arXiv:2303.15362v1 [math.AC] 27 Mar 2023

通过 Betti 分裂研究非常良覆盖图

Marilena Crupi，Antonino Ficarra

Abstract. 非常良覆盖图是指一种无混合且没有孤立顶点的图，其边理想的高度等于顶点数的一半。我们利用 Betti 分裂和映射锥构造来研究这类图。我们证明，Cohen–Macaulay 非常良覆盖图的覆盖理想可分裂。由此，我们显式计算了这类图的覆盖理想的最小分次自由分解，并证明这些图具有同调线性商。最后，我们猜想，对于 Cohen–Macaulay 非常良覆盖图的每个覆盖理想幂次，该结论同样成立，并在二分图情形下证明了这一点。

Introduction

自代数图论奠基以来，分类所有 Cohen–Macaulay图一直是一个基本问题 [34]。设 $S = K[x_1, \dots, x_n]$ 为系数取自域 K的标准分次多项式环。众所周知，若 G 是一个具有 $|V(G)| = n$的简单无向图，则可为 G 关联 S的两个无平方因子单项式理想：由所有满足 $x_i x_j \in E(G)$的单项式 $x_i x_j$生成的边理想 $I(G)$，以及由单项式$\prod_{x_i \in C} x_i$生成的覆盖理想 $J(G)$，其中$\prod_{x_i \in C} x_i$对应于 G的所有极小顶点覆盖 C 。 G 的极小顶点覆盖是 $V(G)$的子集 C ，使得每条边至少有一个顶点属于 C ，且 C 的任何真子集都不具有这一性质。若 $S/I(G)$是 Cohen–Macaulay环，则称 G为 Cohen–Macaulay图。要分类所有 Cohen–Macaulay图是一项不可能完成的任务。

然而，对偶问题，即对所有 Cohen–Macaulay 图覆盖理想进行分类的问题，已经彻底解决。事实上，图 G 的覆盖理想 $J(G)$ 是 G 的边理想的亚历山大对偶，即 $J(G) = I(G)^\vee$；基本的 Eagon–Reiner 判别准则指出， $I(G)^\vee$ 是 Cohen–Macaulay 的，当且仅当 $I(G)$ 有线性分解 [6]。所有满足 $I(G)$ 有线性分解的图 G，均已由 Ralph Fr¨oberg 在 [13] 中刻画。此外，Herzog、Hibi 和 Zheng 证明，对于任何满足 $I(G)$ 有线性分解的图 G， $I(G)$ 都具有线性幂；也就是说，对于所有 $k \geq 1$， $I(G)^k$ 都有线性分解 [18]。

远超这些经典问题，Herzog、Moradi、Rahimbeigi 和 Zhu 在 [19] 中开启了一项令人振奋的新研究方向，提出了同调移位理想（另见 [1, 2, 9, 10, 11, 20]）。首先，给定一个向量 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，单项式 $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$将记作 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$。设 $I \subset S$为一个单项式理想

2020年数学主题分类。13D02、13P10、13F55、13H10、05C75。关键词与短语：复形、极小分解、Betti 分裂、同调移位理想、顶点可分解性、良覆盖图、非常良覆盖图。

并设 $\mathbb{F}$为其最小多重分次自由 S–分解。那么， $\mathbb{F}$ 中的第 i 个自由 S–模为 $F_i = \bigoplus_{k=1}^{\beta_i(I)} S(-\mathrm{a}_{ik})$，其中每个 a_{ik} 都是 $\mathbb{Z}^n$ 中分量非负的整数向量。由单项式 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_{ik}} (k = 1, \ldots, \beta_i(I))$ 生成的单项式理想记作 $\mathrm{HS}_i(I)$，称为 I 的第 i 个同调移位理想。注意，$\mathrm{HS}_0(I) = I$。该理论的一个基本目标是找出所有 $\mathrm{HS}_i(I)$ （ $i = 0$，.....，$\mathrm{pd}(I)$ ）都满足的组合性质和同调性质。在这种情况下，我们称之为 I的同调移位性质；若上下文清楚，则简称同调性质。在 [19], 中，有人猜想，对于任意图 G，若其边理想 $I(G)$具有线性分解或线性商，则对所有 i，$\mathrm{HS}_i(I(G))$也满足相同的性质，即 $I(G)$具有同调线性分解或同调线性商。该猜想由 $i = 1$ [19, 定理 4.7] 证实。

受上述问题的启发，本文考虑 Herzog 等人在 [19]中提出问题的对偶问题。我们希望对满足 $I(G)^\vee$ 具有同调线性分解以及具有同调线性商的图 G 进行分类。当然，首先需要了解所有满足 $I(G)^\vee$ 具有线性分解的图 G 。可以观察到，若 $I(G)^\vee$ 具有线性分解，则它必须是等次生成的；这等价于要求 G 是无混合的，即 G 的所有极小顶点覆盖具有相同的基数。另一方面，若 G 是无混合且没有孤立顶点的图，则 $2\mathrm{height}(I(G)) \geq |V(G)|$[14]。因此，为研究上述问题，自然要将讨论范围限定在“尽可能理想的一类”图中：所有没有孤立顶点且满足 $2\mathrm{height}(I(G)) = |V(G)|$的无混合图 G 。在这种情况下， G 称为非常良覆盖图。许多作者研究过这类图（例如参见[5, 8, 25, 26, 27, 28, 29]）。

本文的结构如下。第 1 节简要回顾 Betti 分裂、同调移位理想以及图论中的一些概念。特别是，Crupi、Rinaldo 和 Terai 在 [5] 中得到的所有 Cohen–Macaulay 非常良覆盖图的分类，是本文开展研究的基础。

在第 2 节中，我们研究 Cohen–Macaulay 非常良覆盖图的覆盖理想的 Betti 分裂（命题 2.3）。Francisco、Ha 和 Van Tuyl 在 [12] 中提出的 Betti 分裂技术，是贯穿本文的一项非常有用的工具。

在第 3 节中，若 G 是一个 Cohen–Macaulay 极大覆盖图，我们将使用第 2 节中讨论的 Betti 分裂，显式构造 $I(G)^\vee$ 的极小自由分解。 $I(G)^\vee$ 的极小自由分解也已在 [25] 中通过不同工具构造出来。Betti 分裂技术的主要优点在于，无需验证所定义的复形是否为正合复形或是否为极小复形，而只需确定合适的比较映射 [12, 命题 2.1]。我们这个分解的特征将在第 4 节中用于实现我们的主要目标。在第 3 节的最后部分，我们推导出定理 3.5 的一些推论。首先，我们得到 $I(G)^\vee$ 的 Betti数公式，该公式与基域的特征 K 无关（推论 3.6）。随后，我们确定了 Cohen–Macaulay 极大覆盖图 G 的覆盖理想的投射维数的一些公式。特别地，在推论 3.7 中，我们重新得到 Mahmoudi等人 [29, 引理 3.4]提出的一个结果，并且

此外，我们通过 Betti 分裂为其提供了一个新的证明（注 3.8）。最后，我们证明 $I(G)^\vee$ 具有交错和性质 [35, 定义 4.1]，并且还确定了 $S/I(G)^\vee$ 的重数公式（命题 3.10）。

第4节包含我们的主要结果，该结果指出，Cohen–Macaulay 极大覆盖图的覆盖理想具有同调线性商（定理 4.1）。随后我们推得，非常良覆盖图 G 是 Cohen–Macaulay，当且仅当$I(G)^\vee$ 具有同调线性分解；这等价于 $I(G)^\vee$ 具有同调线性商（定理 4.2）。推论 4.3 得出了一个有趣的结果：关于图 G 的胡须图 G^* 的覆盖理想。

我们的实验和所得结果促使我们提出猜想：给定一个 Cohen–Macaulay 极大覆盖图 G， $I(G)^\vee$ 的所有幂都具有同调线性商（猜想 4.4）。目前，我们只能对 Cohen–Macaulay 二分图这一子类证明该猜想。为此，我们仔细研究 Hibi 理想的幂。1987年，Hibi 引入了一类与有限偏序集 [22]相关的重要理想。更准确地说，设$(P,\succeq)$是一个有限偏序集， P的偏序理想 $\mathcal{I}$ 是 P的一个子集，并且满足：对于任意 $\alpha\in\mathcal{I}$ 以及任意满足 $\beta\preceq\alpha$的 $\beta\in P$，都有 $\beta\in\mathcal{I}$。若 $\mathcal{J}(P)$表示 P的所有偏序理想构成的集合，并按包含关系排序，则 $\mathcal{J}(P)$是一个分配格。事实上，Birkhoff 基本定理[33, 定理 3.41]表明，任何分配格都可以如此得到。对于任意 $\mathcal{I}\in\mathcal{J}(P)$，都可以在多项式环 $K[\{x_p,y_p\}_{p\in P}]$中关联一个无平方因子单项式 $u_\mathcal{I}=(\prod_{p\in\mathcal{I}}x_p)(\prod_{p\in P\setminus\mathcal{I}}y_p)$。与$(P,\succeq)$相关联的 Hibi 理想 H_P是由所有 $u_\mathcal{I}$, $\mathcal{I}\in\mathcal{J}(P)$生成的无平方因子单项式理想。这类理想的重要性在于，Hibi 理想类与 Cohen–Macaulay 二分图的覆盖理想类相同 [17] （另见 [16, 引理 9.1.9 和定理 9.1.13]）。因此，可以重点研究 Hibi 理想各次幂的同调移位。在构造 4.6 中，我们为任意偏序集$(P,\succeq)$和任意整数 $\ell\geq 1$ 关联一个新的偏序集$(P(\ell),\succeq_\ell)$，并证明 H_P的 ℓ次幂经极化后等于 $H_{P(\ell)}$ （定理 4.9）。

最后，注意到极化与同调移位可交换（引理 1.8），并且也保持线性商性质（引理 4.10），我们得出所有 Hibi 理想的幂都具有同调线性商（推论 4.11）。

文章中的所有示例均已使用 Macaulay2 [15] 和软件包 `HomologicalShiftIdeals` [10] 进行了验证。

1. Preliminaries

在本节中，为方便读者起见，我们汇集了本文后续论述所需的一些概念和结果。

1.1. 映射锥和 Betti 分裂概览。设 $S=K[x_1,\dots,x_n]$为系数取自域 K的多项式环。若 I 是 S的单项式理想，通常需要研究如何确定其极小自由分解。

为避免下文中的任何歧义，我们约定平凡理想 (0) 和 S 均为单项式理想，因为 $(0)=(\varnothing)$ 且 $S=(1)$。

设 $G(I)$ 为 I 的唯一极小生成集。在 [12], 中，作者指出，要计算 I 的最小分次自由分解，可以将该理想“分裂”

I 为“更小”的理想 P, Q，即 $I = P + Q$，其中 $G(I)$ 是 $G(P)$ 与 $G(Q)$ 的不交并。因此，要得到 I的极小自由分解，可以结合 P 和 Q 的极小自由分解，以及 $P \cap Q$ 的极小自由分解。事实上，我们来考虑短正合列

$$0 \to P \cap Q \xrightarrow{\psi_{-1}} P \oplus Q \xrightarrow{\varphi} I = P + Q \to 0, \tag{1}$$

其中 $\psi_{-1}(w) = (w, -w)$ 且 $\varphi((w, z)) = w+z$。令 $\mathbb{A}$ 为 $P\cap Q$的最小自由分解，并令 $\mathbb{B}$为 $P\oplus Q$的最小自由分解。注意， $\mathbb{B}$是 P 和 Q的最小自由分解的直和。由于所有 S–模 A_i 都是自由的，因而是投射的，所以存在一个复形同态 ψ：$\mathbb{A} \to \mathbb{B}$，它提升了映射$\psi_{-1}$，也就是说，存在一列映射 ψ_i： $A_i \to B_i$ $(i \geq 0)$，称为比较映射，使下图交换

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{A}: \cdots & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{d_2^A} & A_1 & \xrightarrow{d_1^A} & A_0 & \xrightarrow{d_0^A} & P \cap Q & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \psi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{-1}} & & \\
\mathbb{B}: \cdots & \longrightarrow & B_2 & \xrightarrow[d_2^B]{} & B_1 & \xrightarrow[d_1^B]{} & B_0 & \xrightarrow[d_0^B]{} & P \oplus Q & \longrightarrow & 0
\end{array} \tag{2}$$

。众所周知， ψ 导出一个无环复形 $C(\psi)$，其第 0 个同调模为 $H_0(C(\psi)) = \mathrm{coker}(\psi_{-1}) = (P\oplus Q)/\mathrm{Im}(\psi_{-1}) \cong (P\oplus Q)/(P\cap Q) \cong P + Q = I$，即 $C(\psi)$ 是 I 的自由分解（例如参见 [7, 附录 A3.12]）。

复形 $C(\psi)$ 定义如下:

(i) let $C_0 = B_0$, and $C_i = A_{i-1} \oplus B_i$, for $i > 0$;
(ii) let $d_0 = \varphi \circ d_0^B$, $d_1 = (0, \psi_0 + d_1^B)$, and $d_i = (-d_{i-1}^A, \psi_{i-1} + d_i^B)$, for $i > 1$.

这一过程称为映射锥，可视化如下 :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathbb{A}[-1]: \cdots & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{d_2^A} & A_1 & \xrightarrow{d_1^A} & A_0 & \xrightarrow{d_0^A} & P \cap Q & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \oplus & \searrow^{\psi_2} & \oplus & \searrow^{\psi_1} & \oplus & \searrow^{\psi_0} & & & & & \\
\mathbb{B}: \cdots & \longrightarrow & B_3 & \xrightarrow[d_3^B]{} & B_2 & \xrightarrow[d_2^B]{} & B_1 & \xrightarrow[d_1^B]{} & B_0 & \xrightarrow[d_0^B]{} & P \oplus Q & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

这里， $\mathbb{A}[-1]$ 是将复形 $\mathbb{A}$ 按同调次数移位 -1所得。

遗憾的是，自由分解 $C(\psi)$ 并不总是极小的。下面我们将描述一种会出现这种情况的特殊情形。

为此，我们需要引用 [12] 中的以下概念。

定义 1.1。设 I、 P、 Q 是 S 的单项式理想，且 $G(I)$ 是 $G(P)$ 与 $G(Q)$ 的不交并。若 $I = P + Q$ 是 Betti 分裂，则称

$$\beta_{i,j}(I) = \beta_{i,j}(P) + \beta_{i,j}(Q) + \beta_{i-1,j}(P \cap Q), \quad \text{for all } i, j. \tag{3}$$

定义 1.2. 设 I 是 S的一个单项式理想。设 P 是由 $G(P)$中所有可被 x_i 整除的元素生成的理想，并设 Q 是由所有其他

$G(I)$中的元素生成的理想。我们称 $I = P + Q$ 为 I的一个 x_i–划分。I

f $I = P + Q$ 也是一个 Betti 分裂，我们称其为 $I = P + Q$ 的 x_i–分裂。

下面的两个结果将在后文中用到。

命题 1.3。（[12, 推论 2.7]）。设 $I = P + Q$ 是 I 的一个 x_i–划分， P是由 $G(I)$ 中所有能被 x_i 整除的元素生成的理想。如果 P 的最小分次自由分解是线性的，那么 $I = P + Q$ 是一个 Betti 分裂。

命题 1.4。（[3,命题 3.1]）。设 d 是一个正整数， I 是具有 d–线性分解的单项式理想， P、 $Q \neq 0$ 是满足 $I = P + Q$、$G(I) = G(P) \cup G(Q)$ 且 $G(P) \cap G(Q) = \varnothing$的单项式理想。则以下事实等价:

(i) $I = P + Q$ 是 I的一个 Betti 分

裂；(ii) P 和 Q 具有 d–线性分解。

在这种情况下， $P \cap Q$ 具有一个（$d + 1$）–线性分解。

我们以如下结果结束本小节：该结果表明，理解单项式理想何时具有 Betti 分裂，等价于理解映射锥 (i)–(ii) 何时给出极小自由分解。

定理 1.5。（[12, 命题 2.1]）。设 I、P、Q 是 S 的单项式理想，满足 $I = P + Q$，且 G（I）是不相交并集 G（P）与 G（Q）。此外，考虑短正合列 (1)。

则以下条件等价:

(a) $I = P + Q$ 是 Betti 分裂。

(b) 对所有 i 和 j，映射

$$\mathrm{Tor}_i^S(K, P \cap Q)_j \to \mathrm{Tor}_i^S(K, P)_j \oplus \mathrm{Tor}_i^S(K, Q)_j$$

在由 (1) 导出的 Tor 中的长正合列中是零映射。

(c) 对 (1) 应用映射锥，可得到 I 的极小自由分解。

1.2. 线性商、线性幂与同调移位理想简介。设 I 是 $S = K[x_1, \ldots, x_n]$的一个单项式理想。如果其极小生成集 $G(I)$ 存在某种序 $u_1 > \cdots > u_m$，使得所有冒号理想 $(u_1, \ldots, u_{\ell-1}) : u_\ell$, $\ell = 2, \ldots, m$ 都由变量集 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的某个子集生成，则称 I 具有线性商。在这种情况下， $u_1 > u_2 > \cdots > u_m$ 称为 I 的容许序。根据 [16, Proposition 1.2.2]，每个冒号理想 $(u_1, \ldots, u_{\ell-1}) : u_\ell$ 都由以下单项式生成

$$\frac{u_j}{\gcd(u_j, u_\ell)} = \frac{\mathrm{lcm}(u_j, u_\ell)}{u_\ell}, \quad j = 1, \ldots, \ell - 1.$$

根据 [16, Lemma 8.2.3]， $u_1 > \cdots > u_m$ 是 I 的容许序，当且仅当对所有 $j < \ell$，都存在一个整数 $k < \ell$ 和一个整数 p，使得

$$\frac{\mathrm{lcm}(u_k, u_\ell)}{u_\ell} = x_p \quad \text{and} \quad x_p \quad \text{divides} \quad \frac{\mathrm{lcm}(u_j, u_\ell)}{u_\ell}.$$

众所周知，如果 I 由相同次数的元素生成且具有线性商，那么 I 就有线性分解。这一事实在组合交换代数中极其有用。事实上，如果证明等次生成单项式理想 I 及

它的所有幂 I^k ($k \geq 2$)都具有线性商，那么就可以得出 I 具有线性幂，即 I 及其所有幂都有线性分辨。

对于单项式 $u = x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n} \in S$，整数向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 称为 u 的多重次数。我们也将 $u = \mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ 记作，特别地，对于 $\mathbf{a} = \mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$，$\mathbf{x}^{\mathbf{0}} = 1$；而 $\deg(u) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 则是 u 的次数。通常会将多重次数 $\mathbf{a}$ 与单项式 $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ 等同起来。

我们引用 [19]中的下一个定义。

定义 1.6。设 $I \subset S$ 是一个具有如下最小多重分次自由分辨的单项式理想

$$\mathbb{F} \ : \ 0 \to F_p \to F_{p-1} \to \cdots \to F_0 \to I \to 0,$$

其中 $F_i = \bigoplus^{\beta_i(I)}{}_{j=1} S(-\mathbf{a}_{i,j})$。向量 $\mathbf{a}_{i,j} \in \mathbb{Z}^n$, $i \geq 0$, $j = 1, \ldots, \beta_i(I)$ 称为 ith 个 I 的多分次移位。单项式理想

$$\mathrm{HS}_i(I) \ = \ (\mathbf{x}^{\mathbf{a}_{i,j}} \ : \ j = 1, \ldots, \beta_i(I))$$

称为 I的第 i个同调移位理想。

Note that $\mathrm{HS}_0(I) = I$ and $\mathrm{HS}_i(I) = (0)$ for $i < 0$ or $i > \mathrm{pd}(I)$.

同调移位理想理论的主要目的是理解所有 $\mathrm{HS}_i(I)$、$i = 0$、.....、$\mathrm{pd}(I)$ 具有哪些同调性质和组合性质。我们将这样的性质称为 I的同调移位性质；若上下文明确，也简称为同调性质。以下是两个重要的同调移位性质：若对所有 i，$\mathrm{HS}_i(I)$ 都具有线性分解，则称 I 具有同调线性分解；若对所有 i，$\mathrm{HS}_i(I)$ 都具有线性商，则称 I 具有同调线性商。

定理 1.5(b) 立即推出

命题 1.7. 设 $I = P + Q$ 是 $I \subset S$的一个 Betti 分裂。那么

$$\mathrm{HS}_k(I) = \mathrm{HS}_{k-1}(P \cap Q) + \mathrm{HS}_k(P) + \mathrm{HS}_k(Q),$$

对所有 $k \geq 0$。

回顾一下极化技术：它是一种将单项式理想变换为更大的多项式环中的无平方因子单项式理想的操作。

设 $u = x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots x_n^{b_n} \in S$ 是一个单项式。那么，u 的极化是单项式

$$u^{\wp} = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{b_i} x_{i,j} = \prod_{\substack{i=1,\ldots,n \\ b_i>0}} x_{i,1}x_{i,2}\cdots x_{i,b_i}$$

在多项式环 $K[x_{i,j}$ 中：$i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, b_i]$。

对于 S 中的单项式 $u = x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots x_n^{b_n}$，我们将 u 的 x_i–次数定义为整数 $\deg_{x_i}(u) = b_i = \max\{j \geq 0 : x_i^j \text{ 整除 } u\}$。设 I 是 S 的单项式理想，并令 $a_i = \max\{\deg_{x_i}(u) : u \in G(I)\}$, $i = 1, \ldots, n$。令

$$R = K[x_{i,j} : i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, a_i]$$

为关于变量 $x_{i,\ j}$、$i = 1$、.....、n、$j = 1$、.....、a_i 的多项式环。单项式理想 I 的极化定义为 R 的无平方因子单项式理想 $I^{\wp}$，其极小生成集为 $G(I^{\wp}) = \{u^{\wp} : \ u \in G(I)\}$。

如下结果所示，极化与同调移位理想相交换。

引理 1.8.（[32, 推论 1.8], [19, 命题 1.14]）。设 $I \subset S$ 为一个单项式理想。那么，对所有 $i \geq 0$，$\mathrm{HS}_i(I^{\wp}) = \mathrm{HS}_i(I)^{\wp}$。

1.3. 非常良覆盖图概览。本文中，图始终指不含环或重边的有限无向图。设 G 为一个图，其顶点集为 $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n\}$，边集为 $E(G)$。设 $x_i \in V(G)$ 是 G 的一个顶点。x_i 的（开）邻域是集合

$$N(x_i) = \{x_j \in V(G) : x_i x_j \in E(G)\},$$

而 x_i 的闭邻域是如下定义的集合

$$N[x_i] = \{x_j \in V(G) : x_i x_j \in E(G)\} \cup \{x_i\}.$$

若 $W \subseteq V(G)$，我们用 $G \setminus W$ 表示 G 的子图，该子图删去了 W 的顶点及其关联边。

W 是 $V(G)$ 的一个子集，若 G 的每条边都至少与 W 中的一个顶点关联，则称其为顶点覆盖。若顶点覆盖 W 不存在任何真子集 W 也是 G 的顶点覆盖，则称其为极小顶点覆盖。G 的所有极小顶点覆盖构成的集合记为 $\mathcal{C}(G)$。

与 G [34] 相关联的是多项式环 $S = K[x_1, \ldots, x_n]$的以下无平方因子单项式理想：

$$I(G) = (x_i x_j \ : \ x_i x_j \in E(G))$$

称为 G的边理想，且

$$I(G)^{\vee} = (x_{i_1} \cdots x_{i_s} \ : \ W = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}\} \text{ is a minimal vertex cover of } G)$$

称为 G的覆盖理想。

如果所有极小顶点覆盖都具有相同的基数，则称图 G 为无混合或良覆盖。特别地，$I(G)$的所有关联素理想都具有相同的高度。如果 G (G) 是 Cohen–Macaulay 环，则称图 G 在域 K 上为 Cohen–Macaulay 图。显然，Cohen–Macaulay图是无混合的 [34, 命题 7.2。9]

最后，我们回顾一下，将图 G 的所有顶点进行配对称为完美匹配。因此，当且仅当 G 具有偶数个顶点，并且存在一组覆盖所有顶点的独立边时，G 才具有完美匹配；这里的独立边集是指由两两不相交的边组成的集合 [34]。

接下来，Eagon 和 Reiner 提出的基本判据将发挥关键作用。

判据 1.9. ([6], [16, 定理 8.1.9])。设 $I \subset S$ 是一个无平方因子单项式理想。当且仅当其亚历山大对偶 $I^{\vee}$ 具有线性分解时，I 是 Cohen–Macaulay 的。

现在，我们分析非常良覆盖图这一类（例如，参见 [26]及其中的参考文献）。设 G 是一个没有孤立顶点的无混合图，并令

$I(G)$ 是其在 S中的边理想。在 [14, 推论 3.4],中，作者证明了以下不等式:

$$2\text{height}(I(G)) \geq |V(G)|.$$

定义 1.10. 若图 G 无混合、没有孤立顶点，且满足 2height($I(G)$) $= |V(G)|$，则称其为非常良覆盖图。

根据定理 1.2], ，非常良覆盖图总是存在完美匹配。因此，对于具有 $2n$ 个顶点的非常良覆盖图 G，我们可以假设

(∗) $V(G) = X \cup Y$, $X \cap Y = \varnothing$，其中 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 是 G 的一个极小顶点覆盖， $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ 是 G 的一个极大独立集，且满足 $\{x_1y_1, \ldots, x_ny_n\} \subseteq E(G)$。

需要指出的是，对于非常良覆盖图，假设条件 (∗) 并不会对图施加任何限制。事实上，这只不过是对顶点重新标记。

在本文余下部分，设 $S = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ 为一个 K。对于一个正整数 n，我们将集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 记为 $[n]$。

定理 1.11。（[5, 定理 3.6]）。设 G 为一个具有 $2n$ 个顶点的图，且这些顶点均不孤立，并且高度($I(G)$) $= n$。我们假设条件 (∗) 成立，并且还假设：若 $x_iy_j \in E(G)$，则 $i \leq j$。那么，以下条件等价:

(a) G 是一个 Cohen–Macaulay 极大覆盖图。(b) 以下条件成立：(i) 若 $x_iy_j \in E(G)$，则 $x_ix_j \notin E(G)$；(ii) 若 z_ix_j， $y_jx_k \in E(G)$，则 $z_ix_k \in E(G)$，其中 i、 j、 k 两两不同，且 $z_i \in \{x_i, y_i\}$。

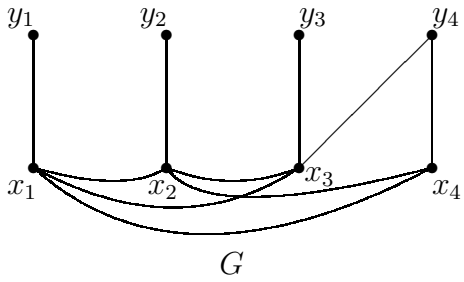
为方便起见，我们将定理 1.11 改述如下。

刻画 1.12。（[5], [29, 引理 3.1]）。设 G 是一个具有 $2n$ 个顶点的非常良覆盖图。那么，以下条件等价。

(a) G 是 Cohen–Macaulay。(b) 存在对 $V(G)$ 的重新标记 $= \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$，使得 (i) $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 是 G 的极小顶点覆盖，且 $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ 是 G 的极大独立集；(ii) 对所有 $i \in [n]$， $x_iy_i \in E(G)$；(iii) 若 $x_iy_j \in E(G)$，则 $i \leq j$；(iv) 若 $x_iy_j \in E(G)$，则 $x_ix_j \notin E(G)$；(v) 若 $z_ix_j, y_jx_k \in E(G)$，则对于任意互不相同的 i, j, k 以及 $z_i \in \{x_i, y_i\}$，有 $z_ix_k \in E(G)$。

下一个例子说明了前面的刻画。

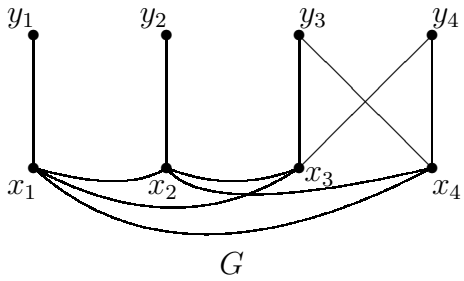
例 1.13。以下图 G 是一个具有 8 个顶点的 Cohen–Macaulay 极大覆盖图的示例。



G

事实上，对于 $S = K[x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4]$，$\dim S/I(G) = 4 = \text{depth } S/I(G)$，并且其极小顶点覆盖为：$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\{x_1, y_2, x_3, x_4\}$, $\{y_1, x_2, x_3, x_4\}$,$\{x_1, x_2, x_3, y_4\}$, $\{x_1, x_2, y_3, y_4\}$。

下一个图 G 是一个具有 8 个顶点的非 Cohen–Macaulay 极大覆盖图的示例。



G

事实上，G 是非常良覆盖的。其极小顶点覆盖为集合 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$,$\{x_1, y_2, x_3, x_4\}$, $\{y_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\{x_1, x_2, y_3, y_4\}$。但是，G 不是 Cohen–Macaulay。注意，$\dim S/I(G) = 4 \neq \text{depth } S/I(G) = 3$，其中 $S = K[x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4]$。

2. Betti splittings of cover ideals of very well–covered graphs

本节分析 Cohen–Macaulay 非常良覆盖图这一类图的覆盖理想的 Betti 分裂。

我们的第一个结果表明，若以适当的方式从一个 Cohen–Macaulay 非常良覆盖图中删去若干对顶点，就能得到“更小的图”，而这些图仍然是 Cohen–Macaulay 非常良覆盖图。

命题 2.1. 设 G 是一个具有 $2n$ 个顶点且满足条件 $(*)$ 的 Cohen–Macaulay 非常良覆盖图。那么，对任意子集 $A \subseteq [n]$，$G \setminus \{x_i, y_i : i \in A\}$ 都是一个 Cohen–Macaulay 非常良覆盖图。

证明。首先注意，由于 G 是一个具有 $2n$ 个顶点的 Cohen–Macaulay 非常良覆盖图，且满足条件 $(*)$，因此 $\text{height}(I(G)) = n$。此外，根据 [5,引理 3.5]，我们可以假设若 $x_i y_j \in E(G)$，则 $i \leq j$。

若 $A = \varnothing$，则无需证明。现在，令 $A \neq \varnothing$，并设 $A = \{i_1, i_2, \ldots, i_t\}$。我们证明

$$G_0 = G \setminus \{x_i, y_i : i \in A\} = G \setminus \{x_{i_1}, y_{i_1}, x_{i_2}, y_{i_2}, \ldots, x_{i_t}, y_{i_t}\}$$

是一个 Cohen–Macaulay 极大覆盖图。注意， G_0 有 2($n-t$) 个非孤立顶点。此外， G_0 满足关于 $X_0 = X \setminus \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\}$ 和 $Y_0 = Y \setminus \{y_{i_1}, \ldots, y_{i_t}\}$ 的条件 (∗)，且 $I(G_0)$ 的高度为 $n-t$，因为 X_0 是 G_0 的一个极小顶点覆盖。显然， G_0 满足定理 1.11(b) 的条件 (i)–(ii)，因为 G 满足这些条件。由定理 1.11 可知， G_0 也是一个 Cohen–Macaulay 极大覆盖图。□

设 $F \subseteq [n]$ 为一个非空集合，则令 $\mathbf{x}_F = \prod_{i\in F} x_i$、$\mathbf{y}_F = \prod_{i\in F} y_i$。否则，令 $\mathbf{x}_\varnothing = \mathbf{y}_\varnothing = 1$。对于单项式 $u \in S = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$，我们将 u 的支撑定义为集合

$$\operatorname{supp}(u) = \{x_i : x_i \text{ divides } u\} \cup \{y_j : y_j \text{ divides } u\}.$$

从现在起，当我们讨论具有$2n$ 个顶点的 Cohen–Macaulay 极大覆盖图 G 时，默认存在对顶点集$V(G) = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ 的某种重新标记，使其满足特征 1.12 的条件 (i)–(v)。

引理 2.2. 设 G 为一个具有 $2n$ 个顶点的 Cohen–Macaulay 极大覆盖图。对于每个 $u \in G(I(G)^\vee)$，存在 $[n]$ 的唯一子集 F，使得 $u = \mathbf{x}_F\mathbf{y}_{[n]\setminus F}$。

证明。令 $u \in G(I(G)^\vee)$。根据定义， u 是一个无平方因子单项式，其支撑$C = \operatorname{supp}(u)$ 是 G 的一个极小顶点覆盖。由于 G 是非常良覆盖的， u 的次数为 $|V(G)|/2 = n$。由刻画 1.12(b)(ii)， $x_ny_n \in E(G)$。因此 $z_n \in C$，其中 $z_n \in \{y_n, x_n\}$。注意， $C_1 = C \setminus \{z_n\}$ 是 $G_1 = G \setminus \{y_n, x_n\}$ 的一个顶点覆盖。由命题 2.1， G_1 仍是 Cohen–Macaulay 的非常良覆盖图。由于 $|C_1| = |C| - 1 = |V(G)|/2 - 1 = |V(G_1)|/2$，可知 C_1 是 G_1 的一个极小顶点覆盖。因此，支撑为 C_1 的单项式 u_1 是 $I(G_1)^\vee$ 的一个极小生成元。由归纳法，对 $[n-1]$ 的唯一一个子集 F_1，有 $u_1 = \mathbf{x}_{F_1}\mathbf{y}_{[n-1]\setminus F_1}$。若 $z_n = x_n$，令 $F = F_1 \cup \{n\}$。否则，若 $z_n = y_n$，令 $F = F_1$。在这两种情形下， $u = z_nu_1 = \mathbf{x}_F\mathbf{y}_{[n]\setminus F}$，如所要求。□

注意，如果 G 是一个具有 $2n$ 个顶点的 Cohen–Macaulay 极大覆盖图，那么

$$N[x_n] = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}, x_n, y_n\}, \text{ with } i_r < n,\ r \in [t],$$

and

$$N[y_n] = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_p}, x_n, y_n\}, \text{ with } j_q < n,\ q \in [p].$$

此外，根据刻画 1.12， $i_r \neq j_q$ 对所有 $r \in [t]$ 和 $q \in [p]$ 都成立。我们将在下一节再次讨论这类集合（见设定 3.1 和引理 3.2）。

命题 2.3. 令 G 为一个 Cohen–Macaulay 的非常良覆盖图，且有 $2n$个顶点。令 $N[x_n] = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}, x_n, y_n\}$、 $N[y_n] = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_p}, x_n, y_n\}$并定义

$$\begin{aligned} G_1 &= G \setminus \{x_{i_1}, y_{i_1}, x_{i_2}, y_{i_2}, \ldots, x_{i_t}, y_{i_t}, x_n, y_n\}, \\ G_2 &= G \setminus \{x_{j_1}, y_{j_1}, x_{j_2}, y_{j_2}, \ldots, x_{j_p}, y_{j_p}, x_n, y_n\}. \end{aligned}$$

Then

$$I(G)^\vee \;=\; x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t}\cdot y_n I(G_1)^\vee + x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_p}\cdot x_n I(G_2)^\vee$$

是一个 Betti 分裂。

证明。令 $J_1 = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t}\cdot y_n I(G_1)^\vee$ 和 $J_2 = x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_t}\cdot x_n I(G_2)^\vee$。注意，$y_n$ 不整除 J_2 的任何极小单项式生成元。因此 $G(J_1)\cap G(J_2) = \varnothing$。我们断言， J_1 和 J_2 都有 $n-$ 线性分解。事实上，由命题 2.1， G_1 和 G_2 仍然是 Cohen–Macaulay 非常良覆盖图，因此由判据 1.9 可得我们的断言。根据命题 1.3，要证明 $I(G)^\vee = J_1 + J_2$ 是一个 Betti 分裂，只需证明 $I(G)^\vee = J_1 + J_2$ 是 $y_n- I(G)^\vee$ 的划分。事实上，设 u 是 $I(G)^\vee$ 的一个极小生成元。那么 $C = \mathrm{supp}(u)$ 是 G 的一个极小顶点覆盖。由引理 2.2，存在某个 $F \subseteq [n]$，使得 $u = \mathbf{x}_F\mathbf{y}_{[n]\setminus F}$。因此，要么是 $y_n \in C$，要么是 $x_n \in C$。我们分两种情况讨论。

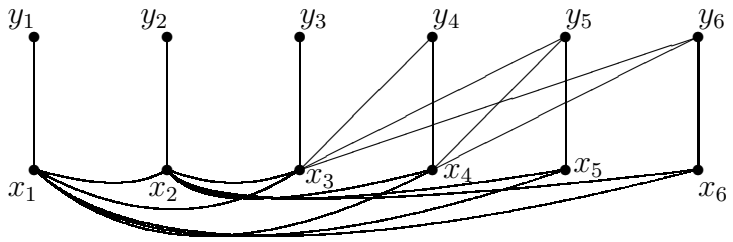
Case 1. 假设 $y_n \in C$。由于 $x_n \notin C$，但 $x_{i_1}x_n, \ldots, x_{i_t}x_n \in E(G)$，且 C是一个顶点覆盖，因此我们得到 $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t} \in C$。于是 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t}\cdot y_n$整除 u。注意，$v = u/(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t}\cdot y_n)$的支撑是 G_1的一个顶点覆盖。此外，$\mathrm{supp}(v)$是一个极小顶点覆盖，因为 $|\mathrm{supp}(v)| = n-(t+1) = |V(G_1)|/2$，并且 G_1 是一个非常良覆盖图（命题 2.1）。因此，在这种情况下， $v \in I(G_1)^\vee$且 $u \in J_1$。

Case 2. 假设 $x_n \in C$。由于 $y_n \notin C$，但 $x_{j_1}y_n, \ldots, x_{j_p}y_n \in E(G)$，且 C是一个顶点覆盖，因此我们得到 $x_{j_1}, \ldots, x_{j_p} \in C$。于是 $x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_p}\cdot x_n$整除$u$。注意，$w = u/(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_p}\cdot x_n)$的支撑是 G_2的一个顶点覆盖。此外，$\mathrm{supp}(w)$是一个极小顶点覆盖，因为 $|\mathrm{supp}(w)| = n-(p+1) = |V(G_2)|/2$，并且 G_2 是一个非常良覆盖图（命题 2.1）。因此， $w \in I(G_2)^\vee$且 $u \in J_2$。

因此，我们证明了 $G(I(G)^\vee)$ 包含于 $G(J_1)\cup G(J_2)$。

对于反向包含，设 $v \in G(I(G_1)^\vee)$，则 $\mathrm{supp}(v)$ 是 G_1 的极小顶点覆盖。我们断言， $C = \mathrm{supp}(x_{i_1}\cdots x_{i_t}\cdot y_n v)$ 是G的极小顶点覆盖。事实上， G 中所有与属于 $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}, y_n\}$ 的顶点相 incident 的边，都与 C中的某个顶点相 incident。由于 $N[x_n]\setminus\{x_n, y_n\} = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}\} \subset C$，因此每条与 x_n 相 incident 的边也与 C中的某个顶点相 incident。最后，设 e 是与某个 $k \in [t]$的y_{i_k}相 incident 的边。则 $e = x_j y_{i_k} \in E(G)$。由于 $x_j y_{i_k}$和$x_{i_k}x_n$都是 G的边，根据刻画 1.12(v)， $x_j x_n \in E(G)$ 也成立。因此， $x_j \in N[x_n]\setminus\{x_n, y_n\}$且 $\{x_j, y_{i_k}\}\cap C \neq \varnothing$。最后， C是 G的极小顶点覆盖。这表明 $G(J_1) \subseteq G(I(G)^\vee)$。类似地，再次利用刻画 1.12 的条件 (v)，可证明 $G(J_2) \subseteq G(I(G)^\vee)$。结论得证。□

例 2.4。设 $S = K[x_1, \ldots, x_6, y_1, \ldots, y_6]$。考虑下图所示的图 G



G

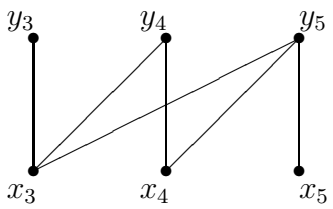
根据刻画 1.12，可以验证 G 是一个具有 12 个顶点的 Cohen–Macaulay 极大覆盖图。我们有

$$\begin{aligned} I(G) &= (x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3, x_4y_4, x_5y_5, x_6y_6, x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_1x_5, \\ &\quad x_1x_6, x_2x_3, x_2x_4, x_2x_5, x_2x_6, x_3y_4, x_3y_5, x_3y_6, x_4y_5, x_4y_6), \\ I(G)^\vee &= (x_1x_2x_3x_4x_5x_6, y_1x_2x_3x_4x_5x_6, x_1y_2x_3x_4x_5x_6, x_1x_2x_3x_4y_5x_6, \\ &\quad x_1x_2x_3x_4x_5y_6, x_1x_2x_3x_4y_5y_6, x_1x_2x_3y_4y_5y_6, x_1x_2y_3y_4y_5y_6). \end{aligned}$$

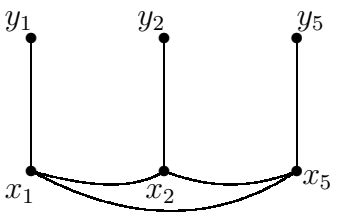
此外，$N[x_6] = \{x_1, x_2, x_6, y_6\}$, $N[y_6] = \{x_3, x_4, x_6, y_6\}$ 因此 ly

$$G_1 = G \setminus \{x_1, y_1, x_2, y_2, x_6, y_6\},\ G_2 = G \setminus \{x_3, y_3, x_4, y_4, x_6, y_6\},$$

i.e.,



G_1



G_2

由此可得

$$\begin{aligned} I(G_1)^\vee &= (x_3x_4x_5, x_3x_4y_5, x_3y_4y_5, y_3y_4y_5), \\ I(G_2)^\vee &= (x_1x_2x_5, y_1x_2x_5, x_1y_2x_5, x_1x_2y_5). \end{aligned}$$

最后，

$$I(G)^\vee = x_1x_2y_6I(G_1)^\vee + x_3x_4x_6I(G_2)^\vee$$

是一个 Betti 分裂。

3. The resolution of cover ideals of very well–covered graphs

本节构造任意 Cohen–Macaulay 极大覆盖图 G的覆盖理想 $I(G)^\vee$的极小自由分解。我们的方法采用归纳法，对 G 顶点数的一半进行归纳，并使用小节 1.1 中描述的映射锥。事实上，将映射锥应用于 $I(G)^\vee$ 的 Betti 分裂（命题 2.3）

即可得到 $I(G)^\vee$的极小自由分解，前提是我们已知与给定图 G相关联的三个适当子图的覆盖理想的极小自由分解。

首先，设 G_1 和 G_2 是两个图，我们将 G_1 与 G_2的交图定义为图 G，其中 $V(G) = V(G_1) \cap V(G_2)$ 且 $E(G) = \{e : e \in E(G_1) \cap E(G_2)\}$。我们用 $G_1 \cap G_2$表示 G。

设定 3.1。设 G 是一个具有 $2n$个顶点的 Cohen–Macaulay 极大覆盖图。令 $N[x_n] = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}, x_n, y_n\}$、$N[y_n] = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_p}, x_n, y_n\}$，并定义

$$\begin{aligned} G_1 &= G \setminus \{x_{i_1}, y_{i_1}, x_{i_2}, y_{i_2}, \ldots, x_{i_t}, y_{i_t}, x_n, y_n\}, \\ G_2 &= G \setminus \{x_{j_1}, y_{j_1}, x_{j_2}, y_{j_2}, \ldots, x_{j_p}, y_{j_p}, x_n, y_n\}. \end{aligned}$$

由命题 2.3，G_1 和 G_2 均为 Cohen–Macaulay 极大覆盖图。此外，$|V(G_1)| = 2(n-1-t)$ 且 $|V(G_2)| = 2(n-1-p)$。
设 $J = I(G)^\vee$、$J_1 = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t} \cdot y_n I(G_1)^\vee$ 和 $J_2 = x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_p} \cdot x_n I(G_2)^\vee$。于是，命题 2.3 表明，$J = J_1 + J_2$ 是 J的 Betti 分裂。最后，考虑 G的子图 $G_3 = G_1 \cap G_2$。由于 G_1和 G_2的结构，显然 G_3 也是 Cohen–Macaulay 良覆盖的。

For instance, in Example 2.4, $G_3 = G \setminus \{x_i, y_i : i \neq 5\}$.

以下引理将在后文中起关键作用。

引理 3.2。假设设定 3.1。则

$$N[x_n] \cap N[y_n] = \{x_n, y_n\}.$$

证明。对所有 $s \in [p]$，$x_{j_s}y_n \in E(G)$。因此，刻画 1.12(iv) 表明$x_{j_s}x_n \notin E(G)$，从而对所有 $s \in [p]$，$x_{j_s} \notin N[x_n]$。最后 $N[x_n] \cap N[y_n] = \{x_n, y_n\}$。□

引理 3.3。假设满足设定 3.1。则

$$J_1 \cap J_2 = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t} \cdot x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_p} \cdot x_n y_n I(G_3)^\vee.$$

证明。令 $J_{1,2} = J_1 \cap J_2$。由于 $J = J_1 + J_2$ 是 Betti 分裂，且 J 具有 n–线性分解，因此 $J_{1,2}$ 具有 $(n+1)$–线性分解（命题 1.4）。$J_{1,2}$ 的生成集为集合 $\{\mathrm{lcm}(u_1, u_2) : u_1 \in G(J_1)\ u_2 \in G(J_2)\}$。由于 $J_{1,2}$ 是次数为 $n+1$ 的等次生成理想，因此

$$G(J_{1,2}) = \big\{\mathrm{lcm}(u_1, u_2) : u_1 \in G(J_1),\ u_2 \in G(J_2),\ \deg(\mathrm{lcm}(u_1, u_2)) = n+1\big\}.$$

由引理 3.2，$N[x_n] \cap N[y_n] = \{x_n, y_n\}$。因此，根据 J_1 和 J_2 的表示，我们得到每个单项式 $w \in G(J_{1,\ 2})$ 都被 $x_{i_1}\cdots x_{i_t} \cdot x_{j_1}\cdots x_{j_p} \cdot x_n y_n$ 整除。注意，$(X \cup Y) \setminus \{x_{i_1}, y_{i_1}, \ldots, x_{i_t}, y_{i_t}, x_{j_1}, y_{j_1}, \ldots, x_{j_p}, y_{j_p}, x_n, y_n\}$ 是图 G_3 的顶点集。此外，$v_1 = u_1/(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t} \cdot x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_p} \cdot y_n)$ 的支撑是非常良覆盖图 G_3 的一个极小顶点覆盖。由于 $\mathrm{lcm}(u_1, u_2) = x_n u_1$，我们得到 $\mathrm{lcm}(u_1, u_2) = x_{i_1}\cdots x_{i_t} \cdot x_{j_1}\cdots x_{j_p} \cdot x_n y_n v_1 \in G(x_{i_1}\cdots x_{i_t} \cdot x_{j_1}\cdots x_{j_p} \cdot x_n y_n I(G_3)^\vee)$。

Conversely, let $w = x_{i_1}\cdots x_{i_t} \cdot x_{j_1}\cdots x_{j_p} \cdot x_n y_n v \in G(x_{i_1}\cdots x_{i_t} \cdot x_{j_1}\cdots x_{j_p} \cdot x_n y_n I(G_3)^\vee)$,

满足 $v \in I(G_3)^\vee$。那么 $\operatorname{supp}(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_p}\cdot v)$ 是 G_1 的一个极小顶点覆盖，而 $\operatorname{supp}(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t}\cdot v)$ 是 G_2 的一个极小顶点覆盖。因此 $u_1 = w/x_n \in G(J_1)$ 且 $u_2 = w/y_n \in G(J_2)$。由于 $w = \operatorname{lcm}(u_1, u_2)$ 且 $\deg(w) = n+1$，我们有$w \in G(J_{1,2})$，由此证明了另一个包含关系。□

现在我们转向极小自由分解的构造。对于变量集 $X \cup Y = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ 的子集 C，我们设

$$\mathbf{z}_C = \mathbf{x}_{C_x}\mathbf{y}_{C_y}, \tag{4}$$

其中 $C_x = \{i : x_i \in C\}$，且 $C_y = \{j : y_j \in C\}$。

如果 G 是一个图，使得 $V(G) = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$ 且 $C \in \mathcal{C}(G)$，我们定义集合 $\mathcal{C}(G; C) = \{x_s : y_s \in C$，且 $(C \setminus y_s) \cup x_s \in \mathcal{C}(G)\}$。回顾一下，$\mathcal{C}(G)$ 是 G 的所有极小顶点覆盖的集合。

例如，在例 1.13 中，对于 $C = \{x_1, x_2, y_3, y_4\}$，$\mathcal{C}(G;\ C) = \{x_3\}$。事实上，$\{x_1, x_2, y_4\} \cup x_3 = \{x_1, x_2, x_3, y_4\}$ 是给定图 G 的一个极小顶点覆盖。可以观察到 $x_4 \notin \mathcal{C}(G;\ C)$，因为 $\{x_1, x_2, y_3\} \cup x_4$ 不是 G 的顶点覆盖。此外，对于 $C = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，$\mathcal{C}(G;\ C) = \varnothing$。

下文中，我们用 $\binom{\mathcal{C}(G;C)}{i}$ 表示 $\mathcal{C}(G; C)$,$0 \le i \le |\mathcal{C}(G; C)|$中所有大小为 i 的子集。滥用记号，对于 $\sigma \in \binom{\mathcal{C}(G;C)}{i}$，我们令 $\mathbf{x}_\sigma = \prod_{x_s \in \sigma} x_s$。特别地，$\mathbf{x}_\varnothing = 1$。

构造 3.4。假设设定 3.1。令

$$\mathbb{F} \ : \ \cdots \to F_i \xrightarrow{d_i} F_{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \cdots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} J \to 0$$

为复形

- 其第 i个自由模 F_i 以符号 $\mathbf{f}(C;\ \sigma)$ 为基，这些符号的多重次数为 $\mathbf{z}_C\mathbf{x}_\sigma$，其中 $C \in \mathcal{C}(G)$ 且 $\sigma \in \binom{\mathcal{C}(G;C)}{i}$，即 $\sigma \subseteq \mathcal{C}(G;\ C)$ 是大小为 i的子集；- 且其第 i 个微分定义为 $d_0(\mathbf{f}(C;\ \varnothing)) = \mathbf{z}_C$，对于 $i = 0$，而对于 $i > 0$，定义如下：

$$d_i(\mathbf{f}(C;\sigma)) = \sum_{x_s \in \sigma} (-1)^{\alpha(\sigma;x_s)} \big[y_s\mathbf{f}((C \setminus y_s) \cup x_s; \sigma \setminus x_s) - x_s\mathbf{f}(C; \sigma \setminus x_s)\big],$$

其中 $\alpha(\sigma; x_s) = |\{x_j \in \sigma : j > s\}|$。

从现在起，我们令 $J_{1,2} = J_1 \cap J_2$并分别用 $(\mathbb{F}_{J_{1,2}},\ d^{J_{1,2}})$、$(\mathbb{F}_{J_1}, d^{J_1})$、$(\mathbb{F}_{J_2}, d^{J_2})$ 表示 $J_{1,2}$、J_1、J_2 的极小自由分解。

定理 3.5。构造 3.4 中给出的复形 $\mathbb{F}$ 是 $J = I(G)^\vee$ 的极小自由分解。

证明。我们对 $|V(G)|/2 = n$ 采用强归纳法。对于 $n = 1$, $I(G) = (x_1y_1)$ 和 $J = I(G)^\vee = (x_1, y_1)$。在这种情况下，很容易验证，构造 3.4 中的复形 $\mathbb{F}$ 是 $J = I(G)^\vee$ 的极小自由分解。因此，设 $n > 1$。图 G_1, G_2, G_3 的顶点集基数均小于 $|V(G)|$，因此根据归纳法，我们可以假设 $I(G_1)^\vee, I(G_2)^\vee, I(G_3)^\vee$ 的极小自由分解

如构造 3.4 所示。因此，我们可以明确写出自由分解 $\mathbb{F}_{J_1,\,2}$，$\mathbb{F}_{J_1}$，$\mathbb{F}_{J_2}$，因为这些自由分解中的每一个，都与前面提到的三个自由分解之一相同，只相差一个适当单项式的乘法。

设 $(\mathbb{F}_J, d^J)$ 为将映射锥应用于 Betti 分裂 $J = J_1 + J_2$ 所得到的自由分解。那么 $\mathbb{F}_J$ 是 J 的极小自由分解。我们证明 $\mathbb{F}_J$ 可以与 $\mathbb{F}$ 等同。我们分三步实现这一目标。

Step 1. 我们来证明，$\mathbb{F}_J$ 的自由模具有构造 3.4 中描述的基。根据映射锥（小节 1.1，(i)），$F_i^J = F^{J_1,}{}_{i-1}{}^{2} \oplus F_i^{J_1} \oplus F_i^{J_2}$。$F_i^{J_1}$、$F_i^{J_2}$ 和 $F^{J_1,}{}_{i}{}^{2}$ 的基分别如下：

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_t} \cdot y_n \cdot \mathbf{f}_{J_1}(C_1; \sigma_1) \ : \ C_1 \in \mathcal{C}(G_1),\ \sigma_1 \in \binom{\mathcal{C}(G_1; C_1)}{i} \right\},$$
$$\mathcal{B}_2 = \left\{ x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_p} \cdot x_n \cdot \mathbf{f}_{J_2}(C_2; \sigma_2) \ : \ C_2 \in \mathcal{C}(G_2),\ \sigma_2 \in \binom{\mathcal{C}(G_2; C_2)}{i} \right\},$$
$$\mathcal{B}_3 = \left\{ x_{i_1} \cdots x_{i_t} \cdot x_{j_1} \cdots x_{j_p} \cdot x_n y_n \cdot \mathbf{f}_{J_{1,2}}(C_3; \sigma_3) \ : \ C_3 \in \mathcal{C}(G_3),\ \sigma_3 \in \binom{\mathcal{C}(G_3; C_3)}{i} \right\}.$$

设 $\mathbf{f}(C;\ \sigma)$ 是 F_i 中如构造 3.4 所述的一个基元素，即其多重次数为 $\mathbf{z}_C\mathbf{x}_\sigma$，且满足 $C \in \mathcal{C}(G)$、$\sigma \in \binom{\mathcal{C}(G;C)}{i}$。我们区分三种可能的情形。

Case 1.1. 设 $x_n \in C$。则 $N[y_n] \setminus N[x_n] = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}\} \subset C$。事实上，$C$是 G的顶点覆盖，$y_n \notin C$（引理 2.2），但对于 $r \in [p]$，$x_{j_r} y_n \in E(G)$。因此，$C_2 = C \setminus \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}, x_n\}$ 是 G_2的极小顶点覆盖。此外，对于所有$x_s \in \sigma$，$(C_2 \setminus y_s) \cup x_s$ 是 G_2 的极小顶点覆盖，因为 $(C \setminus y_s) \cup x_s$ 是 G的极小顶点覆盖。由于 $\mathbf{b} = x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_p} \cdot x_n \cdot \mathbf{f}_{J_2}(C_2;\ \sigma) \in \mathcal{B}_2$与 $\mathbf{f}(C;\ \sigma)$ 具有相同的多重次数，因此我们可以将 $\mathbf{f}\,(C;\ \sigma)$ 与 $\mathbf{b}$ 等同。

Case 1.2. 设 $y_n \in C$和 $x_n \notin \sigma$。则 $C_1 = C \setminus \{x_1, \ldots, x_{i_t}, y_n\}$ 是 G_1的极小顶点覆盖。与之前一样，我们可以将 $\mathbf{f}\,(C;\ \sigma)$ 识别为 $x_{i_1} \ldots x_{i_t} \cdot y_n \cdot \mathbf{f}_{J_1}(C_1;\ \sigma) \in \mathcal{B}_1$。

Case 1.3. 设 $y_n \in C$和 $x_n \in \sigma$。则 C和 $(C \setminus y_n) \cup x_n$ 都是 G的极小顶点覆盖。因此，$(N[x_n] \cup N[y_n]) \setminus \{x_n, y_n\} = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}\} \subset C$。令 $C_3 = C \setminus \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}, y_n\}$和 $\sigma_3 = \sigma \setminus x_n$，则对于所有 $x_s \in \sigma_3$，C_3和 $(C_3 \setminus y_s) \cup x_s$ 都是 G_3 的极小顶点覆盖。因此，在这种情况下，我们可以将 $\mathbf{f}\,(C;\ \sigma)$ 识别为 $x_{i_1} \cdots x_{i_t} \cdot x_{j_1} \cdots x_{j_p} \cdot x_n y_n \cdot \mathbf{f}_{J_1,\,2}(C_3;\ \sigma_3) \in \mathcal{B}_3$。

反过来，任意基元素 $\mathbf{b} \in \mathcal{B}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 都可以对应于构造 3.4 中给出的基元素 $\mathbf{f}(C;\ \sigma)$。因此，我们可以看出，模 F_i^J具有构造 3.4 中所述的所需基。

Step 2. 令 $\psi_{-1} : u \in J_{1,2} \mapsto (u, -u) \in J_1 \oplus J_2$。为了应用映射15

锥，我们需要构造比较映射 ψ_i ，使下图

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathbb{F}_{J_{1,2}}: & \cdots & \longrightarrow & F_2^{J_{1,2}} & \xrightarrow{d_2^{J_{1,2}}} & F_1^{J_{1,2}} & \xrightarrow{d_1^{J_{1,2}}} & F_0^{J_{1,2}} & \xrightarrow{d_0^{J_{1,2}}} & J_{1,2} & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow{\scriptstyle \psi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_0} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{-1}} & & \\
\mathbb{F}_{J_1}\oplus\mathbb{F}_{J_2}: & \cdots & \longrightarrow & F_2^{J_1}\oplus F_2^{J_2} & \xrightarrow[d_2^{J_1}\oplus d_2^{J_2}]{} & F_1^{J_1}\oplus F_1^{J_2} & \xrightarrow[d_1^{J_1}\oplus d_1^{J_2}]{} & F_0^{J_1}\oplus F_0^{J_2} & \xrightarrow[d_0^{J_1}\oplus d_0^{J_2}]{} & J_1\oplus J_2 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

交换的。使用 (4) 中的记号，令 $\mathbf{b} = x_{i_1}\cdots x_{i_t}\cdot x_{j_1}\cdots x_{j_p}\cdot x_n y_n \cdot \mathbf{f}_{J_{1,2}}(C_3;\sigma_3) = \mathbf{z}^{N[x_n]\cup N[y_n]}\cdot \mathbf{f}_{J_{1,2}}(C_3;\sigma_3) \in \mathcal{B}_3$为 $F_{\cdot i}^{J_1\ 2}$ 的一个基元素。我们定义

$$\psi_i(\mathbf{b}) = \big(\mathbf{z}_{N[x_n]}\cdot \mathbf{f}_{J_1}(C_3\cup\{x_{j_1},\ldots,x_{j_p}\};\sigma_3),\ -\mathbf{z}_{N[y_n]}\cdot \mathbf{f}_{J_2}(C_3\cup\{x_{i_1},\ldots,x_{i_t}\};\sigma_3)\big).$$

为简化记号，我们令 $C_1 = C_3\cup\{x_{j_1},\ldots,x_{j_p}\}$和 $C_2 = C_3\cup\{x_{i_1},\ldots,x_{i_t}\}$。可以注意到， ψ_i 是良定义的。事实上， $C_1\in\mathcal{C}(G_1)$、 $C_2\in\mathcal{C}(G_2)$、 $\sigma_3\subseteq\mathcal{C}(G_1;C_1)$，以及 $\sigma_3\subseteq\mathcal{C}(G_2;C_2)$。

我们需要验证，对于所有 $i\geq 0$ 和所有 $\mathbf{b}\in\mathcal{B}_3$，都有

$$\psi_{i-1}\circ d_i^{J_{1,2}}(\mathbf{b}) = (d_i^{J_1}\oplus d_i^{J_2})\circ\psi_i(\mathbf{b}).$$

对于 $i=0$,我们有 $\sigma_3=\varnothing$，因此 $\mathbf{x}_{\sigma_3}=1$ ，等式两边都等于

$$(\mathbf{z}_{N[x_n]\cup N[y_n]}\mathbf{z}_{C_3}, -\mathbf{z}_{N[x_n]\cup N[y_n]}\mathbf{z}_{C_3}).$$

令 $i>0$。为进一步简化记号，我们将一般的基元素 $(\mathbf{z}^{N[x_n]}\mathbf{f}_{J_1}(C_1;\sigma_1), \mathbf{z}^{N[y_n]}\mathbf{f}_{J_2}(C_2;\sigma_2))\in F_i^{J_1}\oplus F_i^{J_2}$记作 $\mathbf{z}^{N[x_n]}\mathbf{f}_{J_1}(C_1;\sigma_1)+\mathbf{z}^{N[y_n]}\mathbf{f}_{J_2}(C_2;\sigma_2)$。根据归纳法，我们明确知道 $d^{J_{1,\ i}\ 2}, d_i^{J_1}, d_i^{J_2}$。我们来计算 $\psi_{i-1}\circ d^{J_{1,\ i}\ 2}(\mathbf{b})$。我们有

$$d_i^{J_{1,2}}(\mathbf{b}) = \mathbf{z}_{N[x_n]\cup N[y_n]}\sum_{x_s\in\sigma_3}(-1)^{\alpha(\sigma_3;x_s)}\big[y_s\mathbf{f}_{J_{1,2}}((C_3\setminus y_s)\cup x_s;\sigma_3\setminus x_s) - x_s\mathbf{f}_{J_{1,2}}(C_3;\sigma_3\setminus x_s)\big].$$

因此，

$$\begin{aligned}
\psi_{i-1}\circ d_i^{J_{1,2}}(\mathbf{b}) = \sum_{x_s\in\sigma_3}(-1)^{\alpha(\sigma_3;x_s)}\big[& y_s\mathbf{z}_{N[x_n]}\cdot\mathbf{f}_{J_1}((C_1\setminus y_s)\cup x_s;\sigma_3\setminus x_s) \\
& - y_s\mathbf{z}_{N[y_n]}\cdot\mathbf{f}_{J_2}((C_2\setminus y_s)\cup x_s;\sigma_3\setminus x_s) \\
& - x_s\mathbf{z}_{N[x_n]}\cdot\mathbf{f}_{J_1}(C_1;\sigma_3\setminus x_s) \\
& + x_s\mathbf{z}_{N[y_n]}\cdot\mathbf{f}_{J_2}(C_2;\sigma_3\setminus x_s)\big].
\end{aligned} \tag{5}$$

现在，让我们计算 $(d_i^{J_1}\oplus d_i^{J_2})\circ\psi_i(\mathbf{b})$。首先，我们有

$$\psi_i(\mathbf{b}) = \mathbf{z}_{N[x_n]}\cdot\mathbf{f}_{J_1}(C_1;\sigma_3) - \mathbf{z}_{N[y_n]}\cdot\mathbf{f}_{J_2}(C_2;\sigma_3),$$

then

$$\begin{aligned}
(d_i^{J_1}\oplus d_i^{J_2})\circ\psi_i(\mathbf{b}) &= \mathbf{z}_{N[x_n]}\cdot d_i^{J_1}(\mathbf{f}_{J_1}(C_1;\sigma_3)) - \mathbf{z}_{N[y_n]}\cdot d_i^{J_2}(\mathbf{f}_{J_2}(C_2;\sigma_3)) \\
&= \mathbf{z}_{N[x_n]}\sum_{x_s\in\sigma_3}(-1)^{\alpha(\sigma_3;x_s)}\big[y_s\mathbf{f}_{J_1}((C_1\setminus y_s)\cup x_s;\sigma_3\setminus x_s) - x_s\mathbf{f}_{J_1}(C_1;\sigma_3\setminus x_s)\big] \\
&- \mathbf{z}_{N[y_n]}\sum_{x_s\in\sigma_3}(-1)^{\alpha(\sigma_3;x_s)}\big[y_s\mathbf{f}_{J_2}((C_2\setminus y_s)\cup x_s;\sigma_3\setminus x_s) - x_s\mathbf{f}_{J_2}(C_2;\sigma_3\setminus x_s)\big].
\end{aligned}$$

与方程 (5) 比较可知 $\psi_{i-1}\circ d^{J_{1,i}}{}^{2}(\mathbf{b}) = (d_i^{J_1}\oplus d_i^{J_2})\circ\psi_i(\mathbf{b})$。

Step 3. 还需证明微分 d_i^J的作用如构造 3.4 中所述。因此，设 $\mathbf{f}(C;\sigma)$、 $C\in\mathcal{C}(G)$ 和 $\sigma\in\binom{\mathcal{C}(G;C)}{i}$ 为一个基元素。让我们计算$d_i^J(\mathbf{f}(C;\sigma))$。对于 $i=0$，我们很容易看到 $d_0^J(\mathbf{f}(C;\varnothing)) = \mathbf{z}_C$，正如所要求的。

设 $i>0$。我们分三种情况讨论。

Case 3.1. 设 $x_n\in C$。令 $C_2 = C\setminus\{x_{j_1},\dots,x_{j_p},x_n\}$。那么，根据映射锥（小节 1.1, (ii)），我们有:

$$\begin{aligned} d_i^J(\mathbf{f}(C;\sigma)) &= d_i^{J_2}(x_{j_1}\cdots x_{j_p}\cdot x_n\cdot\mathbf{f}_{J_2}(C_2;\sigma)) \\ &= x_{j_1}\cdots x_{j_p}\cdot x_n\sum_{x_s\in\sigma}(-1)^{\alpha(\sigma;x_s)}\big[y_s\mathbf{f}_{J_2}((C_2\setminus y_s)\cup x_s;\sigma\setminus x_s) - x_s\mathbf{f}_{J_2}(C_2;\sigma\setminus x_s)\big] \\ &= \sum_{x_s\in\sigma}(-1)^{\alpha(\sigma;x_s)}\big[y_s\mathbf{f}((C\setminus y_s)\cup x_s;\sigma\setminus x_s) - x_s\mathbf{f}(C;\sigma\setminus x_s)\big], \end{aligned}$$

如所要求的。

Case 3.2. 设 $y_n\in C$和 $x_n\notin\sigma$。令 $C_1 = C\setminus\{x_{i_1},\dots,x_{i_t},x_n\}$，根据映射锥可见， $d_i^J(\mathbf{f}(C;\sigma)) = d_i^{J_1}(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t}\cdot y_n\cdot\mathbf{f}_{J_1}(C_1;\sigma))$ 具有所要求的表达式。

Case 3.3. 令 $y_n\in C$且 $x_n\in\sigma$。令 $C_3 = C\setminus\{x_{i_1},\dots,x_{i_t},x_{j_1},\dots,x_{j_p},y_n\}$、$\sigma_3=\sigma\setminus x_n$ 且 $\mathbf{b} = x_{i_1}\cdots x_{i_t}\cdot x_{j_1}\cdots x_{j_p}\cdot x_ny_n\cdot\mathbf{f}_{J_1,\,2}(C_3;\,\sigma_3)$，根据映射锥（小节 1.1，(ii)），我们有

$$d_i^J(\mathbf{f}(C;\sigma)) = -d_{i-1}^{J_{1,2}}(\mathbf{b})+\psi_{i-1}(\mathbf{b}).$$

让我们计算 $-d^{J_{1,\,i-1}}{}^{2}(\mathbf{b})$。由于 $\mathbf{z}^{N[x_n]\cup N[y_n]} = x_{i_1}\cdots x_{i_t}\cdot x_{j_1}\cdots x_{j_p}\cdot x_ny_n$，我们有

$$\begin{aligned} -d_{i-1}^{J_{1,2}}(\mathbf{b}) &= -\mathbf{z}_{N[x_n]\cup N[y_n]}\sum_{x_s\in\sigma_3}(-1)^{\alpha(\sigma_3;x_s)}\big[y_s\mathbf{f}_{J_{1,2}}((C_3\setminus y_s)\cup x_s;\sigma_3\setminus x_s) - x_s\mathbf{f}_{J_{1,2}}(C_3;\sigma_3\setminus x_s)\big] \\ &= -\sum_{x_s\in\sigma_3}(-1)^{\alpha(\sigma\setminus x_n;x_s)}\big[y_s\mathbf{f}((C\setminus y_s)\cup x_s;\sigma\setminus x_s) - x_s\mathbf{f}(C;\sigma\setminus x_s)\big] \\ &= \sum_{x_s\in\sigma\setminus x_n}(-1)^{\alpha(\sigma;x_s)}\big[y_s\mathbf{f}((C\setminus y_s)\cup x_s;\sigma\setminus x_s) - x_s\mathbf{f}(C;\sigma\setminus x_s)\big], \end{aligned}$$

其中最后一个等式由以下事实推出：对于所有 $x_s\in\sigma\setminus x_n$， $\alpha(\sigma;x_s) = \alpha(\sigma\setminus x_n;x_s) + |\{x_n\}|$。

其中a s，对于项 $\psi_{i-1}(\mathbf{b})$，根据比较映射的定义，我们有

$$\begin{aligned} \psi_{i-1}(\mathbf{b}) &= \mathbf{z}_{N[x_n]}\cdot\mathbf{f}_{J_1}(C_3\cup\{x_{j_1},\dots,x_{j_p}\};\sigma_3) - \mathbf{z}_{N[y_n]}\cdot\mathbf{f}_{J_2}(C_3\cup\{x_{i_1},\dots,x_{i_t}\};\sigma_3) \\ &= y_n\mathbf{f}((C\setminus y_n)\cup x_n;\sigma\setminus x_n) - x_n\mathbf{f}(C;\sigma\setminus x_n) \\ &= (-1)^{\alpha(\sigma;x_n)}\big[y_n\mathbf{f}((C\setminus y_n)\cup x_n;\sigma\setminus x_n) - x_n\mathbf{f}(C;\sigma\setminus x_n)\big], \end{aligned}$$

其中，最后一个等式成立是因为 $\alpha(\sigma;x_n) = |\varnothing| = 0$。因此，我们看到

$$d_i^J(\mathbf{f}(C;\sigma)) = \sum_{x_s\in\sigma}(-1)^{\alpha(\sigma;x_s)}\big[y_s\mathbf{f}((C\setminus y_s)\cup x_s;\sigma\setminus x_s) - x_s\mathbf{f}(C;\sigma\setminus x_s)\big],$$

如所需。归纳法完成，结论得证。 □

推论 3.6。设 G 为一个 Cohen–Macaulay 极大覆盖图。那么

$$\beta_i(I(G)^\vee) \;=\; \sum_{C\in\mathcal{C}(G)} \binom{|\mathcal{C}(G;C)|}{i}, \qquad i\geq 0,$$

$$\operatorname{pd}(I(G)^\vee) \;=\; \max\big\{\big|\mathcal{C}(G;C)\big| \;:\; C\in\mathcal{C}(G)\big\}.$$

特别地， $I(G)^\vee$ 的分次贝蒂数不依赖于底域 K的特征。

设 G为一个图，且 $z_iz_j, z_kz_\ell \in E(G)$ 是一对边。若 z_iz_j和 z_kz_ℓ是 3-不相交的，则称它们为 3-不相交，即 G 在顶点集 $\{z_i, z_j, z_k, z_\ell\}$上所诱导的子图由两条不相交的边组成。在 G中，两两 3-不相交的边集的最大基数记为 $a(G)$ [29]。

下面的结果成立。

推论 3.7。设 G 为一个 Cohen–Macaulay 极大覆盖图。则

$$a(G) = \operatorname{reg}(S/I(G)) = \max\big\{\big|\mathcal{C}(G;C)\big| \;:\; C\in\mathcal{C}(G)\big\} = \operatorname{pd}(I(G)^\vee).$$

证明。由 [16, 命题 8.1.10], $\operatorname{pd}(I(G)^\vee) = \operatorname{reg}(S/I(G))$。因此，由 [29, 引理 3.4]和推论 3.6 可得该断言。□

注 3.8。等式 $a(G) = \operatorname{reg}(S/I(G))$ 最早已在 [29,引理 3.4] 中证明。这里我们通过 Betti 分裂给出一个新证明。由 [24, 引理 2.2]，总有 $\operatorname{reg}(S/I(G)) \geq a(G)$。因此，只需证明 $\operatorname{pd}(I(G)^\vee) \leq a(G)$。假设设定 3.1。

将 [12, 推论 2.2] 应用于命题 2.3 中给出的 Betti 分裂，并结合引理 3.3，我们有

$$\operatorname{pd}(I(G)^\vee) \;=\; \max\big\{\operatorname{pd}(I(G_1)^\vee),\ \operatorname{pd}(I(G_2)^\vee),\ \operatorname{pd}(I(G_3)^\vee)+1\big\}.$$

对 $n = |V(G)|/2$ 作归纳，我们可以假设当 $i = 1, 2, 3$ 时，$\operatorname{pd}(I(G_i)^\vee) \leq a(G_i)$。注意到，对 $i = 1, 2, 3$，显然有 $a(G_i) \leq a(G)$。因此，只需证明不等式 $a(G_3)+1 \leq a(G)$。设 D 是 G_3 中一组两两 3-不相交边，且满足 $|D| = a(G_3)$。则 $D\cup x_ny_n$ 仍然是 G 中一组两两 3-不相交边。事实上，若 $e = z_kz_\ell \in D$，则 $\{z_k, z_\ell\} \subseteq V(G_3) = V(G) \setminus \{x_i, y_i: x_i \in N[x_n]\cup N[y_n]\}$。因此，不可能存在任何边将 z_k 或 z_ℓ 与 x_n 或 y_n 中的任一个相连。这表明，以 $\{z_k, z_\ell, x_n, y_n\}$ 为顶点集的诱导子图仅有两条边。因此$a(G) \geq |D|+1 = a(G_3)+1$。

设 M 是一个维数为 d 的有限生成 S-模，并设 P_M 是 M [4, 16] 的希尔伯特多项式。那么，对于所有 i，有 $P_M(t) = \sum_{i=0}^{d-1}(-1)^{d-1-i}e_{d-1-i}\binom{t+i}{i}$, $e_{d-1-i}\in\mathbb{Q}$。我们将 M 的重数定义为

$$e(M) \;=\; \begin{cases} e_0 & \text{if } d>0,\\ \operatorname{length}(M) & \text{if } d=0. \end{cases}$$

现在，我们验证 $I(G)^\vee$ 具有交错和性质，并由推论 3.6 得到 $S/I(G)^\vee$ 的重数公式，即 $e(S/I(G)^\vee)$。

我们接下来引用 [35, 定义 4.1]。

定义 3.9。设 I 是 S 中的一个单项式理想，满足 $G(I) = \{u_1, \ldots, u_m\}$，并令 $d = \min\{\deg(u_i)\colon\ i = 1, \ldots, m\}$。如果 I 具有交错和性质，则称其满足

$$\sum_{i\geq 1}(-1)^i \beta_{i,i+j}(S/I) = \begin{cases} -1, & \text{for } j = d, \\ 0, & \text{for } j > d. \end{cases}$$

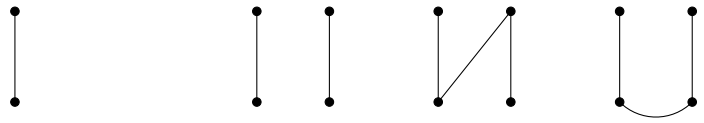
命题 3.10. 设 G 是一个 Cohen–Macaulay 极大覆盖图。那么

(a) $\sum_{i\geq 1}(-1)^i \beta_i(S/I(G)^\vee) = -1$.

(b) $e(S/I(G)^\vee) = |E(G)| = \frac{1}{2}\sum_{C\in\mathcal{C}(G)} \sum_{i=0}^{|\mathcal{C}(G;C)|}(-1)^{i+1}\binom{|\mathcal{C}(G;C)|}{i}(n+i)^2$.

证明。设 $|V(G)| = 2n$。

(a). 我们对 $n \geq 1$ 使用归纳法。对于 $n = 1,2$，唯一的 Cohen–Macaulay 极大覆盖图如下。



对于这些图中的每一个，(a) 都成立。设 $n > 2$。沿用设定 3.1 中的记号，由命题 2.3 、引理 3.3 以及对图 G_1, G_2, G_3 的归纳假设，我们有

$$\sum_{i\geq 1}(-1)^i \beta_i(S/I(G)^\vee) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \left[\beta_i(S/I(G_1)^\vee) + \beta_i(S/I(G_2)^\vee) + \beta_{i-1}(S/I(G_3)^\vee)\right]$$

$$= \sum_{i\geq 0}(-1)^i \beta_i(S/I(G_1)^\vee) + \sum_{i\geq 0}(-1)^i \beta_i(S/I(G_2)^\vee) - \sum_{i\geq 0}(-1)^i \beta_i(S/I(G_3)^\vee) =$$

$$= -1 - 1 + 1 = -1.$$

(b). 由于 $I(G)^\vee = \bigcap_{z_i z_j \in E(G)}(z_i, z_j)$，我们看到 $I(G)^\vee$ 的高度为二；此外，根据推论 6.2，$e(S/I(G)^\vee) = |E(G)|$ [16, 3]。第一个等式成立。

另一方面，根据 Peskine 和 Szpiro 的一个公式 [31]（另见 [16, 推论 6.1.7]），由于 $\beta_i(S/I(G)^\vee) = \beta_{i-1}(I(G)^\vee)$，可得

$$e(S/I(G)^\vee) = \frac{(-1)^h}{h!}\sum_{i=1}^{\mathrm{pd}(S/I(G)^\vee)}(-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{\beta_i(S/I(G)^\vee)} a_{ij}^h =$$

$$= \frac{(-1)^h}{h!}\sum_{i=0}^{\mathrm{pd}(I(G)^\vee)}(-1)^{i+1}\sum_{j=1}^{\beta_i(I(G)^\vee)} a_{ij}^h,$$

其中 $h = \mathrm{height}(I(G)^\vee)$ 和 a_{ij} 是 $S/I(G)^\vee$ 的极小自由分解 $\mathbb{F}$ 中第 i 个自由模的移位，也就是说，$\bigoplus^{\beta_i(S/I(G)^\vee)}{}_{j=1} S(-a_{ij})$。由于 $I(G)^\vee$ 具有 n–线性

分解且 height$(I(G)^\vee) = h = 2$，由推论 3.6 可得 t

$$e(S/I(G)^\vee) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i\geq 0}(-1)^{i+1}\sum_{C\in\mathcal{C}(G)}\binom{|\mathcal{C}(G;C)|}{i}(n+i)^2 \;=$$

$$=\; \frac{1}{2}\sum_{C\in\mathcal{C}(G)}\sum_{i=0}^{|\mathcal{C}(G;C)|}(-1)^{i+1}\binom{|\mathcal{C}(G;C)|}{i}(n+i)^2. \qquad \square$$

例 3.11. 考虑例 2.4 中具有 12 个顶点的 Cohen–Macaulay 良覆盖图 G。令 $C_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$、$C_2 = \{y_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$、$C_3 = \{x_1, y_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$、$C_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_5, x_6\}$、$C_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_6\}$、$C_6 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_5, y_6\}$、$C_7 = \{x_1, x_2, x_3, y_4, y_5, y_6\}$ 和 $C_8 = \{x_1, x_2, y_3, y_4, y_5, y_6\}$。那么

$\mathcal{C}(G)$	$\mathcal{C}(G;C)\|$	
C_1	$\varnothing$	0
C_2	$\{x_1\}$	1
C_3	$\{x_2\}$	1
C_4	$\{x_5\}$	1
C_5	$\{x_6\}$	1
C_6	$\{x_5, x_6\}$	2
C_7	$\{x_4\}$	1
C_8	$\{x_3\}$	1

利用 [15], 可以验证， $\beta_1(S/I(G)^\vee) = 8$, $\beta_2(S/I(G)^\vee) = 8$, $\beta_3(S/I(G)^\vee) =$1。因此，$\sum_{i\geq 1}(-1)^i\beta_i(S/I(G)^\vee) = -1$，且交错和性质成立。此外， $a(G) =$ reg$(S/I(G)) = 2 =$ max$\{|\mathcal{C}(G;\ C)|:\ C \in \mathcal{C}(G)\} =$ pd$(I(G)^\vee)$。

最后，我们来计算 $S/I(G)^\vee$的重数。首先，有 $e(S/I(G)^\vee) =|E(G)| = 20$。另一方面，根据前面的表格，可得

$$\frac{1}{2}\sum_{C\in\mathcal{C}(G)}\sum_{i=0}^{|\mathcal{C}(G;C)|}(-1)^{i+1}\binom{|\mathcal{C}(G;C)|}{i}(6+i)^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\binom{|\mathcal{C}(G;C_1)|}{0}6^2 + \frac{1}{2}\sum_{C\in\mathcal{C}(G)\setminus(C_1\cup C_6)}\sum_{i=0}^{|\mathcal{C}(G;C)|}(-1)^{i+1}\binom{|\mathcal{C}(G;C)|}{i}(6+i)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{|\mathcal{C}(G;C_6)|}(-1)^{i+1}\binom{|\mathcal{C}(G;C_6)|}{i}(6+i)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\binom{0}{0}6^2 + 6\sum_{i=0}^{1}(-1)^{i+1}\binom{1}{i}(6+i)^2 + \sum_{i=0}^{2}(-1)^{i+1}\binom{2}{i}(6+i)^2\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}(-36+78-2) = 20$$

且命题 3.10 成立。

4. Homological shifts of vertex cover ideals of very well–covered graphs and applications to Hibi ideals

在本节中，我们研究 Cohen–Macaulay 非常良覆盖图的顶点覆盖理想的幂的同调移位理想。以下是我们的主要结果。

下文将采用设定 3.1 中的记号。

定理 4.1。设 G 是一个具有 $2n$ 个顶点的 Cohen–Macaulay 极大覆盖图。那么，对于所有 $k \geq 0$，$\mathrm{HS}_k(I(G)^\vee)$ 关于由 $x_n > y_n > x_{n-1} > y_{n-1} > \cdots > x_1 > y_1$ 诱导的字典序 $>_{\mathrm{lex}}$ 具有线性商。

证明。我们对 $n = |V(G)|/2 \geq 1$ 采用强归纳法。对于 $n = 1$，$I(G) = (x_1y_1)$ 且 $J = I(G)^\vee = (x_1, y_1)$。因此，$\mathrm{HS}_0(J) = J$，$\mathrm{HS}_1(J) = (x_1y_1)$ 关于 $>_{\mathrm{lex}}$ 具有线性商。

设 $n > 1$。根据命题 2.3,

$$I(G)^\vee = x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_p}\cdot x_n I(G_2)^\vee + x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_t}\cdot y_n I(G_1)^\vee \tag{6}$$

是一个 Betti 分裂。

令 $f = x_{j_1}\cdots x_{j_p}\cdot x_n$ 和 $g = x_{i_1}\cdots x_{i_t}\cdot y_n$。由于对于 S 中的所有单项式理想 I 以及所有非零单项式 $w \in S$，$\mathrm{HS}_k(wI) = w\cdot \mathrm{HS}_k(I)$，由（6）、命题 1.7 和引理 3.3，得到

$$\mathrm{HS}_k(I(G)^\vee) = fg\cdot \mathrm{HS}_{k-1}(I(G_3)^\vee) + f\cdot \mathrm{HS}_k(I(G_2)^\vee) + g\cdot \mathrm{HS}_k(I(G_1)^\vee).$$

注意，由于 $|V(G_j)| < |V(G)|$ $(j = 1, 2, 3)$，根据归纳假设，$\mathrm{HS}_k(I(G_j)^\vee)$ 关于 $>_{\mathrm{lex}}$具有线性商。令

$$G(\mathrm{HS}_{k-1}(I(G_3)^\vee)) = \{w_1 >_{\mathrm{lex}} w_2 >_{\mathrm{lex}} \cdots >_{\mathrm{lex}} w_q\}, \tag{7}$$
$$G(\mathrm{HS}_k(I(G_2)^\vee)) = \{v_1 >_{\mathrm{lex}} v_2 >_{\mathrm{lex}} \cdots >_{\mathrm{lex}} v_r\}, \tag{8}$$
$$G(\mathrm{HS}_k(I(G_1)^\vee)) = \{u_1 >_{\mathrm{lex}} u_2 >_{\mathrm{lex}} \cdots >_{\mathrm{lex}} u_s\}, \tag{9}$$

因此 $G(\mathrm{HS}_k(I(G)^\vee))$ 按如下方式排序：

$$fgw_1 >_{\mathrm{lex}} \cdots >_{\mathrm{lex}} fgw_q >_{\mathrm{lex}} fv_1 >_{\mathrm{lex}} \cdots >_{\mathrm{lex}} fv_r >_{\mathrm{lex}} gu_1 >_{\mathrm{lex}} \cdots >_{\mathrm{lex}} gu_s.$$

我们证明这样的序是 $\mathrm{HS}_k(I(G)^\vee)$ 的一个容许序。为此，我们需要证明下面三个冒号理想

$$(fgw_1, \ldots, fgw_{\ell-1}) : fgw_\ell, \quad \ell \in \{2, \ldots, q\}, \tag{10}$$
$$\big(fg\mathrm{HS}_{k-1}(I(G_3)^\vee), fv_1, \ldots, fv_{\ell-1}\big) : fv_\ell, \quad \ell \in \{1, \ldots, r\}, \tag{11}$$
$$\big(fg\mathrm{HS}_{k-1}(I(G_3)^\vee), f\mathrm{HS}_k(I(G_2)^\vee), gu_1, \ldots, gu_{\ell-1}\big) : gu_\ell, \quad \ell \in \{1, \ldots, s\}, \tag{12}$$

均由变量生成。

First Colon Ideal. 我们来考虑（10）中的冒号理想。由于,

$$(fgw_1, \ldots, fgw_{\ell-1}) : fgw_\ell = (w_1, \ldots, w_{\ell-1}) : w_\ell,$$

该断言可由以下事实得出：$\mathrm{HS}_{k-1}(I(G_3)^\vee)$ 关于（7）中的顺序具有线性商。

Second Colon Ideal. 考虑（11）中的冒号理想。令 $P = \big(fg$ $\mathrm{HS}_{k-1}(I(G_3)^\vee)$ $fv_1,\ \ldots\ldots,\ fv_{\ell-1}\big) : fv_\ell$。可以观察到 t $\qquad\qquad$ hat

$$P = (fg\mathrm{HS}_{k-1}(I(G_3)^\vee)) : fv_\ell + (v_1, \ldots, v_{\ell-1}) : v_\ell,$$

其中 $(v_1, \ldots, v_{\ell-1}) : v_\ell$ 由变量生成。事实上，$\mathrm{HS}_k(I(G_2)^\vee)$ 关于 (8) 中的顺序具有线性商。

因此，若我们证明 $(fg\mathrm{HS}_{k-1}(I(G_3)^\vee)) : fv_\ell$ 的每个生成元都可被 P中的某个变量整除，就可得出 P 由变量生成，正如所需。冒号理想 $(fg\mathrm{HS}_{k-1}(I(G_3)^\vee)) : fv_\ell$由以下单项式生成

$$\frac{\mathrm{lcm}(fgw_j, fv_\ell)}{fv_\ell}, \quad j = 1, \ldots, q.$$

固定 $j \in \{1, \ldots, q\}$。根据构造 3.4，我们有

$fgw_j = w\mathbf{x}_\sigma$, $w \in G(I(G)^\vee)$ $y_n \in \mathrm{supp}(w)$ $\sigma \subseteq \mathcal{C}(G; \mathrm{supp}(w))$ $x_n \in \sigma$, $|\sigma| = k$
$\mathbf{x}fv_\ell = v_\tau($ $v \in G(I)G)^\vee\mathrm{supp}($ $x_n \in)v($ $\tau \subseteq \mathcal{C}; \mathrm{supp}(G))v$, $x_n \notin \tau$

令 $h = \mathrm{lcm}(w\mathbf{x}_\sigma, v\mathbf{x}_\tau)/(v\mathbf{x}_\tau)$。如果 $\deg(h) = 1$, h 是一个变量，则无需证明。假设 $\deg(h) > 1$。考虑如下整数

$$i = \min\Big\{i : z_i \text{ divides } h = \frac{\mathrm{lcm}(w\mathbf{x}_\sigma, v\mathbf{x}_\tau)}{v\mathbf{x}_\tau},\ z_i \in \{x_i, y_i\}\Big\}. \tag{13}$$

由于 $\deg(h) > 1$ 且 y_n 整除 h，我们有 $i < n$。由引理 2.2 可知，y_i 至少整除单项式 $w\mathbf{x}_\sigma$、$v\mathbf{x}_\tau$ 中的一个。事实上，如果 y_i 不整除这些单项式中的任何一个，那么 x_i 将整除这两个单项式，从而 $z_i \in \{x_i, y_i\}$ 不整除 h。这与我们的假设矛盾。

现在，令 $N[y_i] = \{x_{k_1}, \ldots, x_{k_b}, x_i, y_i\}$。我们断言，$x_{k_1} \cdots x_{k_b}$整除两个单项式 w、v。事实上，x_i 至少整除单项式 w、v中的一个。例如，设 x_i 整除 $w\mathbf{x}_\sigma$，那么要么 x_i 整除 w，要么 $x_i(w/y_i) \in G(I(G)^\vee)$。在这两种情况下，$x_{k_1} \cdots x_{k_b}$都必须整除 w，因为 w或 $x_i(w/y_i)$ 是极小顶点覆盖。如果 x_i整除 $v\mathbf{x}_\tau$，同样的论证也成立。因此，$x_{k_1} \cdots x_{k_b}$必须整除 w或 v。不妨设 $x_{k_1} \cdots x_{k_b}$整除 w。于是，根据构造 3.4，变量 y_{k_1}、. . .、 y_{k_b} 中没有一个整除 w。由刻画 1.12(iii)， $k_1 < \cdots < k_b < i$。因此，按照 i的含义，对于所有 $d = k_1$、. . .、 k_b， $z_d \in \{x_d, y_d\}$都不整除 h。所以，我们看到 $x_{k_1} \cdots x_{k_b}$整除两个单项式 w、 v。现在分两种情况讨论。

Case 1. 假设 x_iy_i 整除单项式 $w\mathbf{x}_\sigma$ 和 $v\mathbf{x}_\tau$中的一个，而y_i 整除另一个。举例来说，假设 x_iy_i 整除 $w\mathbf{x}_\sigma$，而 y_i整除 $v\mathbf{x}_\tau$。那么， $x_i(v/y_i)\mathbf{x}_\tau >_{\mathrm{lex}} v\mathbf{x}_\tau$。此外， $x_i(v/y_i) \in G(I(G)^\vee)$，因为$x_{k_1} \cdots x_{k_b}$整除 v，所以 $\mathrm{supp}(x_i(v/y_i))$ 仍是 G 的一个极小顶点覆盖。

我们断言 $x_i(v/y_i)\mathbf{x}_\tau \in \mathrm{HS}_k(I(G)^\vee)$。事实上，对所有 $c \in \tau$, $N[y_c] \setminus \{x_c, y_c\} \subseteq \mathrm{supp}(v)$ 均成立。由于 $N[y_c] \setminus \{x_c, y_c\}$ 是 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 的子集，且 $\mathrm{supp}(x_i(v/y_i)) = (\mathrm{supp}(v) \setminus y_i) \cup x_i$，我们看到 $N[y_c] \setminus \{x_c, y_c\}$ 又是 $\mathrm{supp}(x_i(v/y_i))$ 的子集。

因此，对所有 $c \in \tau$, $x_c x_i(v/y_i)/y_c \in G(I(G)^\vee)$，即 $\tau \subseteq \mathcal{C}(G; \operatorname{supp}(x_i(v/y_i)))$。最后，$x_i(v/y_i)\mathbf{x}_\tau \in \mathrm{HS}_k(I(G)^\vee)$。此外，

$$\frac{\operatorname{lcm}(x_i(v/y_i)\mathbf{x}_\tau, v\mathbf{x}_\tau)}{v\mathbf{x}_\tau} = x_i \quad \text{and} \quad x_i \quad \text{divides} \quad h.$$

由此可知，h 被属于 P 的变量 x_i 整除，得证。

否则，设 $x_i y_i$ 整除 $v\mathbf{x}_\tau$，且 y_i 整除 $w\mathbf{x}_\sigma$。则，$x_i(w/y_i)\mathbf{x}_\sigma >_{\mathrm{lex}} w\mathbf{x}_\sigma$，并且如前所述，$x_i(w/y_i)\mathbf{x}_\sigma \in G(\mathrm{HS}_k(I(G)^\vee))$。此外，

$$h' = \frac{\operatorname{lcm}(x_i(w/y_i)\mathbf{x}_\sigma, v\mathbf{x}_\tau)}{v\mathbf{x}_\tau} = h/x_i \quad \text{divides} \quad h$$

因此，$h' \in P$，且 $\deg(h') < \deg(h)$。于是，我们可以考虑由 h' 产生的整数 i'，按照公式 (13) 迭代先前的推理。在这种情况下，$i' > i$。

Case 2. 设 x_i 整除单项式 $w\mathbf{x}_\sigma$、$v\mathbf{x}_\tau$ 中的一个，而 y_i 整除另一个。设 x_i 整除 $w\mathbf{x}_\sigma$，且 y_i 整除 $v\mathbf{x}_\tau$。则 $x_i(v/y_i)\mathbf{x}_\tau >_{\mathrm{lex}} v\mathbf{x}_\tau$，并按照之前的论证可得 $x_i(v/y_i)\mathbf{x}_\tau \in \mathrm{HS}_k(I(G)^\vee)$。此外，

$$\frac{\operatorname{lcm}(x_i(v/y_i)\mathbf{x}_\tau, v\mathbf{x}_\tau)}{v\mathbf{x}_\tau} = x_i \quad \text{and} \quad x_i \quad \text{divides} \quad h.$$

因此，h 被属于 P 的变量 x_i 整除，得证。

否则，设 x_i 整除 $v\mathbf{x}_\tau$，且 y_i 整除 $w\mathbf{x}_\sigma$。由此可得 $x_i(w/y_i)\mathbf{x}_\sigma \in G(\mathrm{HS}_k(I(G)^\vee))$，以及 $x_i(w/y_i)\mathbf{x}_\sigma >_{\mathrm{lex}} w\mathbf{x}_\sigma$。此外，

$$h' = \frac{\operatorname{lcm}(x_i(w/y_i)\mathbf{x}_\sigma, v\mathbf{x}_\tau)}{v\mathbf{x}_\tau} = h/x_i \quad \text{divides} \quad h.$$

因此 $h' \in P$ 且 $\deg(h') < \deg(h)$。在这种情况下，我们考虑由 h' 按照（13）中所述产生的整数 i'，并重复上述推理，这次 $i' > i$。显然，重复上述推理可得 P 由变量生成。

Third Colon Ideal. 令 $P = \big(fg\mathrm{HS}_{k-1}(I(G_3)^\vee)\ f\mathrm{HS}_k(I(G_2)^\vee)\ gu_1, \ldots, gu_{\ell-1}\big) : gu_\ell$。可以观察到，$P$ 由以下单项式生成

$$\frac{\operatorname{lcm}(fgw_i, gu_\ell)}{gu_\ell}, \quad \frac{\operatorname{lcm}(fv_j, gu_\ell)}{gu_\ell}, \quad \frac{\operatorname{lcm}(gu_h, gu_\ell)}{gu_\ell},$$

其中 $i \in [q]$、$j \in [r]$ 和 $h \in [\ell - 1]$。要证明 P 由变量生成，只需证明上述任一单项式都被某个变量 $z_b \in P$ 整除。注意，$\mathrm{HS}_k(I(G_1)^\vee)$ 关于（9）中的次序具有线性商，因此冒号理想 $(gu_1, \ldots, gu_{\ell-1}) : gu_\ell = (u_1, \ldots, u_{\ell-1}) : u_\ell$ 由变量生成。因此，$\operatorname{lcm}(gu_h, gu_\ell)/(gu_\ell) \in (u_1, \ldots, u_{\ell-1}) : u_\ell$ 被 P 中的某个变量整除。对于另外两类单项式生成元，只需重复 Second Colon Ideal 情形中的相同论证即可。□

作为直接推论，我们得到如下分类。

定理 4.2. 设 G 是一个有 $2n$ 个顶点的非常良覆盖图。那么，以下条件等价：

(i) G 是 Cohen–Macaulay。(ii) $I(G)^\vee$ 具有同调线性商。(iii) $I(G)^\vee$ 具有同调线性分解。

设 G 是一个顶点集为 $V(G) = X = \{x_1, \ldots, x_n\}$的有限简单图。$G$ 的胡须图 G^* 是一个顶点集为 $V(G^*) = \{x_1, \ldots, x_n\} \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$ 、边集为 $E(G^*) = E(G) \cup \{x_i y_i : i = 1, \ldots, n\}$的图。换言之，$G$ 的胡须图是通过给每个顶点 x_i 添加一根胡须得到的，也就是说，对于每个顶点 $x_i \in V(G)$，我们添加一个新顶点 y_i，并添加一条连接这两个顶点的边 $x_i y_i$。

推论 4.3. 设 G 是一个具有 n 个顶点的任意简单图。那么，G 的胡须图 G^* 的顶点覆盖理想具有同调线性商。

证明。容易看出，G^* 满足刻画 1.12 的条件 (i)–(v)。因此，G^* 是一个 Cohen–Macaulay 极大覆盖图，结论由前一个定理得出。□

我们的实验和上述结果提出了如下猜想。

猜想 4.4。设 G 是一个具有 2n 个顶点的 Cohen–Macaulay 极大覆盖图。则对于所有 $k \geq 0$ 和所有 $\ell \geq 1$，$\mathrm{HS}_k((I(G)^\vee)^\ell)$ 关于由 $x_n > y_n > x_{n-1} > y_{n-1} > \cdots > x_1 > y_1$ 诱导的字典序具有线性商。

注意到，我们的猜想还将蕴含 $I(G)^\vee$ 具有线性幂 s.

目前看来，要在完全一般的情形下证明我们的猜想过于困难。因此，我们将注意力集中于 Cohen–Macaulay 二分图这一子类。

为此，我们需要回顾 Hibi 理想是什么 [22]。

设 $(P, \succeq)$ 是一个有限偏序集（简称偏序集），并令 $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$。P 的偏序理想是 P 的一个子集 $\mathcal{I}$，满足：若 $p_i \in P$、$p_j \in \mathcal{I}$ 且 $p_i \preceq p_j$，则 $p_i \in \mathcal{I}$ [17]。对于 P 的任意偏序理想 $\mathcal{I}$，我们在多项式环 $S = K[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ 中将其与无平方因子单项式 $u_{\mathcal{I}} = (\prod_{p_i \in \mathcal{I}} x_i)(\prod_{p_i \in P \setminus \mathcal{I}} y_i)$ 相关联。于是，与 P 相关联的 Hibi 理想是 S 的单项式理想，定义如下：

$$H_P = \big(u_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \text{ is a poset ideal of } P\big).$$

由定理 4.1 可立即得到以下结果。

推论 4.5. 设 $(P, \succeq)$ 是一个有限偏序集。则 H_P 具有同调线性商。

证明。根据 [16, 引理 9.1，$H_P^\vee$ 的亚历山大对偶可视为 Cohen–Macaulay 二分图 G_P 的边理想。特别地，G_P 是一个 Cohen–Macaulay 极大覆盖图。因此，将 H_P 视为 G_P 的覆盖理想，结论由定理 4.1 立即得出。□

现在，我们转而讨论 Hibi 理想的幂。我们用 $\mathcal{J}(P)$ 表示由 $(P, \succeq)$ 的所有偏序理想组成、并按包含关系排序的分配格。

从现在起，虽然这种说法并不严谨，但为简化记号，我们将每个 $p_i \in P$ 认作变量 x_i, $i \in [n]$。

构造 4.6. 设 $(P, \succeq)$ 是一个有限偏序集。对于任意整数 $\ell \geq 1$，我们构造一个新的偏序集 $(P(\ell)\ \succeq_\ell)$，定义如下：

- $P(\ell) = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,\ell} : i = 1, \ldots, n\}$,
- and $x_{i,r} \succeq_\ell x_{j,s}$ if and only if $x_i \succeq x_j$ and $r \geq s$.

根据 [22, pag 99]，我们有以下有用性质。

引理 4.7. 设 $(P, \succeq)$ 是一个有限偏序集。H_P^ℓ 的每个极小单项式生成元都具有如下形式的唯一表示

$$u_{\mathcal{I}_1} u_{\mathcal{I}_2} \cdots u_{\mathcal{I}_\ell}, \quad with \quad \mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{I}_\ell, \quad \mathcal{I}_i \in \mathcal{J}(P), \quad i = 1, \ldots, \ell.$$

现在，我们需要使用第 1.2 小节中讨论的极化技术。设 $(P, \succeq)$ 是一个有限偏序集，且 $\ell \geq 1$ 是一个正整数。注意，X 和 $\varnothing$ 都是 P 的偏序集理想，因此 $u_X = x_1 x_2 \cdots x_n$ 和 $u_\varnothing = y_1 y_2 \cdots y_n$ 都属于 H_P。因此，我们有 $u_X^\ell = x_1^\ell x_2^\ell \cdots x_n^\ell$ 和 $u_\varnothing^\ell = y_1^\ell y_2^\ell \cdots y_n^\ell$ 属于 H_P^ℓ。所以，H_P^ℓ 所在的多项式环为

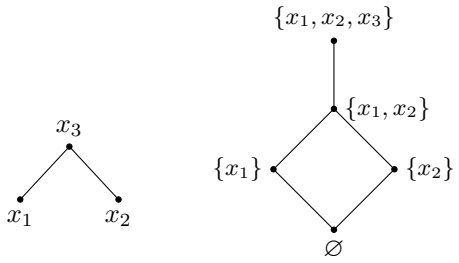
$$R = K[x_{i,j}, y_{i,j} : i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, \ell].$$

为了保留 Hibi 理想的结构，我们对极化作了一个无害的修改。更确切地说，设 $1 \leq k \leq \ell$ 和 $i \in [n]$，则令

$$\begin{aligned} (x_i^k)^\wp &= x_{i,1} x_{i,2} \cdots x_{i,\ell}, \\ (y_i^k)^\wp &= y_{i,\ell} y_{i,\ell-1} \cdots y_{i,\ell+1-k}, \end{aligned}$$

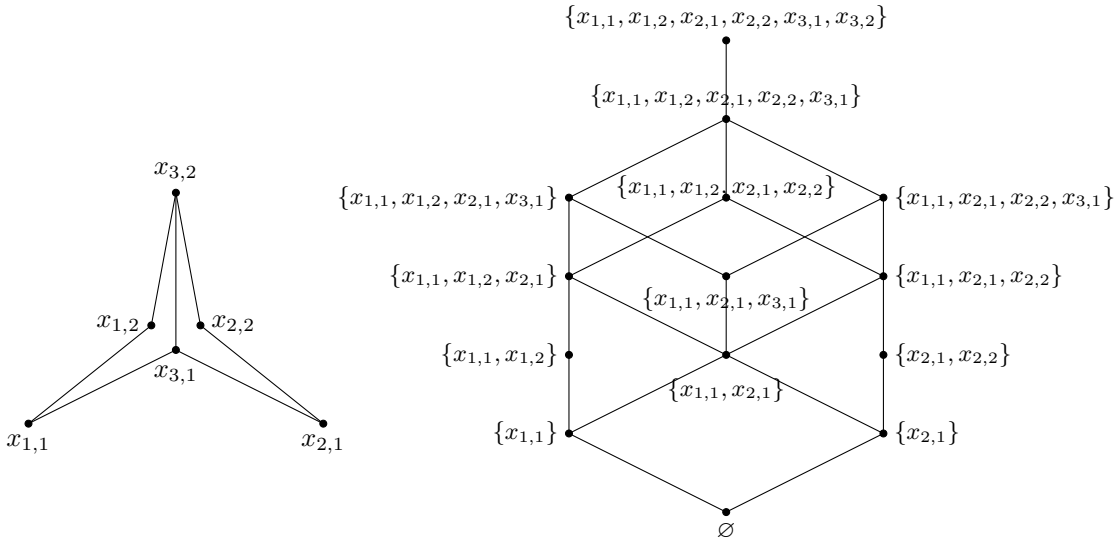
并以显而易见的方式扩展任意单项式的极化。换言之，相对于通常的极化，我们只是将变量 $y_{i,\ j} \mapsto y_{i,\ \ell+1-j}$ 重新标记为 $i = 1$、.....、n 以及 $j = 1$、.....、ℓ。

例 4.8。考虑偏序集 $(P, \succeq)$，其中 $P = \{x_1, x_2, x_3\}$、$x_3 \succ x_1$ 和 $x_3 \succ x_2$。偏序集 $(P, \succeq)$ 和分配格 $\mathcal{J}(P)$ 如下图所示：



$(P, \succeq)$ $\mathcal{J}(P)$

偏序集 $(P(2)\ \succeq_2)$ 和分配格 $\mathcal{J}(P(2))$ 如下：



$(P(2), \succeq_2)$ $\mathcal{J}(P(2))$

我们有

$$H_P = (x_1x_2x_3,\ x_1x_2y_3,\ x_1y_2y_3,\ y_1x_2y_3,\ y_1y_2y_3),$$

$$\begin{aligned} H_{P(2)} = \big(&x_{1,1}x_{1,2}x_{2,1}x_{2,2}x_{3,1}x_{3,2},\ x_{1,1}x_{1,2}x_{2,1}x_{2,2}x_{3,1}y_{3,2},\ x_{1,1}x_{1,2}x_{2,1}x_{2,2}y_{3,1}y_{3,2},\\ &x_{1,1}x_{1,2}x_{2,1}y_{2,2}x_{3,1}y_{3,2},\ x_{1,1}y_{1,2}x_{2,1}y_{2,2}x_{3,1}y_{3,2},\ x_{1,1}y_{1,2}x_{2,1}x_{2,2}x_{3,1}y_{3,2},\\ &x_{1,1}x_{1,2}x_{2,1}y_{2,2}y_{3,1}y_{3,2},\ x_{1,1}y_{1,2}x_{2,1}y_{2,2}y_{3,1}y_{3,2},\ x_{1,1}y_{1,2}x_{2,1}x_{2,2}y_{3,1}y_{3,2},\\ &x_{1,1}x_{1,2}y_{2,1}y_{2,2}y_{3,1}y_{3,2},\ y_{1,1}y_{1,2}x_{2,1}x_{2,2}y_{3,1}y_{3,2},\ x_{1,1}y_{1,2}y_{2,1}y_{2,2}y_{3,1}y_{3,2},\\ &y_{1,1}y_{1,2}x_{2,1}y_{2,2}y_{3,1}y_{3,2},\ y_{1,1}y_{1,2}y_{2,1}y_{2,2}y_{3,1}y_{3,2}\big). \end{aligned}$$

容易验证，关于我们的修正极化，$(H_P^2)^\wp = H_{P(2)}$。例如，考虑 $(x_1y_2y_3)(y_1x_2y_3) \in G(H_P^2)$。则

$$\big((x_1y_2y_3)(y_1x_2y_3)\big)^\wp = (x_1y_1x_2y_2y_3^2)^\wp = x_{1,\ 1}y_{1,\ 2}x_{2,\ 1}y_{2,\ 2}y_{3,\ 1}y_{3,\ 2} = u_{\mathcal{I}} \in G(H_{P(2)}),$$

其中 $\mathcal{I} = \{x_{1,1}, x_{2,1}\} \in \mathcal{J}(P(2))$。

定理 4.9。设 $(P, \succeq)$ 为一个有限偏序集。则，对任意 $\ell \geq 1$,

$$(H_P^\ell)^\wp = H_{P(\ell)}.$$

证明。根据引理 4.7， H_P^ℓ 由以下单项式极小生成

$$u_{\mathcal{I}_1}u_{\mathcal{I}_2}\cdots u_{\mathcal{I}_\ell}, \quad \text{with} \quad \mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{I}_\ell, \quad \mathcal{I}_j \in \mathcal{J}(P), \quad j = 1, \ldots, \ell,$$

而 $H_{P(\ell)} \subset K\big[x_{i,j}, y_{i,j} : i \in [n], j \in [\ell]\big]$ 由以下平方自由单项式生成

$$u_{\mathcal{I}} = \Big(\prod_{x_{i,j} \in \mathcal{I}} x_{i,j}\Big)\Big(\prod_{x_{i,j} \in P(\ell)\setminus \mathcal{I}} y_{i,j}\Big), \qquad \mathcal{I} \in \mathcal{J}(P(\ell)).$$

因此，为了得到该断言，我们必须证明，对于所有 $u_{\mathcal{I}_1}u_{\mathcal{I}_2}\cdots u_{\mathcal{I}_\ell} \in G(H_P^\ell)$，单项式 $(u_{\mathcal{I}_1}u_{\mathcal{I}_2}\cdots u_{\mathcal{I}_\ell})^\wp$ 等于 $u_{\mathcal{I}}$，其中某个偏序理想为 $\mathcal{I} \in \mathcal{J}(P(\ell))$，并且

反过来，给定任意 $u_{\mathcal{I}} \in G(H_{P(\ell)})$，满足 $\mathcal{I} \in \mathcal{J}(P(\ell))$，则存在 $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{I}_\ell, \mathcal{I}_i \in \mathcal{J}(P)$、$i = 1$、.....、$\ell$，使得 $u_{\mathcal{I}} = (u_{\mathcal{I}_1} u_{\mathcal{I}_2} \cdots u_{\mathcal{I}_\ell})^{\wp}$。

设 $u_{\mathcal{I}_1} u_{\mathcal{I}_2} \cdots u_{\mathcal{I}_\ell} \in G(H_P^\ell)$，其中 $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{I}_\ell$。令 $k_i = \big|\{r : x_i \in \mathcal{I}_r\}\big|$且 $m_i = \big|\{s : \ x_i \notin \mathcal{I}_s\}\big|$。因此，$k_i + m_i = \ell$ 且

$$(u_{\mathcal{I}_1} u_{\mathcal{I}_2} \cdots u_{\mathcal{I}_\ell})^{\wp} \ = \ \Big(\prod_{x_i \in P} \prod_{r=1}^{k_i} x_{i,r}\Big)\Big(\prod_{x_i \in P} \prod_{s=k_i+1}^{\ell} y_{i,s}\Big).$$

我们断言，$\mathcal{I} = \big\{x_{i,r} : \ r = 1$、.....、$k_i\big\}$是 $P(\ell)$ 的偏序理想。由此可得 $(u_{\mathcal{I}_1} u_{\mathcal{I}_2} \cdots u_{\mathcal{I}_\ell})^{\wp} = u_{\mathcal{I}} \in G(H_{P(\ell)})$，这正是所需的。事实上，设 $x_{i,r} \in \mathcal{I}$和$x_{j,s} \in P(\ell)$，使得 $x_{j,s} \preceq_\ell x_{i,r}$。我们必须证明 $x_{j,s} \in \mathcal{I}$。根据序关系 $\succeq_\ell$ 的定义，有 $x_j \preceq x_i$ 且 $r \geq s$。若 $j = i$，则由极化技巧也有 $x_{i,s} \in \mathcal{I}$。令 $j \neq i$。注意到 $k_j \geq k_i$。事实上，对于任意满足 $x_i \in \mathcal{I}_c$ 的 c，有 $x_j \in \mathcal{I}_c$，因为 $x_j \preceq x_i$。因此，若 $x_{i,r}$ 整除 $(u_{\mathcal{I}_1} u_{\mathcal{I}_2} \cdots u_{\mathcal{I}_\ell})^{\wp}$，则$x_{j,r}$ 整除 $(u_{\mathcal{I}_1} u_{\mathcal{I}_2} \cdots u_{\mathcal{I}_\ell})^{\wp}$。对于任意 $d \leq r$, x_j，由极化技巧，d 整除 $(u_{\mathcal{I}_1} u_{\mathcal{I}_2} \cdots u_{\mathcal{I}_\ell})^{\wp}$。由于 $s \leq r$，所以 $x_{j,s}$ 整除 $(u_{\mathcal{I}_1} u_{\mathcal{I}_2} \cdots u_{\mathcal{I}_\ell})^{\wp}$，这正是所需的。

反之，设 $\mathcal{I} \in \mathcal{J}(P(\ell))$ 是一个偏序理想，并设 $u_{\mathcal{I}} \in G(H_{P(\ell)})$。令

$$\mathcal{I}_k = \big\{x_i \ : \ x_{i,\ell+1-k} \in \mathcal{I}\big\}, \quad \text{for} \quad k = 1, \ldots, \ell.$$

我们断言，集合 $\mathcal{I}_j$ 是 P 的偏序理想，并且 $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{I}_\ell$。由此可知，$u_{\mathcal{I}} = (u_{\mathcal{I}_1} u_{\mathcal{I}_2} \cdots u_{\mathcal{I}_\ell})^{\wp} \in G((H_P^\ell)^{\wp})$，即得所需结论。

固定 $k \in [\ell]$，并令 $x_i \in \mathcal{I}_k$ 和 $x_j \preceq x_i$。我们还需证明 $x_j \in \mathcal{I}_k$。由于$x_j \preceq x_i$，根据序 $\succeq_\ell$ 的定义，有 $x_{j,\ \ell+1-k} \preceq_\ell x_{i,\ \ell+1-k}$。因此 $x_{j,\ \ell+1-k} \in \mathcal{I}$，从而 $x_j \in \mathcal{I}_k$，即得所需结论。

现在，设 $k \in [\ell]$ 满足 $k < \ell$。我们证明 $\mathcal{I}_k \subseteq \mathcal{I}_{k+1}$。因此可得 $\mathcal{I}_1 \subseteq \mathcal{I}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{I}_\ell$，如所要求。令 $x_i \in \mathcal{I}_k$，则 $x_{i,\ \ell+1-k} \in \mathcal{I}$。由于$\ell + 1 - k > \ell + 1 - (k+1)$，我们得到 $x_{i,\ \ell+1-k} \succeq_\ell x_{i,\ \ell+1-(k+1)}$，因此 $x_{i,\ \ell+1-(k+1)} \in \mathcal{I}$也成立。故 $x_i \in \mathcal{I}_{k+1}$。断言得证。□

Olteanu [30, 命题 5.3] 证明的以下关键引理，可由 Jahan [23, 引理 3.3]陈述的一个更一般的结果推出。

引理 4.10. 设 $I \subset S$ 为一个单项式理想。那么，I 具有关于 $G(I)$ 的容许序 $u_1 > u_2 > \cdots > u_m$的线性商，当且仅当 $I^{\wp}$ 具有关于 $G(I^{\wp})$ 的容许序 $u_1^{\wp} > u_2^{\wp} > \cdots > u_m^{\wp}$ 的线性商。

显然，前一个引理对于我们修改后的极化也成立。最后，我们得到以下结果，它对猜想 4.4 在二分图这一类上的情形给出了肯定的回答。

推论 4.11. 设 G 为一个含有 $2n$ 个顶点的 Cohen–Macaulay 二分图。那么，对于所有 $k \geq 0$ 和所有 $\ell \geq 1$，$\mathrm{HS}_k((I(G)^\vee)^\ell)$ 关于由 $x_n > y_n > x_{n-1} > y_{n-1} > \cdots > x_1 > y_1$诱导的字典序具有线性商。

证明。根据 [16, 定理 9.1.3],，存在一个偏序集 $(P, \succeq)$，使得 $I(G)^\vee = H_P$。令 $\ell \geq 1$。于是由定理 4.9，$(H_P^\ell)^{\wp} = H_{P(\ell)}$。由定理 4.1，对所有 $k \geq 0$，$\mathrm{HS}_k(H_{P(\ell)})$ 关于由

$$x_{n,\ell} > y_{n,\ell} > x_{n,\ell-1} > y_{n,\ell-1} > \cdots > x_{n,1} > y_{n,1} > x_{n-1,\ell} > y_{n-1,\ell} > \cdots > x_{1,1} > y_{1,1}.$$

根据引理 1.8，$\mathrm{HS}_k(H_{P(\ell)}) = \mathrm{HS}_k((H_P^\ell)^\wp) = \mathrm{HS}_k(H_P^\ell)^\wp$。最后，应用引理 4.10，可得 $\mathrm{HS}_k(H_P^\ell) = \mathrm{HS}_k((I(G)^\vee)^\ell)$ 关于由 $x_n > y_n > x_{n-1} > y_{n-1} > \cdots > x_1 > y_1$ 诱导的字典序具有线性商，证毕。□

致谢。感谢审稿人提出的宝贵建议，这些建议帮助我们提升了论文的质量。

References

[1] S. Bayati，拟阵理想的多分次移位，《数学档案》（巴塞尔）111（2018年），第3期，239–246。[2] S. Bayati、I. Jahani、N. Taghipour，Borel 理想的线性商与多分次移位，《澳大利亚数学学会通报》100（2019年），第1期，48–57。[3] D. Bolognini，通过逐分次线性理想实现 Betti 分裂，《代数杂志》455（2016年），1–13。[4] W. Bruns、J. Herzog，Cohen–Macaulay 环，剑桥大学出版社，1998年。[5] M. Crupi、G. Rinaldo、N. Terai，高度为顶点数一半的 Cohen–Macaulay 边理想，Nagoya Math. J. 201（2011年），116–130。[6] J.A. Eagon 和 V. Reiner，Stanley–Reisner 环的自由分解与 Alexander 对偶。《纯粹与应用代数杂志》130，265–275（1998年）。[7] D. Eisenbud，《交换代数：以代数几何为视角》，Springer–Verlag，1995年。[8] O. Favaron，充分覆盖图，《离散数学》42（1982年），第2–3期，177–187。[9]A. Ficarra，多拟阵理想的同调移位，arXiv 预印本，网址：https://arxiv.org/abs/2205。04163[math.AC]（2022年）。[10] A. Ficarra，HomologicalShiftsIdeals，Macaulay2 软件包（2022年）。[11] A. Ficarra、J. Herzog，Dirac 定理与多分次叙子。《地中海数学杂志》20，134（2023年）。
https://doi.org/10.1007/s00009-023-02348-8[12] C. A. Francisco、H. T. Ha、A. Van Tuyl，单项式理想的分裂，《美国数学学会会刊》137（10）（2009年），3271–3282。[13] R. Fr¨oberg，关于 Stanley–Reisner 环，代数专题，第2部分（华沙，1988年），57–70，《巴拿赫中心出版物》26，第2部分，PWN，华沙，1990年。[14] I. Gitler、C. E. Valencia，边环不变量的界，《代数通讯》33（2005年），第5期，1603–1616。[15] D. R. Grayson、M. E. Stillman，Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。网址：http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2。[16] J. Herzog、T. Hibi，单项式理想，《数学研究生教材》第260卷，Springer–Verlag，2011年。[17] J. Herzog、T. Hibi，分配格、二分图与 Alexander 对偶，《J. Algebraic Combin.》22（2005年），289–302。[18] J. Herzog、T. Hibi 和 X. Zheng，幂具有线性自由分解的单项式理想，《斯堪的纳维亚数学杂志》（2004年），23–32。[19] J. Herzog、S. Moradi、M. Rahimbeigi、G. Zhu，同调移位理想。《数学汇刊》72（2021年），157–174。[20] J. Herzog、S. Moradi、M. Rahimbeigi、G. Zhu，Borel 型理想的一些同调性质，《代数通讯》51（4）（2023年），1517–1531。[21] J. Herzog、Y. Takayama，通过映射锥构造自由分解，载于：Roos 纪念文集第2卷第2分册，《同调、同伦与应用》4（2002年），277–294。

[22] T. Hibi，分配格、仿射半群环与具有直化律的代数，载于《交换代数与组合学》（M. Nagata 和 H. Matsumura 编），Adv. Stud. Pure Math. 11，North-Holland，阿姆斯特丹，93–109（1987年）。[23] A.S. Jahan，单项式理想的素滤过与极化，《代数杂志》312（2），2007年，1011–1032页。[24] M. Katzman，图理想 Betti 数的特征无关性。《J. Combin. Theory Ser. A》113（2006年），第3期，435–454。[25] K. Kimura、N. Terai、S. Yassemi，非常良覆盖图的边理想的投射维数，Nagoya Math. J. 230（2018年），160–179。[26] K. Kimura、M. R. Pournaki、S. A. Seyed Fakhari、N. Terai、S. Yassemi，从交换代数的视角一览非常良覆盖图的大部分新旧结果，《Re. Math. Sci.》（2022年）9:29。https://doi.org/10.1007/s40687-022-00326-2[27] K. Kimura、M. R. Pournaki、N. Terai、S. Yassemi，非常良覆盖图及其边理想剩余环的局部上同调，《代数杂志》606（2022年），1–18。[28] M. Kummini，二分图边理想的正则性、深度与算术秩，《J. Algebraic Combin.》30（2009年），429–445。[29] M. Mahmoudi、A. Mousivand、M. Crupi、G. Rinaldo、N. Terai、S. Yassemi，非常良覆盖图的顶点可分解性与正则性，《纯粹与应用代数杂志》215（2011年），2473–2480。[30] A. Olteanu，可构造理想，《代数通讯》第37卷第5期（2009年），1656–1669页。[31] C. Peskine 和 L. Szpiro，叙子与重数，《巴黎科学院报告》A辑第´278卷（1974年），1421–1424。[32] E. Sbarra，具有给定希尔伯特函数的环的局部上同调上界，《代数通讯》29（2001年），第12期，5383–5409。[33] R.P. Stanley，《计数组合学》第I卷，Wadsworth & Brooks/Cole，蒙特雷，加利福尼亚州，1986年。[34] R. H. Villarreal，《单项式代数》，第二版，《数学专著与研究札记》，CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2015年。[35] X. Zheng，面理想的自由分解。《代数通讯》32（2004年），第6期，2301–2324。

Marilena Crupi, Department of mathematics and computer sciences, physics and earth sciences, University of Messina, Viale Ferdinando Stagno d'Alcontres 31, 98166 Messina, Italy
电子邮件地址：mcrupi@unime.it

Antonino Ficarra, Department of mathematics and computer sciences, physics and earth sciences, University of Messina, Viale Ferdinando Stagno d'Alcontres31, 98166 Messina, Italy电子邮件地址：antficarra@unime.it