arXiv:2303.15367v1 [math.CO] 27 Mar 2023

稀疏图的均匀随机着色

EOIN HURLEY 和 FRANC.OIS PIROT

Abstract. 我们分析最大度为 Δ、处于 $\Delta < k \ln k$范围内的稀疏图的均匀随机合法 k 着色。该范围对应于随机图着色的碎裂阈值下侧，而随机图着色是随机约束满足问题中碎裂阈值的典型例子。我们证明了关于固定图着色解空间几何的一系列结果，将 Achlioptas、Coja-Oghlan [ACO08],和 Molloy [Mol12] 对随机图的研究加以推广，并为随机局部搜索算法在该范围内的表现提供了依据。我们的核心证明仅依赖初等技巧，即一阶矩方法和定量归纳法，却强化了 Vu[Vu02], 以及近期 Davies、Kang、P. 和 Sereni [DKPS20], 的列表着色结果，并将拉姆齐理论中的最先进界推广至稀疏图情形。此外，该证明还给出了着色数量的近乎紧下界；这一数量也称为 Potts模型的配分函数，并对高效近似计数具有启示意义。

1. Introduction

理论计算机科学（TCS）、统计物理和组合学在科学网络中互为近邻。它们所宣称的目标通常各不相同，但有时会趋于一致，从而带来富有成效的思想交流。这种交叉领域的一个核心例子是图着色：对理论计算机科学而言，它是一个约束满足问题（CSP）；对统计物理而言，它是反铁磁 Potts模型；而对组合学而言，它则是一口蕴藏了150年有趣问题的深井。特别是，平均度为 Δ 且使用$k \ln k = \Omega(\Delta)$种颜色的稀疏图和随机图的着色，已被证明是相变类型行为的丰富来源。我们关注的是最大度为 Δ、满足某些稀疏性条件（例如无三角形性）的图的均匀随机 k-着色，并假设 $\Delta < k \ln k$；换言之，正处于相变之下。

本文的主体围绕理论计算机科学（TCS）的视角展开。我们基于随机约束满足问题中的相变以及所谓的碎裂阈值这一丰富文献，证明当超过碎裂阈值时，随机图解空间几何的性质——即 [ACO08、ART06、Mol12] 中研究的那些性质——实际上对任意固定的稀疏图都成立。对于统计物理，我们证明了稀疏图着色数量的一个近乎紧的下界；这对应于温度0下 k 态反铁磁 Potts模型配分函数的一个下界。这些界也为围长不断增大的图序列的极限，以及着色的高效近似计数，带来了有趣的可能性。对于组合学，我们的结果还可推广到局部列表着色，其中列表大小根据局部参数（即每个顶点的度）定义，并允许邻域内存在一定密度的边。我们在这一方向上的结果加强了此前所有结果，而且证明更为简洁。除非一个有50年历史的拉姆齐理论问题取得突破，否则从我们的工作中推导出的界都是紧的。

现在我们陈述主要结果（定理 2.10）的一个简化版本，所有其他结果都可由此推出。我们记 $[k] := \{1, \dots, k\}$。对于每个图 G，令 $\mathscr{C}_k(G)$ 表示 G 的所有正常 k-着色的集合（当 k 的含义从上下文中显而易见时，我们省略下标）。对于每个顶点 $v \in V(G)$，

取得这些成果的研究部分得到了德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）–428212407（E. Hurley）的资助。

每个子图 $H \subseteq G$，以及每个 k-着色 $\sigma \in \mathscr{C}_k(H)$，令 $L_\sigma(v) := [k] \setminus \sigma(N(v) \cap V(H))$ 表示在给定 σ 的情况下，v 可用的颜色列表；令 $\ell_\sigma(v) := |L_\sigma(v)|$ 表示其大小。

定理 1.1. 设 $\varepsilon \in (0,1)$ 为固定值，令 Δ 足够大（相对于 ε），并设 G 为最大度不超过 Δ 的无三角形图。取满足 $(1-\varepsilon)k\ln k \geq \Delta$ 的 k，并令 $\ell := \Delta^{\varepsilon/2}$。那么，对于每个 $v \in V(G)$，图 $G \setminus v$ 的均匀随机正常 k-着色 $\boldsymbol{\sigma}$ 满足 $\mathbb{E}[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v)] \geq \ell$。

我们注意到，定理 1.1 的结论对图 G 的均匀随机正常 k-着色 $\boldsymbol{\tau}$ 也成立。事实上，将 $\sigma \in \mathscr{C}(G \setminus v)$ 扩展到 $\mathscr{C}(G)$ 的数量恰为 $\ell_\sigma(v)$，因此 $\mathbb{E}[\ell_{\boldsymbol{\tau}}(v)] = \mathbb{E}\left[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v)^2\right] \geq \mathbb{E}[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v)]$。

定理 1.1 的证明依赖于以下优惠券收集引理，它是对 Molloy [Mol19] 所提出结果的随机化版本。

引理 1.2（优惠券收集引理）。假设我们有随机非空列表 $\mathbf{L}_1$、…、$\mathbf{L}_d$，每个列表的取值都属于 $\mathbb{N}$ 的有限子集。固定某个整数 $t \geq 1$，并定义随机变量 $\mathbf{X} := \#\{i \in [d] : |\mathbf{L}_i| \leq t\}$。现在，对每个 $i \in [d]$，从 $\mathbf{L}_i$ 中均匀随机地选取一个元素 $\boldsymbol{\sigma}(i)$，并定义随机变量 $\mathbf{L} := [k] \setminus \{\boldsymbol{\sigma}(i) : i \in [d]\}$。那么

$$\mathbb{E}[|\mathbf{L}|] \geq k_0\, \mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{d}{k_0}}, \quad \textit{where } k_0 = k - \mathbb{E}[\mathbf{X}].$$

为便于说明，我们来展示定理 1.1 如何由优惠券收集引理推出。定理 2.10 这一更一般命题的证明也采用相同的思路，但为了得到 ε 的显式值并处理更一般的框架，我们需要增加一层技术细节，这会掩盖其概念上的简洁性。还要指出，证明依赖于一个归纳假设，它是标准 Rosenfeld 计数框架 [Ros20, WW20] 的一种改述。

定理 1.1 的证明。我们对 n（G 的阶）使用归纳法证明该结果。若 G 只有 1 个顶点，则结论显然成立。假设对于所有满足命题条件且阶至多为 $n-1$ 的 H，该命题均成立。令 G 如命题所述，其阶为 n，并任取 $v \in V(G)$。令 $H := G \setminus v$，我们将证明均匀随机的 k-着色 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{C}(H)$ 满足 $\mathbb{E}[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v)] \geq \ell$。注意，这等价于命题 $|\mathscr{C}(G)| \geq \ell\,|\mathscr{C}(G \setminus v)|$。

固定一个整数 t。给定 $\boldsymbol{\sigma}$ 的实现，若 v 的邻点 $u \in N(v)$ 满足 $\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(u) \leq t$，则称其具有短列表，并令 $S_{\boldsymbol{\sigma}}$ 为具有短列表的顶点 $u \in N(v)$ 所构成的集合。首先我们注意到，$S_{\boldsymbol{\sigma}}$ 的期望大小很小。事实上，考虑顶点$u \in N(v)$ 属于 $S_{\boldsymbol{\sigma}}$ 的概率；我们有

$$\mathbb{P}[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(u) \leq t] = \frac{\#\{\sigma \in \mathscr{C}(H) : \ell_\sigma(u) \leq t\}}{|\mathscr{C}(H)|} \leq \frac{t\,|\mathscr{C}(H \setminus u)|}{\ell\,|\mathscr{C}(H \setminus u)|} = \frac{t}{\ell}, \tag{1}$$

其中，不等式的最后一行是将归纳假设应用于 H 和 u 后得到的。因此，$\mathbb{E}[|S_{\boldsymbol{\sigma}}|] \leq \Delta t/\ell$。

记 $N(v) = \{u_1, \ldots, u_d\}$。现在我们可以将引理 1.2 应用于随机列表$L_{\boldsymbol{\sigma}}(u_1) \ldots, L_{\boldsymbol{\sigma}}(u_d)$，其中 $\mathbf{X} = |S_{\boldsymbol{\sigma}}|$ 表示短列表的数量。我们同时从 $L_{\boldsymbol{\sigma}}(u_i)$ 中为每个 $u_i \in N(v)$ 均匀随机地重新抽样$\boldsymbol{\sigma}(u_i)$，并注意到这正是引理 1.2 的设置。由此得到 $\mathbb{E}[L_{\boldsymbol{\sigma}}(v)] \geq k_0 \mathrm{e}^{-(1+1/t)d/k_0}$，其中 $k_0 = k - \mathbb{E}[|S_{\boldsymbol{\sigma}}|] \geq k - \Delta t/\ell$。关键在于，列表 $L_{\boldsymbol{\sigma}}(u_1) \ldots, L_{\boldsymbol{\sigma}}(u_d)$ 的实现由 $\boldsymbol{\sigma}$ 到 $H \setminus N(v)$ 的限制决定，因此不会受到重新抽样的影响。因此，重新抽样后，$\boldsymbol{\sigma}$ 仍然在 $\mathscr{C}(H)$ 中均匀分布。为完成证明，我们可以令 $t := \lceil 5/\varepsilon \rceil$，并假设 Δ 足够大，使得 $\Delta t/\ell \leq \varepsilon k/5$。我们有

$$\mathbb{E}\left[|L_{\boldsymbol{\sigma}}(v)|\right] \geq \left(k - \frac{\Delta t}{\ell}\right) \mathrm{e}^{-\frac{(1+1/t)\Delta}{k-\Delta t/\ell}} \geq (1-\varepsilon/5)\, k\mathrm{e}^{-\frac{(1+\varepsilon/5)(1-\varepsilon)k\ln k}{(1-\varepsilon/5)k}} \geq (1-\varepsilon/5)k\mathrm{e}^{(-1-\varepsilon/5+4\varepsilon/5)\ln k}$$
$$\geq (1-\varepsilon/5)k^{3\varepsilon/5} \geq \Delta^{\varepsilon/2},$$

再次假设 Δ 足够大。

□

定理 1.1 的表述仅涉及列表阶数的一阶矩。我们将证明，由此表述可以推导出随机正常 k-着色 $\boldsymbol{\sigma}$ 以高概率满足的许多性质。为此，我们需要证明某些随机变量的集中性；通常的做法是将所述变量表示为若干个（近似）负相关二元随机变量之和。在这里，我们希望证明均匀随机着色中，顶点邻域内出现的短列表数量具有集中性。遗憾的是，在我们的情形下负相关性并不成立，因此我们引入另一种性质，即伯努利支配；在该情形下，伯努利支配足以保证很强的集中不等式。在定理 3.6 中，通过将定理 1.1 与对（1）的重复应用相结合，可以得到这一性质。

据我们所知，这项工作首次对这一范围内任意确定性图的典型正常着色的性质进行了严格分析；我们推测，我们的方法或许可以加以调整，以回答关于此类典型着色和 CSP 解的更多问题。

1.1. 论文结构。在第 2 节中，我们介绍特定于问题的背景，并陈述主要结果。在第 2.1 小节中，我们回顾随机 CSP 的相关文献，然后介绍我们关于稀疏图着色的解空间几何的结果。在第 2.2 小节中，我们讨论组合学文献，以及向列表着色和具有有界局部密度的图的扩展。在第 2.3 小节中，我们陈述关于颜色数量的下界，并讨论其与图极限和高效近似计数的相关性。在第 3 节中，我们介绍所依赖的概率工具（第 3.1 小节中的优惠券收集型结果，以及第 3.2 小节中使用伯努利支配的结果），并在第 3.3 小节中应用这些工具，概述第 2.1 小节结果的证明。其余所有证明均位于附录中。

2. Context and Statement of Results

本文所讨论的图均为简单无环图，记作 $G = (V(G)\ E(G))$ 或 H，通常有 n 个顶点。对于顶点 $v \in V(G)$，我们用 $N_G(v)$ 表示 v 在 G 中的邻域，用 $N_G[v] := \{v\} \cup N_G(v)$ 表示其闭邻域。若上下文明确，我们会省略下标。对于子集 $U \subseteq V(G)$，令 $G[U] \subseteq G$ 表示由 U 在 G 中诱导的子图。下文中，当我们说某个性质以高概率成立（w.h.p.）时，意指其成立的概率随 n 趋于 ∞ 而趋于 1。按照惯例，我们用 $o_y(x)$ 表示实值函数 $f(x,y)$，满足当 $y \to \infty$ 时，对所有 $x > 0$，都有 $f(x,y)/x \to 0$。此外，我们用 $\Omega(x)$ 表示实值函数 $f(x)$，其中存在 $C > 0$，使得对所有充分大的 x，都有 $f(x) \geq Cx$。

2.1. 解空间几何。半个多世纪以来，我们一直知道，许多约束满足问题（CSPs）在最坏情况下是NP难的。人们曾希望平均情形复杂度能呈现出更光明的前景，早期研究结果也确实表明可能如此[Tur88、DF86、Kuˇc89]。这些结果为许多随机约束满足问题提供了多项式时间算法，包括为几乎所有色数不超过 k的图找到 k-着色。然而，一个更具挑战性的[1] 测试案例很快出现了：寻找一种多项式时间算法，使其能够以高概率为一个约束与变量之比固定的随机约束满足问题找到解。当约束满足问题是图着色时，这一测试案例变为：为Erd˝os-R´enyi随机图进行 k-着色$G_{n,\ dn/2}$。也就是说，

[1]更具挑战性，也更自然，因为假设的条件可在多项式时间内验证，也许可在多项式时间内检验。

从所有具有 n 个顶点和 $dn/2$ 条边的图中均匀随机选取的图，其平均度为 d。在 [AM97] 中，人们证明，对于 $d \leq k \ln k$，以下算法以高概率即已足够：

(1) 从可用颜色数量最少的顶点中均匀随机地选择一个顶点 v；(2) 从其可用颜色中均匀随机地选择一种颜色为其着色 v。

值得注意的是，尽管 $G_{n,\ dn/2}$ 已知以高概率是 k-可着色的，其中 $d \sim 2k \ln k$，但尚无算法被证明能够在任何 $d > (1 + o_k(1))k \ln k$ 下成功。这个极其朴素的算法就是当前最先进的方法。正如 Achlioptas 和 Coja-Oghlan 在 [ACO08], 中所指出的，这种情况似乎具有普适性，因为它适用于“几乎所有值得关注的随机 CSP”（其中 d 表示约束与变量之比）。也就是说，极其朴素的算法（数十年来已为人所知）可以工作到某个阈值（d_{Sh}），该阈值远低于可满足-不可满足阈值（d_{SU}），但目前尚无算法已知能够在 $d > d_{Sh}$ 下工作。d_{Sh} 的值并非任意；它与统计物理文献中猜想的碎裂阈值 [KMRT+07] 相吻合（该阈值依据预期的空间相关衰减来定义）。受这些猜想的启发，并在 [ART06], 的基础上，Achlioptas 和 Coja-Oghlan 严格证明了，至少对于随机图着色、随机 k-SAT 和随机 k-均匀超图 2-着色而言，这并非巧合。正如早期工作 [ART06] 中所述，其方法背后的一个关键思想如下。

假设1。给定约束满足问题实例的解空间几何结构决定了针对该实例的算法性能[2]

他们证明，随着 d 超过这一碎裂阈值（随机图着色中的$d_{Sh}\ k \ln k$），解空间的几何结构中以高概率会出现两个相变，一个是局部相变，另一个是全局相变。在全局层面，解空间起初是一个连通性良好的大球体，随后碎裂成数量呈指数增长、规模呈指数微小且彼此相距甚远的簇。在局部层面，典型解起初能够通过改变n（ o）个其他变量来改变几乎任意变量的赋值（几乎所有变量都是“松弛”的），但最终几乎所有变量都不再具有这一性质（几乎所有变量都是“刚性”的）（见第2.1.1节）。他们提出，这些相变正是高效算法面临的障碍。也就是说，解空间几何结构的这些性质既解释了 $d < d_{Sh}$ 算法的存在，也解释了寻找此类算法 $d_{SU} > d > d_{Sh}$的困难。

在 [Mol12], 中，随机图着色的局部相变——又称冻结阈值——得到了进一步分析，并表明一个更强的结论定理 2.4 成立。局部冻结阈值尤其值得关注，因为在 [KMRT+07、Zde08、ZK07], 中，有人假设它（而非全局聚类阈值）是高效算法面临的主要障碍。确实，有证据支持这一观点：虽然这些阈值在渐近意义下相等（在 k 中），但当 k 较小时并不相等；而在 [AM02] 中，针对 $d = 4$ 给出了一种随机图着色算法，适用于 k 高于聚类阈值但低于冻结阈值的取值（后者始终较高）。

因此，尽管随机约束满足问题已被证明颇具挑战性，但人们一直能基于随机问题实例的解空间的典型几何结构，对算法为何成功或失败给出一致的解释。然而，这一图景出现了一道裂痕：在 [Mol19], 中，Molloy 运用熵压缩法（受 Moser-Tardos [MT10] 启发），证明以下巧妙而简单的算法能够为任意最大度为 $d \leq (1 - o_k(1))k \ln k$ 的无三角形图 G 进行 k 着色（一直达到碎裂阈值！）：

(1) 从 G 的任意部分合法着色 k开始；(2) 当存在坏顶点 v 时，均匀随机地[3]对 v 的邻域进行部分合法着色的重新抽样；

[2]这与重叠间隙性质的风格非常相似，参见 [Gam21].[3]事实上，在这一步中，Molloy 优先处理最近才不再是坏顶点的坏顶点，但这与我们的讨论无关。

(3) 将部分着色扩展为完整的正常着色。

这当然是一种随机局部搜索算法 [Ili19]。Molloy 将可用颜色过少，或可能在某种给定颜色上产生冲突的未着色邻点过多的顶点定义为坏顶点。通过熵压缩，他证明，经过多项式次（按期望计）对邻域进行重新抽样后，不会再有坏顶点。随后，直接应用算法版 Lov´asz 局部引理 [MT10]，便足以在多项式时间内完成着色。事实上，Bernshteyn [Ber19] 指出，该算法的初始部分也可以视为应用 Lov´asz 局部引理 [AS16]。

之所以说这对我们的认知造成了冲击，是因为我们关于碎裂阈值以上不存在高效算法的障碍，是基于对随机图的分析而提出的假设。但 Molloy 的算法适用于所有无三角形图，而不仅仅是随机图。因此，基于假设1，我们会预期，所有最大度为 $d < k \ln k$ 的无三角形图的着色空间几何性质，都类似于 $G_{n,\ d/n}$ 中 Achlioptas、Coja-Oghlan [ACO08] 所描述的情形。例如，如果存在某个 d 正则无三角形图，使得其典型的 k 着色是刚性的，或者其解空间由指数多个充分分离的分支组成，那么这就会排除这些现象（分别是局部冻结阈值和全局聚类阈值）作为高效算法障碍的可能性。本文的核心贡献（见定理 2.7 和定理 2.8）在于证明，在前一种情形下不存在这样的图，这支持了局部冻结阈值可能构成高效算法障碍这一观点。取得关于解空间连通性的正面结果，对于理解随机局部搜索算法（例如 Molloy 的算法 [Mol19]）的表现也尤为重要。

2.1.1. 刚性、松弛、冻结、解冻。本节将正式定义引言中讨论的局部“冻结”相变。关于全局簇化相变的讨论和正式定义，请参见 [ACO08，第 2.1] 节。之所以称为“局部”，是因为它关注的是单个着色的视角，而非一次性考察整个解空间。对于图 G 的两个着色σ 和 τ，令 $\mathrm{dist}(\tau,\sigma) := \#\{v \in V(G) : \sigma(v) \neq \tau(v)\}$ 表示汉明距离。

定义 2.1. 对于 $t, k \in \mathbb{N}$ 和任意图 G，我们如下定义距离为 t k 的着色图 $\mathcal{H}(G,k,t)$。$\mathcal{H}$ 的顶点是 G 的适当 k 着色；若两个不同顶点 τ,σ 满足 $\mathrm{dist}(\tau,\sigma) \leq t$，则它们在 $\mathcal{H}$ 中相邻。此外，我们将 t-簇定义为$\mathcal{H}(G,k,t)$ 的连通分支（当 $t = 1$ 时，~~我们简称~~为簇）。

因此，τ 和 σ 属于同一个 t-簇，当且仅当存在一个适当的 k-着色序列$\tau = \tau_1, \ldots, \tau_s = \sigma$，使得对于所有 $i \in [s-1]$，$\mathrm{dist}(\tau_i, \tau_{i+1}) \leq t$（注意，$s$可以任意大）。当上下文中已明确 k 和 t 时，我们将简写为 $\mathcal{H}(G)$。

现在我们用这些术语陈述 [ACO08, Mol12] 中的定义。

定义 2.2. 给定 $k, t \in \mathbb{N}$、一个图 G、一个顶点 $v \in V(G)$ 和 $\tau \in \mathscr{C}_k(G)$，我们称 v 在 τ 中：

- 是 t-松弛的，如果对于所有 $j \in [k]$，都存在 τ 的一个邻点 $\sigma \in \mathcal{H}(G)$，使得 $\sigma(v) = j$；
- 是 t-解冻的，如果对于所有 $j \in [k]$，都存在与 τ 属于同一个 t-簇的 $\sigma \in \mathcal{H}(G)$，使得 $\sigma(v) = j$；
- 是 t-刚性的，当且仅当对 τ 的所有邻点 $\sigma \in \mathcal{H}(G)$，$\tau(v) = \sigma(v)$；
- 是 t-冻结的，当且仅当对于与 τ 属于同一 t-簇的所有 $\sigma \in \mathcal{H}(G)$，$\tau(v) = \sigma(v)$。

在上述记号中省略 t，表示默认 $t = 1$。请注意，这些定义按连接程度从高到低排列；t-松弛意味着 t-解冻，而 t-冻结意味着 t-刚性。理解解冻和冻结的定义，另一种方式是考察包含 τ 的簇在 v 上的投影。如果该投影包含 $[k]$ 中的一个/所有元素，那么 v 在 τ 中就是冻结/解冻的。请注意，松弛/刚性都与邻点有关，而不是与簇有关；特别是，只有在孤立时，顶点 v 才可能是松弛的；如果 $N[v]$ 跨越了所有 k 种颜色，它就是刚性的。

本文讨论的是固定图 G 的均匀随机着色 $\boldsymbol{\sigma}$；而在 [ACO08、Mol12] 中，他们讨论的是均匀随机图的均匀随机着色。我们将其精确定义如下。首先固定 d、$k \in \mathbb{N}$，然后考虑 $n \in \mathbb{N}$ 和 $m := \frac{dn}{2}$（我们令 n 趋于无穷大）。现在从所有具有 m 条边、顶点数为 n 的图中均匀随机选取一个图 G。最后，均匀随机选取 G 的一个适当的 k-着色 $\boldsymbol{\sigma}$。随机对 (G $\boldsymbol{\sigma}$) 是 [ACO08、Mol12] 研究的对象（尽管他们通过强大的“植入”模型来分析它）。请注意，在给定 $\mathsf{G} = G$ 的条件下，我们的随机变量 $\boldsymbol{\sigma}$ 是相同的。给定 k、n 和 d，我们将上述描述的 (G $\boldsymbol{\sigma}$) 称为均匀随机实例-解对。

我们现在回顾关于刚性、松弛和冻结变量（解冻变量是在本文中引入的）的已有研究。令 $k, d \in \mathbb{N}$，使得

$$(1 + o_k(1))k \ln k \le d \le (2 - o_k(1))k \ln k. \tag{2}$$

定理 2.3. [ACO08，定理 4] 对于 (2) 中的 k, d，均匀随机实例-解对 (G $\boldsymbol{\sigma}$) 以高概率包含至少 $(1 - o_k(1))n$ 个 $\Omega(n)$-刚性顶点。

定理 2.4. [Mol12，定理 2.4] 对于 (2) 中的 k, d，存在 $0 < \alpha, \beta < 1$，使得均匀随机实例-解对 (G $\boldsymbol{\sigma}$) 以高概率包含 $(\beta + o_n(1))n$ 个 αn-冻结顶点。

这些结果有力地说明了当 $k \ln k < d$ 时随机图的解空间的情况。在同一批论文中，也描述了阈值另一侧的情形。假设

$$d \le (1 - o_k(1))k \ln k. \tag{3}$$

定理 2.5。 [ACO08，定理 5] 对于 k，如（3）所示，在均匀随机实例-解对 (G $\boldsymbol{\sigma}$) 中，以高概率每个顶点都是 $o(n)$-松弛的。

定理 2.6。 [Mol12，定理 2.4] 对于 k，如（3）所示，存在一个常数 $C > 0$，使得以高概率，均匀随机实例-解对 (G $\boldsymbol{\sigma}$) 中至多有 $o(n)$ 个顶点是 $(C \ln n)$-冻结的。

我们指出，定理 2.3 和定理 2.5 也适用于 k-一致超图的 2-着色以及k-CNF。我们以定理 2.5 和定理 2.6 为基础，证明实际上可以将它们转化为关于围长足够大的确定性图的均匀随机着色的结论。

2.1.2. 解空间几何的原始结果。我们的第一个定理针对无三角形图，但请注意，它成立的概率趋于 1 是在 d 趋于无穷时，而不是在 n 趋于无穷时。仅分析顶点 v的常数半径 r 范围内的图，所能得到的结果至此已是最佳，因为随机波动发生的概率仅取决于 r 和 Δ。分析半径大于围长的范围内的图，当然要困难得多。

定理 2.7。对于所有 $\varepsilon > 0$，当 k 足够大且 $\Delta \le (1 - \varepsilon)k \ln k$ 时，以下结论成立。设 G 是一个最大度不超过 Δ 的无三角形图，且设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 G 的均匀随机合法 k 着色。那么对于每个顶点 $v \in V(G)$，以下结论以至少 $1 - \mathrm{e}^{-\Delta^{\varepsilon/3}}$ 的概率成立：

(1) 在 $\boldsymbol{\sigma}$ 中，v 是 $(\Delta + 1)$-松弛的；(2) 在 $\boldsymbol{\sigma}$ 中，v 已解冻。

事实上，我们将证明，以上述概率，只需改变 v 及其邻点的颜色，就可以将 v 的颜色改为任意颜色。

如上所述，由于概率取决于 d，这并不能直接加强定理 2.5 和定理 2.6，不过它确实排除了存在最大度为 Δ 且具有定理 2.3 和定理 2.4 所保证性质的无三角形图的可能性。若我们加强围长条件，便可得到定理 2.5 和定理 2.6 的加强版本（无三角形图不可能满足这些条件，见第 3.4 节）。

定理 2.8。对于所有 $\varepsilon > 0$，当 k 充分大且 $\Delta \le (1-\varepsilon)k \ln k$ 时，以下结论成立。设 G 是一个有 n 个顶点、最大度为 Δ 且围长至少为 $\ln \ln n$ 的图。那么，对于 G 的均匀随机适当 k-着色 $\boldsymbol{\sigma}$，以下结论以高概率对每个 $v \in V(G)$ 成立：

(1) 在 $\boldsymbol{\sigma}$ 中，v 是 $O((\ln n)^2)$-松弛的；(2) 在 $\boldsymbol{\sigma}$ 中，v 是解冻的。

我们实际展示的仍然是：只需改变距离 $O(\ln \ln n / \ln \Delta)$ 至多的顶点的颜色，就可以将 v 的颜色改成任意我们想要的颜色。定理 2.8 蕴含，G 的适当 k-着色的重构图（其中重构步骤是改变任意一个顶点的颜色）包含一个连通分支，该分支覆盖除 $o_\Delta(1)$ 个着色之外的所有着色。要看出这些确实是加强后的结论，请回忆：以高概率（假设 n 足够大），在 Erd˝os-R´enyi 随机图 $G_{n,dn/2}$ 中不存在三角形，并且所有长度至多为 $o(\log_d n)$ 的圈在顶点上两两不相交（对于随机正则图，这一点已在 [MWW04，公式 (2.8)] 中证明）。因此，在定理 2.8 的证明中，当我们考虑距离某个顶点 v 至多为 $o(\log_d n)$ 的顶点集合时，可以通过删除一个匹配将诱导子图变成一棵树。这不会影响分析。定理 2.8 直接加强了定理 2.6，将 $(C \ln n)$-冻结替换为 1-冻结（在 [ACO08] 中已经指出，可以实现 $O(\ln n)$-松弛）。

我们猜想，在 [ACO08] 中证明的全局连通性性质也应适用于所有无三角形图。

猜想 2.9。对于定理 1.1 中的 ε、Δ、k 和 G，存在一个 $\mathcal{H}(G)$ 的簇，其中至少包含 $\mathscr{C}_k(G)$ 的 $(1 - o_\Delta(1))$ 比例。

2.2. 局部列表着色与密度。给定一个图 G，G 的列表赋值是一个映射 $L\colon V(G) \to 2^{\mathbb{N}}$；$G$ 的一个合法 L-着色 σ 是一个映射 $c\colon V(G) \to \mathbb{N}$，满足对每个顶点 $v \in V(G)$，都有 $c(v) \in L(v)$，且对每条边 $uv \in E(G)$，都有 $c(u) \neq c(v)$。因此，列表着色是一个包含着色这一特殊情形的约束满足问题。如果 G 存在一个 L-着色，我们就称 G 是 L-可着色的。G 的列表色数记为 $\chi_\ell(G)$，它是满足以下条件的最小 k：对于每个列表赋值 L，只要对每个顶点 $v \in V(G)$ 都有 $|L(v)| \ge k$，G 就是 L-可着色的。注意，经典色数 $\chi(G)$ 总是不大于 $\chi_\ell(G)$。

在一项开创性成果中，Johansson [Joh96] 证明，无三角形图的列表色数（最大度为 Δ）在 $\Delta \to \infty$ 时绝不超过 $O(\Delta/\ln \Delta)$。二十年后，Molloy[Mol19] 借助熵压缩证明，这一界可以收紧为 $(1+o(1))\Delta/\ln \Delta$（当 $\Delta \to \infty$ 时）；随后，Bernshteyn [Ber19] 证明，可以通过应用非对称 Lov´asz 局部引理替代熵压缩，并得到类似结果。在这一突破之后，人们对无三角形图着色及其扩展 [AIS19, ABD21, BKNP18, DdJdVKP20, DKPS20] 产生了浓厚兴趣。

尽管这些工作中的证明各不相同，但它们都依赖于一个两步着色过程。该过程首先要找到具有适当性质的部分合法着色，然后在第二步中将其扩展。这第二步通常称为收尾步骤。相比之下，我们的证明不需要使用收尾步骤；据我们所知，这是首个具有这一性质的证明。我们的结果还涵盖了每个邻域内密度均有界的图，这是无三角形图的自然推广。沿着这一方向的首个结果归功于 Alon、Krivelevich 和 Sudakov [AKS99]。他们借助 Johansson 的结果证明：如果一个图 G 的最大度为 Δ，且每个邻域至多生成 Δ^2/f 条边，其中 $1 \le f \le \Delta^2 + 1$，那么当 $f \to \infty$ 时，其色数至多为 $O(\Delta/\ln f)$。随后，Vu [Vu02] 将这一结果推广到了列表色数。最近，第二位作者与 Davies、Kang 和 Sereni [DKPS20, Corrolary 24], 证明了这一上界可以

[4] 通过更加细致（且技术性更强的分析，作者认为这可能被替换为 $O(\ln n)$-松弛。

在每个 $\varepsilon > 0$满足 $f \geq (\ln \Delta)^{2/\varepsilon}$的条件下收紧为 $(2+\varepsilon)\Delta/\ln f$。我们的主定理是对这些结果的加强，并且已接近最优。

我们的灵感来自一种计数论证。Rosenfeld [Ros20] 首先将其用于图着色领域（有关该方法的介绍，请参见 [Woo20, Section 3.5]），随后 Wanless 和 Wood [WW20] 又将其推广用于超图着色。不过，我们的证明偏离了标准论证，以便利用图 G 的均匀随机着色与其诱导子图 $H \subset G$ 的均匀随机着色之间的关系。

给定列表赋值 $L\colon V(G) \to 2^{\mathbb{N}}$、子图 H of G 的一个正常 L-着色 σ，以及一个顶点 $v \in V(G)$，我们将 $L_\sigma(v) := L(v) \setminus \sigma(N_H(v))$ 记为在给定 σ 的情况下顶点 v 可用颜色的集合，并将其大小记为 $\ell_\sigma(v) := |L_\sigma(v)|$。

定理 2.10。设 G 是一个最大度为 Δ 的图，并且 G 中由邻域诱导的每个图的平均度至多为 $d \leq \frac{\Delta}{6} - 1$。记 $\rho := \Delta/(d+1)$，并令 $\ell \geq (d+1)(\ln \rho)^3$。那么，对于每个列表赋值 $L\colon V(G) \to 2^{\mathbb{N}}$，满足

$$|L(v)| \geq \left(1 + \frac{2}{\ln \rho}\right) \frac{\deg(v)}{W\left(\frac{\deg(v)}{\ell}\right)}$$

对每个顶点 $v \in V(G)$，以下结论成立。对于所有 $v \in V(G)$，$G \setminus v$ 的均匀随机合法L着色 $\boldsymbol{\sigma}$ 满足 $\mathbb{E}[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v)] \geq \ell$。

与前面一样，对于 G的均匀随机 k着色，结论也成立。在定理 2.10 的陈述中，我们使用 W-Lambert 函数 $z \mapsto W(z)$，它定义为函数 $z \mapsto z\mathrm{e}^z$ 的倒数。在定理 2.10 的证明中，我们将使用一个众所周知的事实：$\mathrm{e}^{W(z)} = z/W(z)$。此外，我们注意到，当 $z \to \infty$ 时，$W(z) = \ln z - \ln\ln z + o(1)$；因此，固定$d := 0$ 后，定理 2.10 蕴含定理 1.1。由于我们已经给出了定理 1.1 的证明，而其陈述足以满足本文的大多数应用，因此我们将定理 2.10 的证明推迟到附录。

在 Vu 的结果 [Vu02], 背景下，定理 2.10 推出如下结论；其证明见附录。

推论 2.11. 设 G 是一个最大度为 Δ的图，且每个邻域至多包含 Δ^2/f 条边，其中 $1 \leq f \leq \Delta^2 + 1$。则 $\chi_\ell(G) \leq (1+o(1))\,\frac{\Delta}{\ln\min\{\Delta, f\}}$ 当 $f \to \infty$时。

文献 [DdJdVKP20] 指出，存在满足推论 2.11 假设且色数为 $(\frac{1}{2} - o(1))\Delta/\ln\min\{f, \Delta\}$的图。因此，推论 2.11 中的界在渐近意义下相差一个因子 2，是紧的。缩小这一差距将成为拉姆齐理论的一项突破，因为这将改进大 $t \in \mathbb{N}$时非对角拉姆齐数$R(3,t)$的估计；这是一个长期悬而未决的开放问题。

我们指出，本节的结果同样适用于 DP 着色的情形。DP 着色是 Dvo$\check{\text{r}}$´ak 和 Postle [DP18], 提出的列表着色的一种有趣推广，它同样是一个约束满足问题（CSP）。为了避免 DP 着色繁琐的形式化表述，我们决定在列表着色的情形下陈述这些结果；不过，本节结果的证明很容易推广到该情形。

2.3. 配分函数与近似方案。配分函数是统计物理中的重要对象。它们对系统的状态数进行加权计数，其中所述权重与观测到系统处于该状态的概率成正比。因此，当我们写出观测到某个特定状态的概率时，配分函数也充当归一化常数。我们自然会认为，对每个顶点可用颜色的期望数量所得的下界，将给出着色数量的下界，进而给出该配分函数的下界。通过对定理 2.10 的证明进行细微调整，我们可以证明如下结论。

定理 2.12。设 G 是一个 n-顶点图，其最大度为 Δ，并且由 G 中的某个邻域诱导的每个图的平均度至多为 $d \leq \frac{\Delta}{6} - 1$。令 $f := \Delta/(d+1)$，并设$L\colon V(G) \to 2^{\mathbb{N}}$是一个列表赋值，满足 $|L(v)| \geq \left(1 + \frac{1}{\ln \rho}\right) q(v)$，其中

$$q(v) \geq \left(1 + \frac{1}{\ln \rho}\right) \frac{\deg(v)}{W\left(\frac{\deg(v)}{(d+1)(\ln \rho)^3}\right)}$$

对每个顶点 $v \in V(G)$。因此，G至少有 $(q/\sqrt{D}/(d+1))^n$ 个正常的 L-着色，其中 D 是 G 中各顶点度的几何平均数，而 q 是 $\{q(v)\}_{v \in V(G)}$ 的几何平均数。

在本手稿的早期版本发表于预印本库前不久，Bernshteyn、Brazelton、Cao 和 Kang 的独立研究在线发表了 [BBCK21]。他们同样采用了 Rosenfeld 在 [Ros20], 中使用的计数论证，并推导出对于最大度为 $\Delta \leq (1-\varepsilon)k \ln k$（相对于 ε 足够大）的任意无三角形图 G，$|\mathscr{C}_k(G)|$ 的下界；他们还证明，该下界对于 Δ-正则无三角形图是渐近紧的。特别地，他们证明，随机的 Δ-正则无三角形图几乎必然至多有 $(1-\frac{1}{k})^{\Delta n/2}\left(\left(1+{}^{2}\ln_{n} n\right)k\right)^n$ k-着色，与 $n \to \infty$ 一样。

定理 2.13（Bernshteyn、Brazelton、Cao、Kang；2021）。对于每个 $\varepsilon > 0$，存在 Δ_0 使得以下结论成立。设 G 是一个 n-顶点无三角形图，其最大度为 $\Delta \geq \Delta_0$，且有 m 条边。那么，对于每个 $k \geq (1+\varepsilon)\Delta/\ln \Delta$，都有 $|\mathscr{C}_k(G)| \geq (1-1/k)^m\big((1-\delta)k\big)^n$，其中$\delta = \frac{4}{k}\mathrm{e}^{\Delta/k}$。

让我们暂停一下，思考一下应该预期有多少种着色。假设我们独立地、均匀随机地选择每个顶点的颜色。稍加思考便可发现，如果我们的图中没有圈，那么任意两条不同的边为单色的事件彼此独立。因此，如果我们正在着色的图有 n 个顶点、m 条边且没有圈，那么恰当的k-着色数量恰好为 $k^n(1-\frac{1}{k})^m$。当然，一般而言不存在这样的图，但我们仍然可以计算着色的数量。如果我们考虑量 $f(G,k) := \frac{1}{n}\ln|\mathscr{C}_k(G)|$，该量称为每个变量的自由能，那么可以看到，对于一个 Δ-正则“图” G，在没有圈的情况下，我们有$\frac{m}{n} = \frac{\Delta}{2}$，并且 $f(G,k) = \ln\left(k(1-\frac{1}{k})^{\Delta/2}\right)$。只有允许顶点数为无穷多个时，这样的图才存在，而且它是唯一的；它就是无限 Δ-正则树 $\mathbb{T}_\Delta$（如果你喜欢这一视角，请参阅[Csi16]）。当然，着色的数量也是无穷的，但我们可以将每个变量的自由能这一概念扩展到无限图；对于 $\mathbb{T}_\Delta$，这给出 $f(\mathbb{T}_\Delta,k) := \ln\left(k(1-\frac{1}{k})^{\Delta/2}\right) \approx \ln k - \frac{\Delta}{2k}$。

现在转而考虑 $h(G,k) := f(G,k)/f(\mathbb{T}_\Delta,k)$ 对于 Δ-正则图 G 的情形。这衡量了 G 相对于 $\mathbb{T}_\Delta$ 的每个变量的自由能。如果 G 有许多着色，那么 $h(G,k)$ 大于 1；如果它的着色很少，那么 $h(G,k)$ 小于 1。定理 2.12 和 2.13 给出了界[5]$h(G,k) \geq (1-o_\Delta(1))$。此外，对于随机正则图 $G_{n,\Delta}$，[Ber19] 表明，几乎必然有 $h(G_{n,\Delta},k) \leq (1+o_n(1))$。我们猜想，对于围长不断增长的图序列，这两个界在渐近意义下都是紧的。

猜想 2.14. 对每个 $\Delta \in \mathbb{N}$ 固定一个由 Δ-正则图组成的序列 $\{G_i^\Delta\}_{i=1}^\infty$，其围长趋于 ∞。那么对于所有函数 $k\colon$ 满足 $k(\Delta) > (1+\varepsilon)^{\Delta/\ln\Delta}$ 的 $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，对于某个 $\varepsilon > 0$，都有

$$\sup_{\Delta\in\mathbb{N}} \limsup_{i\to\infty} h(G_i^\Delta, k(\Delta)) \leq \lim_{\Delta\to\infty} \liminf_{i\to\infty} h(G_i^\Delta, k(\Delta)) = 1.$$

我们已经建立了下界，现在着手探寻通向上界的路径。首先注意到，若用 $i(G)$ 表示 G 中独立集的数量，则 [Csi16] 中证明了：如果上述序列 $\{G_i\}_{i=1}^\infty$ 中的每个图都是二分图，那么 $\lim_{j\to\infty} i(G_j)$ 存在（它以一种有意义的方式对应于无限正则树）。我们猜想，当用 $G($ [,16] $)$ 替换 $i(G)$ 时，同样的结果

[5]据推测，这一结论在 [Ber19] 中使用一半数量的颜色也成立。

应当成立，适用于 $k\ln k \geq (1+o_\Delta(1))\Delta$，且该极限应为 $f(\mathbb{T}_\Delta, k)$（同样对应于无限正则树）[6]。其次，[SSSZ20] 中证明了：对于所有 k 和 Δ-正则图 G，若其具有 n 个顶点，则有 $f(G,k) \leq f(K_{\Delta,\Delta}, k)$，其中 $K_{\Delta,\Delta}$ 是完全 Δ-正则二分图。也就是说，已经证明，在 Δ-正则图中，完全二部图使每个变量的自由能最大（对于 k-着色）。我们猜想，对于所有 g，在围长至少为 g 的 Δ-正则图 G 中，$f(G,k)$ 的上确界总是由一列二分图[7]达到。事实上，只需证明：围长为 $\omega(g)$ 的二分图上的上确界，至少不小于围长为 g 的一般图上的上确界，其中某个 $\omega(g)$ 趋于无穷大。如果这两个猜想都成立，那么对于围长趋于 ∞ 的所有图序列，二分图的极限将是一个上界。

我们注意到，这将意味着：对于所有 $\varepsilon > 0$，存在 Δ_0，使得对于所有 $\Delta > \Delta_0$，我们都能在围长较大的 Δ-正则图上，以 $(1+\varepsilon)$ 的因子，为 $f(G,k)$ 设计高效近似方案。另一方面，在 [GˇSV16] 中已经证明，对于固定的 Δ，除非 RP $=$ NP，否则不存在全多项式时间随机近似方案，能够将 $f(G,k)$ 的近似误差控制在 ε 以内。准确确定算法复杂度从何处开始显现，将会非常有趣。我们简要指出，关于高围长图和无限树的研究，为在 k 为某个比最大度 Δ [大的常数倍时，对图的 k-着色进行高效近似计数奠定了基础 06]。或许，在适当的围长条件下，对于 $k < \Delta$ 也存在相关的近似方案。

3. Technical Results and Selected Proofs

本节汇总有关均匀随机着色的核心结果，并以证明定理 2.7 和概述定理 2.8 的证明作结。

3.1. 优惠券收集型结果。

我们先证明优惠券收集引理，并在此重述其陈述。

引理 3.1（优惠券收集引理）。设有随机非空列表 $\mathbf{L}_1, \ldots, \mathbf{L}_d$，每个列表的取值均为 $\mathbb{N}$ 的有限子集。固定某个整数 $t \geq 1$，并定义随机变量 $\mathbf{X} := \#\{i \in [\Delta] : |\mathbf{L}_i| \leq t\}$。现在，对每个 $i \in [d]$，从 $\mathbf{L}_i$ 中均匀随机地选取一个元素 $\boldsymbol{\sigma}(i)$，并定义随机变量 $\mathbf{L} := [k] \setminus \{\boldsymbol{\sigma}(i) : i \in [d]\}$。那么

$$\mathbb{E}\left[|\mathbf{L}|\right] \geq k_0\, \mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{d}{k_0}}, \quad \textit{where } k_0 = k - \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right].$$

证明。固定随机列表的一个实现 $L_1, \ldots L_d$。令 $S = \{i : |L_i| \leq t\}$ 为短列表集合，$B = [d] \setminus S$ 为长列表集合。注意，由于对每个 $i \in B$ 都有 $|L_i| \geq t+1$，因此 $\frac{1}{|L_i|-1} \leq (1+\frac{1}{t})\frac{1}{|L_i|}$。结合这一观察与 Molloy 的一个结果 [Mol19]，可得

$$\sum_{x\in[k]} \sum_{\substack{i\in B \\ x\in L_i}} \frac{1}{|L_i|-1} \leq \left(1+\frac{1}{t}\right) \sum_{x\in[k]} \sum_{\substack{i\in B \\ x\in L_i}} \frac{1}{|L_i|} \leq \left(1+\frac{1}{t}\right) \sum_{i\in B} \sum_{x\in L_i} \frac{1}{|L_i|} \leq \left(1+\frac{1}{t}\right) d. \tag{4}$$

Molloy 的观察是，每个列表 L_i 在第一个双重求和中恰好出现 $|L_i|$ 次，且其权重为 $1/|L_i|$，这意味着它的贡献始终为 1。

令每个 $i \in S$ 都固定 $\boldsymbol{\sigma}(i) = x_i \in L_i$，并令 $L_0 := [k] \setminus \{x_i : i \in S\}$。注意到 $|L_0| \geq k - |S|$。现在我们可以对每个 $i \in B$ 从 L_i 中均匀随机选取 $\boldsymbol{\sigma}(i)$，并令 $\mathbf{L}_0 := L_0 \setminus \{\boldsymbol{\sigma}(i) : i \in B\}$。注意，$\mathbf{L}_0$ 恰好是在条件 $\boldsymbol{\sigma}(S) = \{x_i : i \in S\}$ 下的 $\mathbf{L}$。我们有

[6]事实上，[CL16] 已经证明，对于二分图，$f(\mathbb{T}_\Delta, k)$ 是一个下界，因此我们的下界可以视为 [SSSZ20 定理 8] 的近似对应物。[7]当然，最优雅的解法是：对于所有 i，若 G_i 只是一个围长至少为 g 的、顶点数最少的 Δ-正则二部图就好了。不过，这比我们的需求更强；更不用说，寻找这样的图是一个极具挑战性的开放问题 [FNV06]

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|\mathbf{L}_0|\right] &= \sum_{x\in L_0} \mathbb{P}\left[x \notin \boldsymbol{\sigma}(B)\right] = \sum_{x\in L_0} \prod_{\substack{i\in B\\ x\in L_i}} \left(1-\frac{1}{|L_i|}\right) \\
&\geq \sum_{x\in L_0} \exp\left(-\sum_{\substack{i\in B\\ x\in L_i}} \frac{1}{|L_i|-1}\right) && \text{since } 1-\tfrac{1}{z} > \mathrm{e}^{-\frac{1}{z-1}} \text{ for every } z>1; \\
&\geq |L_0| \exp\left(-\frac{1}{|L_0|}\sum_{x\in L_0}\sum_{\substack{i\in B\\ x\in L_i}} \frac{1}{|L_i|-1}\right) && \text{by convexity of exp}; \\
&\geq (k-|S|)\exp\left(-\frac{\left(1+\frac{1}{t}\right)d}{k-|S|}\right) && \text{by } |L_0| > k-|S| \text{ and (4)}.
\end{aligned}$$

剩下的工作是对 $\mathbf{L}_1$、…、$\mathbf{L}_d$ 的所有可能实现取平均。利用詹森不等式以及函数 $z \mapsto z\mathrm{e}^{-C/z}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上对每个 $C>0$ 的凸性，我们得到

$$\mathbb{E}\left[|\mathbf{L}|\right] \geq \mathbb{E}\left[(k-\mathbf{X})\exp\left(-\frac{\left(1+\frac{1}{t}\right)d}{k-\mathbf{X}}\right)\right] \geq \mathbb{E}\left[(k-\mathbf{X})\right]\exp\left(-\frac{\left(1+\frac{1}{t}\right)d}{\mathbb{E}\left[k-\mathbf{X}\right]}\right) = k_0\mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{d}{k_0}},$$

其中 $k_0 = k-\mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right]$。

□

通过一阶矩方法直接应用这一结果，可以得到以下结论：确定性地存在一种着色，使其在 v 处诱导出一个长列表。该结论可通过完全按照定理 1.1 的证明中的计算过程来获得。

推论 3.2。设 $\varepsilon \in (0,1)$ 为固定值，并令 Δ 足够大（关于 ε）。固定 k，使得 $(1-\varepsilon)k\ln k \geq \Delta$。给定 L_1、……、$L_\Delta \subset [k]$，并假设短列表的数量为 $\#\{i : |L_i| \leq 5/\varepsilon\} \leq \varepsilon k/5$。那么存在 $\sigma(i) \in L_i$，使得对于 $i \in [\Delta]$，有 $|[k]\setminus\{\sigma(i) : i\in[\Delta]\}| \geq \Delta^{\varepsilon/2}$。

3.2. 伯努利支配。对于其余证明，我们需要高集中性界限，为此引入伯努利支配的概念。首先陈述以下一个有用的切尔诺夫-霍夫丁型尾界，适用于由相互独立的随机变量支配的二元随机变量。这是 [PS97，定理 3.4] 的一个特例。

定理 3.3。设 $\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_s$ 为二元随机变量，$\mathbf{Y}_1,\ldots,\mathbf{Y}_s$ 为相互独立的二元随机变量。令 $\mathbf{Y} := \sum_{i\in[s]}\mathbf{Y}_i$，$\mathbf{X} := \sum_{i\in[s]}\mathbf{X}_i$。记 $\mu := \mathbb{E}\left[\mathbf{Y}\right]$。那么，若

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i\in J}\mathbf{X}_i\right] \leq \mathbb{E}\left[\prod_{i\in J}\mathbf{Y}_i\right],$$

对所有 $J\subset[s]$，均有如下结论：对所有 $\delta>0$，

$$\mathbb{P}\left[\mathbf{X}\geq(1+\delta)\mu\right] \leq \left[\frac{\mathrm{e}^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right]^{\mu}.$$

特别地，对于每个 $\sigma \geq 6\mu$，我们有

$$\mathbb{P}\left[\mathbf{X}\geq\sigma\right] \leq \mathrm{e}^{-\sigma}.$$

受上述定理的启发，在每个 $\mathbf{Y}_i$ 服从伯努利分布 $\mathrm{Ber}(p)$ 的情况下，我们引入以下定义。

定义　定义 3.4. 若二元随机变量 $(X_1, \dots, X_s)$ 被 Ber(p)-支配，则称其为 Ber(p)-支配的f

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i\in J} \mathbf{X}_i\right] \le p^{|J|},$$

对所有 $J \subseteq [s]$。

定理 3.3 可以理解为：该随机变量的上尾几乎与二项随机变量的上尾一样小。事实上，可以对定理 1.1 进行迭代应用，使这一类比更为有力：我们可以证明，不相交集合上的大幅向上偏差也由某个 p 所对应的 Ber(p) 控制。下一定理中的随机变量 $\mathbf{R}_i$ 是某个集合 $Q_i \subset [s]$ 上发生大幅向上偏差的指示函数。

推论 3.5. 假设 $(X_1, \dots, X_s)$ 由 Ber(p) 控制。给定阶数相同的不相交子集 $Q_1, \dots, Q_m \subseteq [s]$，固定 $\delta > 0$ 并定义二元随机变量

$$\mathbf{R}_i := \left\{ \sum_{j\in Q_i} \mathbf{X}_j > (1+\delta)p|Q_i| \right\},$$

对 $i \in [m]$。令 q 为定理 3.3 给出的 $\mathbb{P}[\mathbf{R}_i = 1]$ 的上界。则 $(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_m)$ 由 Ber(q) 控制。

证明。考虑 $J \subseteq [m]$；我们希望证明

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i\in J} \mathbf{R}_i\right] \le q^{|J|}.$$

为此，令 $I := \cup_{j\in J} Q_j \subset [s]$ 并注意到，根据假设和定理 3.3，我们有

$$\mathbb{P}\left[\sum_{i\in I} \mathbf{X}_i > (1+\delta)p|I|\right] \le \left[\frac{\mathrm{e}^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right]^{p|I|} = \prod_{j\in J}\left[\frac{\mathrm{e}^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right]^{p|Q_j|} = q^{|J|}.$$

我们注意到，如果对所有 $j \in J$ 都有 $\mathbf{R}_j = 1$，那么可推出 $\sum_{i\in I} \mathbf{X}_i > (1+\delta)p|I|$。为得出结论 □

现在我们证明，独立集中的顶点出现短列表的情况，对于适当的 p，是由 Ber(p) 支配的。这对于定理 2.7 和定理 2.8 都至关重要，并且在其他研究中也可能有许多应用。定理 3.6 可以看作定理 1.1 中 (1) 的强化。在定理 1.1 中，我们可以通过应用一次归纳假设推导出 (1)；而深入归纳过程则允许我们推导出以下更强的结论。

定理 3.6。设 ε、Δ、k、ℓ 和 G 如定理 1.1 中所述。令 $0 < p < 1$，并令 I 为 G 的一个独立集。令 $\boldsymbol{\sigma}$ 为 G 的一个均匀随机适当 k- 着色。则对于 $v \in I$，随机变量 $\mathbf{X}_v := \{\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v) \le p\ell\}$ 由 Ber(p) 支配。

证明。设 $J \subseteq I$，并将 J 的顶点标记为 $\{v_i\}_{i\in[s]}$。对于任意图 $H \subseteq G$，我们可以应用定理 1.1，得到：对所有 $v \in V(H)$，如果从 $\mathscr{C}(H \setminus v)$ 中均匀随机抽取 $\boldsymbol{\sigma}$，则 $\mathbb{E}[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v)] \ge \ell$。换言之，我们有 $|\mathscr{C}(H)| \ge \ell|\mathscr{C}(H \setminus v)|$。反复应用这一恒等式可得 $|\mathscr{C}(G)| \ge |\mathscr{C}(G \setminus J)|\ell^s$。因此我们有

$$\mathbb{E}\left[\prod_{v\in J} \mathbf{X}_v\right] = \frac{\#\{\sigma \in \mathscr{C}(G) : \ell_\sigma(v_1), \dots, \ell_\sigma(v_s) \le p\ell\}}{|\mathscr{C}(G)|} \le \frac{|\mathscr{C}(G \setminus J)| \cdot (p\ell)^s}{|\mathscr{C}(G \setminus J)| \cdot \ell^s} = p^s.$$

上述不等式中分子的上界来自两个依赖于 J为独立集的事实。首先，给定一个着色 $\sigma_0 \in \mathscr{C}(G \setminus J)$，将 σ_0扩展为着色 $\sigma \in \mathscr{C}(G)$的方法数为 $\prod_{v\in J} \ell_{\sigma_0}(v)$。其次，给定这样的扩展 σ，对于每个 $v \in J$，都有 $\ell_\sigma(v) = \ell_{\sigma_0}(v)$。因此，我们得出 $(\mathbf{X}_v)_{v\in I}$ 受 Ber(p) 支配。□

利用定理 3.6 以及邻域诱导独立集这一事实，我们可以证明短列表出现概率的以下指数上界。这还需要引理 3.7，其证明改编自 [Mol19 的引理 7]，并推迟至附录中给出。

引理 3.7. 设 G 是一个无三角形图，设 $v \in V(G)$，且 σ_0 是 $G \setminus N[v]$ 的一个适当的 k-着色（其中 k），并且至少有一个扩展到 G。那么，若 $\boldsymbol{\sigma}$ 是将 σ_0 均匀随机扩展到 G所得的扩展，记 $\ell := \mathbb{E}[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v)],$，则有

$$\mathbb{P}[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v) \le (1-\delta)\ell] \le \mathrm{e}^{-\frac{\delta^2\ell}{2}},$$

对所有 $\delta \in (0,1)$ 均成立。

推论 3.8. 设 ε、Δ、k、ℓ 和 G 与定理 1.1 中相同。那么，对所有 $\delta \in (0,1)$ 以及 $v \in V(G)$

$$\mathbb{P}[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v) < (1-\delta)\ell] \le 2\mathrm{e}^{-\frac{\delta^2\ell}{2}},$$

其中 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $G \setminus v$的均匀随机 k-着色。

证明。对于每个 $u \in N(v)$，我们令 B_u 表示 u 具有短列表的随机事件，即对于 $t := \lceil 5/\varepsilon \rceil$，$\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(u) \le t$。由于 G 是无三角形的，$N(v)$ 是一个独立集。因此，根据定理 3.6，事件 $(B_u)_{u\in N(v)}$ 受到 $\mathrm{Ber}(t/\ell)$ 的支配。应用定理 3.3，我们得到 v 的邻点中有超过 $6t\Delta/\ell$ 个具有短列表的概率至多为 $\mathrm{e}^{-6t\Delta/\ell}$。

现在，令 σ_0 为 $\boldsymbol{\sigma}_{|G\setminus N[v]}$ 的一个可能实现，使得在 σ_0 中，v的邻点中具有短列表的不超过 $6t\Delta/\ell$ 个。当 Δ 足够大时，这至多为 $\varepsilon k/5$。在这种情况下，我们可以重复定理 1.1 的证明中的计算，并得到

$$\mathbb{E}\left[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v) \mid \boldsymbol{\sigma}_{|G\setminus N[v]} = \sigma_0\right] \ge \ell.$$

应用引理 3.7，我们得到

$$\mathbb{P}\left[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v) \le (1-\delta)\ell \mid \boldsymbol{\sigma}_{|G\setminus N[v]} = \sigma_0\right] \le \mathrm{e}^{-\frac{\delta^2\ell}{2}}.$$

因此，$\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v) \le (1-\delta)\ell$ 的总概率至多为 $\mathrm{e}^{-6t\Delta/\ell} + \mathrm{e}^{-\frac{\delta^2\ell}{2}} \le 2\mathrm{e}^{-\frac{\delta^2\ell}{2}}$ □

值得注意的是，定理 3.6 无法得到更强的形式，即将伯努利支配替换为负相关。事实上，给定一个图 G，如果 $u, v \in N(v)$ 具有相同的邻域，那么 u 和 v 的列表就完全相关。

我们以证明以下自举渗流结果结束本小节，该结果或许也具有独立的研究价值。设定如下。考虑一棵深度为 f 的有根 Δ 叉树 T。也就是说，从根节点 r 开始构造这棵树，添加 Δ 个子节点，然后为每个叶节点添加 Δ 个子节点，如此重复共 f 次,~~使得 r~~ 到每个 Δ^f 叶节点的距离恰好为 f。在第 1 步，我们随机激活叶节点的一个子集。在每一步$i \ge 2$，如果某个顶点至少有 s 个子节点在第 $i-1$ 步被激活，我们就激活该顶点。我们称此过程为 s-向上渗流。显然，该过程至多经过 f ~~步便会达到稳定状态~~。我们关注过程结束时根节点 r 被激活的概率。注意，一旦选定要激活哪些叶节点，该过程便是确定性的。我们关注的是叶节点的激活概率受 $\mathrm{Ber}(p)$ 支配的情形。

我们注意到，激活事件由 $\mathrm{Ber}(p)$ 支配至关重要。事实上，对手只需激活 s^f 个叶节点即可激活根节点；若 $s < \Delta$，那么当 $f \to \infty$ 时，这只占所有叶节点中趋于零的比例。然而，要做到这一点，对手激活的叶节点必须是某棵 s 叉树的叶节点。这是一种熵极低的策略，我们可以利用由 $\mathrm{Ber}(p)$ 支配的随机变量的重整化性质（推论 3.5）证明这种情况极不可能发生。

引理 3.9。设 $0 < p < 1$ 为一个实数值，且 $\Delta \geq 2$、 $s \geq \max\{6p\Delta, 3\ln\ \Delta\}$ 和 $f \geq 1$ 均为整数。假设我们在一棵深度为 f、以顶点 r 为根的 Δ 叉树 T 上进行 s-向上渗流，其中叶节点被激活的事件由 $\mathrm{Ber}(p)$ 支配。那么我们有 [8]

$$\mathbb{P}\left[r \text{ is activated}\right] \leq \exp\left(-s^{\lceil f/2\rceil}\right).$$

证明。给定一个顶点 $v \in V(T)$，令 $T[v]$ 表示以 v为根、位于 T中的唯一 Δ元子树。对于每个 $i \leq f$，我们令 $V_i(T)$ 表示 T中深度为 i的节点集合（特别地，有 $V_0(T) = \{r\}$）。如果 r 被激活，则 T 中存在一个深度为 f、仅包含已激活顶点的 s元子树。特别地，在每个深度 $i \leq f$ 处，至少有 s^i 个已激活顶点。由此我们得到，对于每个固定的 $i \leq f$，有

$$\mathbb{P}\left[r \text{ is activated}\right] \leq \mathbb{P}\left[V_i(T) \text{ contains at least } s^i \text{ activated vertices}\right].$$

令 $T_1, \ldots, T_n$为一组互不相交的深度为 f的树，其根分别为 $r_1, \ldots, r_n$。我们分别对它们执行 s向上渗流，并假设叶节点被激活这一事件由 $\mathrm{Ber}(p)$ 支配。记 A_j 为对每个 $j \in [n]$而言 r_j 被激活这一随机事件。我们将通过对 f 进行归纳法证明，事件 (A_j) 由 $\mathrm{Ber}(q)$ 支配，其中 $q = \exp(-s^{\lceil f/2\rceil})$。在基本情形 $f = 1$下，对于每个 $j \in [n]$，我们有

$$\mathbb{P}\left[r_j \text{被激活}\right] \leq \mathbb{P}\left[V_1(T_j) \text{ 至少包含 } s \text{ 个已激活的顶点}\right] \leq \mathrm{e}^{-s} = q,$$

根据定理 3.3，取 $\mu := p\Delta$ 和 $\sigma := s \geq 6\mu$。我们处于推论 3.5 的情形，因此事件 (A_j) 被 $\mathrm{Ber}(q)$ 支配。

现在假设 $f \geq 2$，并固定 $i := \lceil f/2\rceil$。考虑任意一棵用于 $j \in [n]$的树 T_j。对于每个 $x \in V_i(T_j)$，令 A_x 表示 x 被激活这一事件。我们对深度为 $f - i \geq (f-1)/2$ 的树的集合 $T_j[x]$ 使用归纳法，其中 $x \in V_i(T_j)$，并得到事件 $(A_x)_{x \in V_i(T_j)}$被 $\mathrm{Ber}(q')$ 支配，其中 $q' = \exp(-s^{\lceil (f-1)/4\rceil})$。我们应用定理 3.3，取 $\mu := q'\Delta^i$ 和 $\sigma := s^i$，得到

$$\mathbb{P}\left[r_j \text{ is activated}\right] \leq \mathbb{P}\left[V_i(T_j) \text{ contains at least } s^i \text{ activated vertices}\right] \leq \mathrm{e}^{-s^i},$$

如果我们能够证明 $\sigma \geq 6\mu$。我们再次处于推论 3.5 的情形，因此事件 $(A_j)_{j\in[n]}$ 由 $\mathrm{Ber}(q)$-支配，并满足 $q = \exp(-s^{\lceil f/2\rceil})$，正如所需。

现在我们证明 $\sigma \geq 6\mu$。如果 $f \leq 5$，则有 $q' = \mathrm{e}^{-s}$ 以及 $i \leq 3$，因此这归结为 $(s/\Delta)^3 \geq 6\mathrm{e}^{-s}$。由于 $s^3 \geq (3\ln 2)^3 > 6$，只需证明 $\mathrm{e}^s \geq \Delta^3$，而这由关于 s 的假设成立。如果 $f > 5$，则只需证明 $s^{\lceil (f-1)/4\rceil} \geq \lceil f/2\rceil \ln\ \Delta$。由于 $s \geq 3\ln\ \Delta \geq 2$，只需证明 $2^{\lceil (f-5)/4\rceil} \geq \frac{1}{3}\lceil f/2\rceil$。容易检查出，这对每个整数$f > 5$都成立。□

3.3. 定理 2.7 和定理 2.8 的证明。利用推论 3.8 给出的短列表概率尾界，我们可以证明定理 2.7。

定理 2.7 的证明。固定一个顶点 $v \in V(G)$，并令 $\boldsymbol{\sigma}$ 为 $G \setminus v$ 的均匀随机 k-着色。我们实际上将证明，以高概率（相对于 Δ），对于每个 $u \in N(v)$，都有 $\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(u) \geq 2$。在此条件下，对于每种颜色 $x \in [k]$，我们可以依次从 $L_{\boldsymbol{\sigma}}(u)$ 中重新抽样 $\boldsymbol{\sigma}(u)$，对每个 $u \in N(v)$ 都如此（因为 $N(v)$ 是一个独立集，所以列表 $(L_{\boldsymbol{\sigma}}(u))_{u\in N(v)}$ 不受此次重新抽样的影响）。接着，我们可以令 $\boldsymbol{\sigma}(v) \leftarrow x$。这证明 v 既是 $(\Delta+1)$-松弛的，也是解冻的。

对于每个 $u \in N(v)$，我们令 B_u 表示 u 的列表较短这一随机事件，即 $\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(u) \leq \ell/2$，其中 $\ell = \Delta^{\varepsilon/2}$。由推论 3.8 可得 $\mathbb{P}[B_u] \leq \mathrm{e}^{-\ell/8}$。因此，根据并合界，假设 Δ 足够大，则没有事件 B_u 发生的概率至少为 $1 - \Delta\mathrm{e}^{-\ell/8} \geq 1 - \mathrm{e}^{-\Delta^{\varepsilon/3}}$。结论得证。□

[8]通过更仔细的分析，可以将 $\lceil f/2\rceil$ 替换为 $(1 - o_f(1))\, f$。

借助引理 3.9 中陈述的渗流结果，我们可以概述定理 2.8 的证明。完整证明见附录。

定理 2.8 的证明概要。令 $g := (2+o(1))\ln\ln n/\ln\Delta$，并假设围长至少为 $2g+2$（当假设围长至少为 $\ln\ln\Delta$ 且 Δ 足够大时，这一条件成立）。我们先固定一个顶点 v，并从 $\boldsymbol{\sigma}$ 中抽样。然后，我们按层确定性地对距 v 为 g、$g-1$、$g-2$、.....的顶点重新着色（每层都是一个独立集），以尽可能增大下一层的列表大小。如果这一过程结束时，所有 $u \in N(v)$ 的列表中都至少有 2 种颜色，那么显然可以先对 v 的邻点重新着色，从而随心所欲地对 v 重新着色；这样一来 v 就解冻了，而且显然我们至多改变了 $\Delta^g = O\big((\ln n)^2\big)$ 个顶点的颜色。因此，v 也具有 $O\big((\ln n)^2\big)$-松弛性。利用推论 3.2，我们注意到，经过上述过程后，距 w 的距离为 $<g$ 的顶点 w 只有在其子节点中至少有 $s := \Omega(\Delta/\ln\Delta)$ 个拥有短列表时，才会拥有短列表。这使我们能够用以 u 为根的 $(\Delta-1)$ 元树上 s-向上渗流过程最终激活 u 的概率，来从上界估计 $u \in N(v)$ 拥有短列表的概率。由于距 v 为 g 的顶点 w 构成一个独立集，定理 3.6 告诉我们，这些 w 的短列表分布被 $\mathrm{Ber}(p)$ 所支配。因此，我们可以利用引理 3.9 中的渗流界，推导出所需结果。□

3.4. 构造。有人可能会想知道，定理 2.8 的陈述（以高概率所有顶点同时解冻）是否可以扩展到 G 为无三角形的情形（而不是围长为 $\ln\ln n$）。我们现在证明这是不可能的，即使 G 的围长是任意大的常数。

我们依赖于来自 [BBP21] 的以下构造。

命题 3.10（Bonamy、Bousquet、Perarnau；2021）。对于任意整数 d、$g \geq 3$，存在一个 d-正则图 G，其围长至少为 g，并且存在一个恰当的（$d+1$）-着色，其中每个顶点都是冻结的。

命题 3.11。设 $g \geq 3$ 为给定整数。那么对于每个足够大的整数 $d \geq 3$ 和 n，存在一个具有 n 个顶点的 d-正则图 G，其围长至少为 g；令 $\boldsymbol{\sigma}$ 为 G 的均匀随机恰当（$d+1$）-着色，则以高概率，$\boldsymbol{\sigma}$ 中存在 Θ（n）个冻结顶点，且 $n \to \infty$。

证明。设 G_0 为命题 3.10 给出的围长为 g 的 d-正则图 G。令 $n_0 := |V(G_0)|$，并令 $\sigma_0 \in \mathscr{C}_{d+1}(G_0)$ 使得每个顶点 $v \in V(G_0)$ 在 σ_0 中均被冻结。令 G 由 n/n_0 个 G 的不相交副本组成，并令 $\boldsymbol{\sigma}$ 为 G 的均匀随机合法着色。对于 G 中 G_0 的每个副本 H，令 E_H 表示 $\boldsymbol{\sigma}_{|V(H)} = \sigma_0$ 的事件。我们有 $\mathbb{P}[E_H] \geq 1/(d+1)^{n_0}$，且随机事件 (E_H) 相互独立。因此，G 中完全冻结的 G_0 的副本数量服从二项分布 $\mathcal{B}(n/n_0, (d+1)^{-n_0})$。根据 Chernoff-Hoeffding 界给出的标准估计（见引理 A.3），完全冻结的 G_0 的副本数少于 $2n_0^{\,n}(d+1)^{n_0}$ 的概率至多为 $\exp(-\frac{n}{8n_0\,d+1(\,)^{n_0}}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$。由此我们得出，$\boldsymbol{\sigma}$ 中冻结顶点的数量至少为 $\frac{1}{2}(d+1)^{-n_0}\cdot n = \Theta(n)$，正如 $n \to \infty$。□

4. 致谢

本研究有相当一部分是在 2021 年 3 月举行的“熵压缩及相关方法”在线研讨会期间完成的。我们感谢组织者 Ross J. Kang 和 Jean-S´ebastien Sereni，也特别感谢稀疏图联盟促成了这项工作。我们感谢 Felix Joos 为论文早期版本校对。我们还感谢 Matthieu Rosenfeld 和 Mike Molloy 提出的真知灼见。

References

[ABD21] James Anderson、Anton Bernshteyn 和 Abhishek Dhawan。带禁二部子图的图着色。arXiv预印本 arXiv:2107.05595，2021。

[ACO08] Dimitris Achlioptas 和 Amin Coja-Oghlan。相变带来的算法障碍。载于《2008年第49届IEEE计算机科学基础研讨会》，第793–802页。IEEE，2008年。[AIS19] Dimitris Achlioptas、Fotis Iliopoulos 和 Alistair Sinclair。超越Lov´asz局部引理：点集相关性及其算法应用。载于《2019年IEEE第60届计算机科学基础研讨会（FOCS）》，第725–744页。IEEE，2019年。[AKS99] Noga Alon、Michael Krivelevich 和 Benny Sudakov。稀疏邻域中的图着色。《组合理论杂志B辑》，77(1):73–82，1999年。[AM97] Dimitris Achlioptas 和 Michael Molloy。随机图上列表着色算法的分析。载于《第38届计算机科学基础年度研讨会论文集》，第204–212页。IEEE，1997年。[AM02] Dimitris Achlioptas 和 Cristopher Moore。几乎所有平均度为4的图都可3着色。载于《第三十四届ACM理论计算研讨会年会论文集》，第199–208页，2002年。[ART06] Dimitris Achlioptas 和 Federico Ricci-Tersenghi。关于随机约束满足问题的解空间几何。载于《第三十八届ACM理论计算研讨会年会论文集》，第130–139页，2006年。[AS16] Noga Alon 和 Joel H Spencer。《概率方法》。John Wiley & Sons，2016年。[BBCK21] Anton Bernshteyn、Tyler Brazelton、Ruijia Cao 和 Akum Kang。无三角形图的着色计数。arXiv预印本 arXiv:2109.13376，2021。[BBP21] Marthe Bonamy、Nicolas Bousquet 和 Guillem Perarnau。有界度图的冻结（$\delta+1$）着色。《组合学、概率与计算》，30(3):330–343，2021年。[Ber19] Anton Bernshteyn。DP着色的Johansson-Molloy定理。《随机结构与算法》，54(4):653–664，2019年。[BG08] Antar Bandyopadhyay 和 David Gamarnik。无需抽样的计数：某些统计物理模型的对数配分函数渐近性质。《随机结构与算法》，33(4):452–479，2008年。[BKNP18] Marthe Bonamy、Tom Kelly、Peter Nelson 和 Luke Postle。对于不含大团的图，将 χ 界定为 Δ 的一部分。arXiv预印本 arXiv:1803.01051，2018年。[CL16] P´eter Csikv´ari 和 Zhicong Lin。Sidorenko猜想、着色与独立集。arXiv预印本 arXiv:1603.05888，2016年。[Csi16] P´eter Csikv´ari。极值正则图：无限正则树的情形。arXiv预印本 arXiv:1612.01295，2016年。[DdJdVKP20] Ewan Davies、R´emi de Joannis de Verclos、Ross J Kang 和 Fran¸cois Pirot。利用局部列表大小为无三角形图着色。《随机结构与算法》，57(3):730–744，2020年。[DF86] Martin E Dyer 和 Alan M Frieze。快速求解若干随机NP难问题。载于《第27届计算机科学基础年度研讨会（SFCS 1986）》，第331–336页。IEEE计算机学会，1986年。[DKPS20] Ewan Davies、Ross J Kang、Fran¸cois Pirot 和 Jean-S´ebastien Sereni。通过局部占用刻画图结构。arXiv预印本 arXiv:2003.14361，2020年。[DP18] Zdenˇek Dvoˇr´ak 和 Luke Postle。对应着色及其在无4至8长度圈的平面图列表着色中的应用。《组合理论杂志B辑》，129:38–54，2018年。[FNV06] Zoltan F¨uredi、Assaf Naor 和 Jacques Verstra¨ete。关于六边形的Tur´án数。《数学进展》，203(2):476–496，2006年。[Gam21] David Gamarnik。重叠间隙性质：优化随机结构时的拓扑障碍。《美国国家科学院院刊》，118(41):e2108492118，2021年。[GK12] David Gamarnik 和 Dmitriy Katz。相关性衰减与用于图着色计数的确定性全多项式时间近似方案。《离散算法杂志》，12:29–47，2012年。[GˇSV16] Andreas Galanis、Daniel ˇStefankoviˇc 和 Eric Vigoda。反铁磁伊辛模型和硬核模型配分函数的不可近似性。《组合学、概率与计算》，25(4):500–559，2016年。[Ili19] Fotios Iliopoulos。随机局部搜索与Lovasz局部引理。加州大学伯克利分校，2019年。[Joh96] Anders Johansson。稀疏图的选择数。预备版本，1996年4月。[KMRT+07] Florent Krzaka la、Andrea Montanari、Federico Ricci-Tersenghi、Guilhem Semerjian 和 Lenka Zde- borov´a。随机约束满足问题的吉布斯态与解集。《美国国家科学院院刊》，104(25):10318–10323，2007年。[Kuˇc89] Ludˇek Kuˇcera。色数较小的图容易着色。《信息处理快报》，30(5):233–236，1989年。

[Mol12] Michael Molloy。随机图 k-着色的冻结阈值。载于第四十四届 ACM 计算理论研讨会论文集，第 921–930 页，2012 年。[Mol19] Michael Molloy。团数较小的图的列表色数。组合理论杂志B辑，134：264–284，2019年。[MT10] Robin A Moser 和 G´abor Tardos。一般 Lov´asz 局部引理的构造性证明。ACM杂志（JACM），57(2)：1–15，2010年。[MWW04] Brendan D McKay、Nicholas C Wormald 和 Beata Wysocka。随机正则图中的短圈。电子组合学杂志，第 R66–R66 页，2004 年。[PS97] Alessandro Panconesi 和 Aravind Srinivasan。通过扩展 Chernoff–Hoeffding 界实现随机化分布式边着色。SIAM计算杂志，26(2)：350–368，1997年。[PS21] Fran¸cois Pirot 和 Jean-S´ebastien Sereni。分数色数、最大度与围长。SIAM离散数学杂志，35(4)：2815–2843，2021。[Ros20] Matthieu Rosenfeld。关于有界度图非重复着色的另一种方法。电子组合学杂志，第 P3–43 页，2020年。[SSSZ20] Ashwin Sah、Mehtaab Sawhney、David Stoner 和 Yufei Zhao。反向Sidorenko不等式。数学新进展，221(2)：665–711，2020年。[Tur88] Jonathan S Turner。几乎所有 k-可着色图都易于着色。算法杂志，9 82，1988 1 63( ): – 。[Vu02] Van H Vu。局部稀疏图列表色数的一般上界。组合学、概率与计算，11(1)：103–111，2002年。[Wei06] Dror Weitz。计数独立集，直至树阈值。载于第三十八届 ACM 计算理论研讨会论文集，第 140–149 页，2006 年。[Woo20] David R Wood。非重复图着色。arXiv 预印本 arXiv:2009.02001，2020年。[WW20] Ian M Wanless 和 David R Wood。超图着色的一般框架。arXiv 预印本 arXiv:2008.00775，2020年。[Zde08] Lenka Zdeborov´ 0806 4112, a。困难优化问题的统计物理。arXiv 预印本 arXiv: . .[ZK07] Lenka Zdeborov´a 和 Florent Krzakaa。随机图着色中的相变。《物理评论E》，76(3)：031131，2007年。

Appendix A. Remaining Proofs and Required Results

本节汇集其余的证明和结果。它们按照依赖关系的顺序编排，因此在使用每个结果之前，它都已被引用或证明。设 G 为一个图，且 $X \subset V(G)$。我们用 $G[X]$ 表示由 G 中的 X诱导的子图。我们需要以下简单观察。

引理 A.1. 设 H 为一个图， L 为 H 的列表赋值，使得对于每个顶点 $v \in V(H)$，都有 $|L(v)| \geq \deg(v) + 1$ 。若 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 H的一个均匀随机真 L-着色，那么给定某个颜色 $x \in \bigcup_{v\in V(H)} L(v)$，对于所有 $v \in V(H)$， $\boldsymbol{\sigma}(v) \neq x$ 的概率至少为

$$\prod_{v\in V(H)} \left(1 - \frac{1}{|L(v)| - \deg(v)}\right).$$

证明。由于 H 可以贪心地进行 L-着色，我们可以对 H均匀抽取一个真 L-着色 $\boldsymbol{\sigma}$ 。令$v \in V(H)$。对于每个 L-着色 σ' 的 $H' := H \setminus v$，有

$$\mathbb{P}\left[\boldsymbol{\sigma}(v) = x \mid \boldsymbol{\sigma}_{|H'} = \sigma'\right] \leq \frac{1}{|L(v)| - \deg(v)},$$

因为从 $L(v)$ 中移除 $\sigma'(N(v))$ 中的颜色后，对于 $\boldsymbol{\sigma}(v)$ 仍至少有 $|L(v)| - \deg(v)$ 种等概率的可能选择。对均匀随机的 L-着色进行抽样，然后将每个顶点的颜色重新抽样一次，即可得到该结果，因为所得的随机 L-着色也服从均匀分布。□

定理 2.10 的证明将依赖于优惠券收集引理的一个更高级版本；证明定理 1.1 时也需要用到该引理。该结论讨论的是颜色的期望数量

给定图的均匀随机列表着色 H 未使用的颜色数，其中输入是一个随机列表赋值 H。

引理 A.2（广义优惠券收集者引理）。设 H 是一个具有 n 个顶点的图，且 L 是 H 的随机列表赋值，使得 H 可确定性地进行 L-着色。固定某个 $t \geq 1$，并定义随机变量 $\mathbf{X} := \#\{v \in V(H) : |L(v)| < (\deg(v)+1)(t+1)\}$。设 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 H 的均匀随机 L-着色，并定义随机变量 $L_{\boldsymbol{\sigma}} := [k] \setminus \boldsymbol{\sigma}(V(H))$。则

$$\mathbb{E}\left[|L_{\boldsymbol{\sigma}}|\right] \geq k_0\, \mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{n}{k_0}}, \quad \textit{where } k_0 = k - \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right].$$

证明。固定 L 的一个实现 $(L(v))_{v\in V(H)}$。令 $S = \{v : |L(v)| < (\deg(v)+1)(t+1)\}$ 为具有短列表的顶点集合，令 $B = V(H) \setminus S$ 为具有长列表的顶点集合。注意，由于对于每个 $v \in B$ 都有 $|L(v)| \geq (\deg(v)+1)(t+1)$，因此我们有 $\frac{1}{|L(v)|-\deg(v)-1} \leq \left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{|L(v)|}$。结合这一观察与 Molloy [~~Moll9~~]，~~的一个~~结果，~~我们得~~到

$$\sum_{x\in[k]} \sum_{\substack{v\in B \\ x\in L(v)}} \frac{1}{|L(v)|-\deg(v)-1} \leq \left(1+\tfrac{1}{t}\right) \sum_{x\in[k]} \sum_{\substack{v\in B \\ x\in L(v)}} \frac{1}{|L(v)|} \leq \left(1+\tfrac{1}{t}\right) \sum_{v\in B} \sum_{x\in L(v)} \frac{1}{|L(v)|} \leq \left(1+\tfrac{1}{t}\right) n. \tag{5}$$

让我们固定 σ_0 的实现 $\boldsymbol{\sigma}_{|S}$，并令 $X_0 := [k] \setminus \sigma_0(S)$。注意到 $|X_0| \geq k - |S|$。我们定义 $\mathbf{X}_0 := X_0 \setminus \boldsymbol{\sigma}(B)$；注意，在 $\boldsymbol{\sigma}_{|S} = \sigma_0$ 的条件下，$\mathbf{X}_0$ 正是 $L_{\boldsymbol{\sigma}}$。对于每个 $v \in B$，令 $L_0(v) := L(v) \setminus \sigma_0(N(v) \cap S)$；因此我们有 $|L_0(v)| \geq |L(v)| - \deg_S(v)$。在给定 $\boldsymbol{\sigma}_{|S} = \sigma_0$ 的条件下，$\boldsymbol{\sigma}$ 诱导出 $H[B]$ 的一个均匀随机 L_0-着色 $\boldsymbol{\sigma}_1$。我们对 $H[B]$ 应用引理 A.1，使用列表赋值 L_0，得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|\mathbf{X}_0|\right] &= \sum_{x\in X_0} \mathbb{P}\left[x \notin \boldsymbol{\sigma}_1(B)\right] \\
&\geq \sum_{x\in X_0} \prod_{\substack{v\in B \\ x\in L_0(v)}} \left(1 - \frac{1}{|L_0(v)| - \deg_B(v)}\right) \geq \sum_{x\in X_0} \prod_{\substack{v\in B \\ x\in L(v)}} \left(1 - \frac{1}{|L(v)| - \deg(v)}\right) \\
&\geq \sum_{x\in X_0} \exp\left(-\sum_{\substack{v\in B \\ x\in L(v)}} \frac{1}{|L(v)| - \deg(v) - 1}\right) && \text{since } 1-\tfrac{1}{z} > \mathrm{e}^{-\frac{1}{z-1}} \text{ for every } z>1; \\
&\geq |X_0| \exp\left(-\frac{1}{|X_0|} \sum_{x\in X_0} \sum_{\substack{v\in B \\ x\in L(v)}} \frac{1}{|L(v)| - \deg(v) - 1}\right) && \text{by convexity of exp}; \\
&\geq (k-|S|) \exp\left(-\frac{\left(1+\frac{1}{t}\right) n}{k-|S|}\right) && \text{by (5)}.
\end{aligned}$$

接下来还需对 L 的所有可能实现取平均。我们结合詹森不等式以及函数 $z \mapsto z\mathrm{e}^{-C/z}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上对每个 $C > 0$ 的凸性，得到

$$\mathbb{E}\left[|\mathbf{L}|\right] \geq \mathbb{E}\left[(k-\mathbf{X}) \exp\left(-\frac{\left(1+\frac{1}{t}\right) n}{k-\mathbf{X}}\right)\right] \geq \mathbb{E}\left[(k-\mathbf{X})\right] \exp\left(-\frac{\left(1+\frac{1}{t}\right) n}{\mathbb{E}\left[k-\mathbf{X}\right]}\right) = k_0 \mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{n}{k_0}},$$

其中 $k_0 = k - \mathbb{E}\left[\mathbf{X}\right]$。

□

在继续进行定理 2.10 的形式化证明之前，我们先描述其核心的随机实验。设 G 是一个图，且 $v \in V(G)$。我们希望证明，对于从 G' 的合法 k-着色集合中均匀随机抽取的 $\boldsymbol{\sigma} := G \setminus v$，在给定 $\boldsymbol{\sigma}$ 的情况下，v 处的可用颜色列表的期望很大。为此，我们分析以下随机过程。

（i）从 G' 中均匀随机选取一种正常 k着色；（ii）标记 $N(v)$ 中所有因 $G' \setminus N(v)$ 上的着色而拥有短列表的顶点；（iii）将 $N(v)$ 中所有未标记的顶点取消着色；（iv）从所有未着色的 $N(v)$ 顶点的正常重新着色中均匀随机选取一种。

方便的是，在该实验结束时得到的随机正常着色，再次在 G' 的所有正常着色中均匀分布。这是因为步骤（ii）中标记的顶点仅根据 $G' \setminus N(v)$ 的着色来选取，而该着色在步骤（i）之后保持不变。证明通过计算步骤（iv）之后 v 处可用颜色列表大小的期望下界，从而证明所需的归纳假设。为方便读者，我们再次陈述该定理。

定理 2.10。设 G 是一个 n 阶图，其最大度为 Δ，且 G 中由任一邻域诱导的图的平均度至多为 $d \le \frac{\Delta}{6} - 1$。记 $\rho := \Delta/(d+1)$，并令$\ell \ge (d+1)(\ln \rho)^3$。那么，对于每个列表赋值 $L\colon V(G) \to 2^{\mathbb{N}}$，满足

$$|L(v)| \ge \left(1 + \frac{2}{\ln \rho}\right) \frac{\deg(v)}{W\left(\frac{\deg(v)}{\ell}\right)}$$

对于每个顶点 $v \in V(G)$，以下结论成立。对于所有 $v \in V(G)$，$G \setminus v$ 的均匀随机适当L着色 $\boldsymbol{\sigma}$ 满足 $\mathbb{E}[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v)] \ge \ell$。

定理 2.10 的证明。固定 $\rho := \frac{\Delta}{d+1} \ge 6$, $t := (d+1)(\ln \rho + 1)$，以及 $\ell \ge (d+1)(\ln \rho)^3$。对于每个 $v \in V(G)$，令 $k(v) := \left(1 + \frac{2}{\ln \rho}\right) \deg(v) \Big/ W\left(\frac{\deg(v)}{\ell}\right)$。注意，$k(v) \ge \deg(v) \frac{\mathrm{e}^W}{W\left(\frac{\deg(v)}{\ell}\right)} = \ell \mathrm{e}^W (\deg(v)/\ell) \ge \ell$，因为$W(x) \ge 0$ 对每个 $x \ge 0$ 都成立。

令 L 为 G 的任意列表赋值，使得对于每个顶点 $v \in V(G)$，都有 $|L(v)| \ge k(v)$。令 $\mathscr{C}(H)$ 表示 H 的适当 L-着色集合。我们通过归纳法证明，对于所有诱导子图 $H \subseteq G$，都有

$$(\star) \qquad |\mathscr{C}(H)| \ge \ell\, |\mathscr{C}(H \setminus v)|,$$

对于所有 $v \in V(H)$。注意，给定一个着色 $\sigma \in \mathscr{C}(H \setminus v)$，将 σ 扩展为 $\mathscr{C}(H)$ 中某个着色的方式数恰为 $\ell_\sigma(v)$。因此，对于均匀随机着色 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{C}(H \setminus v)$，$(\star)$ 等价于 $\mathbb{E}[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v)] \ge \ell$。

当 $H = v$对于某个 $v \in V(G)$ 时，基本情形成立，因为我们有 $|\mathscr{C}(\varnothing)| = 1$，且 $|\mathscr{C}(H)| = k(v) \ge \ell$。现在假设 $|V(H)| \ge 2$，并且归纳假设（$\star$）对 H' 的所有诱导子图均成立：$= H \setminus v$。我们令 $\boldsymbol{\sigma}$ 从 $\mathscr{C}(H')$ 中均匀随机选取，并令 $\boldsymbol{\sigma}_0$ 通过取消 $\boldsymbol{\sigma}$对 $N_H(v)$ 的着色得到；因此，$\boldsymbol{\sigma}_0$是 H_0 的一个适当的 L-着色：$= H' \setminus N(v)$。对于每个 $u \in N_H(v)$，我们将 u在 $H[N_H(v)]$, 中的度记为 d_u，并令 $t_u :=$ $(d_u+1)(\ln \rho+1)$。因此，t_u 在所有 $u \in N_H(v)$ 上的平均值至多为 t。给定 $\boldsymbol{\sigma}$ 的实现，如果 v 的一个邻点 $u \in N(v)$ 满足 $\ell_{\boldsymbol{\sigma}_0}(u) \le t_u$，我们就称其具有一个短列表，并令 $S_{\boldsymbol{\sigma}}$为具有短列表的顶点 $u \in N(v)$的集合。首先，我们注意到 $S_{\boldsymbol{\sigma}}$ 的期望大小很小。根据归纳假设（$\star$），并再次利用将一个着色 σ 扩展到一个额外顶点 u 的扩展数量为 $\ell_\sigma(u)$ 这一观察，我们知道

$$(6) \qquad \mathbb{P}[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(u) \le t_u] = \frac{\#\{\sigma' \in \mathscr{C}(H') : \ell_{\sigma'}(u) \le t_u\}}{|\mathscr{C}(H')|} \le \frac{t_u \cdot |\mathscr{C}(H' \setminus u)|}{\ell \cdot |\mathscr{C}(H' \setminus u)|} \le \frac{t_u}{\ell}.$$

将（6）对所有 $u \in N(v)$ 求和，并且由于对于每个 $u \in N(v)$ 都有 $\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(u) \leq \ell_{\boldsymbol{\sigma}_0}(u)$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|S_{\boldsymbol{\sigma}}|\right] &= \sum_{u\in N(v)} \mathbb{P}\left[\ell_{\boldsymbol{\sigma}_0}(u) \leq t_u\right] \leq \sum_{u\in N(v)} \mathbb{P}\left[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(u) \leq t_u\right] \leq \sum_{u\in N(v)} \frac{t_u}{\ell} \\ &\leq \frac{t\deg(v)}{\ell} \leq \frac{1}{\ln\rho}\,\frac{\deg(v)}{\ln\rho - 1} \leq \frac{1}{\ln\rho}\,\frac{\deg(v)}{W\left(\frac{\deg(v)}{\ell}\right)},\end{aligned}$$

其中我们利用了 $\ln\,\rho - 1 \geq W(\rho/(\ln\,\rho)^3) \geq W(\deg(v)/\ell)$，因为 $\rho \geq 6$。为此，注意函数 $x \mapsto \ln\,x - 1 - W(x/(\ln\,x)^3)$ 在 $x \in (1,+\infty)$ 上递增，并且在 $x = 6$ 处取正值。

现在我们将引理 A.2 应用于图 $H[N(v)]$，该图有 $\deg(v)$ 个顶点，采用随机列表赋值 $L_{\boldsymbol{\sigma}_0}$，其中颜色已重新命名，使得 $L(v) = [k(v)]$。令 $\boldsymbol{\sigma}_1$ 为 $L_{\boldsymbol{\sigma}_0}$ 的一个均匀随机着色，其中 $H[N(v)]$；由引理 A.2 可得

$$\mathbb{E}\left[\ell_{\boldsymbol{\sigma}_1}(v)\right] \geq k_0 \mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{\ln\rho}\right)\frac{\deg(v)}{k_0}}, \tag{7}$$

其中 $k_0 = k(v) - \mathbb{E}\left[|S_{\boldsymbol{\sigma}}|\right] \geq \left(1 + \frac{1}{\ln\rho}\right)^{\deg(v)} W\left(\frac{\deg(v)}{\ell}\right)$。我们注意到，根据构造，$\boldsymbol{\sigma}_0 \cup \boldsymbol{\sigma}_1$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 同分布，因此可得

$$\mathbb{E}\left[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v)\right] = \mathbb{E}\left[\ell_{\boldsymbol{\sigma}_1}(v)\right] \geq \left(1 + \frac{1}{\ln\rho}\right)\frac{\deg(v)}{W\left(\frac{\deg(v)}{\ell}\right)}\mathrm{e}^{-W\left(\frac{\deg(v)}{\ell}\right)} = \left(1 + \frac{1}{\rho}\right)\ell.$$

至此，归纳法的证明结束。 □

现在我们证明定理 2.10 直接推出推论 2.11。

推论 2.11. 设 G 是一个最大度为 Δ的图，且每个邻域至多张成 Δ^2/f 条边，其中 $1 \leq f \leq \Delta^2 + 1$ 为某个值。那么 $\chi_\ell(G) \leq (1 + o(1))\,\frac{\Delta}{\ln\min\{\Delta, f\}}$，当 $f \to \infty$时。

推论 2.11 的证明。设 G 满足推论 2.11 的假设。众所周知，存在一个 Δ-正则图 H 以及一个映射 $\varphi\colon V(H) \to V(G)$，使得 G 是 H 的诱导子图，并且对于每个顶点 $v \in V(H)$，$H[N(v)]$ 中的边数等于 $G[N(\varphi(v))]$中的边数（例如，参见 [PS21，引理 6]中的构造）。因此，我们可以假设 G 是正则图。于是，对于每个 $v \in V(G)$，$G[N(v)]$ 中的平均度至多为 $d := 2\Delta/f$。我们有

$$\frac{\Delta}{d+1} = \frac{\Delta f}{f + 2\Delta} \geq \begin{cases} \frac{f}{3} & \text{if } f \leq \Delta, \\ \frac{\Delta}{3} & \text{if } f \geq \Delta. \end{cases}$$

令 $\rho := \frac{\Delta}{d+1} \geq \min\{f/3, \Delta/3\}$，设 $L\colon V(G) \to 2^{\mathbb{N}}$ 是 G 的任意列表赋值，其中$|L(v)| \geq (1 + 2/\ln\,\rho)\,W(\rho/(\ln\rho)^3)$。根据定理 2.10，$G$ 是 L-可着色的。因此

$$\chi_\ell(G) \leq \left(1 + \frac{2}{\ln\rho}\right)\frac{\Delta}{W\left(\frac{\rho}{(\ln\rho)^3}\right)} \leq (1 + o(1))\frac{\Delta}{\ln\min\{\Delta, f\}},$$

因为 $f \to \infty$（因此 $\Delta \to \infty$ 也成立）。 □

接下来我们证明定理 2.12，该定理给出了在定理 2.10 的情形下图的着色数量的下界。

定理 2.12. 设 G 是一个最大度为 Δ 的 n-顶点图，并且 G 中由邻域诱导的每个图的平均度至多为 $d \leq \frac{\Delta}{6} - 1$。设 $f := \Delta/(d+1)$，并假设 $L\colon V(G) \to 2^{\mathbb{N}}$ 是一个列表赋值，满足 $|L(v)| \geq \left(1 + \frac{1}{\ln \rho}\right) q(v)$，其中

$$q(v) \geq \left(1 + \frac{1}{\ln \rho}\right) \frac{\deg(v)}{W\left(\frac{\deg(v)}{(d+1)(\ln \rho)^3}\right)}$$

对于每个顶点 $v \in V(G)$。那么，G 至少有 $(q/\sqrt{D}/(d+1))^n$ 个适当的 L-着色，其中 D 是 G 中各顶点度的几何平均数，而 q 是 $\{q(v)\}_{v \in V(G)}$ 的几何平均数。

定理 2.12 的证明。沿用定理 2.10 的证明中的相同设置，对于每个顶点 $v \in V(H)$，我们有 $k_0 = k(v) - \mathbb{E}[|S_{\boldsymbol{\sigma}}|] \geq q(v)$。我们还注意到，在 (7) 中，可以用 $\deg_H(v)$ 替换 $\deg(v)$。于是

$$\mathbb{E}[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v)] \geq k_0 \mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{\ln \rho}\right)\frac{\deg_H(v)}{k_0}} \geq q(v) \mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{\ln \rho}\right)\frac{\deg_H(v)}{q(v)}}. \tag{8}$$

现在令 $v_1, \ldots, v_n$ 为 $V(G)$ 的一个排序，使得 $(q(v_i))_{i=1}^n$ 非递减。令 H_1 为空图，并且对每个 $2 \leq i \leq n$，令 $H_i := G[v_1, \ldots, v_{i-1}]$，我们将 (8) 应用于每个 $1 \leq i \leq n$ 对 (H_i, v_i)，得到 G 的 L-着色数为

$$\begin{aligned}
|\mathscr{C}(G)| &\geq \prod_{i=1}^{n} q(v_i) \mathrm{e}^{-\left(1+\frac{1}{\ln \rho}\right) \deg_{H_i}(v_i)/q(v_i)} \\
&= q^n \exp\left(-\left(1 + \tfrac{1}{\ln \rho}\right) \sum_{uv \in E(G)} \min\left\{\frac{1}{q(u)}, \frac{1}{q(v)}\right\}\right) \\
&\geq q^n \exp\left(-\left(1 + \tfrac{1}{\ln \rho}\right) \sum_{uv \in E(G)} \left(\frac{1}{2q(u)} + \frac{1}{2q(v)}\right)\right) \\
&= q^n \exp\left(-\left(1 + \tfrac{1}{\ln \rho}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{\deg(v_i)}{2q(v_i)}\right) \\
&\geq q^n \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{\deg(v_i)}{d+1}\right) = q^n \left(\frac{D}{d+1}\right)^{-n/2}.
\end{aligned}$$

□

让我们回顾一下引理 3.7 的陈述。

引理 3.7. 设 G 是一个无三角形图，设 $v \in V(G)$，且 σ_0 是 $G \setminus N[v]$ 的一个适当的 k-着色（其中 k），并且至少存在一个扩展到 G。那么，若 $\boldsymbol{\sigma}$ 是将 σ_0 均匀随机扩展到 G的结果，记 $\ell := \mathbb{E}[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v)],$，则有

$$\mathbb{P}[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v) \leq (1-\delta)\ell] \leq \mathrm{e}^{-\frac{\delta^2 \ell}{2}},$$

对所有 $\delta \in (0, 1)$ 均成立。

这在 [Mol19 的引理 7] 中，针对适当的部分 k 着色得到了证明。为完整起见，我们重复这一证明；在引理 3.7 的背景下，该证明几乎可以直接成立。特别地，我们将用到 [Mol19 引理 3(b)] 中陈述的 Chernoff-Hoeffding 界。若一组二元随机变量 $(\mathbf{Y}_i)_{i \in [s]}$ 满足以下条件，我们称它们为负相关：

$$\mathbb{E}\left[\prod_{i \in [s]} \mathbf{Y}_i\right] \leq \prod_{i \in [s]} \mathbb{E}[\mathbf{Y}_i].$$

引理 A.3。设 $X_1, \dots, X_s$ 为二元随机变量。令 $Y_i := 1 - X_i$，且 $X := \sum_{i\in[s]} X_i$。记 $\mu := \mathbb{E}[X]$。若 $(Y_i)_{i\in[S]}$ 为负相关，则对所有 $0 < \delta < 1$，

$$\mathbb{P}[\mathbf{X} \le (1-\delta)\mu] \le e^{-\frac{\delta^2\mu}{2}}.$$

引理 3.7 的证明。对于每个 $x \in L(v)$，我们将 $x \notin L_{\boldsymbol{\sigma}}(v)$ 的事件记为 E_x。我们首先说明，事件 $(E_x)_{x\in L(v)}$ 是负相关的，即

$$\mathbb{P}\left[\bigwedge_{x\in X} E_x\right] \le \prod_{x\in X} \mathbb{P}[E_x], \tag{9}$$

对于每个 $X \subseteq L(v)$。首先注意，如果对某个 $x \in X$ 有 $\mathbb{P}[E_x] = 0$，那么 (9) 显然成立，因为两项都等于零。其次，如果对某个 $x \in X$ 有 $\mathbb{P}[E_x] = 1$，那么 (9) 等价于从 X 中移除 x 后的相应命题。因此，为了证明 (9)，我们来证明：对于每个 $x \in L(v)$ 和 $Y \subseteq L(v) \setminus x$，都有 $\mathbb{P}\left[E_x \,\middle|\, \bigwedge_{y\in Y} E_y\right] \le \mathbb{P}[E_x]$，其中假设 $0 < \mathbb{P}[E_x] < 1$。这等价于

$$\mathbb{P}\left[\bigwedge_{y\in Y} E_y \,\middle|\, \overline{E_x}\right] \ge \mathbb{P}\left[\bigwedge_{y\in Y} E_y\right]. \tag{10}$$

我们用耦合论证证明 (10) 成立[9]。对于每个 $u \in N(v)$，我们定义 $\boldsymbol{\sigma}'(u)$：若 $\boldsymbol{\sigma}(u) \neq x$，则为 $= \boldsymbol{\sigma}(u)$；否则，$\boldsymbol{\sigma}'(u)$ 从 $L(u)\setminus x$ 中均匀随机抽取（该集合非空，否则就会有 $\mathbb{P}[E_x] = 1$）。于是，$\boldsymbol{\sigma}'$ 的分布与在条件 $\overline{E_x}$ 下的 $\boldsymbol{\sigma}$ 的分布相同。此外，根据构造，每当我们有 $Y \subseteq \boldsymbol{\sigma}(N(v))$ 时，就必然有 $Y \subseteq \boldsymbol{\sigma}'(N(v))$。因此

$$\mathbb{P}\left[\bigwedge_{y\in Y} E_y \,\middle|\, \overline{E_x}\right] = \mathbb{P}\left[Y \subseteq \boldsymbol{\sigma}'(N(v))\right] \ge \mathbb{P}[Y \subseteq \boldsymbol{\sigma}(N(v))] = \mathbb{P}\left[\bigwedge_{y\in Y} E_y\right],$$

如所求。

为完成证明，我们应用引理 A.3。$\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v)$ 是满足 E_x 不成立的颜色 $x \in L(v)$ 的数量；由于我们已经证明事件 $(E_x)_{x\in L(v)}$ 负相关，因此可推得

$$\mathbb{P}[\ell_{\boldsymbol{\sigma}}(v) \le (1-\delta)\ell] \le \mathrm{e}^{-\frac{\delta^2\ell}{2}},$$

如所求。 □

最后，我们给出定理 2.8 的完整详细证明。该定理是关于高围长图着色解空间几何性质的核心结果。

定理 2.8. 对所有 $\varepsilon > 0$，当 k 足够大且 $\Delta \le (1-\varepsilon)k\ln k$ 时，以下结论成立。设 G 是一个有 n 个顶点、最大度为 Δ 且围长至少为 $\ln\ln n$ 的图。那么，对于 G 的均匀随机适当 k-着色 $\boldsymbol{\sigma}$，以高概率，对每个 $v \in V(G)$，以下结论成立：

(1) 在 $\boldsymbol{\sigma}$ 中，v 是 $O\big((\ln n)^2\big)$-松弛的[10]；(2) 在 $\boldsymbol{\sigma}$ 中，v 已解冻。

定理 2.8 的证明。固定一个顶点 $v \in V(G)$。记 $s := \frac{\varepsilon k}{5} \ge \frac{\varepsilon}{5}\frac{\Delta}{\ln\Delta}$，以及 $g := \lceil 2\ln\ln n^3 \ln(s-1) + 1 \rceil$。当 Δ 足够大时，我们有 $2g + 2 \le \ln\ln n$。令 U_i 表示与 v 距离恰为 i 的顶点集合。因此 $U_1 = N(v)$；由于 G 的围长至少为 $2g+2$，对于每个 $i \le g$，U_i 都是一个独立集。令 σ_0 从 $\mathscr{C}_k(G)$ 中均匀随机选取。我们将证明，以至少 $1 - 1/n^2$ 的概率，可以找到一个序列 $\sigma_1, \dots, \sigma_{g-1} \in \mathscr{C}_k(G)$，满足以下性质：

[9]在此结论的早期证明中并未出现这种耦合，而是假设了 (10)。[10]通过更细致（且技术性更强）的分析，作者认为这可以替换为 $O(\ln n)$-松弛。

(1) 对所有 $i \in [g-1]$, $\sigma_{i|V(G)\setminus U_{g-i+1}} = \sigma_{i-1|V(G)\setminus U_{g-i+1}}$ 均成立；(2) 对所有 $u \in N(v)$, $\ell_{\sigma_{g-1}}(u) > 5/\varepsilon$。

我们按如下方式（确定性地）构造序列。给定 σ_{i-1}，对于 $i \in [g-1]$，我们令 $\sigma_i \in C_k(G)$ 取值，使得在给定 $\sigma_{i|V(G)\setminus U_{g-i+1}} = \sigma_{i-1|V(G)\setminus U_{g-i+1}}$ 的条件下，对所有 $w \in U_{g-i}$, $\ell_{\sigma_i}(w)$ 最大。注意到，由于 U_{g-i+1} 中的每个顶点都恰好与 U_{g-i} 中的一个顶点相邻，因此我们可以同时对所有 $w \in U_{g-i}$ 最大化 $\ell_{\sigma_i}(w)$。

我们先处理 G 是 Δ-正则的情形，为方便起见，记 $\ell_{\sigma_i}(u)$ 为 $\ell_i(u)$。现在假设对于某个 $u \in U_{g-i}$, $\ell_i(u) \le 5/\varepsilon$（我们称 u 在 σ_i 中有一个短列表）。根据 σ_i 的定义，不存在着色 $\tau \in \mathscr{C}_k(G)$，使得对所有 $w \in V(G) \setminus U_{g-i+1}$ 和 $\ell_\tau(u) > 5/\varepsilon$, $\tau(w) = \sigma_{i-1}(w)$。当 Δ 足够大时，我们有 $\Delta^{\varepsilon/2} > 5/\varepsilon$，因此根据推论 3.2，对于 u 的至少 s 个邻点 w，必有 $\ell_{i-1}(w) \le 5/\varepsilon$，其中至少有 $s-1$ 个位于 U_{g-i+1} 中。

我们现在观察以下事实。固定某个 $r \in N(v)$，令 T 为通过删除 v，然后考察 $G-v$ 中距离 r 不超过 $g-1$ 的诱导子图而得到的深度为 $g-1$ 的（$\Delta-1$）元树。令 $X := \{w \in U_g \cap V(T) : \ell_0(w) \le 5/\varepsilon\}$ 为 T 中在 σ_0 里具有短列表的叶节点。于是，仅当 u 最终在 T 上的（$s-1$）向上渗流中被激活时，$\ell_i(u) \le 5/\varepsilon$ 才成立，其中初始被激活的叶节点集合为 X。

我们知道 U_g 是一个独立集，因此根据定理 3.6，对于 $p = \frac{5}{\varepsilon\ell}$, $\ell_0(w) < 5/\varepsilon$ for$w \in U_g$ 的事件受 Ber(p)-支配，其中 $\ell = \Delta^{\varepsilon/2}$。因此，当 Δ 足够大时，我们有$s - 1 \ge \max\{6p\Delta, 3\ln\ \Delta\}$。我们应用引理 3.9，并取 $f = g-1$，得到

$$\mathbb{P}\left[\ell_{g-1}(r) \le 5/\varepsilon\right] \le \mathbb{P}\left[r \text{ is activated}\right] \le \exp\left(-(s-1)^{f/2}\right)$$
$$\le \exp\left(-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(g-1)\ln(s-1)}\right) \le \exp\left(-\mathrm{e}^{\ln\ln n^3}\right) = \frac{1}{n^3}.$$

对 v 的所有邻点 r 应用并合界，我们得到

$$\mathbb{P}\left[\ell_{g-1}(r) > 5/\varepsilon \text{ for every } r \in N(v)\right] \ge 1 - \frac{\Delta}{n^3} > 1 - \frac{1}{n^2}.$$

对所有 $v \in V$（G）应用并合界，可得以至少 $1-1/n$ 的概率，对每个 $v \in V$（G）都能找到所需的序列 $\sigma_0, \ldots, \sigma_{g-1}$。

现在注意，给定这样的着色 σ_{g-1}，我们可以先对每个 $r \in N$（v）重新着色，使其避开所需的颜色，然后将 v 改为任意其他颜色。因此，$\sigma_0, \ldots, \sigma_{g-1}$ 的存在意味着 v 在 σ_0 中已解冻，并且在 σ_0 中是 $O\big((\ln n)^2\big)$-松弛的，因为我们只需对距离 v 不超过 g 的顶点重新着色，而这些顶点至多有 $\Delta^g = O\big((\ln n)^2\big)$ 个。对 v 的所有选择应用并合界即可得到所需结果。

最后，我们处理 G 不是正则图的情形。对每个与 v 的距离小于$g+1$、且度小于 Δ 的顶点 w，我们只需添加以根节点为根的（$\Delta-1$）叉树，深度为 g，并将 w 与根节点相连，直到 w 的度达到 Δ。随后，我们将所有新添加的边视为不可见，也就是说这些边可以是单色的。因此，新添加顶点的列表始终只有 $[k]$，且它们的颜色不会影响其他任何顶点的列表。因此，我们再次得到这一关键性质：若某个顶点 $u \in U_{g-i}$ 具有 ℓ_i（u）$\le 5/\varepsilon$，则其子节点 w 中至少有 s 个具有 ℓ_{i-1}（w）$\le 5/\varepsilon$。此外，树 T 的叶节点具有短列表这一事件，再次由参数取相同值 p 的 Ber(p) 随机变量支配。由此，我们可以重复其余论证。

□

UNAFFILIATED*Email address*:
eoin.hurley@umail.ucc.ie
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY, FRANCE.
Email address: francois.pirot@lisn.fr