}\,.$$

于是，方程（16）的右端可表示为全时间导数，从而得到

$$\frac{d}{dt}\left(\xi H - \sum_{i=1}^{n} \eta_i p_i + f(\boldsymbol{q},t) \right) = \frac{dI}{dt} = 0.$$

因此，在哈密顿表述中，式 (9) 简化为一个平凡的陈述：式 (15) 中的诺特不变量 I 的全时间导数必须为零。对于动量依赖至多为二次的哈密顿量 H，诺特不变量的形式 (15) 与这样一种 Ansatz 函数相容：该函数由正则动量的二次项和一次项组成，Lewis and Leach [10] 早先曾使用过这种函数。因此我们发现，对于这类哈密顿系统，求解不变量的这一方法在数学上等价于基于诺特定理的策略。

V. 含一般时变势的哈密顿系统

A. 诺特对称性分析

为了说明一种特定的诺特对称性分析，我们考虑粒子在显含时间的势 $V(\boldsymbol{q},t)$ 中运动的 n 自由度系统，

$$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},t)=\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}p_i^2+V(\boldsymbol{q},t)\,. \tag{17}$$

由式 (17) 得到的正则方程为

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}=p_i\,,\qquad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}=-\frac{\partial V}{\partial q_i}\,. \tag{18}$$

下面，我们求出哈密顿系统 (17) 的特定不变量 I，它将式 (15) 中的一般诺特不变量特化。我们据此定义与诺特对称性变换 (1) 一致的点映射。对于特定哈密顿量 (17)，式 (16) 中关于 $dI/dt=0$ 的一般条件为

$$\frac{d}{dt}\left[\xi(\boldsymbol{q},t)\left(\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}p_i^2+V(\boldsymbol{q},t)\right)-\sum_{i=1}^{n}\eta_i(\boldsymbol{q},t)\,p_i+f(\boldsymbol{q},t)\right]=0.$$

代入正则方程 (18) 后，只有当正则动量的三次项、二次项和一次项分别消失时，所得方程才能对任意特定的正则动量向量 $\boldsymbol{p}$ 全局成立；相应地，剩余的不依赖于 p_i 的各项之和也必须满足

$$\sum_i\sum_j \tfrac{1}{2}p_i^2p_j\frac{\partial\xi}{\partial q_j}=0\,, \tag{19a}$$

$$\sum_i\sum_j p_ip_j\left(\tfrac{1}{2}\delta_{ij}\frac{\partial\xi}{\partial t}-\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}\right)=0\,, \tag{19b}$$

$$\sum_i p_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}-\frac{\partial\eta_i}{\partial t}+V\frac{\partial\xi}{\partial q_i}\right)=0\,, \tag{19c}$$

$$\sum_i \eta_i\frac{\partial V}{\partial q_i}+\frac{\partial\xi}{\partial t}V+\xi\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}=0\,. \tag{19d}$$

式 (19b) 中的记号 δ_{ij} 表示克罗内克符号。由于式 (19a) 的求和中仅出现一个动量项，我们可以立即得出结论：相应的系数为零，

$$\frac{\partial\xi(\boldsymbol{q},t)}{\partial q_j}=0\,,\qquad j=1,\ldots,n\,,$$

因此，$\xi(\boldsymbol{q},t)\equiv\beta(t)$ 必须仅是 t 的函数。对于任意 $\boldsymbol{p}$，如果 $\partial\eta_i/\partial q_j$ 抵消了 ξ 项（相差反对称矩阵 (a_{ij}) 的一个常数元素 a_{ij}），则式 (19b) 中的双重求和整体为零

$$\frac{\partial\eta_i(\boldsymbol{q},t)}{\partial q_j}=\tfrac{1}{2}\delta_{ij}\,\dot{\beta}(t)+a_{ij}\,,\quad a_{ij}=-a_{ji}\,.$$

因此，函数 $\eta_i(\boldsymbol{q},t)$ 的一般形式为

$$\eta_i(\boldsymbol{q},t)=\tfrac{1}{2}\dot{\beta}(t)\,q_i+\psi_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}q_j\,. \tag{20}$$

其中，$\psi_i(t)$ 表示仅依赖于时间的任意函数。式 (19c) 中的线性动量项现在要求

$$\frac{\partial f}{\partial q_i}=\frac{\partial\eta_i}{\partial t}\,.$$

代入式 (20) 对时间的偏导数后，得到

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{q},t)}{\partial q_i}=\tfrac{1}{2}\ddot{\beta}(t)\,q_i+\dot{\psi}_i(t)\,.$$

这个偏微分方程也可以通过一般积分得到

$$f(\boldsymbol{q},t)=\ddot{\beta}(t)\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{4}q_i^2+\sum_{i=1}^{n}\dot{\psi}_i(t)\,q_i\,. \tag{21}$$

现在，η_i 和 f 分别由式 (20) 和式 (21) 给出，因此，式 (15) 中的不变量 I 可用尚未确定的常数 a_{ij} 以及时间函数 $\beta(t)$ 和 $\psi_i(t)$ 表示，

$$\begin{aligned}I=\beta(t)\,H-\dot{\beta}(t)\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}q_i\,p_i+\ddot{\beta}(t)\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{4}q_i^2\\+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}q_i\,p_j+\sum_{i=1}^{n}\left(\dot{\psi}_i\,q_i-\psi_i\,p_i\right)\,.\end{aligned} \tag{22}$$

函数 $\beta(t)$ 和 $\psi_i(t)$ 以及 a_{ij} 由条件 (19d) 确定，该条件由不依赖正则动量 p_i 的项导出，

$$\dot{\beta}V+\beta\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\frac{\partial V}{\partial q_i}=0\,. \tag{23}$$

为得到式 (23) 的显式形式，必须代入式 (20) 以及式 (21) 对时间的偏导数。对于不关于 $\boldsymbol{q}$ 呈线性的势 $V(\boldsymbol{q},t)$，$\psi_i(t)$ 项是唯一关于正则坐标呈线性的项。因此，这些项之和必须分别为零。这意味着可得到两个不同的微分方程：一个对应于不依赖 $\psi_i(t)$ 的项，另一个对应于其余依赖 $\psi_i(t)$ 的项。记住 $a_{ij}=-a_{ji}$，式 (23) 的第一组项构成关于 $\beta(t)$ 的下列非齐次线性微分方程：

$$\begin{aligned}\dddot{\beta}(t)\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{4}q_i^2+\ddot{\beta}(t)\left[V\big(\boldsymbol{q}(t),t\big)+\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}q_i\frac{\partial V}{\partial q_i}\right]\\+\dot{\beta}(t)\frac{\partial V}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,q_j\frac{\partial V}{\partial q_i}=0\,.\end{aligned} \tag{24}$$

令 $V(\boldsymbol{q}(t)\ t)$ 为方程（17）的势，则方程（24）表示沿正则方程（18）的解轨迹 $\boldsymbol{q}(t)$、以时间 t 为自变量的常微分三阶方程

。方程（24）的通解由其齐次部分的线性组合与非齐次方程的一个特解构成。根据线性常微分方程的存在唯一性定理，只要系数 $\boldsymbol{q}(t)$、$V(\boldsymbol{q}(t)\ t)$ 及其偏导数沿自变量 t 连续，初值问题（ 24 ）就存在唯一解 $\beta(t)$。否则，函数$\beta(t)$ 可能在某个有限时刻 t_1 不再存在，这意味着相关不变量仅在有限时间范围 $t_0 \le t < t_1$ 内存在。

我们将辅助方程 (24) 理解为沿已知轨迹 $\boldsymbol{q}(t)$ 的常微分方程，这与 Lewis and Leach [10] 早期的研究不同。这些作者将辅助方程视为关于势 $V(\boldsymbol{q},t)$ 的偏微分方程。他们认为，只有构成方程 (24) 通解的那些势才能导出一个不变量 I。我们在此指出，对于更一般的一类势 $V(\boldsymbol{q}(t)\ t)$，只要它们沿轨迹 $\boldsymbol{q}(t)$ 存在方程 (24) 的一个解 $\beta(t)$，方程 (22) 的不变量 I 同样存在。

对于函数 $\psi_i(t)$，方程 (23) 给出条件

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\ddot{\psi}_i(t)\,q_i+\psi_i(t)\,\frac{\partial V}{\partial q_i}\right)=0\,. \tag{25}$$

当 $\psi_i(t)$ 满足方程 (25) 时，方程 (22) 中依赖于 ψ_i 的各项构成如下独立不变量

$$I_\psi=\sum_{i=1}^{n}\left[\dot{\psi}_i(t)\,q_i-\psi_i(t)\,p_i\right]\,. \tag{26}$$

我们回顾一下，函数 $\psi_i(t)$ 在方程 (20) 中作为每个指标 $i=1,\dots,n$ 对应的独立积分“常数”出现。因此，不变量 (26) 及其相关的辅助方程 (25) 可分别拆分为一组 n 方程：

$$\ddot{\psi}_i(t)\,q_i-\psi_i(t)\,\dot{p}_i=0\,,\quad i=1,\dots,n\,, \tag{27}$$

$$I_{\psi_i}=\dot{\psi}_i(t)\,q_i-\psi_i(t)\,p_i\,,\quad i=1,\dots,n\,, \tag{28}$$

这意味着，不变量 I 可以写成若干不变量 $I=I_\beta+\sum_i I_{\psi_i}$ 之和。因此，方程（22）中与 $\psi_i(t)$无关的项构成不变量 I_β。代入哈密顿量（17）后，该不变量为：

$$\begin{aligned}I_\beta=\beta(t)\left[\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}p_i^2+V\big(\boldsymbol{q}(t),t\big)\right]-\dot{\beta}(t)\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}q_i\,p_i\\+\ddot{\beta}(t)\sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{4}q_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,q_i\,p_j\,.\end{aligned} \tag{29}$$

由式（20）给出的 $\xi(\boldsymbol{q},t)$、$\equiv\beta(t)$ 和 $\eta_i(\boldsymbol{q},t)$，产生哈密顿系统（17）中该类系统的诺特不变量（26）和（29）的对称变换生成元及其一阶延拓为

$$\boldsymbol{U}=\beta(t)\frac{\partial}{\partial t}+\sum_i\left[\tfrac{1}{2}\dot{\beta}\,q_i+\sum_j a_{ij}q_j+\psi_i(t)\right]\frac{\partial}{\partial q_i}\,, \tag{30}$$

$$\boldsymbol{U}'=\boldsymbol{U}+\sum_i\left[\tfrac{1}{2}\ddot{\beta}\,q_i-\tfrac{1}{2}\dot{\beta}\,\dot{q}_i+\sum_j a_{ij}\dot{q}_j+\dot{\psi}_i(t)\right]\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\,.$$

利用分别关于 $\beta(t)$ 和 $\psi_i(t)$ 的辅助方程（24）和（25），我们可以直接证明，对于哈密顿量为方程（17）的广义拉格朗日系统（13），$\boldsymbol{U}'$ 满足诺特条件（8），从而得到函数 $f(\boldsymbol{q},t)$ 对时间的全导数：

$$\boldsymbol{U}'_\psi L=\frac{d}{dt}\sum_i\dot{\psi}_i(t)\,q_i\,,\quad \beta(t),a_{ij}\equiv 0\,,$$

$$\boldsymbol{U}'_\beta L+\dot{\xi}L=\frac{d}{dt}\ddot{\beta}(t)\sum_i\tfrac{1}{4}q_i^2\,,\quad \psi_i(t)\equiv 0\,,$$

这与方程（21）一致。为验证诺特不变量（29）的变分 δI_β 确实为零，我们可以直接证明：

$$\boldsymbol{U}'_\beta I_\beta=0\iff\beta(t)\text{ is a solution of Eq. (24)}\,.$$

对于作用于方程（28）中不变量 I_{ψ_i} 的、与 ψ_i有关的部分 $\boldsymbol{U}'$，同样可得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}'_{\psi_i}I_{\psi_i}&=\left(\psi_i(t)\frac{\partial}{\partial q_i}+\dot{\psi}_i(t)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_i}\right)\left[\dot{\psi}_i(t)\,q_i-\psi_i(t)\,\dot{q}_i\right]\\&=\psi_i(t)\,\dot{\psi}_i(t)-\dot{\psi}_i(t)\,\psi_i(t)\equiv 0\,.\end{aligned} \tag{31}$$

显然，对于每个指标 i，表达式 $\boldsymbol{U}'_{\psi_i}I_{\psi_i}$ 均分别为零，这正是 n 个不同不变量 I_{ψ_i}所应满足的。

B. 李对称性分析

Lie [1]提出了另一种处理动力系统对称性的方法。李对称性这一类由如下点变换 (1) 定义：该变换保持运动方程不变

$$\ddot{q}_i+\frac{\partial V(\boldsymbol{q},t)}{\partial q_i}=0\,,\qquad i=1,\dots,n\,. \tag{32}$$

这组耦合的 n 个二阶方程对应于 $2n$ 个一阶正则方程 (18)。由于运动方程 (32) 为二阶方程，变分为零的条件为

$$\boldsymbol{U}''\left(\ddot{q}_i+\frac{\partial V(\boldsymbol{q},t)}{\partial q_i}\right)=0\,,\qquad i=1,\dots,n\,, \tag{33}$$

其中 $\boldsymbol{U}''$ 生成元 $\boldsymbol{U}$ 的二阶延拓 (4)。从物理上说，与变分 (33) 为零相关联的方程 (32) 的对称映射，意味着将运动方程变换为新坐标系中的同一运动方程。同样，我们并非因此将给定的物理系统映射为另一个系统，而是确定为

保持运动方程形式而对点映射 (1) 施加的条件。由于方程 (32) 所描述的特定动力系统以显式形式给出，且不涉及速度项，方程 (33) 可简化为

$$\eta_i'' + \boldsymbol{U}\left(\frac{\partial V(\boldsymbol{q},t)}{\partial q_i}\right) = 0\,,$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 和 η_i'' 由方程（2）和（4）给出

$$\ddot{\eta}_i - 2\dot{\xi}\ddot{q}_i - \ddot{\xi}\dot{q}_i + \xi\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial t} + \sum_{j=1}^{n}\eta_j\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} = 0\,.$$

与第三节中推导的诺特对称性分析类似，对于任意速度向量 $\dot{\boldsymbol{q}}$，该条件能够在全局范围内成立，当且仅当线性、二次和三次速度项分别单独消失。这一要求导出以下偏微分方程层级结构：对于给定的势 $V(\boldsymbol{q},t)$，生成元（2）的函数 $\xi(\boldsymbol{q},t)$ 和 $\eta_i(\boldsymbol{q},t)$ 必须满足这些方程

$$\sum_j\sum_k \dot{q}_i\dot{q}_j\dot{q}_k\frac{\partial^2\xi}{\partial q_j\partial q_k} = 0, \tag{34a}$$

$$\sum_j\left[2\dot{q}_i\dot{q}_j\frac{\partial^2\xi}{\partial q_j\partial t} - \sum_k \dot{q}_j\dot{q}_k\frac{\partial^2\eta_i}{\partial q_j\partial q_k}\right] = 0, \tag{34b}$$

$$\sum_j\left[2\dot{q}_j\frac{\partial^2\eta_i}{\partial q_j\partial t} + \left(2\dot{q}_j\frac{\partial V}{\partial q_i} + \dot{q}_i\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)\frac{\partial\xi}{\partial q_j}\right] - \dot{q}_i\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = 0, \tag{34c}$$

$$\sum_j\left[\eta_j\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial q_j} - \frac{\partial V}{\partial q_j}\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}\right] + \frac{\partial^2\eta_i}{\partial t^2} + 2\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial\xi}{\partial t} + \xi\frac{\partial^2 V}{\partial q_i\partial t} = 0. \tag{34d}$$

关于方程（34a），我们推断出，$\xi(\boldsymbol{q},t)$ 关于坐标 q_i 的所有二阶导数都必须为零。这意味着 $\xi(\boldsymbol{q},t)$ 具有如下的一般形式

$$\xi(\boldsymbol{q},t) = \sum_j \alpha_j(t)\,q_j + \beta_L(t)\,, \tag{35}$$

其中 $\alpha_j(t)$ 和 $\beta_L(t)$ 表示尚待确定的、仅依赖时间的函数。现在，方程（34）中包含的 $\xi(\boldsymbol{q},t)$ 的导数可以表示为

$$\frac{\partial\xi}{\partial q_j} = \alpha_j(t)\,, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial t} = \sum_j \dot{\alpha}_j(t)\,q_j + \dot{\beta}_L(t)\,,$$
$$\frac{\partial^2\xi}{\partial q_j\partial t} = \dot{\alpha}_j(t)\,, \qquad \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \sum_j \ddot{\alpha}_j(t)\,q_j + \ddot{\beta}_L(t)\,.$$

因此，若满足以下条件，方程 (34b) 即在全局成立：

$$\frac{\partial^2\eta_i}{\partial q_j\partial q_k} = \dot{\alpha}_j\delta_{ik} + \dot{\alpha}_k\delta_{ij}\,, \tag{36}$$

其中 δ_{ik} 和 δ_{ij} 表示克罗内克符号。通过对方程 (36) 进行形式积分，可得到 $\eta_i(\boldsymbol{q},t)$ 的一般形式，其中引入了尚未确定的时间函数 $\gamma_{ij}(t)$ 和 $\phi_i(t)$，

$$\eta_i(\boldsymbol{q},t) = \sum_j\left[\dot{\alpha}_j(t)\,q_i\,q_j + \gamma_{ij}(t)\,q_j\right] + \phi_i(t)\,. \tag{37}$$

由方程（37）得到的 $\eta(\boldsymbol{q},t)$ 的导数为

$$\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j} = \dot{\alpha}_j\,q_i + \gamma_{ij} + \delta_{ij}\sum_k \dot{\alpha}_k\,q_k\,,$$
$$\frac{\partial^2\eta_i}{\partial q_j\partial t} = \ddot{\alpha}_j\,q_i + \dot{\gamma}_{ij} + \delta_{ij}\sum_k \ddot{\alpha}_k\,q_k\,,$$
$$\frac{\partial^2\eta_i}{\partial t^2} = \sum_j\left[\dddot{\alpha}_j\,q_i\,q_j + \ddot{\gamma}_{ij}\,q_j\right] + \dddot{\phi}_i\,.$$

为了得到有效的对称变换（33），时间函数 $\alpha_j(t)$、$\beta_L(t)$、$\gamma_{ij}(t)$ 和 $\phi_i(t)$ 必须满足的条件，可通过将方程（35）中的 $\xi(\boldsymbol{q},t)$ 和方程（37）中的 $\eta_i(\boldsymbol{q},t)$ 连同各自的偏导数代入方程（34c）和（34d）得到。区分依赖于 $\boldsymbol{q}$ 的项和不依赖于它的项，方程（34c）所得的表达式可拆分为两个必须分别为零的求和式，

$$\sum_j \dot{q}_j\left(2\dot{\gamma}_{ij} - \ddot{\beta}_L\,\delta_{ij}\right) = 0\,, \tag{38a}$$

$$\sum_j\left[\ddot{\alpha}_j\left(2\dot{q}_j q_i + \dot{q}_i q_j\right) + \alpha_j\left(2\dot{q}_j\frac{\partial V}{\partial q_i} + \dot{q}_i\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)\right] = 0\,. \tag{38b}$$

只有当所有指标 i 和 j 均满足 $2\dot{\gamma}_{ij} = \beta_L\delta_{ij}$ 时，方程（38a）才能在全局成立。这意味着对时间积分后，

$$\gamma_{ij}(t) = \tfrac{1}{2}\dot{\beta}_L(t)\,\delta_{ij} + b_{ij}\,, \tag{39}$$

其中 b_{ij} 表示积分常数。由此，方程（37）中的 $\eta_i(\boldsymbol{q},t)$ 可改写为

$$\eta_i(\boldsymbol{q},t) = \sum_j \dot{\alpha}_j(t)\,q_i\,q_j + \sum_j\left[\tfrac{1}{2}\dot{\beta}_L(t)\,\delta_{ij} + b_{ij}\right]q_j + \phi_i(t)\,. \tag{40}$$

方程（34c）中依赖于 $\boldsymbol{q}$ 的项对应于方程（38b）。由于势 $V(\boldsymbol{q},t)$ 引起的自由度耦合，它构成了一组关于时间函数 $\alpha_1(t)$、……、$\alpha_n(t)$ 的 n 个辅助方程。除某些特定的势 $V(\boldsymbol{q},t)$ 外，这组方程只能沿着系统轨迹 $\boldsymbol{q}(t)$ $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$ 求解；该轨迹是 n 运动方程（32）的解。

最后，层级结构 (34) 中不依赖于 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 的项必须满足方程 (34d)。根据方程 (39) 替换 γ_{ij} 后，得到三个独立的微分方程

对于时间函数 $\beta_L(t)$、 $\phi_i(t)$和 $\alpha_i(t)$,

$$\dddot{\beta}_L q_i + \dot{\beta}_L \left[3\frac{\partial V}{\partial q_i} + \sum_j q_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right] + 2\beta_L \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial t} - 2\sum_j \left[b_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_j} - \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \sum_k b_{jk}\, q_k \right] = 0\,, \tag{41a}$$

$$\ddot{\phi}_i(t) + \sum_j \phi_j(t) \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} = 0\,, \tag{41b}$$

$$\sum_j \left[\ddot{\alpha}_j\, q_i q_j + \dot{\alpha}_j \left(q_j \frac{\partial V}{\partial q_i} - q_i \frac{\partial V}{\partial q_j} \right) + q_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \sum_k \dot{\alpha}_k\, q_k + \alpha_j\, q_j \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial t} \right] = 0\,. \tag{41c}$$

由于势将各自由度耦合在一起，每个方程都代表一组由 n 个方程组成的耦合方程，索引范围为 $i = 1$、.....、n。根据微分方程组 (38b) 和 (41) 的解，对称变换 (33) 的生成元 $\boldsymbol{U}_L$ 为

$$\boldsymbol{U}_L = \left[\beta_L(t) + \sum_i \alpha_i(t)\, q_i \right] \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i \left[\tfrac{1}{2}\dot{\beta}_L q_i + \sum_j b_{ij}\, q_j + \phi_i(t) + q_i \sum_j \dot{\alpha}_j\, q_j \right] \frac{\partial}{\partial q_i}\,. \tag{42}$$

显然，就 $\alpha_i \equiv 0$ 而言，该算符在形式上与第五节中讨论的诺特对称变换生成元 (30) 一致。不过，我们必须牢记，算符 (30) 和 (42) 的系数通常不同，因为它们分别由不同的一组辅助方程得出。考虑到方程 (41a) 和 (41b) 分别是诺特对称性分析中相应方程 (24) 和 (25) 的偏 q_i 导数，它们之间的关系便一目了然。因此，方程 (41a) 和 (41b) 在形式上可写作诺特条件 (8) 对 q_i的偏导数

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left[\boldsymbol{U}_L'\, L + \dot{\beta}_L(t)\, L - \frac{df_L(\boldsymbol{q},t)}{dt} \right] = 0\,, \tag{43}$$

由方程 (42) 的第一次延拓给出的算符 $\boldsymbol{U}_L'$ 、由方程 (13) 和 (17) 给出的拉格朗日量 L ，以及对应于方程 (21) 的实际系统的特定规范函数 f_L ，其形式为

$$f_L(\boldsymbol{q},t) = \ddot{\beta}_L(t) \sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{4} q_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \dot{\phi}_i(t)\, q_i\,.$$

关于 α_i 的齐次方程，我们注意到，方程 (38b) 和 (41c) 对时间的 $\alpha_i(t)$ n 函数施加了一组 $2n$ 条件。我们得出结论——除了非常特殊的势 $V(\boldsymbol{q},t)$ 之外——这些条件都无法满足。这意味着在大多数情况下，方程 (38b) 和 (41c) 仅有平凡解 $\boldsymbol{\alpha}(t) \equiv 0$ ，因此不存在与 $\boldsymbol{\alpha}$ 相关的李对称性。单维时变谐振子系统是一个例外。很容易证明，对于这一特定系统，方程 (38b) 和 (41c) 是相容的，由此产生众所周知的额外李对称性 [11] ，它们与诺特对称性并存。在第 VI 节中，我们证明这些方程对于开普勒系统也有非平凡解，从而得到该系统一种此前未曾报道的李对称性。我们还证明，开普勒第三定律源自方程 (41a) 在 $\beta_L(t)$ 下的一个特解。此外，我们将证明，由能量守恒定律、角动量守恒以及龙格-楞次矢量所给出的熟知不变量均为诺特对称性。最后，我们从 $\beta(t) \neq \text{const}$ 时方程 (24) 的解中，推导出开普勒系统的两个新的诺特不变量。

VI. 示例：开普勒系统

A. 运动方程

经典开普勒系统是一个二体问题，两体之间的相互作用遵循平方反比力定律。在参考物体的坐标系中，其伴体的笛卡尔坐标 q_1、 q_2 可在运动平面内表示为

$$\ddot{q}_i + \mu(t) \frac{q_i}{\sqrt{\left(q_1^2 + q_2^2\right)^3}} = 0\,, \qquad i = 1,2\,, \tag{44}$$

其中 $\mu(t) = G\big[m_1(t) + m_2(t)\big]$ 是由相互作用物体的时间依赖质量 $m_1(t)$ 和 $m_2(t)$ 所引起的时间依赖引力耦合强度。我们可以认为，运动方程 (44) 源自哈密顿量

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = \tfrac{1}{2}p_1^2 + \tfrac{1}{2}p_2^2 + V(\boldsymbol{q},t) \tag{45}$$

其中包含相互作用势

$$V(\boldsymbol{q},t) = -\frac{\mu(t)}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} = -\frac{\mu(t)}{r}\,. \tag{46}$$

B. 诺特对称性分析

通过求解特定势 (46) 对应的微分方程 (24) 和 (27) 的完备解集，可得到诺特不变量 (28) 和 (29) 的完备集合及其相关生成元 (30)。

1. 与 $\beta(t)$ 和 a_{ij} 相关的解

我们从式（24）的非齐次部分开始，它源自一个非零的反对称矩阵（a_{ij}），该矩阵

包含在式（19b）的通解中。对于我们实际考虑的二维系统，该矩阵最多只能包含一个独立元素，即 $a_{11} = a_{22} = 0$，$a_{12} = -a_{21}$。因此，式（24）中的双重求和显式写为，

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\, q_j \frac{\partial V}{\partial q_i} = a_{12}\, q_2 \frac{\mu q_1}{r^3} + a_{21}\, q_1 \frac{\mu q_2}{r^3} = \frac{\mu}{r^3} a_{12}\,(q_1 q_2 - q_2 q_1) \equiv 0$$

对于任意常数 a_{12}。因此，辅助方程 (24) 有非平凡解 $a_{12} \neq 0$，且与$\beta(t)$ 无关。定义 $a_{12} = 1$，由方程 (29) 可得到独立的不变量I_a ，

$$I_a = q_1\, p_2 - q_2\, p_1\,. \tag{47}$$

显然，这个不变量体现了开普勒第二定律，即角动量是一个守恒量。对称变换的相应生成元 $\boldsymbol{U}_a$ 可由方程 (30) 在 $a_{12} = -a_{21} = 1$时直接得到，

$$\boldsymbol{U}_a = q_2 \frac{\partial}{\partial q_1} - q_1 \frac{\partial}{\partial q_2}\,. \tag{48}$$

方程 (24) 的齐次部分构成了关于 $\beta(t)$ 的独立辅助方程。对于方程 (46) 给出的势，可得三阶方程

$$\dddot{\beta}(t) - \dot{\beta}(t)\frac{2\mu(t)}{r^3(t)} - \beta(t)\frac{4\dot{\mu}(t)}{r^3(t)} = 0\,. \tag{49}$$

给定哈密顿量 (45)，且 $\beta(t)$ 是方程 (49) 的一个解，相应的不变量 I_β 为

$$I_\beta = \beta(t)\, H - \tfrac{1}{2}\dot{\beta}(t)\,(q_1 p_1 + q_2 p_2) + \tfrac{1}{4}\ddot{\beta}(t)\left(q_1^2 + q_2^2\right)\,. \tag{50}$$

由方程 (49) 的三个线性无关解得到的对称变换生成元，可由方程 (30) 推得：

$$\boldsymbol{U}_{\beta_i} = \beta_i(t)\frac{\partial}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\dot{\beta}_i(t)\left(q_1\frac{\partial}{\partial q_1} + q_2\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\,. \tag{51}$$

对于耦合强度[$\dot{\mu}(t) = 0$] 为常数的常规情形，辅助方程 (49) 有特解 $\beta_1(t) = 1$。利用此解，不变量 (50) 可化为

$$I_{\beta_1=1} = H\,,$$

这给出了一个熟知的结论：若哈密顿量（45）中的 H 不显含时间，则瞬时系统能量 H 是守恒量。相应对称变换的生成元因而简化为

$$\boldsymbol{U}_{\beta_1=1} = \frac{\partial}{\partial t}\,. \tag{52}$$

与所有时间无关系统一样，方程（49）总存在两个非常数解$\beta_{2,\ 3}(t)$。对于满足 $\dot{\mu} = 0$的开普勒系统，这些解可表示为

$$\beta_{2,3}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{u\big(\theta(\tau)\big)\, d\tau}{1 + \varepsilon\cos\theta(\tau)}\,,$$

其中，函数 $u(\theta)$ 是该微分方程的两个解之一，

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{3}{1+\varepsilon\cos\theta}\right) u(\theta) = 0\,,$$

而 $\theta(t)$ 是偏心率为 ε 的椭圆轨道的极角。这些线性无关的解 $\beta_{2,3}(t)$ 导出另外两个形式如式（50）的非局域不变量$I_{\beta_{2,3}}$ ；据作者所知，此前尚未有人报道过它们。

2. 与 $\psi_i(t)$ 相关的解

与 ψ_i 相关的不变量（28）由辅助方程（27）的解得到。将给定的运动方程（44）代入式（27），可得

$$\ddot{\psi}_i(t) + \psi_i(t)\frac{\mu(t)}{r^3(t)} = 0\,. \tag{53}$$

取 $\psi_i(t)$ 和 $\psi_i(t)$ 为辅助方程(53)的解，相应的诺特不变量（28）为

$$I_{\psi_i} = \dot{\psi}_i(t)\, q_i - \psi_i(t)\, \dot{q}_i\,, \quad i = 1, 2\,. \tag{54}$$

由式（53）的两个线性无关解得到的对称变换的两个独立生成元为

$$\boldsymbol{U}_{\psi_i} = \psi_i(t)\frac{\partial}{\partial q_i}\,, \quad i = 1, 2\,. \tag{55}$$

再次特别考察时间无关的情形很有启发性。通过直接代入，我们很容易验证

$$\psi_i(t) = q_1(t)\,\dot{q}_1(t) + q_2(t)\,\dot{q}_2(t) \tag{56}$$

在 $\dot{\mu}(t) = 0$ 的条件下，是方程 (53) 的一个解。将方程 (56) 及其全时间导数

$$\dot{\psi}_i(t) = \dot{q}_1^2(t) + \dot{q}_2^2(t) - \frac{\mu}{r(t)}$$

代入方程 (54)，可明确写出这些不变量：

$$I_{\psi_1} = q_1\dot{q}_2^2 - q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - q_1\frac{\mu}{r}\,, \tag{57a}$$

$$I_{\psi_2} = q_2\dot{q}_1^2 - q_1\dot{q}_1\dot{q}_2 - q_2\frac{\mu}{r}\,. \tag{57b}$$

显然，诺特不变量 (57) 表示龙格-楞次矢量的两个分量。这一结果与

通常将龙格-楞次矢量视为“非诺特不变量” [12]的看法相悖。尽管如此，将诺特不变量 (57) 写成这种形式时必须格外谨慎。只有当不变量按照式 (54) 的形式书写，且其中的$\psi_i(t)$由式 (56) 给出时，生成元 (55) 的第一次延拓作用于不变量 (54) 所需满足的式 (31) 中的$\boldsymbol{U}'_{\psi_i} I_{\psi_i} = 0$条件才成立。只有采用这种形式，式 (54) 才能正确区分空间依赖性和时间依赖性：其中的 $\psi_i(t)$仅写成时间的函数，并在运动方程的解轨迹 $(\boldsymbol{q}(t)\ \ \dot{\boldsymbol{q}}(t))$ 上定义。

C. 李对称性分析

与诺特分析类似，我们可以通过求解辅助方程 (38b) 和 (41) 关于系数 $\boldsymbol{\alpha}(t)$、 $\beta_L(t)$、 $\boldsymbol{\phi}(t)$ 以及常矩阵 (b_{ij}) 的所有解，系统地确定运动方程 (44) 的完整李对称性集合；这些量构成了李生成元 (42)。

1. 与 $\alpha_i(t)$相关的解

我们从李对称性分析中的时间函数 $\alpha_i(t)$入手，它们是方程 (38b) 和 (41c) 的共同解。对于开普勒系统的势，式 (46) 使条件 (38b) 具有如下特定形式：

$$\ddot{\alpha}_i(t) + \alpha_i(t)\frac{\mu}{r^3} = 0\,, \quad i = 1,2\,. \tag{58}$$

将式 (58) 对时间求全导数后代入式 (41c)，即可得到使方程 (38b) 和 (41c) 同时成立的条件：

$$\big(\dot{\alpha}_1\, q_1 + \dot{\alpha}_2\, q_2\big)\big(q_1^2 + q_2^2\big) = \big(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2\big)\big(q_1\dot{q}_1 + q_2\dot{q}_2\big)\,.$$

显然的解是将时间函数 $\alpha_i(t)$认定为坐标 $q_i(t)$的时间演化：

$$\alpha_i(t) = c\, q_i(t)\,, \quad i = 1,2\,.$$

该李对称性对应的生成元为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_{L,\alpha} = {}& \big[\alpha_1(t)\, q_1 + \alpha_2(t)\, q_2\big]\frac{\partial}{\partial t} \\ & + \big[\dot{\alpha}_1(t)\, q_1 + \dot{\alpha}_2(t)\, q_2\big]\left(q_1\frac{\partial}{\partial q_1} + q_2\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\,.\end{aligned} \tag{59}$$

我们注意到，对于耦合强度的任意时间演化 $\mu(t)$， $\alpha_i(t)$ 的时间演化与空间坐标 $q_i(t)$的时间演化相同。此处尚无法回答开普勒系统这一尚未报道的李对称性是否存在物理解释。然而，令算符(59)的第一次延拓分别作用于 I_a 和 I_β，可以揭示李对称生成元(59)与方程(47)和(50)的诺特不变量之间一个有趣的联系。若 $\beta(t)$是方程(49)的一个解，我们得到

$$\boldsymbol{U}'_{L,\alpha} I_a = 0\,, \quad \boldsymbol{U}'_{L,\alpha} I_\beta = 0\,.$$

显然，诺特不变量 I_a 和 I_β 也是由方程(59)生成的李对称性的不变量。这表明，不变量与对称性算符之间不可能存在唯一的对应关系。

2. 与 $\beta_L(t)$和 b_{ij}相关的解

接下来，我们求出势（46）对应的方程（41a）的解集 $\beta_L(t)$。在我们的具体情形中，两个指标 $i = 1$、2满足相同的条件，即，

$$\begin{aligned}&\dddot{\beta}_L + \dot{\beta}_L\frac{\mu(t)}{r^3} + \beta_L\frac{2\dot{\mu}(t)}{r^3} \\ &\quad - \frac{6\mu(t)}{r^5}\big[b_{11}q_1^2 + (b_{12}+b_{21})\,q_1 q_2 + b_{22}q_2^2\big] = 0\,.\end{aligned} \tag{60}$$

我们很容易找到这个非齐次微分方程的一个特解。对于 $\beta_L(t) = 0$，若 $b_{11} = b_{22} = 0$ 和$b_{12} = -b_{21} \neq 0$，则方程（60）对任意 $\boldsymbol{q}(t)$均恒成立。由此非平凡解，我们得到对生成元（42）的如下贡献，

$$\boldsymbol{U}_{L,b} = q_2\frac{\partial}{\partial q_1} - q_1\frac{\partial}{\partial q_2}\,,$$

这与表示角动量守恒定律（47）的诺特算子（48）一致。

三阶方程（60）的齐次部分的每个基本解$\beta_{L,i}(t)$、 $i = 1$、2、3，

$$\dddot{\beta}_L + \dot{\beta}_L\frac{\mu(t)}{r^3} + \beta_L\frac{2\dot{\mu}(t)}{r^3} = 0\,, \tag{61}$$

与生成元相关联

$$\boldsymbol{U}_{L,\beta_{L,i}} = \beta_{L,i}(t)\frac{\partial}{\partial t} + \tfrac{1}{2}\dot{\beta}_{L,i}(t)\left(q_1\frac{\partial}{\partial q_1} + q_2\frac{\partial}{\partial q_2}\right)\,.$$

该算符在形式上与诺特对称性分析中相应的算符 (51) 一致。然而，相应的系数 $\beta_i(t)$ 和 $\beta_{L,\,i}(t)$ 通常并不相同，因为它们分别是由不同的辅助方程 (49) 和 (61) 得到的解。

对于时间无关系统 [$\mu(t) = \text{const}$], , 函数 $\beta_{L,\,1}(t) = 1$ 是方程 (60) 的一个特解。生成元 $\boldsymbol{U}_{L,\,\beta_L=1}$,

$$\boldsymbol{U}_{L,\beta_L=1} = \frac{\partial}{\partial t}\,,$$

与表示能量守恒定律的诺特算子 (52) 一致。

容易证明，对于 $\beta_L(t) = t$， $\dot{\mu}(t) = 0$的方程（60）存在第二个特解。利用此解，对于 $b_{12} = b_{21} = 0$和 $b_{11} = b_{22} = \frac{1}{6}$，方程（60）恒等成立。生成元（42）中的相关项为

$$\boldsymbol{U}_{L,\beta_L=t} = t\frac{\partial}{\partial t} + \tfrac{2}{3}q_1\frac{\partial}{\partial q_1} + \tfrac{2}{3}q_2\frac{\partial}{\partial q_2}\,. \tag{62}$$

该生成元同时依赖于时间和空间坐标。因此，它描述了该系统中空间坐标与时间坐标之间的对称性，反映了开普勒第三定律。我们注意到，第 VI B 节诺特分析中的辅助方程不存在能够导出生成元（62）的解。因此，由方程（62）生成的对称性称为“非诺特对称性” [12]。Prince 和 Eliezer 还表明，可以基于由方程（62）生成的非诺特对称性导出龙格-楞次矢量（57）。这意味着，在此对称变换的作用下，I_{ψ_i}的变分为零，

$$\boldsymbol{U}'_{L,\beta_L=t} I_{\psi_i} = 0\,,$$

因此，龙格-楞次矢量是相对于这一非诺特对称性的不变量。另一方面，我们已经证明，式（56）中的 $\psi_i(t)$ 代入式（54）所表示的龙格-楞次矢量也体现了一个诺特不变量。由此可见，将龙格-楞次矢量归类为“非诺特不变量”并不恰当。这再次表明，不可能将某个不变量唯一地归属于某个对称算子。

当 $\mu(t) = \text{const}$ 时，可以将式（60）齐次部分的另外两个线性无关解表示为显式形式。将式（61）与运动方程（44）比较可得

$$\dot{\beta}_{L,i}(t) = c_i\, q_i(t)\,, \quad i = 2,3\,,$$

因此得到 $\beta_{L,\,i}(t)$ 的积分表示，

$$\beta_{L,i}(t) = c_i \int_{t_0}^{t} q_i(\tau)\, d\tau\,, \quad i = 2,3\,, \tag{63}$$

这与 Krause [13] 早先提出的方法一致。

3. 与 $\phi_i(t)$相关的解

最后，我们求出与辅助方程 (41b) 的解相关的对称性。对于势 (46) 和 $i = 1$,2，该方程有如下特定表示

$$\ddot{\phi}_i(t) - \frac{\mu(t)}{r^5}\Big\{3q_i\big[\phi_1(t)\,q_1 + \phi_2(t)\,q_2\big] - \phi_i(t)\big(q_1^2 + q_2^2\big)\Big\} = 0\,. \tag{64}$$

取 $\phi_1(t)$ 和 $\phi_2(t)$ 为耦合的二阶方程组 (64) 的两个线性无关解，则生成元 (42) 中相关的部分为

$$\boldsymbol{U}_{L,\phi} = \phi_1(t)\frac{\partial}{\partial q_1} + \phi_2(t)\frac{\partial}{\partial q_2}\,.$$

同样，系数 $\phi_i(t)$ 的辅助方程 (64) 与其诺特对应形式 (55) 中系数所满足的相应方程 (53) 不同。由于后续得到的解通常也不同，因此诺特对称性和李对称性的时间演化也不同。

对于具有 $\dot{\mu}(t) = 0$ 的自治系统，辅助方程 (64) 有一个简单的通解。将方程 (64) 与运动方程 (44) 的时间导数进行比较，

$$\dddot{q}_i(t) - \frac{\mu}{r^5}\Big[3q_i\big(\dot{q}_1\,q_1 + \dot{q}_2\,q_2\big) - \dot{q}_i\big(q_1^2 + q_2^2\big)\Big] = 0\,,$$

我们立即看出

$$\phi_i(t) = c\,\dot{q}_i(t)\,, \quad i = 1,2 \tag{65}$$

是方程 (64) 的一个解。这里，c 表示一个任意常数。对于定时开普勒系统，时间函数 $\phi_1(t)$ 和 $\phi_2(t)$ 因而分别与速度 $\dot{q}_1(t)$ 和 $\dot{q}_2(t)$ 的时间演化相差一个常数因子。最后我们注意到一个有趣的结果：在李对称生成元$\boldsymbol{U}_{L,\,\phi}$的作用下，龙格-楞次矢量 (57) 的变分也为零，

$$\boldsymbol{U}'_{L,\phi} I_{\psi_i} = 0\,,$$

这再次证实了我们的观察：不变量与对称性之间并不存在唯一的关联。

D. 讨论

诺特对称生成元和李对称生成元中都包含的时间特征函数，反映了所讨论动力系统的特定对称性。诺特对称生成元 (30) 由时间函数 $\beta(t)$、$\boldsymbol{\psi}(t)$ 以及常数 (a_{ij}) 确定；这些量是微分方程 (24) 和 (27) 的解。类似地，由辅助方程 (38b) 和 (41) 得到的时间函数 $\boldsymbol{\alpha}(t)$、$\beta_L(t)$、$\boldsymbol{\phi}(t)$ 以及常数 (b_{ij}) 构成李对称生成元 (42)。对称生成元的时间依赖系数所满足的辅助方程通常取决于 $\boldsymbol{q}$、系统的势 $V(\boldsymbol{q},t)$ 及该势的偏导数。尽管如此，这些辅助方程可能存在与运动方程的解 $\boldsymbol{q}(t)$ 相互解耦的特解。此时，底层对称性反映了动力系统的一项基本性质。例如，对于哈密顿量 (17)，即势 $V(\boldsymbol{q},t)$，不显含时间的所有情形，方程 (24) 都存在解 $\beta(t) = 1$。相应的不变量 $I_\beta = H$ 表示能量守恒定律。同样，对于开普勒系统，方程 (24) 非齐次部分的解 $a_{12} = 1$ 给出了角动量守恒这一基本定律。此外，当 $\dot{\mu}(t) = 0$ 时，方程 (60) 的解 $\beta_L(t) = t$ 反映了与开普勒第三定律相关的对称性。

然而，除了这些辅助方程组的重要特解之外，还存在许多显式依赖于 $\boldsymbol{q}(t)$ 的其他解。例如，对于势$V(\boldsymbol{q},t)$显式依赖于时间的哈密顿系统，方程 $= 1$

（24）的解 $\beta(t)$ 并不存在。除与二次势有关的特殊情形外，解 $\beta(t)$ 随后取决于 $\boldsymbol{q}(t)$ 的具体时间演化，因而也取决于势 $V\big(\boldsymbol{q}(t)\ t\big)$ 及其偏导数的时间演化。由于时间函数 $\boldsymbol{q}(t)$ 是运动方程（18）的解，只有将方程（24）与运动方程（18）同时积分，才能求得解 $\beta(t)$。这反过来意味着，不变量的存在无法通过降低系统的阶数来帮助我们简化运动方程的求解问题。不过，相关不变量确实存在，并反映了系统时间演化的一种特定对称性。相应辅助方程的函数结构是明确的，因为它与运动方程组共同构成一个闭合方程，其中时间 t 是唯一的自变量。解 $\beta(t)$ 对 $\boldsymbol{q}(t)$ 时间演化的依赖，并不意味着辅助方程同时是 $\boldsymbol{q}$ 和 t 的函数。根据其作为积分“常数”的定义，辅助方程的所有系数都必须仅是时间的函数。因此，我们必须将 $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}(t)$ 视为辅助方程的时间依赖系数，它们沿着由运动方程解所确定的系统轨迹 $\boldsymbol{q}(t)$ 定义。回顾诺特定理的方程（10）形式，这一要求显得合乎情理。该形式表明，当且仅当第二个求和中的欧拉-拉格朗日项为零时，括号内的表达式才构成一个不变量。这恰好发生在系统轨迹上，而该轨迹由欧拉-拉格朗日方程的解定义。

在定时开普勒系统的示例中，我们给出了辅助方程(53)的一个显式解(56)。函数 $\psi_i(t)$ 被视为满足方程(64) 的时间函数。当然，我们可以将 $\psi_i(t)$ 的时间演化与粒子坐标 $q_i(t)$ 和 $\dot{q}_i(t)$ 的时间演化等同起来，或将其与这些坐标的组合等同起来。基于这一理解，函数 $\psi_i(t)$ 仍然只是时间的函数，这对于满足方程 (31) 至关重要。这样，开普勒系统的朗之万矢量便可视为一个诺特不变量，由 $\boldsymbol{U}_\psi$ 型的特定算符生成。

VII. 结论

我们详细分析了含有显含时一般势 $V(\boldsymbol{q}, t)$ 的哈密顿量的诺特对称性和李对称性。采用这种一般形式进行分析后，得到了关于对称生成元系数的特定常微分方程组。因此，对诺特对称性和李对称性的搜索可归结为求解各组辅助方程的全部解。

我们发现，李方法的辅助方程与相应诺特方程的偏 q_i 导数一致。一方面，这表明这两种方法之间存在密切关系。另一方面，辅助方程组显然有所不同，因此，除与二次势相关的特定各向同性系统外，解函数通常也不相同。这意味着诺特对称性和李对称性的时间演化通常并不一致，因此诺特对称性集合不能视为李对称性集合的子集。

对于诺特方法，我们已经看到，对称性与相关的不变量之间存在一一对应关系。其原因在于，诺特辅助方程与运动方程结合后，总能改写为全时间导数的形式。李对称性分析得出的辅助方程则不具备这一性质。因此，李对称性不一定与守恒量的闭式表达式相关联。

根据给定势的具体形式，诺特辅助方程 (24) 和 (27)，以及相应的李辅助方程 (38b) 和 (41)，可能存在显式解，这些解体现了相关动力系统的基本对称性。这些方程也可能存在特解，它们与系统轨迹 $\boldsymbol{q}(t)$ 相互解耦；该轨迹表示系统随时间演化时运动方程的解。另一方面，辅助方程还存在显式依赖于 $\boldsymbol{q}(t)$ 演化过程的其他解。为了获得系统对称性的完整集合，这些解也必须纳入考虑。

通过对辅助方程的这种理解，可以从诺特定理推导出开普勒系统的所有不变量。特别是，龙格-楞次矢量已被确定为一个诺特不变量。在这方面，我们证实了 Sarlet 和 Cantrijn [14] 所作的论断，即“拉格朗日系统的所有积分确实都可以通过系统地运用诺特定理加以寻找”。这与 Prince 和 Eliezer [12] 的说法形成对比，即“龙格-楞次矢量无法通过诺特定理检测出来”。这种差异源于对辅助方程系数的不同理解。根据其定义，这些系数仅是时间的函数，因此不得依赖于 $\boldsymbol{q}$ 和 $\dot{\boldsymbol{q}}$。然而，我们可以将这些系数的时间演化与$\boldsymbol{q}(t)$和 $\dot{\boldsymbol{q}}(t)$的时间演化联系起来。随着对辅助方程解的理解得到拓展，可以获得更广泛的解“谱”，从而在诺特定理框架内产生范围更广的不变量。因此，可以分离出开普勒系统中迄今尚未发现的非局部诺特对称性。

此外，我们还求出了开普勒系统李辅助方程的其他解，它们导出了该系统此前尚未报告的对称性。

我们发现，对于不同的诺特算符和 Lie 对称算符，所得到的不变量的变分均为零。这表明，不变量与对称变换之间不存在唯一对应关系。因此，无法按照某种对称操作对不变量进行分类。

通过分析给定动力系统的对称性，可以确定辅助方程的某些解不再存在的条件，并将其识别为参数

空间中相关对称性消失的区域。这样，我们就能有效地找出导致某个动力系统的对称性越弱，就越混沌，甚至可能不稳定。

[1] S.Lie，《微分方程讲义》（Teubner 出版社，莱比锡，1891）；另见，例如 P. J. Olver，《李群在微分方程中的应用》（Springer 出版社，纽约，1986）。[2] E. Noether，《哥廷根科学院通报》，数学与物理学部（）。[3] J. Struckmeier 和 C. Riedel，《物理评论快报》85，3830（2000）。[4] J. Struckmeier 和 C. Riedel，《物理评论 E》64，026503（2001）。[5] J. Struckmeier 和 C. Riedel，《物理年鉴》（莱比锡）11，15（2002）。[6] H. Stephani，《微分方程》（剑桥大学出版社，剑桥，1989）。[7] E. L. Hill，《现代物理学评论》23，253（1951）。[8] M. Lutzky，《物理快报》68A，3（1978）。[9] V. P. Ermakov，《基辅大学通报》20，1（1880）（俄文）。[10] H. R. Lewis 和 P. G. L. Leach，《数学物理学杂志》23，2371（1982）。[11] C. E. Wulfman 和 B. G. Wybourne，《物理学杂志 A》9，507（1976）。[12] G. E. Prince 和 C. J Eliezer，《物理学杂志 A》14，587（1981）。[13] J. Krause，《数学物理学杂志》35，5734（1994）。[14] W. Sarlet 和 F. Cantrijn，《SIAM 评论》23，467（1981）。