arXiv:2303.15382v1 [math.AG] 27 Mar 2023

大（反）典范丛簇的导出范畴中的张量三角范畴结构

ANGEL TOLEDO

Abstract. 设 X 是定义在 $\mathbb{C}$ 上、具有大（反）典范丛的光滑射影簇。已知在这种情况下，配备导出张量积$\otimes^{\mathbb{L}}_X$ 的 X 上的完美复形 $Perf(X)$ 所构成的张量三角范畴的 Balmer 谱可重构空间 X。本文研究可以赋予 $Perf(X)$ 的各种张量三角范畴结构。作为应用，我们证明了著名 Bondal-Orlov 重构定理的幺半版本。

Contents

1. 引言 2 2. 导出范畴与 Balmer 重构 4 2.1. 张量三角几何 6 3. 张量三角范畴与 Picard 群 10 参考文献 21

1. Introduction

在 [BO01], Bondal 和 Orlov 证明了，如果 X 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑射影簇，且具有充足（反）典范丛，那么其有界导出范畴 $D^b(X)$ 能够完全重构该空间。更准确地说，他们证明了

定理 1.1。 [BO01，定理 2。5] 设 X 是一个具有充足（反）典范丛的不可约光滑射影簇。若 $D^b(X) \simeq D^b(Y)$ 存在另一个光滑代数簇 Y，使得 $X \cong Y$。

这一结果与 Mukai 的发现形成鲜明对照（[Muk87]）：对于阿贝尔簇 A，存在一个三角范畴等价 $D^b(A) \simeq D^b(\hat{A})$，使得 A 的有界导出范畴 $\hat{}$ 与其对偶 A的有界导出范畴等价。

这一观察引发了对如今所谓的给定簇 X 的傅里叶-穆凯伙伴的研究，即那些与 X 的有界导出范畴三角等价的簇。

Bondal 和 Orlov 的重构结果指出，簇上的一个（双有理）几何条件能够对这些导出等价施加一定限制。基于这一点，Kawamata 将该定理推广到具有大（反）典范丛的簇，从几何角度阐明了这一条件在导出范畴可能存在的等价中所起的作用。具体而言，他证明了：

定理 1.2。 [Kaw02，定理 1。4] 设 X，Y 是光滑射影簇，且存在一个等价

$$\mathcal{F} : D^b(X) \xrightarrow{\simeq} D^b(Y)$$

作为三角范畴，则

(1) $\dim X = \dim Y$。(2)若典范除子 K_X 是数值有效的，则 K_Y 也如此，且数值 Kodaira 维数 $\nu(X)$ 与 $\nu(Y)$相等。(3) 若 X 是一般型，则 X 和 Y 双有理等价；此外，存在一个光滑射影簇 p：$Z \to X$，q： $Z \to Y$，使得 $p^*K_X \simeq q^*K_Y$。

该定理有力地表明，簇的双有理几何与其导出范畴之间存在联系。

另一方面，Balmer 在 [Bal02、BO01] 中证明，赋予 $\otimes_X^{\mathbb{L}}$任意相干概形 $Perf(X)$ 的完美复形导出范畴 X 以导出张量积X，便可通过如今所称的 Balmer 谱 $Spc(Perf(X)$恢复该空间 $\otimes_X^{\mathbb{L}}$)。

Balmer 谱可以为一般的张量三角范畴构造出来；张量三角范畴是一类配备了相容幺半结构的三角范畴，并且能够产生一个局部环化空间。

光滑簇存在彼此不同构的傅里叶-穆凯伙伴 Y，这意味着利用 Balmer 谱构造，有界导出范畴 $D^b(X)$ 至少可以赋予与非同构傅里叶-穆凯伙伴数量相等的张量三角范畴结构（按幺半等价计）。

换言之，若 $FM(X)$ 是 X 的傅里叶-穆凯伙伴的同构类集合，且 $TTS(X)$ 是有界导出范畴 $D^b(X)$ 上张量三角范畴结构的等价类集合，则存在一个单射

$$\begin{aligned} FM(X) &\to TTS(X) \\ Y &\mapsto (\otimes_Y^{\mathbb{L}}, \mathscr{O}_Y) \end{aligned}$$

其中，二元组 $(\otimes_Y^{\mathbb{L}},\ \mathscr{O}_Y)$ 表示由导出张量积 $\otimes_Y^{\mathbb{L}}$ 以及单位元 $\mathscr{O}_Y$ 给出的张量三角范畴结构。

本文主要研究这一函数、其满射性，以及在 X 的（反）典范丛为大丛这一条件下，对于该单射像之外可能存在的张量三角范畴结构可以推导出的性质。

在第 2 节中，我们简要概述有关光滑射影簇上拟凝聚层的一般导出范畴的相关结果，并回顾通过 Thomason 分类定理得到的 Balmer 谱构造。

在第 3 节中，给定有界导出范畴 $D^b(X)$ 上的张量三角范畴结构 $(D^b(X), \boxtimes, \mathbb{1})$，其单位元为 $\mathbb{1}$，我们引入相对于厚子范畴 I 的几乎生成类这一概念（定义 3.9），并证明（定理 3.10）：若 X 是一般型光滑射影簇，则存在 $(D^b(X), \otimes_X^{\mathbb{L}}, \mathscr{O}_X)$ 的真张量理想 I_{X^*}，使得 ω_X 的张量幂构成相对于该理想 I_{X^*} 的近似生成序列。这一结果旨在借助 Thomason 分类定理和 Balmer 谱的性质，凸显几乎生成类更一般的行为。我们看到，这一组对象可用于证明以下定理：

引理 1.3。*(引理 3.12)* 设 X 是一般型光滑射影簇。若 $\boxtimes$ 是 $D^b(X)$ 上的一个张量三角结构，其单位元为 $\mathscr{O}_X$，且 U 是一个 $\boxtimes$-可逆对象，并满足 $U \boxtimes I_{X^*} \subseteq I_{X^*}$，则由 $U\boxtimes$ 和 $U \otimes_X^{\mathbb{L}}$ 在 $D^b(X)/I_{X^*}$ 中诱导的函子之间存在自然等价。

当$\otimes^{\mathbb{L}}_X$-张量理想 I_{X*} 对于前一引理中所述的张量三角范畴结构而言也是一个 $\boxtimes$-张量理想时，我们可得： $\boxtimes$-可逆对象的皮卡群是 $\otimes^{\mathbb{L}}_X$-可逆对象的皮卡群的一个子群（推论 3.15）。特别是，当 X 的（反）典范线丛是丰沛的时，这一假设成立。

基于这一观察，我们的主要推论是 Bondal-Orlov 重构定理的以下幺半版本：

推论 1.4. （推论 *3.18*）设 X 是一个具有充足（反）典范丛的光滑射影簇，则若 $\omega_X[n]$ 是 $D^b(X)$ 上张量三角结构 $\boxtimes$ 的一个可逆对象，且单位元为 $\mathscr{O}_X$，那么 $\boxtimes$ 和 $\otimes^{\mathbb{L}}_X$ 在对象上重合。

本文中的结果是在作者于蔚蓝海岸大学 J.A. Dieudonn´e 实验室攻读博士论文期间取得的。作者谨向导师 Carlos Simpson 致谢，感谢他进行了诸多讨论；并向 Ivo Dell'Ambrogio 和 Bertrand To¨en 致谢，感谢他们对论文手稿提出细致而宝贵的意见。博士论文部分由 CONACyT-法国政府 2018 年博士奖学金资助。

2. Derived categories and the Balmer reconstruction

在本书余下的部分中，我们将只讨论定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑射影簇。此后，我们在行文中将省略基域的说明。本节介绍的部分内容可在 [Huy06] 中找到更详尽的阐述。

本节旨在介绍我们将用于证明结果的基本结论和概念。

先回顾一下：若 X 是一个光滑射影簇，则完美复形的导出范畴 $Perf(X)$ 与有界导出范畴 $D^b(X)$之间存在三角范畴等价，其中 X。因此，在讨论这类簇时，我们有时不会区分这两个范畴。

这些范畴的一个重要特征是 Serre函子的存在，下面回顾其定义：

定义 2.1。设 $\mathscr{T}$ 是一个三角范畴，若自等价$S\colon \mathscr{T} \to \mathscr{T}$满足 $Hom(A, B) \cong Hom(B, S(A))^*$（对所有对象$A, B \in \mathscr{T}$均成立），则称其为 ***Serre***函子。

例 2.1. 具体而言，例如当三角范畴是一个维数为 n 的光滑射影概形的导出范畴时，我们

具有格罗滕迪克-韦尔迪耶对偶，这意味着对于每一对对象 $M, N \in D^b(X)$，$Hom(M, N) = Hom(N, M \otimes \omega_X[n])^*$，其中$\omega_X$ 是X的典范丛。

这一概念最初由 Kapranov 和 Bondal 定义于 [BK90]。Serre函子的以下两个性质对我们的研究至关重要：

引理 2.2. *(命题 1.3 [BO01])* 设 $\mathscr{T}$ 是一个具有 *Serre*函子 S 的三角范畴，并设 $\psi : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$是任意自等价，则 $\psi \circ S \cong S \circ \psi$。

命题 2.3. *(命题 3.4 [BK90])* 设 $\mathscr{T}$ 是一个三角范畴，且设 S 是 $\mathscr{T}$ 中的 *Serre*函子，则它在分次同构意义下唯一。

后一命题意味着，只要 Serre函子存在，它就是给定范畴数据的一部分。在我们关注的情形中，由于可以用导出张量积 $\otimes_X^{\mathbb{L}}$ 表示该函子，因此无需了解 X，我们现在就能直接从范畴中对幺半结构 $\otimes_X^{\mathbb{L}}$ 有所掌握。
另一个我们将用到的重要概念是生成类，下面回顾其定义：

定义 2.4. 如果三角范畴中的一组对象 $\{X_i\} \subseteq \mathscr{T}$ 满足以下条件，则称其为生成类：

(1) 若对于所有 i，$Hom(X_i, D[j]) = 0$，则 $D \simeq 0$
(2) 若对于所有 i，$Hom(D[j], X_i) = 0$，则 $D \simeq 0$

然而，只要三角范畴中存在 Serre函子，我们就会发现，这些条件中只需满足一个，另一个便可利用 Serre函子的同构自动得到。在阿贝尔范畴的导出范畴中构造生成类的一种通用方法是利用充足序列：

定义 2.5. 如果阿贝尔范畴中的一组对象 $\mathcal{A}$，$\{L_i\} \subset \mathcal{A}$ 满足以下条件，我们就称其为丰序列：对于 $i << 0$，以及所有 $A \in \mathcal{A}$

(1) $Hom(L_i, A) \otimes_k L_i \to A$ 是满射。(2) $Hom(A, L_i) = 0$(3) $Ext^j(L_i, A) = 0$、$j \neq 0$

顾名思义，这类序列的一个重要例子来自丰沛线丛的张量幂组成的集合。Bondal 和 Orlov 在以下结果中证明了生成类与丰序列这两个概念之间的关系：

引理 2.6. 设 $\mathcal{A}$ 是有限同调维数的阿贝尔范畴，且 $\{L_i\}$ 是一个丰序列，那么将集合 $\{L_i\}$ 视为 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ 中的对象后，它们构成一个生成类。

下面的例子说明了我们应如何利用充足序列的存在性。

例 2.2. 设 X 是一个典范丛丰的光滑射影簇。则集合 $\{\omega_X^{\otimes_X}\}$ 构成一个丰序列，因此由前述引理可知，它是导出范畴 $D^b(X)$ 中的生成类。

由此可知，任意相干层复形 $\mathscr{F}$ 都可以用典范丛 ω_X 的张量幂来解析。换言之，存在如下序列：

$$0 \to \oplus_{j_0}(\omega_X^{\otimes i_0}) \to \cdots \to \oplus_{j_k}(\omega_X^{\otimes i_k}) \to \mathscr{F} \to 0$$

注 2.7. 还要指出的是，一般而言，对于具有生成类 $\Omega \subset \mathscr{T}$ 的三角范畴 $\mathscr{T}$，若 $\phi : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ 是一个自等价，那么集合 $\phi(\Omega)$ 也同样是生成类。

在上面的例子中，这条注释意味着，对于固定的 i、$j \in \mathbb{Z}$，任意复形 $\mathscr{F}$ 都可以用形如 $\omega_X(i)[j]$ 的层的张量幂来解析。

2.1. **张量三角几何。** 对于簇上的相干层导出范畴，我们可以为该范畴赋予一种由导出张量积给出的幺半结构。这类结构可以公理化为所谓的张量三角范畴。

本小节回顾 Balmer 的谱构造：它以一个张量三角范畴为输入，并输出一个局部环化空间。正如我们将看到的，当研究某个簇上的完美复形导出范畴时，这一构造可以还原该簇。

定义 2.8。 张量三角范畴（简称 *TTC*）$\mathscr{T}$ 是一个三角范畴，并附带以下数据：

(1) 由函子 $\otimes: \mathscr{T} \times \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ 给出的闭对称幺半结构，在两个变量上（相对于 k-线性结构）均为加性且精确。(2) 内 *Hom* 函子 $hom: \mathscr{T} \times \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ 将三角形映为三角形（差一个符号）。(3) 对于 $\mathbb{Z}$、r 中的每个 n 和 m，都有相容的自然同构 $x \otimes (y[n]) \cong (x \otimes y)[n]$ 和 $l: (x[n]) \otimes y \cong (x \otimes y)[n]$ 这些同构与对称性、结合性和单位元相容态射相容，来自

对称幺半范畴结构。（例如参见[Del16，第 2.1 节，1] 其中给出了明确的图表）。

我们将用三元组 $(\mathscr{T},\otimes,\mathbb{1}_{\mathscr{T}})$ 来表示一个张量三角范畴，其中 $\otimes$ 表示幺半结构，$\mathbb{1}_{\mathscr{T}}$ 表示单位对象。通常，若不会引起混淆，或单位对象无关紧要，我们会省略它，并改写为 $(\mathscr{T},\otimes)$。

有时，在处理一个固定的底层三角范畴$\mathscr{T}$时，我们会写作 $\otimes$ 或 $(\otimes,\mathbb{1})$，以表示 $\mathscr{T}$上的张量三角范畴结构。不过需要指出，函子 $\otimes$ 和单位对象 $\mathbb{1}_{\mathscr{T}}$并不能完全确定一个张量三角范畴，因为对称幺半范畴结构中的相容条件原则上可以发生变化，同时保持函子 $\otimes$ 和单位对象$\mathbb{1}$不变。正如我们将在下文中解释的，这对我们的目的而言并不构成问题。

下面给出若干定义。

定义 2.9. 设 $\mathscr{T}$ 为一个三角范畴，$\mathscr{I}\subseteq\mathscr{T}$ 为其一个满三角子范畴。若它对直和项封闭，则称其为厚子范畴。也就是说，若 $A\oplus B\in\mathscr{I}$，则 $A,B\in\mathscr{I}$。

定义 2.10。 设 $(\mathscr{T},\otimes)$ 是一个张量三角范畴。若一个厚子范畴 $\mathscr{I}\subset\mathscr{T}$ 满足：对任意 $A\in\mathscr{T}$，都有 $A\otimes\mathscr{I}\subset\mathscr{I}$，则称其为一个 $\otimes-$理想。

定义 2.11。 设 $(\mathscr{T},\otimes)$ 是一个张量三角范畴。令 $\mathscr{I}$ 为一个 $\otimes$-理想，若对于任意 $A,B\in\mathscr{T}$，只要 $A\otimes B\in\mathscr{I}$，就有 $A\in\mathscr{I}$ 或 $B\in\mathscr{I}$，则称其为素理想。

与仿射代数几何中的情形一样，我们可以定义张量三角范畴的谱。

定义 2.12。 设 $(\mathscr{T},\otimes,\mathbb{1})$ 是一个张量三角范畴，所有素 $\otimes$-理想组成的集合记为 $Spc(\mathscr{T},\otimes,\mathbb{1}))$（根据上下文中哪些信息明确，也可记为 $Spc(\mathscr{T})$, $Spc(\otimes,\mathbb{1})$ 或 $Spc(\otimes)$）。

重要的是，只要三角范畴 $\mathscr{T}$ 非零，就有 $Spec(\mathscr{T},\otimes)\neq\varnothing$ 对于 $\mathscr{T}$上可赋予的任意张量三角范畴结构 $\otimes$（参见 [Bal05，命题 2.3]）。我们将在这个集合上赋予一种拓扑结构。

定义 2.13。 设 $(\mathscr{T},\otimes,\mathbb{1})$ 是一个张量三角范畴，对象 $A\in\mathscr{T}$ 的支撑记作 $supp(A)$，是集合 $\{\mathfrak{p}\in Spc(\mathscr{T})\mid A\notin\mathfrak{p}\}$。

引理 2.14。 [Bal05，引理 2。6] 形如 $\mathcal{Z}(S):=\bigcap_{A\in S}supp(A)$（其中对象族 $S\subset\mathscr{T}$）构成 $Spc(\mathscr{T})$ 上的一个拓扑的基。

关于该拓扑的一个重要结果如下，它限定了我们应当期待这种构造所产生的空间类型。

定理 2.15。 [Bal05，命题 2.15,2。18] 对于任意张量三角范畴 $(\mathscr{T}, \otimes, \mathbb{1})$，空间 $Spc(\mathscr{T})$ 是 *Hochster* 意义下的谱空间，也就是说，它是谱空间的不可约闭子集有唯一泛点，并且具有由拟紧开子集构成的基。

现在， $Spc(\mathscr{T})$ 上的拓扑已经选定，下一步是为该空间配备一个环层，使其充当结构层。

对于子集 $Y \subset Spc(\mathscr{T})$ ，我们可以赋予一个厚 $\otimes$-理想，记作 $\mathscr{I}_Y$，并定义为支撑在 Y 上的子范畴，即 $\mathscr{I}_Y := \{A \in \mathscr{T} \mid supp(A) \subset Y\}$。

最后，对于上述 Y，我们用 $\mathbb{1}_{T_Y}$ 表示单位元 $\mathbb{1}$ 在$\mathscr{T}$下经局部化函子 $\pi : \mathscr{T} \to \mathscr{T}/\mathscr{I}_Y$所得的像。

定义 2.16。 设 $\mathscr{T}$ 是一个非零张量三角范畴，我们将 $\mathcal{O}_{Spc(\mathscr{T})}$ 上的结构层定义为赋值 $U \mapsto End(\mathbb{1}_{T_Z})$ 的层化，其中 $Z := Spc(\mathscr{T})\backslash U$，这里 $U \subset Spc(\mathscr{T})$ 是一个开子集。

不难看出，赋值 $Spc(F)$ 与正合幺半函子的复合相容，因此若 $F : \mathscr{T} \to \mathscr{T}'$ 是这样的函子，我们就得到一个环化空间的态射，因为对于一个闭 $Z = Spc(\mathscr{T})\backslash U$，有 $F(\mathscr{I}_Z) \subset \mathscr{I}_{Z'}$，其中 $Z' = Spc(\mathscr{T}')\backslash Spc(F)^{-1}(U)$，这意味着存在一个态射 $\mathcal{O}_{\mathscr{T}} \to Spc(F)_*\mathcal{O}_{\mathcal{L}}$，因此 $Spc : \mathbb{TTC} \to RS$ 是一个函子；在良好条件下（例如 $\mathscr{T}$是刚性的），可以证明它是一个函子 $Spc : \mathbb{TTC} \to LRS$。

有了这一构造，我们现在可以阐述 Balmer 所描述的预期重构定理。

定理 2.17. [Bal05，推论 5。6] 设 X 是一个拟紧且拟分离的概形。存在一个同胚

$$f : X \xrightarrow{\cong} Spc(Perf(X), \otimes_X^{\mathbb{L}}).$$

这个同胚由 Thomason 的分类定理推出 [Tho97，定理 3。15] 该定理建立了拟紧拟分离概形的某些子集与 X 和$\otimes_X^{\mathbb{L}}$-理想之间的对应关系。 $Perf(X)$以下是 Balmer 在[Bal05定理 4 中给出的张量三角范畴这一分类的一般版本。10]

定理 2.18。 设 $(\mathscr{T}$ 是一个张量三角范畴。令 $\mathscr{S}$ 为那些子集 $Y \subset Spc(\mathscr{T})$ 的集合，其中这些子集是 $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ 的并，且对于所有 $i \in I$， Y_i 都是补集拟紧的闭子集。令 $\mathscr{R}$ 为根式

$\otimes$-理想的集合，其中 $\mathscr{T}$。则存在一个保序双射 $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$，其对应关系将 Y 映射到子范畴 $\mathscr{T}_Y := \{A \in \mathscr{T} \mid supp(A) \subset Y\}$，其逆映射则将一个根式 $\otimes$-理想 $\mathscr{I}$ 映射到子集 $S_{\mathscr{I}} := \bigcup_{A \in \mathscr{I}} supp(A)$。

这里，所谓根式 $\otimes$-理想，是指满足以下条件的 $\otimes$-理想：
$A^{\otimes n}$ 属于 $\mathscr{I}$ 时，A 属于 $\mathscr{I}$。
实际上，每个 $\otimes$-理想都会自动成为根式 $\otimes$-理想，这显然取决于三角范畴 $\mathscr{T}$所具有的幺半结构。正如 Balmer 在 [Bal05] 中指出的，只要张量三角范畴是刚性的，也就是说每个对象都可对偶化，这一条件便成立。
当 X 是一个簇时，正如 Rouquier 在 [Rou03]中指出的，分类定理可以简化为一种非常简单的形式。

定理 2.19。 设 X 是一个簇，则 X 的闭子集与 $\otimes_X^{\mathbb{L}}$-有限型理想之间存在一一对应；这些理想由单个对象生成。

利用定理 2.17 中的同胚，以及定义 2.16 中在 $Spc(Perf(X)$ 上构造结构层 $\otimes_X^{\mathbb{L}})$ 的方法，我们只需以下定理即可完成 Balmer 的重构定理。

定理 2.20。 [Bal02] 设 X 是拟紧拟分离概形 X。存在一个同构 $\mathscr{O}_X \cong \mathscr{O}_{Spc(Perf(X),\ \mathscr{O}_X)}$。

以下命题将说明局部化在执行 Spc时的行为。

命题 2.21。 [Bal05，命题 3。11] 设 $\mathscr{I} \subset \mathscr{T}$ 是厚 $\otimes$-理想，则局部化函子 $\pi :\ \mathscr{T} \to \mathscr{T}/\mathscr{I}$ 是正合幺半函子，并诱导出一个同胚 $Spc(\mathscr{T}/\mathscr{I}) \cong \{\mathfrak{p} \in Spc(\mathscr{T}) \mid \mathscr{I} \subset \mathfrak{p}\}$。

特别是，结合定理 2.19 形式的分类定理，我们看到，簇 X 的开子簇 U 同构于 $Spc(Perf(X),\ \otimes_X^{\mathbb{L}})/\mathscr{I}_Z$其中 Z 是 X 中 U 的补集。
我们以如下备注结束本节。

注 2.22. 到目前为止，我们一直在处理定义 *2.8* 中所描述的张量三角范畴，也就是说，我们要求 $\mathscr{T}$ 上具有闭对称幺半范畴结构。然而，仔细考察便会发现，无论是分类定理还是 *Balmer* 构造，都不需要完整的幺半结构。

事实上，到目前为止，我们真正需要的仅是一个函子 $\otimes\colon\ \mathscr{T}\times\mathscr{T}\to\mathscr{T}$，它在每个变量上都是协变且正合的；此外，还需要一个单位对象 $\mathbb{1}$ 以及对应于对称、结合与单位条件的同构。换言之，若 $(\mathscr{T}、\otimes、\mathbb{1})$ 与 $(\mathscr{T}、\boxtimes、\mathbb{1}')$ 是两个张量三角范畴，其底层三角范畴为 $\mathscr{T}$，且对于 $\mathscr{T}$ 中的任意一对对象都有 $\otimes\simeq\boxtimes$，并且 $\mathbb{1}\simeq\mathbb{1}'$，那么 ***Balmer*** 谱 $Spc(\mathscr{T}、\otimes、\mathbb{1})\cong Spc(\mathscr{T}、\boxtimes、\mathbb{1}')$ 作为局部环化空间是同构的。幺半范畴的结合子、单位子和编织对所得空间没有影响。

正是这一点使我们的记号 $(\mathscr{T}、\otimes、\mathbb{1})$ 如前所述具有合理性。下文中我们仍将使用张量三角范畴这一术语，尽管我们的结果适用于稍微更一般但也更为繁琐的结构。

3. TTC's and Picard groups

虽然 Bondal-Orlov 重构（定理 1.1）告诉我们，可以从导出范畴 $D^b(X)\simeq Perf(X)$ 直接恢复具有充足（反）典范丛的光滑射影簇 X，但有许多光滑射影簇具有彼此不同构的傅里叶-穆凯伙伴，即满足 $D^b(X)\simeq D^b(Y)$ 的簇 Y，这意味着在给定的导出范畴 $D^b(X)$ 上可能存在许多不等价的张量三角范畴结构。

然而，即使在我们的簇 X 具有充足（反）典范丛、满足 Bondal-Orlov 重构定理假设的情况下，也不能立即得出只有一种可能的张量三角范畴结构。原则上，可能存在这样一种结构 $(D^b(X),\ \boxtimes,\ \mathbb{1})$ 使得 $D^b(Spc(\boxtimes,\ \mathbb{1}))\not\simeq D^b(X)$因而 Bondal-Orlov 重构并不适用。

从某种意义上说，我们的动机问题是：Balmer 的重构是否蕴含 Bondal-Orlov 结论。在本节中，我们将通过探讨在 $D^b(X)$ 上可能赋予的张量三角范畴，来研究这一问题及相关思想；这里所依据的假设稍微更为一般，即 X 具有大（反）典范丛。
我们首先提及 Liu 和 Sierra 的以下结果，该结果来自[LS13]，特别表明存在光滑射影簇 X 具有丰反典范丛，因此在 Bondal-Orlov 的假设下，存在一些光滑射影簇，其导出范畴 $D^b(X)$ 具有张量三角范畴结构 $(\boxtimes,\ \mathbb{1})$ 使得 $Spc(\boxtimes,\ \mathbb{1})\not\cong X$。
回顾一下，有一些簇 X 已知其导出范畴等价于某个箭图（可能带有关系）上的表示的导出范畴。例如，当存在一个完全强例外集合 X 时，

则有 $D^b(X)$ 等价于$D^b(mod-End(\bigoplus E_i))$，即代数 $End(\bigoplus E_i)$上有限生成模的导出范畴。另一方面，后一个代数等价于某个箭图的路径代数，因此我们得到 X 的导出范畴与某个箭图 $Q=(P_n,\ E_{ij})$的有限维表示的导出范畴之间的等价。

这里的关键在于，这个由箭图表示构成的导出范畴带有一种由表示的张量积诱导的张量三角范畴结构。回顾一下，设 (V_i,p_{ik})和 (W_j,q_{js}) 是两个这样的表示，则其张量积逐项定义为：$(V_i,p_{ik})\otimes_{rep}(W_j,q_{js}):=(V_i\otimes W_j,p_{ik}\otimes q_{js})$。
我们将通过导出这个张量积，在 $D^b(repQ)$ 上得到的张量三角范畴结构记作 $(D^b(repQ),\otimes^{\mathbb{L}}_{rep},\mathbb{1}_{rep})$，其中 $\mathbb{1}_{rep}:=(k_i,Id_{ij})$ 是这样一个表示：在每个顶点上都赋予 k，并在箭图的每条边上赋予恒等态射。Liu 和 Sierra 考虑满足与张量积相容条件的带关系箭图([LS13，定义 1.2。5])，并称此时该箭图具有张量关系。

定理 3.1。 [LS13，定理 2.1.5。1] 设 Q 是一个带有张量关系的有限有序箭图。那么 $Spc((D^b(repQ),\ \otimes^{\mathbb{L}}_{rep}))$ 是离散空间$\{P_n\}$。

他们还完整地描述了这种情况下的结构层。

定理 3.2。 [LS13，定理 2.2.4。1] 设 Q 是一个带有张量关系的有限有序箭图。那么 $\mathscr{O}_Q:=\mathscr{O}_{Spc(\otimes^{\mathbb{L}}_{rep})}$ 是代数的常值层 k。因此，对于任意开集 $W\subset Spc(\otimes^{\mathbb{L}}_{rep})$，有 $\mathscr{O}_Q(W)=k^{\oplus W}$。

特别地，对于 $X=\mathbb{P}^n$，根据 Beilin-son 的一个著名结果（[Bei78]），$D^b(X)$ 等价于一个具有 $n+1$ 个顶点的箭图的表示范畴。因此，导出范畴$D^b(X)$ 具有张量三角范畴结构 $(\otimes^{\mathbb{L}}_{rep},\ \mathbb{1}_{rep})$ 使得 $Spc((\otimes^{\mathbb{L}}_{rep},\ \mathbb{1}_{rep}))\ncong X=\mathbb{P}^n$。由于 $\mathbb{P}^n$ 是一个具有丰反典范丛的光滑射影簇，这一先前结果表明，即使在满足 Bondal-Orlov 重构定理假设的情形下，研究 $D^b(X)$ 上的张量三角范畴结构也并非平凡，且或许能为导出范畴本身的内部结构带来一些启示。

一般而言，Balmer 谱的动力学行为以及

构造导出范畴可能会很复杂。我们知道，Balmer 谱是一个局部环化空间，具有一个带有张量积的模层阿贝尔范畴，因此可以像往常一样对这个范畴取导出范畴。然而，模层范畴通常比相干层范畴甚至拟凝聚层范畴复杂得多。

话虽如此，让我们把讨论稍微推广到一般型簇的导出范畴。回顾一下，若一个簇的典范丛是大丛，则称该簇为一般型。特别地，典范丛充足的簇都是一般型簇。

簇具有大性的另一种刻画如下：

定理 3.3。 [Laz17，例 2.2。9] 一个光滑射影簇是一般型，当且仅当对于任意层 $\mathscr{F} \in Coh(X)$，存在一个整数 i_0，它依赖于 $\mathscr{F}$，使得层 $\mathscr{F} \otimes_X \omega_X^i$ 在一般点处全局生成，对于 $i >> i_0$。

由小平引理（参见 [Laz17，命题 2.2。6]）可得以下推论：

推论 3.4。 设 X 是一个一般型光滑射影簇，则存在一个开子簇 X^*，使得对于任意 $\mathscr{F} \in Coh(X)$，存在一个正整数 i_0，使得对于任意 $i >> i_0$，层 $\mathscr{F}|_{X^*} \otimes_X \omega_{X^*}^i$ 在 X^* 上全局生成。

让我们解释前面的推论以及开子簇 X^* 的性质。我们回顾一些基本定义。

定义 3.5。 设 X 是一个射影簇，且 $\mathscr{L}$ 是 X 上的一个线丛，增广基 *locus* 是扎里斯基闭集

$$B_+(\mathscr{L}) := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} B(m\mathscr{L} - A)$$

其中 A 是任意一个丰沛线丛；对于任意线丛 $\mathscr{L}'$，集合 $B(\mathscr{L}')$ 定义为该线丛各倍数的基 *locus* 的交集，即

$$B(\mathscr{L}') := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} Bs(m\mathscr{L}')$$

在 [BCL14] 中，证明了以下刻画增广基 locus 补集的定理：

定理 3.6. 设 $\mathscr{L}$ 是代数闭域上正规射影簇 X 上的一个大线丛。那么，增广基 *locus* 的补集

$X\backslash B_+(\mathscr{L})$ 是最大的 *Zariski* 开子集 $U \subseteq X\backslash B(\mathscr{L})$，使得对于所有充分大且可整除的 $m(\mathscr{L}) \in \mathbb{Z}$，态射的限制

$$\phi_m : X\backslash B(\mathscr{L}) \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(X, m\mathscr{L})$$

到 *U* 的态射是到其像上的同构。

以下两个重要观察可直接由定义、增广基轨迹集与所选丰沛线丛无关这一事实，以及大线丛的 Kodaira 分解得到。

注记 3.7。 (1) $B_+(\mathscr{L}) = \varnothing$ 当且仅当 $\mathscr{L}$ 是丰沛的。

(2) $B_+(\mathscr{L}) \neq X$ 当且仅当 $\mathscr{L}$ 是大的。

根据上述评注并利用 Thomason 的分类定理（2.18），我们知道，由于 Balmer 谱的闭子集与张量三角范畴中的根张量理想之间存在对应关系，因此，对于任意给定的线丛 $\mathscr{L}$，都存在一个与增广基 locus $B_+(\mathscr{L})$ 对应的根张量理想。特别地，推论 3.4 中的开子簇 X^* 是增广基 locus $X\backslash B_+(\omega_X)$ 的补集，并且对应于一个由单个对象生成的 $\otimes^{\mathbb{L}}_X$-理想（利用定理 2.19），其同调支撑给出了闭子集 $B_+(\omega_X)$。

评注 3.8. 我们将与开子簇 X^*对应的 $\otimes^{\mathbb{L}}_X$-理想记作 I_{X^*}。根据前面的评注 *3.7*，该理想必定是 $D^b(X)$ 的一个真 $\otimes^{\mathbb{L}}_X$-理想，并且当且仅当（反）典范丛是充足的时，它才是理想0 。

我们希望了解典范丛的正性（在本例中，即该簇属于一般型）对该范畴的张量三角结构的影响。由定理 2.3 可知，只要三角范畴中的 Serre 函子存在，它在相差一个次数的意义下就是唯一的，因此它是范畴本身的性质，而非额外的数据。在我们这个具体的例子中，我们还知道 Serre 函子同构于 $\otimes^{\mathbb{L}}_X \omega_X[n]$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 是该簇的维数，而 ω_X 是 X的对偶化层。

我们先从一个仿照生成类的定义开始:

定义 3.9。 设 ($\mathscr{T}$ 是一个张量三角范畴，设 $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{T}$ 是一个厚子范畴，并记 $\pi : \mathscr{T} \to \mathscr{T}/\mathscr{I}$ 为局部化函子。我们称对象的集合 $\Omega \subset \mathscr{T}$ 关于 $\mathscr{I}$ 是一个几乎生成类，如果满足以下两个条件。

（1）如果 $X \in \mathscr{T}/\mathscr{I}$ 满足：对于所有 $B \in \Omega$ 和 $j \in \mathbb{Z}$，则 $X \cong 0$。（2）如果 $X \in \mathscr{T}/\mathscr{I}$ 满足：对于所有 $B \in \Omega$ 和 $j \in \mathbb{Z}$，则 $X \cong 0$。

显然，前述定义等价于要求集合 Ω 经由 π 映射到商 $\mathscr{T}/\mathscr{I}$ 上的一个生成类。当所讨论的厚子范畴是零子范畴时，该定义便归结为定义 2.4 中的生成类定义。

此外，当三角范畴 $\mathscr{T}/\mathscr{I}$ 存在 Serre 函子时，定义中的条件只需满足其中一个，因为 Serre 对偶会自动推出另一个条件。

我们希望将定理 2.6 推广到大典范丛的情形，而非充足丛，并证明大丛会在导出范畴中相对于一个 $\otimes_X^{\mathbb{L}}$-理想 $\mathscr{I}$ 诱导出一个几乎生成类。

定理 3.10. 设 X 是一个一般型光滑射影簇。那么，张量幂的集合 $(\omega_X^{\otimes i})_{i\in\mathbb{Z}}$ 在张量三角范畴 $(D^b(X), \otimes_X^{\mathbb{L}})$ 中相对于张量理想 I_{X^*} 构成一个几乎生成类。

证明。我们需要证明 $\pi(\{\omega_X^{\otimes i}\})$ 构成商 $D^b(X)/I_{X^*}$中的一个生成类。由于 I_{X^*} 是推论 3.4 中与光滑开子簇 X^* 对应的理想，因此我们知道存在一个同构 $Spc(D^b(X)/I_{X^*}) \cong X^*$。根据定理 3.6 的刻画，$\omega_X$ 在 X^* 上的限制是充足的，因此由引理 2.6 可知，$\{\omega_X^{\otimes_X^{\mathbb{L}} i} \mid_{X^*}\}$构成 X^*的导出范畴中的一个生成类；根据命题 2.21，该范畴与商范畴 $D^b(X)/I_{X^*}$ 一致。□

我们论证的关键在于这样一个事实：如同充足情形那样，我们可以用 X^*的典范丛 ω_{X^*} 的张量幂，对 X^* 上的任意相干层复形构造一个分解。其优势在于，我们能够将这个空间的导出范畴具体描述为较大簇 X的导出范畴的一个商。

具体而言，对于 X^* 上的任意相干层复形 A，都存在一个分解：

$$\cdots \to \oplus_{j_0}(\omega_{X^*}^{\otimes i_0}) \to \cdots \to \oplus_{j_k}(\omega_{X^*}^{\otimes i_k}) \to A \to 0.$$

另一个值得注意之处是，对于上文给出的

$D^b(\mathbb{P}^n)$ 上不等价的张量三角范畴结构这一例子，所给出的两种结构有一个显而易见的问题：它们的单位元不同构。因此，我们应当继续研究单位元固定为与 $\mathscr{O}_X$ 同构的张量三角范畴。

定义 3.11。设 $(\mathscr{T}, \otimes, \mathbb{1})$ 是一个张量三角范畴，若存在 $X^{-1} \in \mathscr{T}$ 使得 $X \otimes X^{-1} \cong \mathbb{1}$，则称对象 $X \in \mathscr{T}$ 是 $\otimes$-可逆的。我们用 $Pic(D^b(X), \boxtimes)$ 表示 $\boxtimes$-可逆对象的同构类所构成的群。

我们将用到下面的引理：

引理 3.12。设 X 是一个维数为 n的一般型光滑射影簇。若 $\boxtimes$是 $D^b(X)$ 上的一个张量三角结构，单位元为 $\mathscr{O}_X$，且 U是一个满足 $U \boxtimes I_{X^*} \subseteq I_{X^*}$的 $\boxtimes$-可逆对象，则由 $U\boxtimes$ 和$U \otimes_X^{\mathbb{L}}$ 在 $D^b(X)/I_{X^*}$中诱导的函子之间存在自然等价。

证明。根据我们前面的讨论，我们知道任何复形都可以在 $D^b(X)/I_{X^*}$ 中由一个分解来解析

$$\cdots \to \oplus_{j_0}(\omega_{X^*}^{\otimes i_0}) \to \cdots \to \oplus_{j_k}(\omega_{X^*}^{\otimes i_k}) \to A \to 0.$$

由于 $D^b(X^*)$ 中的 Serre函子由 $\otimes_X^{\mathbb{L}}\, \omega_{X^*}[n']$给出，其中 n' 是 X^* 的维数，并且我们知道任何正合等价都必须与它交换，因此若令 $U\widehat{\boxtimes}$ 和 $U\widehat{\otimes_X^{\mathbb{L}}}$ 分别表示由 $U\boxtimes$ 和 $U\otimes^{\mathbb{L}}$ 诱导的 $D^b(X)/I_{X^*}$ 的自等价，则有

$$(U\widehat{\boxtimes}\hat{A})\widehat{\otimes_X^{\mathbb{L}}}\omega_{X^*}[n'] \cong U\widehat{\boxtimes}(\hat{A}\widehat{\otimes_X^{\mathbb{L}}}\omega_{X^*}[n']).$$

由于 $\mathscr{O}_X$ 是 $\otimes_X$ 和 $\boxtimes$的单位元，并在平移 $[-n']$ 后，我们可推出

$$U\widehat{\otimes_X^{\mathbb{L}}}\omega_{X^*} \cong U\widehat{\boxtimes}\omega_{X^*}.$$

由此，结合 $\otimes^{\mathbb{L}}$ 和 $\boxtimes$的正合性，以及关于 $\omega_{X^*}^i$的分解，我们得到这些同构

$$U\widehat{\otimes^{\mathbb{L}}}A \cong U\widehat{\boxtimes}A.$$

□

注 3.13. 我们指出，对自等价函子 $U\widehat{\otimes^{\mathbb{L}}}$ 的记法略有滥用。严格来说，这个函子应记为 $\widehat{U\otimes^{\mathbb{L}}_{D^b(X)/I_{X^*}}}$，因为它由张量三角范畴 $(D^b(X)/I_{X^*}, \otimes^{\mathbb{L}}_{D^b(X)/I_{X^*}})$，中的对象 U 诱导而来；但本节中我们取商所用的唯一张量理想是 I_{X^*}，因此我们认为当前的记法更简洁，同时也不会混淆这些函子所代表的含义。

我们有如下推论：

推论 3.14. 设 X 是一般型簇，并设 $\boxtimes$ 是 $D^b(X)$ 上具有单位元 $\mathscr{O}_X$ 的张量三角范畴结构。那么，对于任意满足 $U \boxtimes I_{X^*} \subseteq I_{X^*}$ 的 $\boxtimes$-可逆对象 U，由 $U\boxtimes$ 诱导的等价 $U\widehat{\boxtimes}$: $D^b(X)/I_{X^*} \to D^b(X)/I_{X^*}$，等价于一个由群 $\bar{Pic}(D^b(X)/I_{X^*}, \otimes^{\mathbb{L}})$ 中的 $\frown$ 可逆 $\otimes^{\mathbb{L}}$-对象给出的 $\frown$ 等价。

证明。由引理 3.12 可知，如果 U^{-1} 满足 $U\boxtimes U^{-1} \cong \mathscr{O}_X$，那么在商 $D^b(X)/I_{X^*}$, 中

$$U\widehat{\otimes^{\mathbb{L}}}\widehat{U^{-1}} \cong U\widehat{\boxtimes}\widehat{U^{-1}} \cong \mathscr{O}_{X^*}.$$

$\frown$由于 $(D^b(X)/I_{X^*}, \otimes^{\mathbb{L}})$ 是一个张量三角范畴，我们有 $\widehat{U} \in D^b(X)/I_{X^*}$ 是 $\widehat{\otimes^{\mathbb{L}}}$-可逆对象。□

在上述引理 3.12 和推论 3.14 中，理想 I_{X^*} 可能不是一个 $\boxtimes$-张量理想，因此商 $D^b(X)/I_{X^*}$ 不一定带有由 $\boxtimes$ 诱导的张量三角范畴结构。然而，我们的结果保证，在传至商之后，由函子 $U \boxtimes$ 诱导的等价与 $(D^b(X)/I_{X^*}, \otimes^{\mathbb{L}}_X)$ 中由可逆对象给出的等价相等；这些可逆对象由同一个对象诱导，条件是 I_{X^*} 在 $U\boxtimes$ 下稳定。特别地，我们有：

推论 3.15. 设 X 是一个一般型簇，$\boxtimes$ 是 $D^b(X)$ 上具有单位元 $\mathscr{O}_X$ 的张量三角结构。若 I_{X^*} 是一个 $\boxtimes$-理想，则皮卡群 $Pic(D^b(X)/I_{X^*}, \widehat{\boxtimes})$ 是皮卡群 $\frown Pic(D^b(X)/I_{X^*}, \otimes^{\mathbb{L}}_X)$ 的子群。

证明. 证明与前两者相同：若 U 属于 $Pic(D^b(X)/I_{X^*}, \widehat{\boxtimes})$，则它会诱导 $D^b(X)/I_{X^*}$ 的一个自等价，因此与 $D^b(X^*) \simeq D^b(X)/I_{X^*}$ 上的 Serre 函子可交换。通过将任意复形 A 表示为 ω_{X^*} 的导出张量幂的直和所构成的一个分解，我们可以使用引理 3.12 证明中的相同论证，从而得到以下同构：

$$U\widehat{\otimes^{\mathbb{L}}}A \cong U\widehat{\boxtimes}A.$$

□

注记 3.16。需要指出的是，在上述结果中，我们选择研究一般型簇，但同样的论证也适用于具有大反典范丛的簇。

当我们的簇具有充足（反）典范丛时，我们可以将完整导出范畴的皮卡群与其上任何其他张量三角范畴结构的皮卡群联系起来。

以下结果可由前面的论证推出。

推论 3.17。 设 X 是一个具有充足（反）典范丛的簇。那么，若 $\boxtimes$ 是 $D^b(X)$ 上的一个张量三角范畴结构，单位元为 $\mathscr{O}_X$，则皮卡群 $Pic(D^b(X),\boxtimes)$ 同构于 $Pic(D^b(X),\otimes_X)$的一个子群。

证明。 我们只需注意到，在这种情况下，推论 3.4 中的 $\otimes_X$-理想是零理想，因此我们可以通过 Serre函子的若干次幂构成的序列来分解任意对象 $A \in D^b(X)$。依照与上文相同的推理，我们得到

$$U \otimes^{\mathbb{L}} A \cong U \boxtimes A.$$

□

需要指出的是，尽管 Bondal 和 Orlov 已经对具有充足（反）典范丛的簇的导出范畴的自等价群进行了分类，但我们并未假设 Balmer 谱 $\boxtimes$ 的导出范畴与导出范畴 $D^b(X)$之间存在等价，因此，他们的结果并不能直接推出 $\boxtimes$ 的皮卡群必然包含 X上的可逆层。

换言之，由于 $Spc(\boxtimes)$ 不一定与 X 同构，因此仅仅理解 $D^b(X)$ 的自等价，并不能直接揭示它与 $\boxtimes$ 的皮卡群之间的关系。

我们应将下述推论视为 Bondal-Orlov 重构定理的幺半版本：

推论 3.18. 设 X 如上所述。若 $\omega_X[n]$ 是 $D^b(X)$ 上张量三角结构 $\boxtimes$ 的一个可逆对象，且单位元为 $\mathscr{O}_X$，则 $\boxtimes$ 与 $\otimes_X^{\mathbb{L}}$ 在对象上重合。

证明. 由于 ω_X 是 $\boxtimes$-可逆的，推论 3.17 告诉我们，对于任意 $A \in D^b(X)$，都有

$$\omega_X \otimes_X^{\mathbb{L}} A \cong \omega_X \boxtimes A.$$

但借助精确性，我们可以将任何其他复形 B 用典范层的导出幂来表示 $\boxtimes$，于是得到

$$B \otimes_X^{\mathbb{L}} A \cong B \boxtimes A.$$

□

这一结果的本质恰恰源于这样一个事实：张量三角范畴结构 $(\boxtimes, \mathbb{1})$ 不一定来自导出等价 $D^b(X) \simeq D^b(Y)$；而对单位元的额外假设是必要的。因此，在这一方面，该结果比原定理略为一般。

推论 3.19。设 X 为一个具有充足（反）正则线丛的簇，假设 $(\mathscr{O}_X, \boxtimes)$ 是 $D^b(X)$ 上的张量三角结构，使得 $Pic(\boxtimes) \cong Pic(D^b(X))$ 通过赋值 $U \mapsto U$，那么 $\boxtimes$ 在对象上与 $\otimes^{\mathbb{L}}_X$ 重合。

证明。在这种情况下，如果该态射是同构，那么 ω_X 是 $\boxtimes$-可逆的，结论由前一个推论得出。□

事实上，如果我们对 X 处于相同的假设下，那么一旦我们能够证明 $Pic(D^b(X), \otimes^{\mathbb{L}})$ 的生成元是 $\boxtimes$-可逆的，根据前一个推论，$\boxtimes$ 与 $\otimes^{\mathbb{L}}_X$ 之间必然存在等价。

例 3.1。设 $X = \mathbb{P}^n$ 为射影空间，在这种情况下，我们知道 $Pic(D^b(X)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 对应于线丛及其移位。因此，上述结果表明，只要存在一个张量三角结构 $\boxtimes$ 作用于 $D^b(X)$，且单位元为 $\mathscr{O}_X$，那么该张量结构的皮卡群必然是 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ 的子群。
若 $\omega_X = \mathscr{O}_X(-n-1)$ 是 $\boxtimes$-可逆的，则我们得到 $\boxtimes$ 与$\otimes^{\mathbb{L}}_X$相同。类似地，若 $\mathscr{O}_X(-1)$ 是 $\boxtimes$- 可逆的。

研究张量三角范畴结构的皮卡群时，一个自然的问题是，它与关联空间上的线丛有何关系。在 [BF07，命题 4。4]Balmer 和 Favi 证明了以下结果：

命题 3.20。设 X是一个概形，并考虑 $Perf(X)$ 它的完美复形导出范畴。那么存在一个阿贝尔群的分裂短正合列

$$0 \to Pic(X) \to Pic(Perf(X), \otimes^{\mathbb{L}}_X) \to C(X; \mathbb{Z}) \to 0$$

其中 $C(X; \mathbb{Z})$ 表示从X 到 $\mathbb{Z}$的局部常值函数群。

再次在 X 具有充足（反）典范丛的假设下，利用命题 3.20 可知，对于张量三角范畴 $(\boxtimes, \mathscr{O}_X)$，如果$Spc(\boxtimes)$ 是一个概形，那么 $Spc(\boxtimes)$ 的皮卡群必定是 $Pic(D^b(X), \boxtimes) \leqslant Pic(D^b(X), \otimes^{\mathbb{L}}_X)$ 的一个子群。因此，一个

$Spc(\boxtimes)$ 中的线丛必须是 $\otimes^{\mathbb{L}}_X$-可逆的。

注 3.21. 从 *Bondal-Orlov* 最初的重构证明中，我们知道，实际上可以仅凭纯范畴性质对线丛进行刻画，精确到一个移位。鉴于簇的皮卡群的重要性，我们可以探讨是否能够在 $D^b(X)$ 中重构导出张量积，而无需借助重构定理。

在 [ha] *Antieau* 概述了一种构造：通过考察可逆对象（在 *Bondal* 和 *Orlov* 的意义下），可以定义一组张量积$\otimes^{\mathbb{L}}_U$，方法是利用由 ω_X 的导出张量幂所给出的分解。

想法是选取一个可逆对象 U，根据 [BO01] 中的证明，它同构于 X 中的某个线丛的平移，然后利用这个分解，我们只需定义 $\omega_X^{\otimes^{\mathbb{L}}_X i}[ni]\otimes^{\mathbb{L}}_U A^\bullet$ 对任意对象$A^\bullet$的乘积。由于 *Serre*函子 $S \simeq \otimes^{\mathbb{L}}_X \omega_X[n]$ 仅由范畴结构决定，因此我们可以将这些乘积简单地设为 $S^i(A^\bullet)$。

这些张量积 $\otimes^{\mathbb{L}}_U$ 以 U 为单位元，并且它们的 *Balmer* 谱都是 X。

一般来说，对于三角范畴 $\mathscr{T}$，$Aut(\mathscr{T})$ 作用于集合 $TTS(\mathscr{T})$。如果 $(\otimes, \mathbb{1}) \in TTS(\mathscr{T})$ 且 $\phi \in Aut(\mathscr{T})$，我们就有一个由下式定义的张量结构

$$X \otimes_\phi Y := \phi^{-1}(\phi(X) \otimes \phi(Y)).$$

其单位对象为 $\phi^{-1}(\mathbb{1})$。
现在，我们已经为以下定义提供了充分的依据：

定义 3.22. 设 $\mathscr{T}$为一个三角范畴，用 $TTS(\mathscr{T})$表示 $\mathscr{T}$上张量三角范畴结构的等价类集合。若两个张量三角范畴结构之间存在幺半等价，则称它们等价。

为了保持一定的控制，并避免像我们所见的那样将来自自等价的结构计数在内，我们至少应该固定单位对象。

定义 3.23. 设 $\mathscr{T}$ 为一个三角范畴，$U \in \mathscr{T}$ 为一个对象。那么，集合 $TTS_U(\mathscr{T})$ 是 $\mathscr{T}$ 上的张量三角结构的等价类集合，其中 U 是单位元。

这正是我们主要感兴趣的分类对象。最后，让我们根据迄今为止得到的结果，讨论最初的 Bondal-Orlov 重构

定理（根据我们目前所证明的结果）。

定理 3.24. 设 X 是一个具有充足（反）典范除子的簇，并且 $\boxtimes$ 是 $D^b(X)$ 上的一种张量三角结构，其单位元为$\mathscr{O}_X$。假设 $Spc(\boxtimes)$ 是一个具有充足（反）典范丛的光滑射影空间，且存在一个等价 $D^b(X) \simeq D^b(Spc(\boxtimes))$，那么 $X \cong Spc(\boxtimes)$

证明。事实上，这里唯一需要注意的是，由于 $Spc(\boxtimes)$ 具有充足（反）典范丛，因此 ω_X 必定是 $\boxtimes$-可逆的。确实，回想一下，我们可以选取等价 $D^b(X) \simeq D^b(Spc(\boxtimes))$，使其将$\omega_X$ 映至 $\omega_{Spc(\boxtimes)}$，于是对 $Spc(\boxtimes)$ 应用推论 3.17 即可得到断言： $Pic(D^b(X), \otimes^{\mathbb{L}}_X)$ 通过映射 $\mathscr{L} \mapsto \mathscr{L}$必定同构于 $Pic(D^b(X), \boxtimes)$的一个子群。由于ω_X 是 $\boxtimes$-可逆的，由推论 3.18 可得所需结果。□

注 3.25. 我们需要说明此处选择这些假设的原因。首先，假设 $Spc(\boxtimes)$ 是光滑射影簇是必要的，正如 *Bondal-Orlov* 定理最初的表述中一样。不过，我们还增加了另外几项假设。我们假设 $Spc(\boxtimes)$ 的（反）典范丛也是充足的，以凸显定理中幺半结构的作用。然而，这一假设并非必要，因为正如 *Bondal* 和 *Orlov* 的原始证明所示，它可以直接从两个空间之间的导出等价推出。或者，我们也可以将定理表述如下：

定理 3.26. 设 X 是具有充足（反）典范除子的簇，设 $\boxtimes$ 是 $D^b(X)$ 上带有单位元 $\mathscr{O}_X$ 的张量三角结构。假设 $Spc(\boxtimes)$ 是光滑射影空间，且存在等价 $D^b(X) \simeq D^b(Spc(\boxtimes))$，则 $X \cong Spc(\boxtimes)$。

或许更重要的是单位元的选择，正如我们所见，这类簇的导出范畴上存在张量三角范畴结构，而在 *Balmer* 重构下，它们会产生截然不同的空间。对单位元的这种选择，使我们能够在分类产生相同空间的结构时保留一定的控制。未来工作的一个自然方向，是研究哪些类型的对象可以充当这类结构的单位元。

注 3.27。我们想指出，*Bondal-Orlov* 定理从我们的结果推出的方式有一些微妙之处，因为我们用到了原始证明中的一些重要技术性结果。不过，我们希望本文的讨论已为这一

问题从幺半群结构的角度加以考察，提供了充分的依据和动机。

我们可以用以下定理结束讨论：

定理 3.28. 设 X 是一个带有（反）典范丛的光滑射影簇。考虑 $D^b(X)$ 上的张量三角范畴结构 $\boxtimes$，其中 $\mathscr{O}_X$ 是其单位元，且 $Spc(\boxtimes)$ 与 X 同构，则 $\boxtimes$ 和$\otimes^{\mathbb{L}}_X$ 在对象上相同。

然而，这并不能完全分类 $TTS_{\mathscr{O}_X}(D^b(X))$，因为我们要求 Balmer 谱是一个傅里叶-穆凯伙伴，但一般而言，没有理由期待 Balmer 谱的导出范畴与原三角范畴之间存在关系。

某个张量三角结构下，空间 X 与 Balmer 谱$Spc(\boxtimes)$ 之间缺乏态射，因此这两个空间的导出范畴之间也缺乏函子，这是我们无法理解可能存在的结构 $\boxtimes$ 的障碍之一。

References

[Bal02] Paul Balmer. 三角范畴的预层与概形的重构。《数学年刊》，324(3):557–580，2002年。2，9[Bal05] Paul Balmer. 张量三角范畴中素理想的谱。《纯粹与应用数学杂志》，588:149–168，2005年。7，8，9[BCL14] S´ébastien Boucksom, Salvatore Cacciola, and Angelo Felice Lopez. 正规簇上的增广基 locus 与限制体积。《数学杂志》，278(3-4):979–985，2014年。12[Bei78] Alexander A Beilinson. pn 上的相干层与线性代数问题。《泛函分析及其应用》，12(3):214–216，1978年。11[BF07] Paul Balmer and Giordano Favi. 三角几何中的粘合技术。《数学季刊》，58(4):415–441，2007年。18[BK90] Alexei I Bondal and Mikhail M Kapranov. 可表函子、Serre 函子与突变。《苏联数学通报》，35(3):519，1990年。5[BO01] Alexei Bondal and Dmitri Orlov. 从导出范畴及自等价群重构簇。《数学汇刊》，125(3):327–344，2001年。2，5，19[Del16] Ivo Dell'Ambrogio. 三角范畴及其应用。博士论文，里尔第一大学，2016年。7[ha] Benjamin Antieau (https://mathoverflow.net/users/100/benjamin antieau). 我们能否仅从 $D^b_{\mathrm{coh}}(x)$ 某些情况下定义导出范畴中的张量积？MathOverflow。URL:https://mathoverflow.net/q/143661（版本：2013年10月1日）。19[Huy06] Daniel Huybrechts. 代数几何中的傅里叶-穆凯变换。克拉伦登出版社，2006年。4

[Kaw02] Yujiro Kawamata. D-等价与 k-等价。《微分几何杂志》，61(1):147–171，2002年。2[Laz17] Robert K Lazarsfeld. 代数几何中的正性 I：经典情形：线丛与线性系，第48卷。Springer，2017年。12[LS13] Yu-Han Liu and Susan J Sierra. 从导出箭图表示中恢复箭图。《代数通讯》，41(8):3013–3031，2013年。10，11[Muk87] Shigeru Mukai. 傅里叶函子及其在阿贝尔簇上丛模空间中的应用。《纯粹数学进展研究》，10:515–550，1987年。2[Rou03] Rapha¨el Rouquier. 导出范畴与代数几何。关于复代数几何的卢米尼研讨会讲座，卢米尼，2003年。9[Tho97] R. W. Thomason. 三角子范畴的分类。《数学汇刊》，105(1):1–27，1997年。8

Laboratoire J. A. Dieudonné UMR CNRS-UNS 7351. Université Côte d'Azur, Nice, France电子邮件地址：toledo@unice.fr