arXiv:2303.15559v1 [math.MG] 27 Mar 2023

关于通过内平行集的面积和周长研究切格常数的布拉施克-勒贝格定理

BENIAMIN BOGOSEL

Abstract. 本文给出的首个主要结果表明，对于具有给定宽度的平面图形，其内平行集的周长以勒洛三角形为最小。因此，内平行集的面积以及切格常数的倒数也都以勒洛三角形为最小。证明采用初等几何论证，并通过直接比较一般等宽图形与勒洛三角形得出结论。

关键词： 等宽，内平行集，切格常数 数学主题分类：52A10，49Q10，52A38。

1. Introduction

考虑平面上的凸域 Ω，即一个凸闭集。支撑直线是与 Ω 相交、但不会将 Ω 中任意两点分隔开的直线。对于一个光滑区域$\partial\Omega$，支撑直线与切线重合。给定平面中的一个方向 $\theta \in [0, 2\pi]$ ，与 θ 正交的两条支撑直线之间的距离称为 Ω 在方向 $w(\Omega\ \theta)$上的宽度 θ。在任意方向上宽度都相同的图形 $\theta \in [0, 2\pi]$ 称为等宽图形。最基本的等宽图形例子是圆盘和勒洛三角形；勒洛三角形是三个半径为 1、圆心位于边长为 1 的等边三角形顶点处的圆盘的交集。事实证明，勒洛三角形在多种几何量上都是极值图形，本文还证明了其他类似结果。以下归于 Lebesgue[19] 和 Blaschke [2] 的结果引起了广泛关注。

布拉施克-勒贝格定理。勒洛三角形是在给定定宽条件下，面积最小的形状。

除了最初的证明之外，这一结果还有许多不同的证明。Yaglom 和 Boltyanskii 的著作中给出了各种几何论证 [15] ，其中有一整章专门讨论等宽图形。Chakerian 在 [7] 中利用外切六边形给出了一个出人意料的证明。Ghandehari 在 [11] 中运用了控制理论，而 Harrell 在 [12] 中运用了变分方法。

众所周知，勒洛三角形还使内切半径最小、外接半径最大 [15, 第 7] 章。近年来，人们还研究了定宽图形类中的其他优化问题。在直径约束下，使狄利克雷–拉普拉斯算子的特征值最小化，会得到具有定宽性质的最优形状 [4]。在等宽图形类中，使这些特征值最大化的问题也适定；数值模拟表明，勒洛三角形很可能再次成为最优形状 [3]。

Colesanti 在 [9] 中证明，对于各种泛函，例如狄利克雷 p-拉普拉斯算子的第一特征值 $\lambda_{1,\ p}$，布伦-闵可夫斯基不等式成立。特别地，由于切格常数$h(\Omega)\ = \inf\{|\partial X|/|X|$ 使得 $X \subset\Omega\}$，可表示为特征值 $\lambda_{1,\ p}(\Omega)$ 的极限，因此布伦-闵可夫斯基不等式也适用于这种情形。基本的凸性论证表明，使$\lambda_{1,\ p}$ 或切格常数达到最大值的定宽图形必须是不可分解体，即不能表示为两个非相似定宽图形的闵可夫斯基和。对此类不可分解体的描述超出了本文的范围，但我们可以列举勒洛多边形这一例子。涉及凹泛函最小化的类似技术

见于 [6]。遗憾的是，在上述大多数带下划线的情形中，仅凭不可分解性还不足以得出勒洛三角形是最优的结论。

Ω 的 L^∞ 1-拉普拉斯算子的第一特征值为 $1/r(\Omega)$，即内切半径的倒数，其最大值由勒洛三角形 R 取得。鉴于 [3] 中有关$L^2$1-拉普拉斯算子的数值结果，自然可以推测，另一个极值情形——对应于 1-拉普拉斯算子的切格常数——也由 R取得最大值。Henrot 和 Lucardesi 最近在 [13]中证明了这一点，他们采用了形状优化技术，具体而言，是与形状导数相关的最优性条件，而这些条件由极小化元验证。

本文采用一种截然不同且完全基于几何的方法，证明了同一结论。Lachand-Robert 和 Kawohl 在 [17]中给出了平面凸集的切格常数的一种刻画，该刻画基于内平行集的面积。更确切地说，若

$$\Omega_{-t} = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geq t\} \tag{1.1}$$

是凸域 Ω 的边界向内距离 t 处的内平行集，则 $h(\Omega) = 1/t$，其中 t 满足 $|\Omega_{-t}| = \pi t^2$。与凸集的外平行集不同，后者的面积可由 Steiner公式表示为关于到边界距离的多项式（例如参见 [22, 第 4] 章）；内平行集则不存在这样的公式。多边形情形的细节见 [17] ，本文则对勒洛多边形进行了类似计算。

本文为以下结果给出了新的证明：

(i) 给定 $t \in (0, 1 - \sqrt{3}/3]$，勒洛三角形在宽度为一的定宽形状中，使 Ω_{-t} 的周长达到最小。该结果在定理 5 中得到证明。据作者所知，这是一个新结果。(ii) 给定 $t \in [0, 1-\sqrt{3}/3]$，勒洛三角形在宽度为一的定宽形状中，使 Ω_{-t}的面积达到最小。该结果在定理 5 中得到证明。此外，结合定理 5 及内切半径的最小性，这也直接给出了布拉施克-勒贝格定理的另一种证明。本文 [1] 将布拉施克-勒贝格定理推广到圆盘多边形（平面上全等圆盘的交集）；文中的结果虽未明确陈述，却蕴含了定理6。(iii) 在定宽为一的形状中，勒洛三角形使**切格常数**达到最大。该结果在定理 10 中得到证明，并可直接由 [17] 中给出的刻画以及定理6推出。该结果最初在 [13] 中利用与形状导数相关的最优性条件得到了证明。根据本文结果推导出的证明是新的，而且初等易懂。

本文结构如下。第2 节回顾等宽图形和圆盘多边形的基本性质，并给出一个关于后文所用函数凸性的几何引理。第3 节证明关于内平行集周长和面积的布拉施克-勒贝格定理。第4 节证明勒洛三角形的切格常数达到最大值。

2. Preliminaries

2.1. 平面等宽图形。 二维凸集 K 若任意两条平行支撑直线之间的距离不随直线方向改变而保持恒定，则称其为等宽图形。回顾一下，支撑直线与 K 的边界相交，并使形状 K 位于该直线所确定的两个半平面之一。圆是最显而易见的等宽图形例子。不过，这类图形还有许多。在本文余下部分中，所讨论图形的宽度均为1。

等宽图形中最著名的例子是勒洛三角形，更一般地说，是勒洛多边形。这些图形不仅是数学上的奇趣之物，还具有各种应用 [20, 第 18]章。勒洛三角形应用于转子发动机设计和方孔钻孔机，而英国二十便士硬币则是一个勒洛七边形。

勒洛三角形定义为：以边长为 1 的等边三角形各顶点为圆心、半径为 1 的圆盘的交集。勒洛多边形可以用类似的步骤构造，如 [21, 第 8 节1], 所示。经典结论是，任意等宽图形都可以用勒洛多边形以任意高的精度逼近 [21, 定理 8.1。1], [15, 第 7]章。

Yaglom 和 Boltyanskii 所著的《凸图形》一书 [15] 专门用整章篇幅讨论了此类形状。书中以习题的形式给出结果，并运用初等几何方法进行证明。让我们回顾其中一些与本文相关的结果。

Pr命题 1。 宽度为 1 的平面图形具有以下性质 *s:*

(i) 任何等宽图形都可以在豪斯多夫距离意义下，用具有相同宽度的勒洛多边形任意精确地逼近（[21,定理 8.1。1]）。*(ii)* 定宽图形中角点处的内角不能小于 $2\pi/3$。此外，如果等宽曲线的内角等于 $2\pi/3$，则该曲线是勒洛三角形。 [15, 习题 7-9] 边界中存在一个顶点 A，且该顶点对应于角度为 β 的角点，这意味着在 K 中存在一个半径为 A、位于该角点对面的圆弧，其角度为 $\pi-\beta$。反之，边界中任何半径为 1 的圆弧都对应于一个角点。特别地，K 边界中任何半径为 1 的圆弧，其长度或角度测度至多为 $\pi/3$。*(iii)* 定宽图形的内切圆盘和外接圆盘是同心的，且它们半径之和等于该定宽图形的宽度。 [15,习题 7-13]*(iv)* 勒洛三角形是外接半径最大的等宽曲线，因此其内切半径最小。 [15,习题 7-14]*(v)* 宽度为 1 的曲线，其周长等于 π。特别地，由于任何勒洛多边形的边界都由一系列半径等于 1的圆弧组成，因此这些圆弧所对的角之和等于 π。*(vi)* 定宽图形的面积由勒洛三角形取得最小值（布拉施克 - 勒贝格定理），由圆盘取得最大值。所引用书籍基于外接等角多边形，对最后两点给出了富有启发性的证明。 [15,习题 7-12]

布拉施克-勒贝格定理断言，勒洛多边形在定宽形状中具有最小面积。该结果归因于 Blaschke [2] 和 Lebesgue [19]。人们采用了许多其他证明策略来证明这一结果，其中包括 [11]使用最优控制表述的方法，以及 [12] 使用变分方法的方法。现有文献综述见 [21, 定理 12.15]。本文的结果为这一结果给出了又一个不同的证明。

通常认为，勒洛多边形具有奇数个圆弧。仔细分析表明，如果存在偶数个圆弧，那么某些相邻圆弧对应于同一个圆心，因此可以将它们合并。若构成其边界的圆弧的圆心是某个正多边形的顶点，则称勒洛多边形为正则的 。在 [10] Firey 证明了，在圆弧数量固定的勒洛多边形中，正则勒洛多边形具有最大面积。该证明基于与平行内集的面积及凸性论证相关的估计，并在一定程度上启发了本文所采用的一些方法。

给定一个具有 $n = 2k+1$ 个顶点的勒洛多边形，其边界由圆弧构成，这些圆弧所对的角分别为 θ_i，$i = 0$，……，$n-1$ 并满足 $\sum_{i=0}^{n-1}\theta_i = \pi$。根据命题 1-(ii)，我们还有 $\theta_i \in [0, \pi/3]$。

2.2. 圆盘多边形。 勒洛多边形具有这样的特点：它们是凸集，其边界由有限条半径相同的圆的圆弧构成。更准确地说，勒洛多边形是若干半径相同的圆盘的交集。为简便起见，除非另有说明，下文均假设圆盘的半径为一。

为了处理勒洛多边形的内平行集，定义一个更为一般的凸集类是很有用的，即将<style id='1'>圆盘多边形定义为有限个圆盘的交集

半径为 1。这一概念很自然，此前已有相关介绍，例如 [18]。此外，在 [1] 中已证明，勒洛三角形（显然是一个圆盘多边形）在所有圆心之间距离至多为 1 的圆盘多边形中面积最小。对于本文而言，我们只需研究那些已经包含一个宽度为 1 的勒洛多边形的圆盘多边形。下面将回顾圆盘多边形的基本性质。

设 $\Omega = \bigcap_{i=0}^{N-1} D_i$ 为一个圆盘多边形，其中 D_i 为半径为一的圆盘。此外，假设每个圆盘都对 Ω 作出贡献，即圆盘族 D_i 是极小的，特别地，不存在重复圆盘。记 Γ_i、$i = 0$、...、$N-1$ 为定义 D边界的圆弧，其长度分别为 θ_i。同样地，如果 $i \neq j$，则假定圆弧 Γ_i、Γ_j 属于不同的圆盘。圆弧 Γ_i 的端点位于顶点 v_i、v_{i+1}，其中指标按 n取模。在每个顶点 v_i处，圆弧 Γ_i、Γ_{i-1} 以转角 β_i 相交（该角是由 v_i 处的切向量 Γ_{i-1}、Γ_i 按三角学意义形成的角）。下面给出本文后续部分所关注的几个性质。

命题 2。 *(i)* 圆弧 Γ_i 的长度 θ_i 与转角 β_i 之和等于 2π：

$$\sum_{i=0}^{N-1} (\theta_i + \beta_i) = 2\pi.$$

(ii) 如果Ω 是一个包含Ω' 的定宽为1 形状的圆盘多边形，那么：

- Ω 的最小宽度至少为1。
- Ω 的周长至少为 π：$\sum_{i=0}^{N-1} \theta_i \geq \pi$。
- 对于每个转角，我们都有 $\beta_i \in [0, \pi/3]$、$i = 0$..... N。
- 内切半径 $r(\Omega)$ 满足 $r(\Omega) \geq r(R) = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$，其中 R 是宽度为1的勒洛三角形。

证明：(i) 只需沿着围绕 Ω 的支撑直线转动即可。每条圆弧 Γ_i 使该直线转过的角度等于 θ_i。每个顶点贡献转角 β_i。

(ii) Ω 的任意一对平行支撑直线所围成的带状区域都包含等宽图形 Ω'。因此，此类带状区域的宽度至少为 1。

凸集的周长关于包含关系具有单调性（例如参见 [5, 引理 2.2.2]）。因此 $|\partial\Omega| \geq |\partial\Omega'| = \pi$。

考虑两个圆盘 D_i，D_{i-1} 它们包含圆弧 Γ_i，Γ_{i-1} 并在一个顶点处相交 v_i，该顶点的转角为β_i。于是 $\Omega \subset D_i \cap D_{i-1}$，且圆盘交集 $D_i \cap D_{i-1}$ 的最小宽度至少为 1，也就是说，它们的圆心间距至少为 1。因此，它们的边界交点处的转角 β_i 至多为 $\pi/3$。

内切半径关于包含关系具有单调性，因此最后一点可立即得出，因为在给定定宽的形状中，勒洛三角形的内切半径最小。□

2.3. 一个几何引理。 考虑一个固定的 $t \in (0, (3-\sqrt{3})/3)$ 和一个三角形 ΔABC，使得$AB = 1$，$BC = 1 - t$。记 $\angle BAC = \gamma$ 为 $\alpha(\gamma) = \angle CBA$，并记 $h(\gamma)$ 为从 C 到 AB的距离，即 ΔABC 从顶点 C出发的高。前述记号强调：给定 γ，假设 AB，BC 的长度固定且 $\alpha(\gamma)$ 为锐角，则角 $\alpha(\gamma)$ 和高 $h(\gamma)$ 均可用 γ表示。

等价地，考虑位于原点的 A、坐标为 $(1, 0)$ 的 B，以及 $D(1-t)$ 这条圆心为 B、半径为 $1-t$ 的圆。直线 $\ell(\gamma)$ 经过 A，与 AB 的夹角为 γ，并与 $D(1-t)$ 相交于两点，其中离 A 最近的点是 $C(\gamma)$。使 $C(\gamma)$ 有定义的最大值 γ 对应于 $AC(\gamma)$ 与 $D(1-t)$ 相切的情形，此时 $\gamma =$反正弦函数$(1-t)$。在该应用中，t 不大于勒洛三角形的内切半径 $r(R) = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$，由此可得 $1 - t \geq \sqrt{3}/3$。此外，在该应用中，我们只考虑 $\gamma \in [0, \pi/6]$，它对应于转角的一半（见命题 1、2）。考虑三角形 $\overline{YAB}$，其中 $\angle YAB = \angle YBA = \pi/6$，取第一象限中的 Y，可得 $YA = YB = \sqrt{3}/3$。因此，$D(1-t)$ 总是

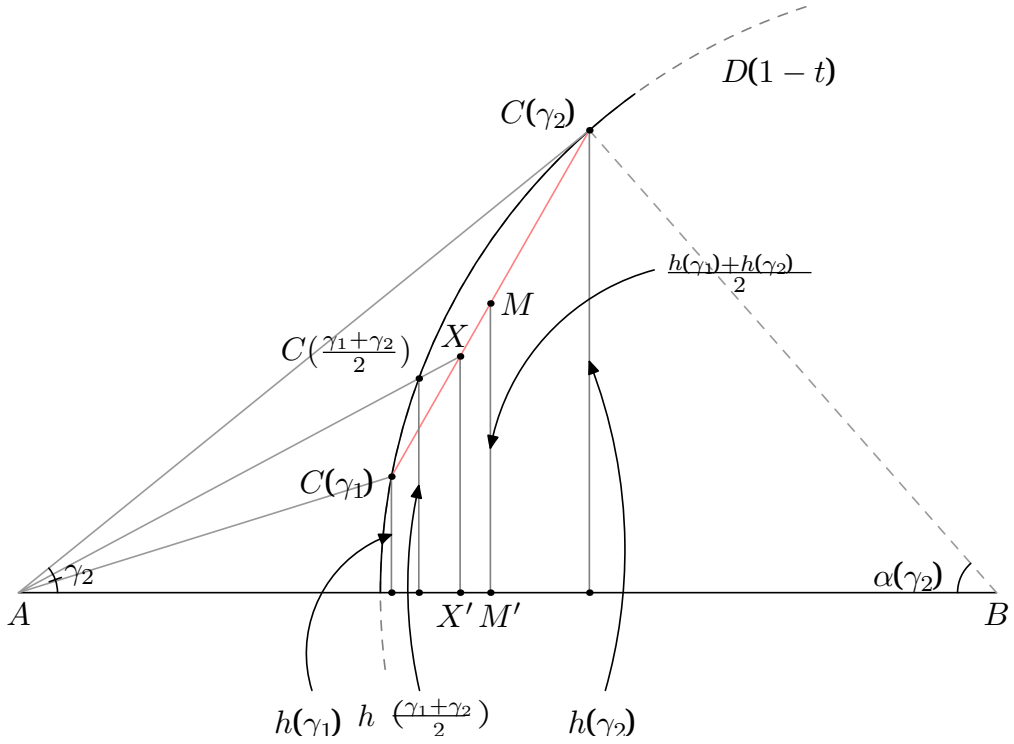


FIGURE 1. 命题 3对应的构形：应用的凸性几何证明 $\gamma \mapsto h(\gamma)$。

与 YA 相交，因为 $\sqrt{3}/3 \le 1-t \le 1$，这意味着 $C(\gamma)$ 有定义，假设 $\gamma \in [0, \pi/6]$ 且 $t \le (3-\sqrt{3})/3$。

因此，我们可以定义

$$\alpha(\gamma), h(\gamma) : [0, \pi/6] \to \mathbb{R}$$

具有上述性质。参见图1 以了解示意图。下述几何引理对本文的结果至关重要，它表明 $\alpha(\gamma)$ $h(\gamma)$ 对 γ 的依赖关系是凸的。

命题3。 映射 $\gamma \mapsto \alpha(\gamma)$ 和 $\gamma \mapsto h(\gamma)$ 严格递增且严格凸。此外，我们还有 $\alpha(\gamma) \le \gamma$，其中 $\gamma \in [0, \pi/6]$。

证明： 由于 $\alpha(\gamma) =$ 反正弦函数 $\frac{h(t)}{1-t}$，且反正弦函数是凸的并且严格递增，因此只需证明 $\gamma \mapsto h(\gamma)$ 是凸的。首先注意到，由于 $C(\gamma)$ 属于一个固定圆，依赖关系 $\gamma \mapsto C(\gamma)$ 是连续的。因此直接得到 $\gamma \mapsto h(\gamma)$ 是连续的。

考虑 $0 \le \gamma_1 < \gamma_2 \le \pi/6$。那么 $h(\gamma_1)$ $h(\gamma_2)$ 是由$C(\gamma_1)$ $C(\gamma_2)$及其在 AB上的投影所形成的梯形的平行边。由于 $\gamma_1 < \gamma_2$，立即可得 $AC(\gamma_1) < AC(\gamma_2)$，因为按构造， $C(\gamma_2)$ 的两个坐标的绝对值都大于 $C(\gamma_1)$的相应坐标。直线 $AC(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2})$ 是角 $\angle C(\gamma_1)AC(\gamma_2)$ 的角平分线，因此它与 $C(\gamma_1)C(\gamma_2)$ 相交于一点 X，该点到 $\overline{C(\gamma_1)}$ 的距离小于到 $C(\gamma_2)$ 的距离。点 $C(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2})$ 是 AX 与圆 $D(1-t)$ 的交点。记 M 为 $C(\gamma_1)C(\gamma_2)$ 的中点，并记 X', M' 分别为 X 和 M 在 AB 上的投影，我们有

$$h\left(\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\right) \le XX' < MM' = \frac{h(\gamma_1)+h(\gamma_2)}{2}.$$

证明的几何方面如图所示 1。由于 h也是连续且递增的，因此 h 是凸函数。只要 $\gamma_1 \ne \gamma_2$，前一个不等式就是严格的，因此

h 是严格凸的。总之， α = 反正弦函数 $\circ h$ 在$[0,\pi/6]$上严格凸且严格递增。

不等式 $\alpha(\gamma) \leq \gamma$ 可直接由 $\gamma \in [0,\pi/6]$ 和 $1-t \geq \sqrt{3}/3$推出。这意味着，在先前定义的三角形 AYB 中，$C(\gamma)$ 比 B 更接近 A 。□

注4. 命题3中三角形 $ABC(\gamma)$ 的构形使得可以用 γ 和 t显式计算 $\alpha(\gamma)$。事实上，经过简单计算可得 $AC(\gamma) = \cos\gamma - \sqrt{(1-t)^2 - \sin^2\gamma}$, $h(\gamma) = AC(\gamma)\sin\gamma$以及 $\alpha(\gamma)$ =反正弦函数 $\left(\frac{h(\gamma)}{1-t}\right)$。

3. 面积和内平行集的周长

勒洛三角形 R 在定宽为 1 时具有最小面积。很自然会猜想，对于内平行集的面积也会有同样的结论。记 Ω_{-t} 为距 Ω 的边界 t 处的内平行集，正如式（1.1）中回顾的那样。假设 Ω 的定宽为 1，以下是关于极端情形的一些众所周知的事实 $t \in \{0, r(R)\}$ 其中 $r(K)$ 表示 K的内切半径。

- $t = 0$：根据布拉施克-勒贝格定理，Ω_0 的面积等于 Ω 的面积，且在勒洛三角形的情况下达到最小。
- $t = r(R)$：众所周知，在宽度固定的定宽形状中，勒洛三角形的内切半径最小（见 [15]）。因此，Ω 的内切半径至少等于 $r(R)$，这表明 $\Omega_{-r(R)}$ 定义良好且非退化。令 $t = r(R)$ 等于宽度为 1 的勒洛三角形的内切半径，显然 $|\Omega_{-r(R)}| \geq |R_{-r(R)}| = 0$。

下文将证明该结论对所有内平行集均成立。首先，证明勒洛三角形使内平行集的周长达到最小。

定理 5。 设Ω 的宽度为1。给定 $t \geq 0$，当Ω 为宽度1的勒洛三角形 R 时，内集$|\partial\Omega_{-t}|$ 的周长最小。若对于某个固定的 $t > 0$ ，等式$|\partial\Omega_{-t}| = |\partial R_{-t}|$ 成立，则$\Omega = R$。

证明： 任意等宽图形都可以用勒洛多边形以任意精度逼近（参见命题 1）。因此，我们证明勒洛多边形情形的结果，一般情形则由稠密性论证得出。以下均假设所有等宽图形的宽度为 1。

步骤 I. 勒洛多边形的内平行集结构。任意勒洛多边形都有奇数条边 $n = 2k+1 \geq 3$。以下指标均按模 n计算。按照 [10] 中的描述，我们将勒洛多边形 Ω 表示为 $C_0, ..., C_{n-1}$处为圆心、半径为 1 的 n 个圆盘 $D_0, ..., D_{n-1}$ 的交集。此外，对于小于 Ω 的内切半径的 $t \geq$ ，内平行集 $\Omega_{-t} = \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) \geq t\}$恰好是以相同点$C_0, ..., C_{n-1}$为圆心、半径为 $1-t$ 的圆盘 $D_0(1-t)$ ..., $D_{n-1}(1-t)$的交集。我们希望能够根据 Ω 的几何性质计算或估计内平行集 Ω_{-t} 的周长。乍看之下，我们注意到 $\partial\Omega_{-t}$ 是半径为 $(1-t)$、以 C_i为圆心的圆弧$\Gamma_i(1-t)$的并集。不过，如下文所强调的，圆弧的数量及其长度的计算方式可能会随 t 而改变。

当 t 足够小时， $\partial\Omega_{-t}$ 的顶点位于与勒洛多边形 Ω 的顶点相对应的角平分线上，因为这些顶点到边界上相邻圆弧的距离相等。因此，如果任意两条相邻的角平分线在到达内心（内切圆盘的圆心）之前相交，那么相应的圆弧就会在 $\partial\Omega_-$ 中消失。

考虑如下迭代过程，其中使用第 2.2 节引入的圆盘多边形概念。在迭代过程的每一步 k 中，我们都会追踪一组指标$I_k \subset \{0, ..., n-1\}$，这些指标对应于定义勒洛多边形时出现的圆盘，而该勒洛多边形将定义某个圆盘多边形。

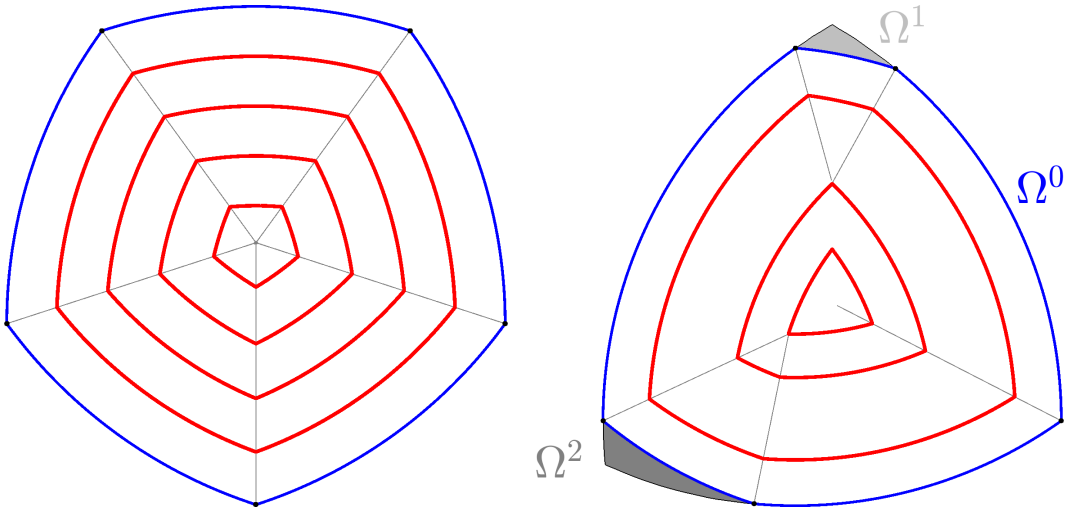


FIGURE 2. 内平行集示例。左图：正勒洛五边形的所有内平行集均为正图形。右图：**步骤 I**中算法的示意图。每当两条角平分线相交时，内平行集中的一条边就会消失。

- **初始化**。 初始化 $\Omega^0 = \Omega$， $t = 0$, $k = 0$, $I_0 = \{0, 1, ..., n-1\}$。
- **迭代** k。 增加 t，直到 Ω^k 的两条相邻角平分线相交。如果到达内心，则停止。否则，Ω^k_{-t} 的一条圆弧 $\Gamma_i(1-t)$（与 Ω_{-t} 重合）会缩减为一个点。从 Ω^k 的定义中移除相应的圆盘 D_i，并定义 $I_{k+1} = I_k \setminus \{i\}$、$\Omega^{k+1} = \bigcup_{i \in I_{k+1}} D_i$。

  当然，Ω^k_{-t} 也是 Ω^{k+1} 的一个内平行集，因为消失的圆弧 $\Gamma_i(1-t)$ 在 Ω^{k+1} 的边界上没有对应部分。

  如果在某个 t 处有多个圆弧消失，那么从 Ω^k 的定义中移除所有对应的圆盘。

前面定义的迭代过程在到达内心时结束。由于初始勒洛多边形 Ω 的定义中涉及的圆盘数量有限，因此该过程只需有限步。例如，对于正勒洛多边形，由于对称性，仅初始化便足以到达内心。一般情况下，可能需要多次迭代。图 2 展示了一个示例。

需要进行上述构造，是因为只有在初始阶段，也就是 Ω^k 的任意两个相邻角平分线相交之前，我们才能显式计算与圆盘多边形 Ω^k 对应的内平行集的周长。我们将这些内平行集称为正则内平行集，正如 [17] 中关于多边形的计算所示。

迭代过程结束时，我们得到一个按包含关系递增的圆盘多边形族，它们都包含初始勒洛多边形 Ω；所有内平行层集 Ω_{-t} 都属于某个圆盘多边形 Ω^k 的正则内平行集。更确切地说，存在实数 $0 < t_1 < ... < t_M$，使得：

- Ω_{-t} 对 $\Omega_0 = \Omega$ 是正则的，其中 $t \in [0, t_1]$
- Ω_{-t} 对 Ω_1 是正则的，其中 $t \in [t_1, t_2]$
- Ω_{-t} 对 Ω_2 是正则的，其中 $t \in [t_2, t_3]$，等等。

所提出的方法表明，对于任意 $t \in [0, r(\Omega)]$，都存在一个圆盘多边形 $\Omega' \supset \Omega$，使得 $\Omega_{-t} = \Omega'_{-t}$，且 Ω'_{-t} 是 Ω' 中的一个正则内平行集。

步骤 II. 计算圆盘多边形的正则内平行集的周长。考虑一个圆盘多边形 $\Omega = \bigcap_{i=0}^{N-1} D_i$，其中 D_i 是半径为 1 的圆盘，其边界由以下部分组成

度数为 θ_i、转角为 β_i的圆弧， $i=0, \ldots\ldots, N-1$。根据第2.2 节的描述和命题 2 ，我们有 $\sum_{i=0}^{N-1}(\theta_i+\beta_i)=2\pi$。

考虑 $t^*>0$ ，使得对于 $t\in[0,t^*]$ ，Ω 的任意两条相邻角平分线都不相交。因此，对于 $t\in[0,t^*]$ ，圆盘多边形 Ω 的内平行集 Ω_{-t} 是正则的。

设 Ω 是步骤 I 中得到的圆盘多边形 Ω^k 之一**步骤 I**。那么 Ω^k 包含等宽图形 Ω，即初始勒洛多边形。因此，根据命题 2 ，Ω 的周长^{k}大于 π ，且我们有 $\sum_{i=0}^{N-1}\theta_i\geq\pi$，这意味着 $\sum_{i=0}^{N-1}\beta_i\leq\pi$。此外，由于 Ω^k 的最小宽度至少为 1，我们有 $\beta_i\in[0,\pi/3]$ 对所有 $i=0, \ldots\ldots, N-1$。

给定 Ω 边界上的一段圆弧 Γ_i ，我们计算其对 Ω 边界$_{-t}$的贡献。考虑 S_i 角度为 θ_i 、圆心为 C_i 的圆扇形，它与 Γ_i 相关，由 Γ_i 以及法线和其端点 v_i、v_{i+1}所确定。Ω 在 v_i 和 v_{i+1} 处的角平分线包含于 S_i中，并分别与扇形的射线成 $\beta_i/2$、$\beta_{i+1}/2$的角。见图 3。

给定 $t\in[0,t^*]$，记 w_i, w_{i+1} 为顶点 v_i, v_{i+1} 处的角平分线与圆心为 C_i 、半径为 $1-t$ 的圆的交点。记 z_i, z_{i+1} 为同一圆与扇形 S_i 的边界射线的交点。图3对此作了示意。注意，图3中阴影三角形的构型与图1和命题3中的相同。更准确地说，$\Delta v_iC_iw_i\equiv\Delta ABC(\beta_i/2)$ 和 $\Delta v_{i+1}C_iw_{i+1}\equiv\Delta ABC(\beta_{i+1}/2)$。于是， Γ_i 对 Ω_{-t} 周长的贡献等于

$$|\widehat{w_iw_{i+1}}|=|\widehat{z_iz_{i+1}}|-|\widehat{w_iz_i}|-|\widehat{w_{i+1}z_{i+1}}|=(1-t)(\theta_i-\alpha_t(\beta_i/2)-\alpha_t(\beta_{i+1}/2)),$$

其中 函数 α_t 是在命题3 中定义并在备注4中明确给出的 .

因此，我们得到对所有 $t\in[0,t^*]$ ，都有

$$|\partial\Omega_{-t}|=(1-t)\left(\sum_{i=0}^{N-1}\theta_i-2\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_t(\beta_i/2)\right). \tag{3.1}$$

注意，函数 α_t 在命题3 中定义，在 $[0,\pi/6]$上是凸的、递增的，并隐式依赖于 t。此外，我们采用 $t\leq r(R)=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ （宽度为 1 的勒洛三角形的内切半径）。

对于正则鲁洛多边形的情形，特别是对于勒洛三角形，由于对称性，角平分线交于内心，因此所有内平行集都是正则的。因此，如果 Ω 是一个正则鲁洛多边形，则对于所有 $t\leq r(\Omega)$，我们有

$$|\partial\Omega_{-t}|=(1-t)\left(\pi-2n\alpha_t\left(\frac{\pi}{2n}\right)\right), \tag{3.2}$$

其中我们使用了 $\theta_i=\beta_i=\pi/n$ 这一事实。

St第三部分 通过凸性论证证明勒洛三角形的最优性。

对于 $t\in[0,t^*]$ ，我们定义如下凸且严格递增的函数（见命题 3）

$$f:[0,\pi/3]\to\mathbb{R}, f(\beta)=2\alpha_t(\beta/2). \tag{3.3}$$

对于固定的 t 以及按照前一步骤定义的固定圆盘多边形，存在 $\varepsilon\in[0,\pi]$ 使得$\sum_{i=0}^{N-1}\theta_i=\pi+\varepsilon$ 且 $\sum_{i=0}^{N-1}\beta_i=\pi-\varepsilon$。因此，式（3.1）变为

$$|\partial\Omega_{-t}|=(1-t)(\pi+\varepsilon)-(1-t)\sum_{i=0}^{n-1}f(\beta_i). \tag{3.4}$$

考虑最大化问题

$$\begin{gathered}M(\varepsilon)=\max\left[f(\beta_0)+f(\beta_1)+\ldots+f(\beta_{N-1})\right]\\ \text{such that } \beta_i\in[0,\pi/3], i=0,\ldots,N-1, \beta_0+\ldots+\beta_{N-1}=\pi-\varepsilon.\end{gathered} \tag{3.5}$$

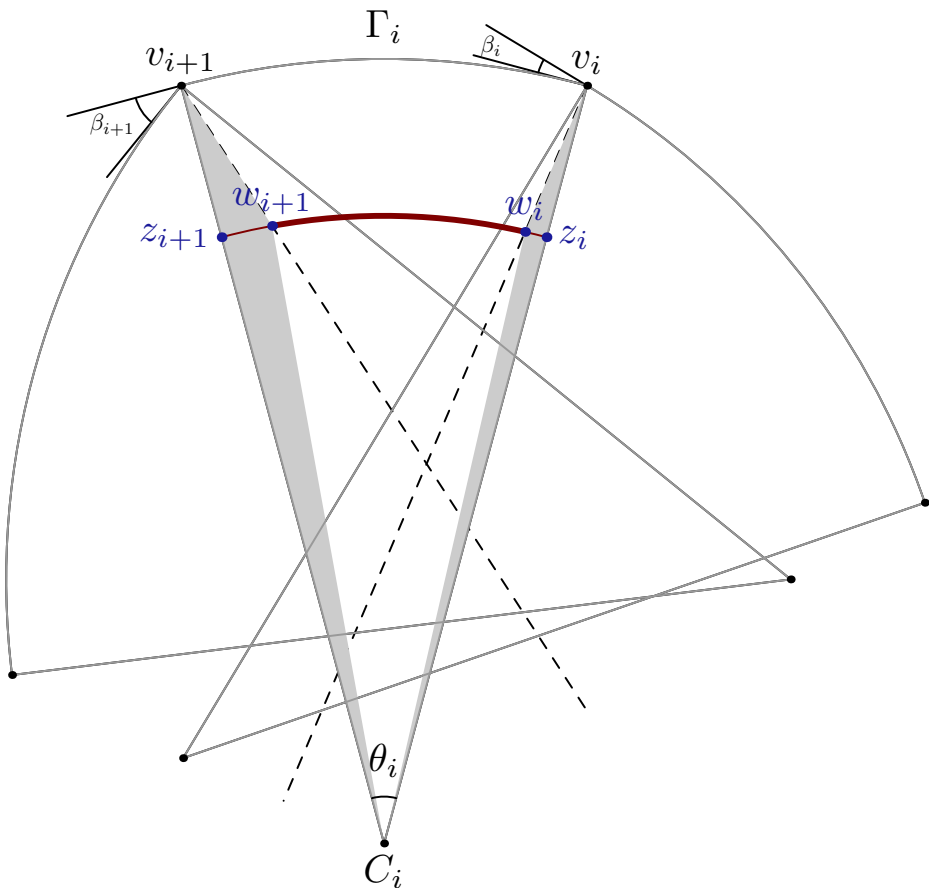


FIGURE 3. 圆盘多边形的正则内平行集周长的计算。阴影三角形与命题 $\Delta ABC(\gamma)$ 和图3 中的构形相同1。

由于 f 是凸的，且 C^1 在 $[0,\pi/3]$ 上，如果 $a<b\in(0,\ \pi/3)$，函数 $g(t)=f(a-t)+f(b+t)$ 在 0 的某个邻域内严格递增。事实上，我们有

$$g'(t)=f'(b+t)-f'(a-t)>0,$$

由于 f' 严格递增。因此，若 $t>0$ 足够小，则用 $(a-t,b+t)$ 替换 (a,b) 后，约束仍然成立，且目标函数的值会增加。此外，我们可以选择 t，使得 $a-t=0$ 或 $b+t=\pi/3$。因此，根据经典紧致性论证，(3.5) 的最大值必定能够取到；其最大化者至多有一个 $\beta_i\in(0,\pi/3)$，而其他所有 b_j（$j\neq i$）均属于 $\{0,\pi/3\}$。此外，最大值 $M(\varepsilon)$ 显然关于 ε 严格递减，因为 (3.3) 中定义的 f 严格递增。因此，$M(\varepsilon)\leq M(0)=3f(\pi/3)$。

因此，（3.4）以及此前关于问题（3.5）的讨论表明

$$|\partial\Omega_{-t}|\geq(1-t)(\pi+\varepsilon)-(1-t)M(\varepsilon)\geq(1-t)(\pi-3f(\pi/3))=|\partial R_{-t}|. \tag{3.6}$$

因此，对于给定的 t 勒洛三角形，其周长小于 $|\partial\Omega_t|$。

总之，给定 $t\leq r$（R），勒洛多边形的任意内平行集都是包含它的圆盘多边形的正则内平行集，具体描述见**步骤 I**。按照**步骤 II** 所示计算其周长，并利用**步骤 III** 中的估计可得 $|\partial\Omega_{-t}|\geq|\partial R_{-t}|$。利用勒洛多边形在恒宽形状类中的稠密性（见命题1），可将同样的估计推广到宽度为 1 的一般等宽图形。

如果对于某个 $t > 0$ 我们有 $|\partial\Omega_{-t}| = |\partial R_{-t}|$，则等式在（3.6）中成立。因此 $\varepsilon = 0$ 和 $(\beta_i)_{i=0}^{n-1}$ 必须满足（3.5），这表明转角 β_i 对应于一个勒洛三角形。□

现在我们可以证明内平行集面积的类似结果了。

定理6。 假设Ω 的定宽为1。给定 $t \in [0, r(R)]$, 内集$|\Omega_{-t}|$ 的面积在Ω 为宽度1的勒洛三角形 R 时取最小值。若对某个固定的 $t \geq 0$ 等式$|\Omega_{-t}| = |R_{-t}|$ 成立，则Ω $= R$。

证明： 我们假设 Ω 是一个勒洛多边形，其边是半径为 1、圆心位于 C_i 且弧度为 θ_i, $i = 1, ..., k$ 的圆的圆弧。当然，我们有众所周知的性质 $\sum_{i=1}^{k} \theta_i = \pi$ (见命题 1)。

记 $A_\Omega(t) = |\Omega_{-t}|$ 为距离 t 处内平行集的面积，记 $P_\Omega(t) = |\partial\Omega_{-t}|$ 为其周长。可以看出，改变 t 会引起边界以均匀速度发生法向运动。回顾一下，面积的形状导数为 $|\omega|'(V) = \int_{\partial\omega} V \cdot n$, 其中 n 为外法向。这是经典结果，例如可见于 [23, 第2节。5], [14, 章5]。对于勒洛多边形的内平行集，可以像[10]中那样进行直接计算。因此，经典的形状导数公式表明 $A'_\Omega(t) = -P_\Omega(t)$。

令 $r = r(R)$ 为宽度为 1 的勒洛三角形的内切半径，它在定宽图形中最小。因此，对于 $t \geq r$ 内平行集 Ω_{-t} 是非平凡的。此外，由定理5 可得 $P_\Omega(t) \geq P_R(t)$，由此得到

$$A'_\Omega(t) = -P_\Omega(t) \leq -P_R(t) = A'_R(t).$$

因此， $t \mapsto A_\Omega(t) - A_R(t)$ 是递减的。比较 $t \leq r$ 中的数值可得

$$A_\Omega(t) - A_R(t) \geq A_\Omega(r) - A_R(r) = A_\Omega(r) \geq 0. \tag{3.7}$$

利用勒洛多边形在等宽图形类中的稠密性（见推论 1），即可完成证明。

若对某个 $t \geq 0$ 有 $A_\Omega(t) = A_R(t)$，则（3.7）表明 $A_\Omega(r) = 0$，即 Ω 的内切半径小于或等于勒洛三角形的内切半径。这意味着 Ω $= R$。 □

推论 7。 *(布拉施克-勒贝格定理)* 将定理 *6* 应用于 $t = 0$ 可知，勒洛三角形在等宽图形中面积最小。

证明： 由定理 6可显然得出该结论。不过，我们必须强调，前述结果均未用到 Blaschke-Lebesgue 定理。我们只用到了勒洛三角形的最小内切半径这一性质，该性质通过经典几何论证直接证明，见 [15, 练习 7-14],例如。 □

注记 8。 推论 7 表明，在某种意义上，勒洛三角形在定宽形状中的最小内切半径这一性质是一个更强的结果；结合本文此前给出的独立结果，它可以推出 Blaschke-Lebesgue 定理。

注记 9。 定理 6也可由 [1] 中的结果推导得出。该文证明，若 Ω 是一个由单位半径圆盘构成的圆盘多边形，且这些圆盘的圆心之间的距离至多为 $d \in [1, \sqrt{3}]$，则 $|\Omega| \geq \Delta(d)$，其中 $\Delta(d)$ 是将圆心置于边长为 d 的等边三角形顶点处所得到的圆盘多边形。

经过重新缩放，我们发现，对于一组圆心之间的距离至多为 1 的圆盘所组成的圆盘多边形，其顶点带有射线 $r \in [\frac{\sqrt{3}}{3}, 1]$，同样的结果也成立：比较勒洛多边形与勒洛三角形的内平行面积。

4. Blaschke-Lebesgue Theorem for Cheeger sets

对于一个有界凸域 Ω，其相应的切格常数定义为

$$h(\Omega) = \min_{E\subset\Omega} \frac{|\partial E|}{|E|}, \tag{4.1}$$

其中 $|\partial E|$ 表示集合 E的周长；当 Ω 为凸集时，可假设该集合为凸集。Cheeger 于 [8] 引入了这一概念，旨在为 Dirichlet 拉普拉斯算子的第一特征值提供一个几何下界。切格常数虽然通过（4.1）中的几何量定义，却可以解释为 1-拉普拉斯算子的第一特征值 [16]。

对于凸平面域，Lachand-Robert 和 Kawohl 在 [17] 中证明，$h(\Omega)$ 可以利用平行内集的面积来刻画。事实上，我们有

$$h(\Omega) = 1/t, \text{ where } |\Omega_{-t}| = \pi t^2. \tag{4.2}$$

最近，[4] 研究了具有直径约束的域上狄利克雷–拉普拉斯算子的特征值最小化问题。最优形状是定宽图形。在定宽图形这一类中，最大化狄利克雷–拉普拉斯算子的特征值同样是有意义的（参见 [3, 第 4.2]节）。[3, 第 4.2]节所示的数值模拟表明，勒洛三角形很可能是使这些特征值达到最大值的定宽图形。目前尚无关于这一事实的证明，正如 [13, 第 5]节所述。这一事实还受到以下结果的进一步支持：∞-拉普拉斯算子的第一特征值，即内切半径的倒数，同样由勒洛三角形取得最大值。

因此，自然可以猜想，在定宽图形这一类中，勒洛三角形使切格常数达到最大值。最近，已有研究运用形状优化技术证明了这一结果，尤其是证明了极小化元满足的最优性条件。

下面给出的证明相当直接，它依据刻画式（4.2）以及定理6的结果。由于凸集的经典紧致性论证以及切格常数的连续性，存在使切格常数达到最大值的定宽图形，这一点很容易证明。然而，下面给出的证明仅基于与勒洛三角形的直接比较。

定理10。（切格常数的布拉施克-勒贝格定理）当Ω 具有固定的定宽时，勒洛三角形 R使 $h(\Omega)$ 达到最大值。此外，R 是唯一最大化者。

证明：设 $h(\Omega) = 1/t$ 为定宽图形 Ω 的切格常数。于是 $|\Omega_{-t}| = \pi t^2$，由（4.2）可知。若 R 表示具有相同宽度的勒洛三角形，则定理6 表明$|R_{-t}| \le |\Omega_{-t}| = \pi t^2$。

现在考虑勒洛三角形的 Cheeger 切格常数 $h(R) = \frac{1}{t^*}$。R那么（4.2）给出$|R_{-t^*}| = \pi(t^*)^2$。

回顾一下，平行集的面积 $t \mapsto |R_{-t}|$ 在 $t \in [0, r(R)]$ 时严格递减，而$t \mapsto \pi t^2$ 严格递增。使这两个函数相等的 t 值恰好是t^*。然而，由于 $|R_{-t}| \le \pi t^2$，我们发现 t 必须位于 $|R_{-t}|$ 低于 πt^2的区域内，即$t \ge t^*$。参见图 4中的示意图。这表明

$$h(R) = \frac{1}{t^*} \ge \frac{1}{t} = h(\Omega).$$

如果 $h(R) = h(\Omega)$，那么根据上面所示的不等式，我们得到 $|R_{-t}| = |\Omega_{-t}|$，根据定理 6 这意味着 Ω $= R$。□

致谢。作者感谢 Dorin Bucur 提出定理 10 中解决的问题，该定理早在 2016 年就已得到解决。本研究得到 ANR Shapo计划（ANR-18-CE40- 0013）的资助。

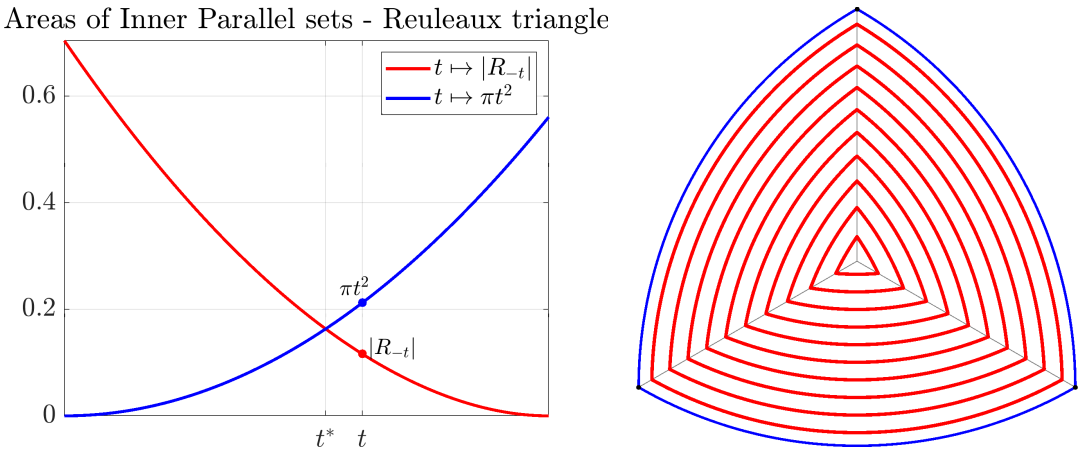


FIGURE 4. 左：单位鲁洛三角形的内平行集面积 R 与 $t \mapsto \pi t^2$的图像。交点的 x坐标 t^* 是切格常数 h（R）的倒数。该图对蕴含关系 $\pi t^2 \geq |R_{-t}| \implies t \geq t^*$给出了几何证明。右： R的若干平行内集的图示。

REFERENCES

[1] M. Bezdek. 关于圆盘多边形的布拉施克-勒贝格定理的一种推广。 *Contrib. Discrete Math.*，6 1 77 85，2011（）：–。[2] W. Blaschke. 给定恒定宽度且面积最小的凸区域。 *Mathematische Annalen*，76 4 504 513，1915（）：–Dec.。[3] B. Bogosel. 凸集上的数值形状优化。 *Applied Mathematics and Optimization*，87(1)，2022 年 11 月。[4] B. Bogosel、A. Henrot 和 I. Lucardesi. 直径约束下狄利克雷拉普拉斯算子特征值的最小化。 *SIAM Journal on Mathematical Analysis*，50(5):5337–5361，2018年1月。[5] D. Bucur 和 G. Buttazzo. *Variational methods in shape optimization problems* 65 *Prog. Nonlinear*，巴 *Differ. Equ. Appl.* ¨ 2005 塞尔版，Birkhauser，。[6] D. Bucur、I. Fragal ` *ESAIM Control Optim.* a 和 *Calc. Var.* 18 3 693 711, 2012 J. Lamboley. 凹泛函的最优凸形状。，， （）：–。[7] G. D. Chakerian. 恒宽集。 *Pac. J. Math.*，19:13–21，1966。[8] J. Cheeger. 拉普拉斯算子最小特征值的下界。《分析问题》，纪念 Salomon Bochner 研讨会，普林斯顿大学，1969，195-199（1970）。，1970。[9] A. Colesanti. 变分泛函的 Brunn-Minkowski 不等式及相关问题。 *Adv. Math.*，194 1 105 140，2005（）：–。[10] W. Firey. 勒洛多边形的等周比。 *Pacific Journal of Mathematics*，10(3):823–829，1960年9月。[11] M. Ghandehari. 布拉施克-勒贝格定理的最优控制表述。 *J. Math. Anal. Appl.*，200 2 322 331，1996（）：–。[12] E. M. I. Harrell. 对 Blaschke 和 Lebesgue 定理的直接证明。 *J. Geom. Anal.*，12(1):81–88，2002。[13] A. Henrot 和 I. Lucardesi. 关于切格常数的布拉施克-勒贝格定理，2020。arXiv:2011.07244。[14] A. Henrot 和 M. Pierre. *Shape variation and optimization. A geometrical analysis* 28 *EMS Tracts*，苏 *Math.* ¨ 2018 黎世版，欧洲数学学会（EMS），。[15] I. M. Jaglom 和 V. G. Boltjanski˘ı. *Convex figures*。Paul J. Kelly 和 Lewis F. Walton 译。Holt, Rinehart and Winston，纽约，1960。[16] B. Kawohl 和 V. Fridman. p-拉普拉斯算子第一特征值与切格常数的等周估计。 *Commentat. Math. Univ. Carol.*，44(4):659–667，2003。[17] B. Kawohl 和 T. Lachand-Robert. 平面凸子集的切格集刻画。 *Pac. J. Math.* 225 1 103 118, 2006 ，（）：–。[18] Y. S. Kupitz、H. Martini 和 M. A. Perles. 球多面体与 V´azsonyi 问题。 *Acta Math. Hung.*，126 1 2 99 163，2010（-）：–。[19] H. Lebesgue. 关于等周问题及恒定宽度区域。 ，页码 –。

[20] G. Martin。 *The Unexpected Hanging And Other Mathematical Diversions*。西蒙与舒斯特出版社，纽约，1969年。[21] H. Martini、L. Montejano 和 D. Oliveros。 *Bodies of constant width*。Birkh¨auser/施普林格出版社，尚，2019年。《凸几何导论及其应用》。[22] R. Schneider。 *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory* 151 *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* 2014，第 卷。剑桥大学出版社，剑桥，扩˙充版，。[23] J. Soko-lowski 和 J.-P. Zolesio。 *Introduction to shape optimization: shape sensitivity analysis*，第 16 卷，*Springer Ser. Comput. Math.* 柏林等地：施普林格出版社，1992年。

Beniamin Bogosel：数学应用中心，法国国家科学研究中心，´
巴黎综合理工学院，巴黎理工学院，91120 帕莱索，法国
beniamin.bogosel@polytechnique.edu
http://www.cmap.polytechnique.fr/~beniamin.bogosel/