arXiv:2303.15537v1 [math.PR] 27 Mar 2023

无限维凸紧集的混合体积

MARIIA DOSPOLOVA

摘要。设 K 是可分希尔伯特空间 H 的凸紧 GB 子集。用 $\mathrm{Spec}_k K$ 表示集合 $\{(\xi_1(h)\dots,\xi_k(h)):\ h\in K\}\subset\mathbb{R}^k$, 其中 $\xi_1,\dots,\xi_k$ 是定义在 H 上的等距高斯过程的独立副本。Tsirelson 证明，在此情形下， K 的内在体积满足关系

$$V_k(K)=\frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}\mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}_k K).$$

这里，$\mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}_k K)$ 是 $\mathrm{Spec}_k K$ 的平均体积，而 κ_k 是 k 维单位球的体积。

在本文中，我们首先引入这一概念，然后将 Tsirelson 定理推广到 H 的无限维凸紧 GB 子集的 混合体积 。

此外，利用所得结果，我们计算了两个正交 Wiener 螺旋的闭凸包的混合体积。

2020 数学主题分类。 主要分类：52A39、60D05；次要分类：60G15、52A22。关键词和短语。 混合体积、内在体积、Sudakov定理、Tsirelson定理、 GB-集、等正态过程、自然修正、Wiener 螺旋。本研究得到俄罗斯联邦科学与高等教育部资助，协议编号：075-15-2022-289。

目录

1. 引言 3 1.1. 内在体积 3 1.2. Sudakov 定理与 Tsirelson 定理 3 1.3. 混合体积 4 2. 主要结果 5 2.1. Tsirelson定理的推广 5 2.2. 示例：两个正交 Wiener 螺旋的闭凸包的混合体积 6 3. 预备知识 7 3.1. 线性空间中的高斯向量 7 3.2. 可测线性泛函与核 8 3.3. 过程的可分与自然修改 9 3.4. GB-集：等价定义与性质 10 3.5. 混合体积的性质 12 4. 注释的证明3 13 5. 定理的证明3 15 6. 定理的证明4 18 7. 致谢 21 参考文献 22

1. 引言

1.1. **内在体积。** 设 $K \subset \mathbb{R}^d$ 是一个非空凸紧集，且维数 K 是 K 的维数（即包含 K的最小仿射子空间的维数）。 K 最重要的几何特征之一是其内在体积 V_0（K），…， V_d（K），它们被定义为Steiner公式中的系数（参见例如 [16, 关系 14。5]）

$$\mathrm{Vol}_d(K+\lambda B^d) = \sum_{k=0}^{d} \kappa_{d-k} V_k(K) \lambda^{d-k}, \quad \lambda \geqslant 0, \tag{1}$$

其中，$\mathrm{Vol}_d(\cdot)$表示体积（d维Lebesgue测度）， B^k 是 k维单位球，而 $\kappa_k := \mathrm{Vol}_k(B^k) = \pi^{k/2}/\Gamma(\frac{k}{2}+1)$表示 B^k的体积。换言之，邻域的体积表示为一个多项式，其系数取决于集合 K。

内在体积在凸几何中发挥着重要作用（参见例如 [15]）。特别地，可以证明 [16, 第6节。2] 其中 $V_d(\cdot)$是 d维体积，$V_{d-1}(\cdot)$对于 d维凸紧集是表面积的一半， $V_1(\cdot)$是平均宽度（相差一个常数因子），并且 $V_0(\cdot) \equiv 1$。

此外，公式（1）中的归一化方式经过选择，使得该集合的内在体积不依赖于环境空间的维数。这意味着，如果我们将K 嵌入到 $\mathbb{R}^N$ 中，且 $N \geqslant d$，则内在体积将保持不变。这一观察使 Sudakov [17] 和 Chevet [3]能够将内在体积的概念推广到无限维 K 情形，如下所述。

设 H 为无限维可分希尔伯特空间。于是，对于任意非空凸集 $K \subset H$，我们通过下式定义 $V_k(K)$ $k = 0$， 1，……

$$V_k(K) = \sup_{K' \subset K} V_k(K') \in [0, \infty], \tag{2}$$

其中，上确界取遍 K中的所有有限维凸紧子集 K'。

在下一小节中，我们将阐述一些结果，展示某些凸紧集的内在体积与高斯过程之间的深刻联系。

1.2. **Sudakov定理和Tsirelson定理。** 在可分希尔伯特空间 H 上定义的均值为零的高斯随机过程（$\xi(h))_{h\in H}$ 称为等距正态，如果其协方差函数具有如下形式

$$\mathrm{cov}(\xi(h), \xi(g)) = \langle h, g \rangle,$$

其中 $\langle\ ,\ \rangle$ 表示 H上的内积。

在他的论文 [17, 命题 14]中，Sudakov 发现了第一内在体积与等正态过程上确界的期望之间的联系。

定理 1 (Sudakov)。 对于一个凸紧集 $K \subset H$

$$V_1(K) = \sqrt{2\pi}\,\mathbf{E} \sup_{h\in K} \xi(h). \tag{3}$$

后来 Tsirelson [20, 定理 6] 推广定理 1. 设 $\{\xi_i(h)\colon\ h \in H\}$,$1 \leqslant i \leqslant k$, 表示 k 等正态过程的独立副本。则 k-维谱 定义为凸紧集 $K \subset H$ 对应的下列随机集:

$$\mathrm{Spec}_k K := \{(\xi_1(h), \ldots, \xi_k(h))\colon h \in K\} \subset \mathbb{R}^k.$$

为了表述 Tsirelson 的结果，我们首先需要引入 GB-集的概念。若可分希尔伯特空间 H 的子集 K满足：存在一个以 K为指标集的等正态过程的修改，其实现几乎处处有界（详细定义和性质见第 3 节），则称其为 GB-集。已知 [17, 定理 1]，凸 K 是 GB-集这一性质等价于 $V_1(K) < \infty$。在后一种情况下，对于所有 $k = 0$，1，.....，均有 $V_k(K) < \infty$ （例如参见 [3]）。

定理 2 (Tsirelson)。对于所有凸紧的 GB 集合 $K \subset H$ 以及所有 k =0、1、.....，

$$V_k(K) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}\mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}_k K). \tag{4}$$

备注 1。当 $K \subset \mathbb{R}^d$, $k \leqslant d$ 时，最后一个公式可改写为

$$V_k(K) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}\mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_k(AK),$$

其中 A 是一个大小为 $k \times d$ 的标准高斯矩阵（其元素是相互独立的标准正态随机变量），谱 $\mathrm{Spec}_k K = AK := \{Ax : x \in K\} \subset \mathbb{R}^k$。

备注 2。严格来说，在定理 1 中，我们需要过程 ξ 存在一个可分修改；而在定理 2中，我们需要 ξ_i 存在一个所谓的自然 修改（详见第3.3、3.4 小节）。我们将证明，在定理1、2 的假设下，相应的修改确实存在（见陈述 1）。

本文的主要目标是将定理 2 推广到下一小节中定义的混合体积。

1.3. 混合体积。 Minkowski 证明了 [13] 对于任意非空的凸紧集 K_1，.....，$K_s \subset \mathbb{R}^d$ 当λ_1，.....，$\lambda_s \geqslant 0$ 时，泛函 $\mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \ldots + \lambda_s K_s)$ 是一个次数为 d 且系数非负的齐次多项式:

$$\mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \ldots + \lambda_s K_s) = \sum_{i_1=1}^{s} \cdots \sum_{i_d=1}^{s} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_d} \tilde{V}_d(K_{i_1}, \ldots, K_{i_d}). \tag{5}$$

˜如果假设系数 $V_d(K_{i_1}, \ldots\ldots, K_{i_d})$ 关于 $K_{i_1}, \ldots\ldots, K_{i_d}$ 的置换是对称的，则这些系数是唯一确定的。系数$\tilde{V}_d(K_{i_1}, \ldots\ldots, K_{i_d})$ 被称为 $K_{i_1}, \ldots\ldots, K_{i_d}$ 的 混合体积。

很容易理解（例如，参见 [15, 第 5 节1]），内在体积是混合体积的特例，即

$$V_k(K) = \frac{\binom{d}{k}}{\kappa_{d-k}} \tilde{V}_d(\underbrace{K, \ldots, K}_{k \text{ times}}, B^d, \ldots, B^d). \tag{6}$$

混合体积理论在凸几何和代数几何中有广泛应用 [2, 第 4], 不等式 [15] 以及高斯分布理论中 [7]。混合体积的一些性质见第 3.5 小节。

接下来，我们陈述本文的主要结果。

2. 主要结果

2.1. **Tsirelson定理的推广**。 为了将定理 2推广到混合体积的情形，我们首先按照 Tsirelson 的定义，定义一个等距高斯随机过程 [19]。

考虑一个带有零均值高斯测度的线性拓扑空间 (E, γ) 及其核 $E_0 \subset E$ （定义和性质见第 3 节）。由于该核是一个希尔伯特空间，我们在 E_0上有内积，记作 $\langle\ ,\ \rangle_{E_0}$ （它由测度 γ唯一确定）。对于每个 $\theta \in E_0$，线性泛函 $\langle \theta, \eta \rangle_{E_0}$在 $\eta \in E_0$ 中连续，并且有一个唯一的（几乎处处相等意义下）延拓为线性泛函，该泛函在 $x \in E$ 中可测（见 [10, 第 9 节，引理 2]或 [1, 推论 2.10。8]），记作 $\langle \theta, x \rangle$。此外，

$$\int_E \langle \theta, x \rangle^2 \gamma(dx) = \|\theta\|^2 = \langle \theta, \theta \rangle. \tag{7}$$

因此，对于任意集合 $K \subset E_0$，定义等距高斯随机过程 $\langle \theta, x \rangle$，其中 $\theta \in K$， x 遍历赋予高斯测度 γ的空间 E。

为陈述并证明主要结果，我们将使用核 E_0 作为 H，并将过程$\langle \theta, \cdot \rangle$ 作为等正态过程。

为便于后续使用，根据本小节的记号改写定理 2 。对于 $k = 0,\ 1, \ldots\ldots$，公式（4）变为

$$V_k(K) = \frac{(2\pi)^{k/2}}{k! \kappa_k} \int_E \int_E \ldots \int_E \mathrm{Vol}_k(\mathrm{Spec}(x_1, \ldots, x_k | K)) \gamma(dx_1) \ldots \gamma(dx_k).$$

这里， $K \subset E_0$ 是一个凸紧的 GB-集合，
$\mathrm{Spec}(x_1, \ldots, x_k | K) := \{(\langle \theta, x_1 \rangle, \ldots, \langle \theta, x_k \rangle) : \theta \in K\} \subset \mathbb{R}^k$是 K上$x_1, \ldots, x_k \in E$的联合谱。

现在我们引入无限维凸集混合体积的概念，类似于(2)。

令 K_1，……， $K_k \subset H$ 为无限维可分希尔伯特空间 H 中的非空凸子集。则这些集合的 混合体积 $V(K_1$，……， $K_k)$ 定义为

$$\tilde{V}(K_1,\dots,K_k)=\sup_{K_i'\subset K_i}\frac{\binom{d}{k}}{\kappa_{d-k}}\tilde{V}_d(K_1',\dots,K_k',\underbrace{B^d,\dots,B^d}_{d-k\text{ times}}), \tag{8}$$

其中，上确界取遍所有 $d\geqslant k$ 以及所有有限维凸紧子集 $K_i'\subset K_i$，$\dim K_i'\leqslant d$，$i=1$，……， k。

注 3。 式（8）中的归一化方式选取为：对于 K_i ： $\dim K_i\leqslant d$，式（8）的右边不依赖于 d，表达式（6）亦然。因此，$\tilde{V}$（K_1，……， K_k） 定义良好。

注 3 的证明见第 4小节。

现在我们可以陈述本文的主要结果了。

定理 3. 固定 $k\in\mathbb{N}$。对于凸紧的 GB-集 $K_i\subset E_0$，$i=1,\dots,k$，有

$$\tilde{V}(K_1,\dots,K_k)=\frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}\ \mathbf{E}\ \tilde{V}_k(\mathrm{Spec}_kK_1,\dots,\mathrm{Spec}_kK_k)$$

$$=\frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}\int_E\dots\int_E\tilde{V}_k(\mathrm{Spec}(x_1,\dots,x_k|K_1),\dots,\mathrm{Spec}(x_1,\dots,x_k|K_k))\gamma(dx_1)\dots\gamma(dx_k).$$

注 4. GB-性质保证集合 Spec$(x_1,\dots,x_k|K_i)$几乎处处有界（且凸）。

2.2. 示例：两个正交 Wiener 螺旋的闭凸包的混合体积。 我们先回顾 Kolmogorov [9] 引入的*Wiener* 螺旋 的定义。函数集

$$\{\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot):t\in[0,1]\}\subset L^2[0,1]$$

称为*Wiener* 螺旋。该集合是泛函分析中的一个重要对象 [9]。回顾一下，集合 F 的凸包是包含 F 的最小凸集。

Gao 和 Vitale [6] 计算了 Wiener 螺旋的闭凸包 K 的内在体积：

$$V_k(K)=\frac{\kappa_k}{k!}=\frac{\pi^{k/2}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)k!}. \tag{9}$$

这可能是首个为非平凡无限维凸紧集的内在体积给出显式公式的结果。后来，人们也为其他无限维凸紧集证明了类似结果 [8]。

特别地，(9) 意味着 $V_1(K) < \infty$，因此 K 是一个 GB-集（参见第 3.4 小节中的定理 7）。

Wiener 螺旋与 Wiener 过程密切相关。设 $\{W(t)\colon\ t \geqslant 0\}$为标准一维布朗运动。考虑标准二维布朗运动

$$\{X^{(2)}(t) = (W_1(t), W_2(t))\colon t \geqslant 0\},$$

其中 $W_1(t)$ $W_2(t)$ 是 $W(t)$ 的相互独立副本。容易看出，$\mathrm{Spec}_2 K$与二维布朗运动 $\{X^{(2)}(t)\colon\ t \in [0,1]\}$的闭凸包具有相同的分布。

考虑 $L^2[0,2]$ 中的两个 Wiener 螺旋 S_1 和 S_2：

$$S_1 = \{\mathbb{1}_{[0,t]}(\cdot)\colon t \in [0,1]\} \subset L^2[0,2] \quad \text{and} \quad S_2 = \{\mathbb{1}_{[1+t,2]}(\cdot)\colon t \in [0,1]\} \subset L^2[0,2].$$

我们将相应的闭凸包记为 K_1 和 K_2。在下一个定理中，~我们计算 $V(K_1,\ K_2)$。

定理 4. 对于两个正交 *Wiener* 螺旋的闭凸包 K_1 和 K_2，有

$$\tilde{V}(K_1, K_2) = 2.$$

定理的证明 4 使用定理 3 （见第 6节）。

最后，我们通过说明本文其余部分的组织结构来结束本引言部分。下一节将介绍随机过程理论和凸几何中的必要概念、定义和事实，以补充前两节所呈现的信息。具体而言，在小节 3.4 中，我们将陈述并证明陈述1，作为定理 3 的辅助内容，涉及凸紧集的 GB-性质的一种解释。第4 节和第5 节分别包含注释 3 和主要定理 3的证明。最后，定理4的证明将在第6节给出。

3. 预备知识

3.1. 线性空间中的高斯向量。 遵循 [11, 章节 1, 4]和 [10,节 8, 9]，，我们给出线性空间中高斯向量的定义及其基本性质。

设 E 是线性拓扑空间，E^* 是 E 上连续线性泛函构成的空间。取值于 E 的随机向量 X 定义为从某个概率空间 $(\Omega\ \mathcal{B},\ \mathbf{P})$ 到 E 的可测映射。同时假设

空间 E 相应的 σ-代数足够大： E 上的所有连续线性泛函相对于它都是可测的。

随机向量 $X \in E$ 称为高斯向量，当且仅当对所有 $f \in E^*$， $f(X)$ 都是正态随机变量。

如果对于所有$f \in E^*$，$\mathbf{E}f(X) = f(a)$，则称元素 $a \in E$为 X的期望。如果线性算子 $C: E^* \to E$ 满足：对于任意 f_1， $f_2 \in E^*$，则称其为 X 的协方差算子。

$$\operatorname{cov}(f_1(X), f_2(X)) = f_1(Cf_2),$$

其中，$\operatorname{cov}(\cdot,\cdot)$ 表示两个随机变量之间的协方差。协方差算子 C 具有以下性质：

(1) $f(Cg) = g(Cf)$ $\forall f$， $g \in E^*$（对称性）；(2) $f(Cf) \geqslant 0$ $\forall f \in E^*$（半正定性）。

当空间 E 上的连续线性泛函足够丰富时，高斯向量的定义才有意义。因此，以下内容中我们处处默认 E 是一个局部凸线性拓扑空间，且 X的分布是拉东测度。在此情形下，任意高斯向量 X 都有期望和协方差算子 [10, ，它们唯一确定 8]的分布。因此，与有限维情形类似，我们将具有期望 X和协方差算子 $N(a, C)$ 的高斯向量 X 的分布记为 a 。在上述假设下，所有高斯向量的分布均具有 C 以下形式 $N(a, C)$。

下文中，当 $a = 0$ 时，我们将关注零均值情形。

3.2. 可测线性泛函与核。 考虑一个取值于线性空间 E的高斯向量 X。我们假设 $a = 0$。用$\gamma = N(0, C)$表示 X在 E中的分布。

根据高斯向量的定义，随机变量 $f(X)$ 服从正态分布，因此

$$\mathbf{E}f(X)^2 = \int_E |f(x)|^2 \gamma(dx) < \infty.$$

因此，空间 E^* 到希尔伯特空间 $L_2(E, \gamma)$ 的典范嵌入 I^* 定义良好。像 $I^*(E^*)$ 在 $L_2(E, \gamma)$ 中的闭包称为可测线性泛函 空间，记作 E^*_γ。

E^*_γ 中的内积继承自 L_2（E, γ）：

$$\langle g_1, g_2 \rangle_{E^*_\gamma} = \int_E g_1(x) g_2(x) \gamma(dx) = \mathbf{E} g_1(X) g_2(X);$$
$$\|g\|^2_{E^*_\gamma} = \mathbf{E} g(X)^2.$$

下文中，我们将算子 I^* 视为嵌入 $I^*: E^* \to E_\gamma^*$。我们通过以下关系定义对偶算子 $I: E_\gamma^* \to E$：

$$f(Ig) = \langle I^* f, g\rangle_{E_\gamma^*} = \mathbf{E} f(X) g(X), \quad \forall f \in E^*, g \in E_\gamma^*.$$

众所周知，[11, 第 4 节1] 在第3.1小节中陈述的假设下，对偶算子 I 存在，它是线性且单射的。此外，协方差算子 C 可以分解为

$$C = II^*.$$

最后，将 核定义为集合 $E_0 := I(E_\gamma^*) \subset E$，并赋予其内积

$$\langle \theta_1, \theta_2\rangle_{E_0} := \langle I^{-1}\theta_1, I^{-1}\theta_2\rangle_{E_\gamma^*}, \quad \theta_1, \theta_2 \in E_0,$$

从而赋予其范数

$$\|\theta\|^2 := \|\theta\|_{E_0}^2 = \langle \theta, \theta\rangle_{E_0}, \quad \theta \in E_0.$$

由于算子 I 是单射的，因此范数定义良好。

因此，核由测度 γ 唯一确定，并提供了关于该测度的关键信息（参见 [11]）。

我们汇总核的一些性质（参见 [11, 第 4 节1]）。

(1) $C(E^*) \subset E_0 \subset E$。若核是有限维的，则在非退化情形下，这三个空间重合；否则它们两两不同。(2) 若 E_0 是无限维的，则 $\gamma(E_0) = 0$。(3) 空间 E_0 是可分的。(4) 球 $\{\theta \in E_0: \ \|\theta\| \leqslant R\}, \quad R > 0$，是 E中的紧集。

3.3. 过程的可分与自然修改。设 $(\Omega\ \mathcal{B},\ \mathbf{P})$ 为概率空间，T为度量空间。若随机过程 $\xi(t,\ \omega)$、$t \in T$、$\omega \in \Omega$ 满足：存在至多可数集 $S \subset T$（该过程的可分集），使得对任意开集 $U \subset T$，以下等式以概率 1 成立，则称该过程为可分的：

$$\sup_{t\in U} \xi(t) = \sup_{t\in U\cap S} \xi(t), \quad \inf_{t\in U} \xi(t) = \inf_{t\in U\cap S} \xi(t).$$

以下定理（见 [1, 命题 2.6。5]）给出了均值为零的高斯过程存在可分修改的一个充分条件。回顾一下，如果随机过程 $(\eta(t))_{t\in T}$ 被称为过程 $(\xi(t))_{t\in T}$ 的一个修改，则这些过程定义在同一个概率空间上，并且对于任意 $t \in T$，都有$\mathbf{P}(\xi(t) = \eta(t)) = 1$。过程 $(\xi(t))_{t\in T}$的一个实现 是对于某个固定的 $\omega \in \Omega$，函数 $t \mapsto \xi(t, \omega)$。

定理 5。设 $(\xi(t))_{t\in T}$ 是定义在集合 T上的均值为零的高斯随机过程。假设带有半度量 $d(t,s) = \sqrt{}$的 T E $|\xi(t) - \xi(s)|^2$ 是可分的。那么，在同一个概率空间上，存在定义在 T 上的可分均值为零的高斯随机过程 $(\eta(t))_{t\in T}$，使得对于任意固定的 $t \in T$，都有 $\xi(t) = \eta(t)$ 几乎处处成立。

要证明定理3，仅有过程$\langle\theta, x\rangle$ 的可分修改还不够。我们需要所谓的自然修改，该修改由 Tsirelson 引入 [18]。

过程 $(\eta(t))_{t\in T}$ 的修改 $(\xi(t))_{t\in T}$ 称为自然修改，如果存在度量 ρ_1，使得 (T, ρ_1) 是一个可分度量空间，并且过程 $(\eta(t))_{t\in T}$在 (T, ρ_1) 上几乎处处具有连续实现。

下面我们表述一个定理（见 [10, 第 7] 节或 [1, 定理 2.6.3、命题 2.6.4]），该定理使我们能够根据振荡 α来检验自然修改的存在性。

定理 6。设 (T, ρ) 是一个可分度量空间，且 $(\xi(t))_{t\in T}$ 是一个均值为零的可分高斯随机过程，其连续协方差函数为

$$(t, s) \mapsto \mathbf{E}\ \xi(t)\xi(s).$$

那么存在一个非随机函数 $\alpha:\ T \to [0, \infty]$ 使得以概率 1对所有 $t \in T$

$$\alpha(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup\{|\xi(u, \omega) - \xi(v, \omega)|, u, v \in B(t, \varepsilon)\},$$

其中 B（t, ε） 表示以 t为中心、半径为 ε 的开球。

此外，如果 α（t） $< \infty$ 对所有 $t \in T$均成立，那么过程 （ξ（t）） $_{t\in T}$ 具有一个自然修正。

3.4. GB**-集：等价定义与性质**。正如引言中所述，GB-集是可分希尔伯特空间 H 的一个子集 K，满足存在一个以 K为指标集的等正态过程的修改，且该修改几乎处处具有有界实现。

本小节将表述 Sudakov [17, 定理 1]和 Tsirelson [18, 定理 3]关于 GB-集等价定义的结果，并证明一个辅助陈述 1，说明集合的 GB-性质与相应过程的振荡之间的联系。

定理 7 (Sudakov). 设 $K \subset H$ 是希尔伯特空间 H的一个凸子集。以下命题等价:

(1) 集合 K 是一个 GB-集;
(2) $V_1(K) < \infty$。

定理 8 (Tsirelson)。设 $K \subset H$ 是希尔伯特空间 H 的一个子集。以下陈述等价:

(1) 集合 K 上的等正态过程有自然修正；(2) 集合 K 是 GB_σ-集（即 GB-集的可数并）。

陈述 1. 设 $K \subset E_0$ 是一个凸紧 GB-集。则定理 *6* 适用于$T = K$，其标准度量由内积生成；也适用于过程$\langle \theta, \cdot \rangle$ 在 K上。因此，过程 $\langle \theta, \cdot \rangle$ 在 K 上有一个自然修正。

此外，逆命题也成立。考虑一个凸紧集 $K \subset E_0$，其标准度量满足定理 *6*的所有条件。则 K 是一个 GB-集，等价地，$V_1(K) < \infty$。

备注 5. 注意，陈述1 可由定理 8推出。不过，为方便读者，我们将给出陈述 1的替代证明。

备注 6. 过程 $\langle \theta, \cdot \rangle$ 存在可分修改，并不要求紧集 K具有 GB-性质，这一点可从下面的证明中看出。

陈述 *1* 的证明。 首先，我们来检查过程 $\langle \theta, x \rangle, \quad \theta \in K$ 是否具有可分修改。

我们将使用 5 定理。注意，对于 $\theta_1, \ \theta_2 \in K$ 我们有

$$d(\theta_1, \theta_2) := \sqrt{\mathbf{E}|\langle \theta_1, x\rangle - \langle \theta_2, x\rangle|^2} = \sqrt{\mathbf{E}\left(\langle \theta_1, x\rangle^2 + \langle \theta_2, x\rangle^2 - 2\langle \theta_1, x\rangle\langle \theta_2, x\rangle\right)}$$
$$= \sqrt{\langle \theta_1, \theta_1\rangle + \langle \theta_2, \theta_2\rangle - 2\langle \theta_1, \theta_2\rangle} = \sqrt{\langle \theta_1 - \theta_2, \theta_1 - \theta_2\rangle} = \|\theta_1 - \theta_2\|.$$

这里在第三个等式中，我们使用了过程 $\langle \theta, x \rangle, \quad \theta \in K$ 是等正态的这一事实。因此，半度量 d 与 K上的标准度量重合，从而 K在此半度量下是可分的。于是，根据 5 定理，我们可以不失一般性地假设过程 $\langle \theta, \cdot \rangle$ 是可分的。

现在我们需要检查协方差函数的连续性。

设 $(\theta_1, \ \theta_2) \in K \times K$ 和 $\|\theta_1^n - \theta_1\| \to 0, \quad \|\theta_2^n - \theta_2\| \to 0$ 如 $n \to \infty$。我们来证明

$$\mathbf{E}\langle \theta_1^n, x\rangle\langle \theta_2^n, x\rangle = \int_E \langle \theta_1^n, x\rangle\langle \theta_2^n, x\rangle\gamma(dx) \to \int_E \langle \theta_1, x\rangle\langle \theta_2, x\rangle\gamma(dx) = \mathbf{E}\langle \theta_1, x\rangle\langle \theta_2, x\rangle.$$

事实上，由于该过程的等正态性以及柯西–施瓦茨不等式，

$$\left|\int_E \langle \theta_1^n, x\rangle\langle \theta_2^n, x\rangle\gamma(dx) - \int_E \langle \theta_1, x\rangle\langle \theta_2, x\rangle\gamma(dx)\right|$$
$$= |\langle \theta_1^n, \theta_2^n\rangle - \langle \theta_1, \theta_2\rangle|$$
$$\leqslant |\langle \theta_1^n - \theta_1, \theta_2\rangle| + |\langle \theta_1^n - \theta_1, \theta_2^n - \theta_2\rangle| + |\langle \theta_2^n - \theta_2, \theta_1\rangle|$$
$$\leqslant \|\theta_1^n - \theta_1\|\|\theta_2\| + \|\theta_1^n - \theta_1\|\|\theta_2^n - \theta_2\| + \|\theta_2^n - \theta_2\|\|\theta_1\|.$$

在最后一个不等式中令 $n \to \infty$，即可得到所需的关系。

最后，我们来验证定理 α 中引入的振荡 6在 K 为凸紧 GB集的情况下是有限的。

根据定理 $V_1(K) < \infty$，我们有 7。我们将需要关于 $V_1(K)$的公式（3）：

$$V_1(K) = \sqrt{2\pi} \int_E (\sup_{\theta \in K} \langle \theta, x \rangle) \gamma(dx).$$

假设存在 $\theta \in K$、$E_1 \subset E$、$\gamma(E_1) > 0$，使得对于 $x \in E$ 1

$$\alpha(\theta) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup\{|\langle \theta_1, x \rangle - \langle \theta_2, x \rangle|, \theta_1, \theta_2 \in B(\theta, \varepsilon)\} = \infty.$$

由于对于 $x \in E_1$

$$\infty = \alpha(\theta) \leqslant 2 \sup_{\theta \in K} |\langle \theta, x \rangle|,$$

$\sup_{\theta \in K} -\langle \theta, x \rangle = \sup_{\theta \in K} \langle \theta, -x \rangle$，且分布 γ具有对称性，我们得到与 $V_1(K)$ 的有限性相矛盾的结论。这意味着 $\alpha(\theta) < \infty$。

反过 来，假设对于所有 $\theta \in K$， $\alpha(\theta) < \infty$。我们来证明在这种情况下

$$\gamma(x \in E : \sup_{\theta \in K} |\langle \theta, x \rangle| < \infty) = 1.$$

我们固定 $x \in E_1$，其中 $E_1 \subset E$ 是一个满测度集，在该集合上，对于所有 $\theta \in K$， $\alpha(\theta) < \infty$。

对于每个 $\theta \in K$，我们选取 $\tilde{\varepsilon}(\theta)$ $M(\theta) < \infty$，使得

$$\sup\{|\langle \theta_1, x \rangle - \langle \theta_2, x \rangle|, \theta_1, \theta_2 \in B(\theta, \tilde{\varepsilon}(\theta))\} < M(\theta). \tag{10}$$

考虑由球 $\{B(\theta, \tilde{\varepsilon}(\theta))\}_{\theta \in K}$ 对 K 的覆盖。由于 K 是紧的，我们可以选取 K 的一个有限子覆盖，其形式为 $\{B(\theta^i, \tilde{\varepsilon}(\theta^i))\}_{i=1}^N = \{B_i\}_{i=1}^N$.

于是，由过程的线性性 $\langle \theta, \cdot \rangle$ 以及关系 (10)，可得

$$\begin{aligned}
\sup_{\theta \in K} |\langle \theta, x \rangle| &= \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \sup_{\theta \in B_i} |\langle \theta - \theta^i, x \rangle + \langle \theta^i, x \rangle| \\
&\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |\langle \theta^i, x \rangle| + \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \sup_{\theta \in B_i} |\langle \theta - \theta^i, x \rangle| \\
&\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant N} |\langle \theta^i, x \rangle| + \max_{1 \leqslant i \leqslant N} M(\theta^i) < \infty.
\end{aligned}$$

根据我们的假设，最后一个不等式对所有 $x \in E_1$ 都成立，且 $\gamma(E_1) = 1$，因此我们有 $\gamma(x \in E : \sup_{\theta \in K} |\langle \theta, x \rangle| < \infty) = 1$.

因此， K 是一个 GB-集。由定理7，我们得到 $V_1(K) < \infty$.

该命题得证。 □

3.5. **混合体积的性质**。 我们汇集引言中定义的混合体积的基本性质，其中一些将在定理3的证明中用到。关于混合体积理论更为详细的介绍，参见[2, 第 4] 章和 [15, 第 5]章。

(1) $\tilde{V}_d(K, \ldots, K) = \mathrm{Vol}_d(K)$.

（2）次序无关性：

$$\tilde{V}_d(K_1,\ldots,K_d)=\tilde{V}_d(K_{\sigma_1},\ldots,K_{\sigma_d}),$$

其中 σ 是数字 1、……、 d 的任意一个置换。

(3) 非负多重线性：

$$\begin{aligned}&\tilde{V}_d(\lambda K_1+\lambda' K_1', K_2\ldots,K_d)\\&=\lambda\tilde{V}_d(K_1,K_2\ldots,K_d)+\lambda'\tilde{V}_d(K_1',K_2\ldots,K_d)\text{ for }\lambda,\lambda'\geqslant 0.\end{aligned}$$

(4) 对平移的不变性：

$$\tilde{V}_d(K_1+a_1,\ldots,K_d+a_d)=\tilde{V}_d(K_1,\ldots,K_d)$$

对于任意 a_1、……、 $a_d\in\mathbb{R}^d$。

(5) 对幺模仿射变换的不变性 O：

$$\tilde{V}_d(OK_1,\ldots,OK_d)=\tilde{V}_d(K_1,\ldots,K_d).$$

(6) 关于每个自变量的单调性：设 K_i、 L_i、 $i=1$、……、 d，为凸紧集，且 $K_i\subset L_i$。那么

$$\tilde{V}_d(K_1,\ldots,K_d)\leqslant\tilde{V}_d(L_1,\ldots,L_d).$$

这一性质意味着混合体积非负。

(7) 可加性：若 $A,B,A\cup B\subset\mathbb{R}^d$ 是非空凸紧集，则

$$\begin{aligned}&\tilde{V}_d(\underbrace{A\cup B,\ldots,A\cup B}_{i\text{ times}},K_{i+1},\ldots,K_d)=\tilde{V}_d(A,\ldots,A,K_{i+1},\ldots,K_d)\\&+\tilde{V}_d(B,\ldots,B,K_{i+1},\ldots,K_d)-\tilde{V}_d(A\cap B,\ldots,A\cap B,K_{i+1},\ldots,K_d).\end{aligned}$$

(8) 混合体积关于每个 K_i 以及这些集合在豪斯多夫度量 d_H(d_H(K_1, K_2) := inf $\{\varepsilon\geqslant 0:\ K_1\subset K_2+\varepsilon B^d$ 和 $K_2\subset K_1+\varepsilon B^d\}$)下组成的族连续。

4. 备注 3的证明

令 $K_i\subset\mathbb{R}^d$。只需证明

$$\frac{\binom{d}{k}}{\kappa_{d-k}}\tilde{V}_d(K_1,\ldots,K_k,B^d,\ldots,B^d)=\frac{\binom{d+1}{k}}{\kappa_{d+1-k}}\tilde{V}_{d+1}(K_1,\ldots,K_k,B^{d+1},\ldots,B^{d+1}).$$

事实上，根据闵可夫斯基公式（5），

$$\begin{aligned}&\mathrm{Vol}_{d+1}(\lambda_1 K_1 + \ldots + \lambda_k K_k + \lambda B^{d+1})\\ =&\int_{-\lambda}^{\lambda} \mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \ldots + \lambda_k K_k + \sqrt{\lambda^2 - z^2} B^d) dz\\ =&\int_{-\lambda}^{\lambda} \sum_{i_1=1}^{k+1} \cdots \sum_{i_d=1}^{k+1} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_d} \tilde{V}_d(K_{i_1}, \ldots, K_{i_d}) dz,\end{aligned}$$

其中 $\lambda_{i_j} \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \sqrt{\lambda^2 - z^2}\}$，　$K_{i_j} \in \{K_1, \ldots, K_k, B^d\}$。

现在来看最后一个等式左右两边的单项式 $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ 的系数。

根据 Min kowski 公式（5）作用于左边，我们得到系数

$$k!\, \tilde{V}_{d+1}(K_1, \ldots, K_k, B^{d+1}, \ldots, B^{d+1}) \binom{d+1}{k} \lambda^{d+1-k}.$$

右边 $\lambda_1 \cdots \lambda_k$ 的系数为

$$k!\, \tilde{V}_d(K_1, \ldots, K_k, B^d, \ldots, B^d) \binom{d}{k} \int_{-\lambda}^{\lambda} \sqrt{(\lambda^2 - z^2)}^{d-k} dz.$$

注意到

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \sqrt{(\lambda^2 - z^2)}^{d-k} dz = \lambda^{d+1-k} \int_{-1}^{1} \sqrt{(1 - z^2)}^{d-k} dz = \lambda^{d+1-k} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d-k}{2} + 1)}{\Gamma(\frac{d-k+3}{2})}.$$

比较各系数，我们得到

$$\begin{aligned}&k!\, \tilde{V}_{d+1}(K_1, \ldots, K_k, B^{d+1}, \ldots, B^{d+1}) \binom{d+1}{k} \lambda^{d+1-k}\\ =\, &k!\, \tilde{V}_d(K_1, \ldots, K_k, B^d, \ldots, B^d) \binom{d}{k} \lambda^{d+1-k} \int_{-1}^{1} \sqrt{(1 - z^2)}^{d-k} dz.\end{aligned}$$

考虑到 $\kappa_k := \pi^{k/2}/\Gamma(\frac{k}{2} + 1)$ 的值以及最后一个等式，我们有

$$\begin{aligned}&\binom{d+1}{k} \tilde{V}_{d+1}(K_1, \ldots, K_k, B^{d+1}, \ldots, B^{d+1}) \kappa_{d-k}\\ =&\binom{d}{k} \tilde{V}_d(K_1, \ldots, K_k, B^d, \ldots, B^d) \kappa_{d+1-k},\end{aligned}$$

至此，证明完成。

5. 定理 3 的证明

我们将定理的证明分为两种情况。

情形 1. 对于所有 $K_i < \infty \quad i = 1, \ldots, k$，考虑到备注 1、3，定理 3 的陈述可改写为以下形式。

命题 2. 若 $K_1, \ldots, K_k \subset \mathbb{R}^d$，$k = 1, \ldots, d$，则

$$\tilde{V}_d(K_1, \ldots, K_k, B^d, \ldots, B^d) = c_{k,d} \mathbf{E}\, \tilde{V}_k(AK_1, \ldots, AK_k),$$

其中 $c_{k,d} = \frac{\kappa_{d-k}}{\left(\frac{2\pi^{k/2}}{k}\right)! \binom{d}{k} \kappa_k}$，$AK_i := \{Ax : x \in K_i\} \subset \mathbb{R}^k$，且 A 是大小为 $k \times d$ 的标准高斯矩阵。

命题 2 的证明。 我们来看 体积$_d \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i K_i + (d-1)\lambda B^d \right)$。

根据闵可夫斯基定理（5），

$$\text{Vol}_d \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i K_i + (d-1)\lambda B^d \right) = \sum_{i_1=1}^{d+k-1} \cdots \sum_{i_d=1}^{d+k-1} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_d} \tilde{V}_d(K_{i_1}, \ldots, K_{i_d}), \tag{11}$$

其中 $\lambda_{i_j} \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \lambda\}$，$K_{i_j} \in \{K_1, \ldots, K_k, B^d\}$。因此，在右边的和中，$\lambda^{d-k}$ 的系数是关于 α_1，……，α_k 的多项式，而 $\lambda^{d-k}\alpha_1 \cdots \alpha_k$ 的系数等于

$$k! \binom{d}{k} \tilde{V}_d(K_1, \ldots, K_k, B^d, \ldots, B^d).$$

另一方面，考虑 $T := \sum_{i=1}^k \alpha_i K_i$，根据闵可夫斯基定理（5），我们有

$$\text{Vol}_d(T + (d-1)\lambda B^d) = \sum_{i_1=1}^{d} \cdots \sum_{i_d=1}^{d} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_d} \tilde{V}_d(K_{i_1}, \ldots, K_{i_d}), \tag{12}$$

其中 $\lambda_{i_j} \in \{1, \lambda\}$, $K_{i_j} \in \{T, B^d\}$。在这种情况下，由于混合体积在参数置换下保持不变，λ^{d-k} 的系数将等于

$$\binom{d}{k} \tilde{V}_d(\underbrace{T, \ldots, T}_{k \text{ times}}, B^d, \ldots, B^d).$$

此外，

$$\tilde{V}_d(\underbrace{T,\dots,T}_{k\text{ times}},B^d,\dots,B^d)\overset{(6)}{=}\frac{\kappa_{d-k}}{\binom{d}{k}}V_k(T)=\frac{\kappa_{d-k}}{\binom{d}{k}}V_k\left(\sum_{i=1}^k\alpha_iK_i\right)$$
$$\overset{(4)}{=}\frac{\kappa_{d-k}}{\binom{d}{k}}\frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}\mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_k\left(A\left(\sum_{i=1}^k\alpha_iK_i\right)\right)$$
$$=\frac{\kappa_{d-k}}{\binom{d}{k}}\frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}\mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_k\left(\sum_{i=1}^k\alpha_iAK_i\right).$$

再次应用闵可夫斯基定理（5），我们得出 $\mathbf{E}\mathrm{Vol}_k\left(\sum_{i=1}^k\alpha_iAK_i\right)$是关于 α_1，……，α_k 的 k 次齐次多项式，其 $\alpha_1\cdots\alpha_k$ 系数等于

$$k!\,\mathbf{E}\,\tilde{V}_k(AK_1,\dots,AK_k).$$

因此，在（12）的右边，$\lambda^{d-k}\alpha_1\cdots\alpha_k$ 的系数等于

$$\kappa_{d-k}\frac{(2\pi)^{k/2}}{\kappa_k}\mathbf{E}\,\tilde{V}_k(AK_1,\dots,AK_k).$$

因此，关系式（11）和（12）的左边相同。因此，$\lambda^{d-k}\alpha_1\cdots\alpha_k$ 的系数在右边也相同：

$$k!\binom{d}{k}\tilde{V}_d(K_1,\dots,K_k,B^d,\dots,B^d)=\kappa_{d-k}\frac{(2\pi)^{k/2}}{\kappa_k}\mathbf{E}\,\tilde{V}_k(AK_1,\dots,AK_k),$$
$$\tilde{V}_d(K_1,\dots,K_k,B^d,\dots,B^d)=\frac{\kappa_{d-k}(2\pi)^{k/2}}{k!\binom{d}{k}\kappa_k}\mathbf{E}\,\tilde{V}_k(AK_1,\dots,AK_k).$$

这就完成了命题 2的证明。

□

情形 2。对于至少一个指标 $i=1,\dots,k$，**dim** $K_i=\infty$。

根据命题1，紧集 K_i 的 GB-性质意味着过程 $\langle\theta,x\rangle$、$\theta\in K_i$ 存在自然修正。

接下来，我们将情形 2 归结为有限维情形（命题 2）。令$K_{1,\,1}\subset K_{1,\,2}\subset\ldots\subset K_1$，$K_{2,\,1}\subset K_{2,\,2}\subset\ldots\subset K_2$，.. .，$K_{k,\,1}\subset K_{k,\,2}\subset\ldots\subset K_k$。这里 $K_{i,\,j}$是有限维凸紧集，且 $\cup_{j=1}^\infty K_{i,\,j}$ 在 K_i中稠密。于是根据定义（8）以及混合体积的性质 6，8，我们得到

$$\tilde{V}(K_1,\dots,K_k)=\lim_{j\to\infty}\tilde{V}(K_{1,j},\dots,K_{k,j}).$$

现在我们表述 Tsirelson 在 [20] 中证明的引理。

引理*1.* 设 $\xi(t,\omega)$ 是某个随机过程 $\omega \in \Omega, t \in T$ 的自然修正，并且 $S \subset T$ 在以下意义下是 T 中的稠密集：对于任意 $t \in T$，存在 $s_n \in S$, $n = 1, 2, \ldots$，使得当 $n \to \infty$ 时，对于几乎所有 ω， $\xi(s_n,\omega) \to \xi(t,\omega)$（一般而言，相应的概率为 *1* 的集合依赖于 t）。那么存在一个概率为 *1* 的集合 $\Omega_0 \subset \Omega$，具有如下性质：对于任意 $t \in T$，存在 $s'_n \in S$, $n = 1, 2, \ldots$，使得当 $n \to \infty$ 时，对于所有 $\omega \in \Omega_0$， $\xi(s'_n,\omega) \to \xi(t,\omega)$。

推论 1. 设 $K \subset E_0$ 是一个凸紧的 GB-集。若 $K_0 \subset K$ 在 K 中稠密，则对于几乎所有 $(x_1, \ldots\ldots, x_k)$，集合 $\mathrm{Spec}(x_1, \ldots\ldots, x_k|K_0)$ 在集合 $\mathrm{Spec}(x_1, \ldots\ldots, x_k|K)$ 中稠密。

上述推论见 [20]，但未给出证明。为方便读者，我们在此证明。

推论 *1* 的证明。 由于 K_0 在 K 中按通常意义稠密，对于任意 $\theta \in K$，存在 $s_n \in K_0$, $n = 1, 2, \ldots\ldots$，使得 $\|s_n - \theta\| \to 0$ 当 $n \to \infty$时成立。此外，由性质（7），

$$\int_E \langle s_n - \theta, x\rangle^2 \gamma(dx) = \|s_n - \theta\|^2 \to 0$$

当 $n \to \infty$ 时。因此，序列 $\langle s_n - \theta, x\rangle^2$ 依概率收敛到 0。于是存在一个子序列（我们仍将其记作 s_n），使得 $\langle s_n - \theta, x\rangle^2$ 几乎处处收敛到 0（相应的概率为 1 的集合依赖于 θ）。

由于 $K \subset E_0$ 是一个凸紧的 GB-集，高斯过程 $\langle \theta, x\rangle$ 根据陈述1有一个自然修正。因此，由引理1，对任意 $\theta \in K$，存在$s'_n \in K_0$ 使得

$$\langle s'_n, x\rangle \to \langle \theta, x\rangle \tag{13}$$

对于几乎所有的 x，都有 $n \to \infty$，且相应的概率为 1 的集合对所有 $\theta \in K$ 都是共同的。

那么我们可以得出结论：对于几乎所有的（x_1，...，x_k），集合

$$\mathrm{Spec}(x_1, \ldots, x_k|K_0) = \{(\langle \theta, x_1\rangle, \ldots, \langle \theta, x_k\rangle) : \theta \in K_0\} \subset \mathbb{R}^k$$

在集合中稠密

$$\mathrm{Spec}(x_1, \ldots, x_k|K) = \{(\langle \theta, x_1\rangle, \ldots, \langle \theta, x_k\rangle) : \theta \in K\} \subset \mathbb{R}^k,$$

因为上述论证表明了逐坐标稠密性（13），而在1 中概率为 $\mathbb{R}^k$ 的相应集合对于所有 $\theta \in K$ 也是共同的。

□

根据推论1，我们得到，几乎处处 $\cup_{j=1}^{\infty}$谱$(x_1, \ldots, x_k|K_{i,j})$ 在谱$(x_1, \ldots, x_k|K_i)$ 中稠密。

然后我们对有限维命题2$K_{i,j}$ 使用陈述:

$$\tilde{V}(K_1,\dots,K_k)=\lim_{j\to\infty}\tilde{V}(K_{1,j},\dots,K_{k,j})=\lim_{j\to\infty}\frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}$$
$$\times\int_E\dots\int_E\tilde{V}_k(\mathrm{Spec}(x_1,\dots,x_k|K_{1,j}),\dots,\mathrm{Spec}(x_1,\dots,x_k|K_{k,j}))\gamma(dx_1)\dots\gamma(dx_k)$$
$$=\frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}$$
$$\times\int_E\dots\int_E\lim_{j\to\infty}\tilde{V}_k(\mathrm{Spec}(x_1,\dots,x_k|K_{1,j}),\dots,\mathrm{Spec}(x_1,\dots,x_k|K_{k,j}))\gamma(dx_1)\dots\gamma(dx_k)$$
$$=\frac{(2\pi)^{k/2}}{k!\kappa_k}$$
$$\times\int_E\dots\int_E\tilde{V}_k(\mathrm{Spec}(x_1,\dots,x_k|K_1),\dots,\mathrm{Spec}(x_1,\dots,x_k|K_k))\gamma(dx_1)\dots\gamma(dx_k).$$

这里，在第三个等式中，我们使用了勒贝格控制收敛定理。最后一个等式也由混合体积的性质 6、8以及推论 1 得出。

定理 3 的证明完毕。

6. Proof of Theorem 4

由于 K_1 和 K_2 是紧的 GB-集，我们可以用 定理 3 ，取 $k=2$:

$$\tilde{V}(K_1,K_2)=\frac{2\pi}{2\kappa_2}\,\mathbf{E}\,\tilde{V}_2(\mathrm{Spec}_2K_1,\mathrm{Spec}_2K_2).$$

由于 $\kappa_2=\pi$，我们得到

$$\tilde{V}(K_1,K_2)=\mathbf{E}\,\tilde{V}_2(\mathrm{Spec}_2K_1,\mathrm{Spec}_2K_2)$$
$$=\mathbf{E}\,\tilde{V}_2\left(\mathrm{conv}\left(\{X_1^{(2)}(t)\colon t\in[0,1]\}\right),\mathrm{conv}\left(\{X_2^{(2)}(t)\colon t\in[0,1]\}\right)\right),\tag{14}$$

其中， $X_1^{(2)}(t)$ $X_2^{(2)}(t)$ 是相互独立的标准二维布朗运动，$\mathrm{conv}(F)$ 表示集合 F 的闭凸包。

˜因此，我们的问题归结为求独立二维布朗运动在 $[0,1]$ 上的闭凸包的平均混合面积$\mathbf{E}$ V_2 。

此外，为了计算，我们将使用 [12]中给出的方法的一个类似版本。该方法的主要工具是支撑函数及相关的柯西公式。

设 C 为平面中任意一条闭光滑凸曲线。我们将曲线 C 表示为

$$C=\{(x(s),y(s))\},\ s\in C.$$

现在我们回顾曲线 C 的支撑函数这一概念。

对于 $\varphi \in [0, 2\pi)$，曲线 C 的支撑函数 $M(\varphi)$ 的值定义为

$$M(\varphi) = \max_{s \in C} \{x(s)\cos\varphi + y(s)\sin\varphi\}.$$

柯西公式（例如，参见 [12, 第 48-49]）使我们能够用支撑函数表示曲线的长度 L C 以及 A 由曲线围成的图形的面积 C：

$$L = \int_0^{2\pi} M(\varphi)d\varphi, \tag{15}$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left((M(\varphi))^2 - (M'(\varphi))^2\right) d\varphi. \tag{16}$$

当曲线 C 是随机的（例如，二维布朗运动的闭凸包的边界；该曲线几乎处处光滑 [4]）时，$M(\varphi)$ 和 $M'(\varphi)$ 是随机变量。

对关系式（15）、（16）两边取期望，得到

$$\mathbf{E}L = \int_0^{2\pi} \mathbf{E}M(\varphi)d\varphi, \tag{17}$$

$$\mathbf{E}A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\mathbf{E}(M(\varphi))^2 - \mathbf{E}(M'(\varphi))^2\right) d\varphi. \tag{18}$$

注意，二维布朗运动的分布在旋转下保持不变。因此，支撑函数 $M(\varphi)$ 的分布与 φ 无关。因此，只需考虑 $\varphi = 0$，$M(\varphi) \equiv M(0)$。此时，关系式（17）、（18）可写成如下形式

$$\begin{aligned} &\mathbf{E}L = 2\pi\ \mathbf{E}M(0), \\ &\mathbf{E}A = \pi\left(\mathbf{E}(M(0))^2 - \mathbf{E}(M'(0))^2\right). \end{aligned} \tag{19}$$

下面的表达式（例如，参见 [14, 第 4-5] 页）是柯西公式的一个类似公式，用于计算平面内两个边界光滑的凸紧集 F_1，F_2 的混合面积：

$$\tilde{V}_2(F_1, F_2) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(M_1(\varphi)M_2(\varphi) - M_1'(\varphi)M_2'(\varphi)\right) d\varphi,$$

其中，M_1 和 M_2 分别是表示 F_1 和 F_2边界的曲线的支撑函数。

与（18）类似，对于随机 F_1， F_2 我们得到

$$\mathbf{E}\,\tilde{V}_2(F_1,F_2)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\mathbf{E}(M_1(\varphi)M_2(\varphi))-\mathbf{E}(M_1'(\varphi)M_2'(\varphi))\right)d\varphi. \tag{20}$$

现在考虑 凸包 $\left(\{X_1^{(2)}(t)\colon\ \ t\in[0,1]\}\right)$ 以及 凸包 $\left(\{X_2^{(2)}(t)\colon\ \ t\in[0,1]\}\right)$ 分别作为 F_1和 F_2。根据公式 (20) 以及 $X_1^{(2)}(t)$ 与 $X_2^{(2)}(t)$的独立性，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\,\tilde{V}_2\left(\operatorname{conv}\left(\{X_1^{(2)}(t)\colon t\in[0,1]\}\right),\operatorname{conv}\left(\{X_2^{(2)}(t)\colon t\in[0,1]\}\right)\right)\\&\quad=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\mathbf{E}M_1(\varphi)\mathbf{E}M_2(\varphi)-\mathbf{E}M_1'(\varphi)\mathbf{E}M_2'(\varphi)\right)d\varphi\\&\quad=\frac{1}{2}\,2\pi\left((\mathbf{E}M_1(0))^2-(\mathbf{E}M_1'(0))^2\right)=\pi\left((\mathbf{E}M_1(0))^2-(\mathbf{E}M_1'(0))^2\right).\end{aligned} \tag{21}$$

这里第二个等号由关系 (19) 以及 M_1 和 M_2 同分布这一事实得出。

因此，接下来只需计算 $\mathbf{E}M_1(0)$ 和 $\mathbf{E}M_1'(0)$，其中 M_1 是二维布朗运动在 $[0,1]$ 上的凸包边界的支撑函数。

回忆

$$\{X^{(2)}(t)\colon t\in[0,1]\}=\{(W_1(t),W_2(t))\colon t\in[0,1]\},$$

其中 $W_1(t)$ 和 $W_2(t)$ 是相互独立的标准一维布朗运动。固定一个方向 φ。对于 $t\in[0,1]$，考虑沿方向 φ 及其垂直方向的投影：

$$\begin{aligned}z_\varphi(t)&=W_1(t)\cos\varphi+W_2(t)\sin\varphi,\\h_\varphi(t)&=-W_1(t)\sin\varphi+W_2(t)\cos\varphi.\end{aligned}$$

则 z_φ 和 h_φ 上的是相互独立的标准一维布朗运动。因此，支撑函数

$$M_1(\varphi)=\max_{t\in[0,1]}z_\varphi(t)$$

是 $[0,1]$上的一维布朗运动 z_φ 的最大值。

设 $t^*\in[0,1]$ 为取得该最大值的时刻。则

$$M_1(\varphi)=z_\varphi(t^*)=W_1(t^*)\cos\varphi+W_2(t^*)\sin\varphi. \tag{22}$$

对 22 求关于 φ 的导数，得到

$$M_1'(\varphi)=-W_1(t^*)\sin\varphi+W_2(t^*)\cos\varphi=h_\varphi(t^*).$$

换句话说， $M_1(\varphi)$ 是第一个布朗运动 z_φ 的最大值，而 $M_1'(\varphi)$ 对应于第一个布朗运动达到最大值时，第二个独立布朗运动 h_φ 在时间 t^*的取值。

特别地，对于 $\varphi = 0$，我们得到 $z_0(t) = W_1(t)$、 $h_0(t) = W_2(t)$，并且

$$M_1(0) = \max_{t\in[0,1]} W_1(t),$$
$$M_1'(0) = W_2(t^*).$$

一维布朗运动在 $[0,1]$ 上的最大值的累积分布函数是众所周知的（例如参见 [5]），即

$$F(m) = \mathbf{P}\left(\max_{t\in[0,1]} W_1(t) \leqslant m\right) = \operatorname{erf}\left(\frac{m}{\sqrt{2}}\right),$$

其中 $\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-u^2}\,du$。该分布的第一阶矩很容易计算：

$$\mathbf{E}M_1(0) = \mathbf{E}\max_{t\in[0,1]} W_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{23}$$

我们来证明

$$\mathbf{E}M_1'(0) = \mathbf{E}W_2(t^*) = 0. \tag{24}$$

事实上，由于 t^* 和 $W_2(t)$ 相互独立，我们可知

$$\mathbf{E}M_1'(0) = \mathbf{E}W_2(t^*) = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} x p_1(x,t)dx\; p_2(t)dt. \tag{25}$$

这里 p_1 表示正态分布 $N(0,\ t)$ 在条件 $t^* = t$下的密度，而 p_2 表示随机变量 t^* (关于 p_2 的显式公式可见 [12])。对于固定的 $t \in [0,1]$，由于（25）中的内层积分等于 0，因此有 $\mathbf{E}M_1'(0)$。

结合（14）、（21）、（23）和（24），我们得到

$$\tilde{V}(K_1,K_2) = \pi\left((\mathbf{E}M_1(0))^2 - (\mathbf{E}M_1'(0))^2\right) = 2.$$

7. 致谢

作者谨向 Dmitry Zaporozhets 致谢，感谢他进行的有益讨论并提出宝贵意见。

参考文献

[1] V. I. Bogachev.《高斯测度》，《数学调查与专著》第62卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1998年。5，9，10[2] Yu. D. Burago 和 V. A. Zalgaller。《几何不等式》，《基础数学科学丛书》第285卷。施普林格出版社，柏林，1988年。A.B. Sossinsky 从俄文译出。5，12[3] S. Chevet。《高斯过程与混合体积》。概率论与相关领域杂志，36(1):47–65，1976年。3，4[4] M. El Bachir。《布朗运动的凸包》。博士论文，1983年。19[5] W. Feller。《概率论及其应用导论》。第二卷。John Wiley & Sons, Inc.，纽约-伦敦-悉尼，第二版，1971年。21[6] F. Gao 和 R. A. Vitale。《布朗运动体的内在体积》。离散与计算几何，26(1):41–50，2001年。6[7] Z. Kabluchko 和 D. N. Zaporozhets。《随机行列式、椭球的混合体积与高斯随机场的零点》。数学科学杂志，199(2):168–173，2014年。5[8] Z. Kabluchko 和 D. N. Zaporozhets。《索伯列夫球的内在体积及其在布朗凸包中的应用》。美国数学会汇刊，368(12):8873–8899，2016年。7[9] A. N. Kolmogorov。《文选 I：数学与力学》。Springer 数学文集。多德雷赫特：施普林格，2019年。重印1991年精装版，该版由 Kluwer Academic Publishers 出版。6[10] M. A. Lifshits。《高斯随机函数》，《数学应用》第322卷。多德雷赫特：Kluwer Academic Publishers，1995年。5，7，8，10[11] M. A. Lifshits。《高斯过程讲义》。Springer 数学简明丛书。施普林格出版社，柏林，2012年。7，9[12] S. N. Majumdar、A. Comtet 和 J. Randon-Furling。《随机凸包与极值统计》。统计物理学杂志，138(6):955–1009，2010年。18，19，21[13]H. Minkowski。《凸体理论，特别是其表面积概念的基础》。文集，2:131–229，1911年。4[14] L. A. Santaló。《积分几何与几何概率》，《数学应用百科全书》第1卷。Addison-Wesley Publishing Co.，雷丁，马萨诸塞州-伦敦-阿姆斯特丹，1976年。19[15] R. Schneider。《凸体：布伦-明可夫斯基理论》，《数学应用百科全书》第151卷。剑桥大学出版社，剑桥，扩充版，2014年。3，5，12[16] R. Schneider 和 W. Weil。《随机几何与积分几何》。概率与应用（纽约）。施普林格出版社，柏林，2008年。3[17] V. N. Sudakov。《无限维概率分布理论中的几何问题》。斯捷克洛夫数学研究所论文集，141:1–178，1979年。全文译自《数学研究所论文集》141（1976）。3，4，10[18] B. S. Tsirelson。《随机过程的一种自然修正及其在随机函数级数和高斯测度中的应用》。苏联数学，16:940–956，1981年。10[19]B. S. Tsirelson。《无限维高斯位置参数最大似然估计的几何方法 I》。概率论及其应用，27(2):388–395，1982年。5[20]B. S. Tsirelson。《无限维高斯位置参数最大似然估计的几何方法 II》。概率论及其应用，30(4):772–779，1985年。4，16，17

MARIIA DOSPOLOVA，俄罗斯圣彼得堡斯捷克洛夫数学研究所圣彼得堡分部电子邮箱：
dospolova.maria@yandex.ru