迈向完全图简单绘图中的无交叉哈密顿圈

Oswin Aichholzer 格拉茨工业大学软件技术研究所，奥地利
Joachim Orthaber 格拉茨工业大学软件技术研究所，奥地利

Birgit Vogtenhuber
格拉茨工业大学软件技术研究所，奥地利

arXiv:2303.15610v2 [math.CO] 4 Mar 2024

摘要

一个由来已久的猜想认为，任意一个含有 $n \geq 3$ 个顶点的完全图的简单绘图都包含一个无交叉哈密顿圈。我们将这一猜想加强为“任意一对顶点之间都存在一条无交叉哈密顿路径”，并证明这一更强的猜想对若干类简单绘图成立，包括强 c-单调绘图和圆柱绘图。作为第二项主要贡献，我们概述了不同类别的简单绘图，并研究了它们在弱同构意义下的包含关系。

2012 年 ACM 学科分类 计算理论 → 计算几何

关键词和短语 无交叉哈密顿圈与路径、简单绘图的类别

相关版本
Joachim Orthaber 的硕士论文： https://graz.elsevierpure.com/...-of-the-comple
EuroCG 版本： https://dccg.upc.edu/eurocg23/.../Session-5B-Talk-2.pdf*CGT* 论文：
https://doi.org/10.57717/cgt.v3i2.47

资助 *Oswin Aichholzer*：部分获奥地利科学基金（FWF）W1230 项目资助*Joachim Orthaber*：获奥地利科学基金（FWF）W1230 项目资助*Birgit Vogtenhuber*：部分获奥地利科学基金 DACH 项目资助 排列与画法，项目编号为 FWF I 3340-N35

致谢 感谢 Rosna Paul、Daniel Perz 和 Alexandra Weinberger 富有成效的讨论。我们还要感谢 Manfred Scheucher 进行的计算，并感谢 Wong 推荐的颜色 [35], ，我们在图中采用了这些颜色。最后，我们感谢匿名审稿人提出的宝贵意见。

1 引言

在平面（或球面）上对图进行绘图 时，顶点用互不相同的点表示，边则用连接相应点的若尔当弧表示。为方便起见，我们也将这些表示称为顶点和边。简单绘图 是指一种图的绘图，其中任意一对边最多相交于一点，而该点必须是正常交叉点或公共端点。该领域的一条重要研究主线是，在完全图 K_n 的无交叉 简单绘图中寻找子图。这些子图的边两两不交叉，也称为平面 子图。要完成这项任务，只需知道绘图中的所有交叉，其精确形状并不重要。若同一图的两个简单绘图$\mathcal{D}$ 和$\mathcal{D}'$ 中，两条边在$\mathcal{D}$中相交，当且仅当对应的两条边在$\mathcal{D}'$ 中相交，则称它们弱同构 。若存在一个（球面的）同胚将$\mathcal{D}$ 映射到$\mathcal{D}'$，则称它们强同构 。 K_n 的弱同构类可由旋转系统唯一表示。顶点的旋转 是与该顶点关联的所有边按（顺时针）排列形成的圆周顺序，其中这些边

通常根据它们的另一个端点来区分。在简单绘图中，所有顶点的旋转构成的集合称为其旋转系统。有关旋转系统的更多信息，见 Ábrego 等人 [1] 和 Kynčl [28]；图5展示了 K_5的所有非同构简单绘图。1988年，Nabil Rafla 在其博士论文 [32]中提出了以下猜想。

▶ **猜想 1.1** (Rafla [32])。每个具有 $n \geq 3$ 个顶点的完全图 K_n 的简单绘图都至少包含一个无交叉哈密顿圈。

相关工作。在假设猜想 1.1 成立的前提下，Rafla 枚举了 K_n 的所有不同简单绘图（ $n \leq 7$ 阶），直至弱同构。此后，猜想 1.1 及其各种弱化形式受到了广泛关注。特别是，在简单绘图$\mathcal{D}$ 中存在无交叉哈密顿圈，意味着删去该圈上的任意一条边后，$\mathcal{D}$ 中仍存在无交叉哈密顿路径。此外，当 n 为偶数时，无交叉哈密顿路径还意味着$\mathcal{D}$ 中存在平面完美匹配，只需舍弃路径上每隔一条边即可。然而，对于偶数 n，每个 K_n 的简单绘图中是否都存在平面完美匹配，这一问题至今仍未解决。

2003年，Pach、Solymosi 和 Tóth [31] 证明，每个 K_n 的简单绘图都包含与任意大小为 $\mathcal{O}(\log(n)^{1/6})$ 的树同构的平面子绘图。这立即推出，在每个 K_n 的简单绘图中，最长无交叉路径和最大平面匹配的下界均为 $\Omega(\log(n)^{1/6})$。此后，平面匹配方面取得了许多进展。直到最近，对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，已知的最佳结果仍是 Ruiz-Vargas [33], 证明的 $\Omega(n^{1/2-\varepsilon})$ 下界。近期，借助广义扭曲绘图的提出与应用，这一下界在 [6], 中提升至 $\Omega(\sqrt{n})$；广义扭曲绘图及本引言中提到的其他几类绘图的定义见第2节。在同一篇论文中，Suk 和 Zeng [34],也独立证明了最长无交叉路径的下界为 $\Omega(\log(n)/\log(\log(n)))$。这是自 Pach、Solymosi 和 Tóth 的结果以来，近 20 年来无交叉路径方面的首次改进。此外， [6] 的作者还为最长无交叉圈得到了相同的下界 $\Omega(\log(n)/\log(\log(n)))$。关于过去 20 年研究进展的更详细历史，感兴趣的读者可参阅 [6, 33, 34] 中所列的参考文献。

沿着类似的思路，Pach、Solymosi 和 Tóth [31] 证明，每个 K_n 的简单绘图都包含一个大小为 $\Omega(\log(n)^{1/8})$ 的子绘图，它与凸直线绘图或所谓的扭曲绘图弱同构。这意味着存在若干大小相应的平面子绘图。最近，Suk 和 Zeng [34] 将这一 $\Omega(\log(n)^{1/8})$ 界改进为：对任意固定的 $\varepsilon > 0$，界为 $\Omega(\log(n)^{1/4-\varepsilon})$。这也相应改进了上述关于树的$\mathcal{O}(\log(n)^{1/6})$ 界。

此外，Ruiz-Vargas [33] 证明，对于任意固定的 $\varepsilon > 0$，每个 K_n 的 c-单调绘图都包含一个大小为 $\Omega(n^{1-\epsilon})$ 的平面匹配；这“几乎”就是一个完美匹配。此外， [6] 中的研究表明，每个 c-单调绘图都包含一个大小为 $\Omega(\sqrt{n})$ 的子绘图，它与一个 x-单调绘图或一个广义扭曲绘图弱同构。这意味着， K_n 的 c-单调绘图包含一条无交叉路径以及一个大小为 $\Omega(\sqrt{n})$ 的无交叉圈。

关于无交叉哈密顿圈，使用旋转系统数据库 $n \leq 9$ ，已证实猜想 1.1 对所有具有 [1], 个顶点的简单绘图都成立；Ebenführer 在其硕士论文 [17] 中测试了该猜想，测试对象是随机生成的、最多包含 30 个顶点的可实现旋转系统。此外，Arroyo、Richter 和 Sunohara [12] 证明了所谓伪球面（或 h-凸）绘图 K_n 中无交叉哈密顿圈的存在性。在一篇当前论文中，Bergold、Felsner、M. Reddy 和 Scheucher [15] 将这一结论扩展到了（广义）凸绘图。此外，他们使用 SAT编码证实了猜想 1.1 对 $n = 10$ 成立。

最后，在 [6]，中，研究表明猜想 1.1 对具有奇数个顶点的广义扭曲绘图成立。

从否定的方面来看，在 [5, 17] 中，作者表明绘图的简单性至关重要：他们给出了一个不包含任何“无交叉”哈密顿圈的星简单绘图 K_6（见图 1）。星简单绘图是指这样一种绘图：关联边不得相交，但不相邻边可以相交多于一次。我们指出，在星简单绘图的语境下，只有当边相交的次数为奇数时，才会将其实际视为“交叉”。

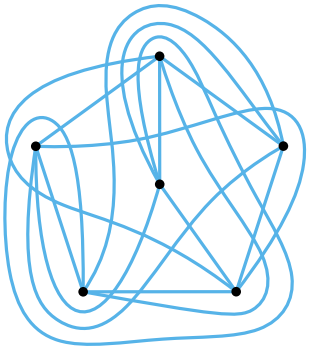


图 1 ([5, 17]) 一个不含无交叉哈密顿圈的星简单绘图。

我们的贡献。

沿着上述研究方向，我们聚焦于简单绘图的子类，并证明猜想 1.1 对强 c-单调绘图（推论 3.14）以及圆柱绘图（推论 3.16）均成立。为此，我们提出以下新猜想。

▶ **猜想 1.2**。每个 K_n 的简单绘图 D，对于 D 中任意一对顶点 v_a 和 v_b，都包含一条端点为 v_a 和 v_b的无交叉哈密顿路径。

我们证明，若猜想 1.2 得到肯定回答，则猜想 1.1 也得到肯定回答（定理 3.7），因此猜想 1.2 是更强的猜想。随后，我们验证了强 c-单调绘图（定理 3.13）和圆柱绘图（定理 3.15）这两类绘图满足猜想 1.2。据我们所知，我们的结果还隐含地首次发表了关于 x-单调绘图和强圆柱绘图满足猜想 1.1 的证明，并涵盖了若干其他简单绘图类。

为更好地理解关于简单绘图子类的结果所产生的影响，我们进一步考察了这些不同子类之间的关系（图7）。我们证明，每个圆柱绘图都与某个 c-单调绘图弱同构（命题 4.7）；尤其是，每个强圆柱绘图都与某个强 c-单调绘图弱同构（定理4.9）。此外，我们给出了强 c-单调但非圆柱的绘图，以及圆柱但非强 c-单调的绘图示例（图12）。我们给出了一个自成一体的证明，说明 x-单调绘图和 x-有界 K_n 绘图在弱同构意义下相同（定理 4.4），并举例说明对于非完全图，这一结论不再成立（图19）。最后，我们证明存在一些 n-可壳化的 K_n 绘图，它们与任何 x-有界绘图都不弱同构（观察4.5）；为此，我们扩展了 Balko、Fulek 和 Kynčl [13] 中的一个示例，该示例原本旨在证明同一结论。

概要。本文其余部分安排如下：第2节将正式定义若干类简单绘图，介绍相关背景，并阐述它们之间的关系。第3节专门讨论猜想 1.2。我们首先在第3.1节考察猜想1.1和猜想1.2之间的关系，然后在第 3.2 节验证上述各类绘图均满足猜想 1.2。在第5节通过讨论结束本文之前，我们先在第 4 节研究不同绘图类别之间的关系。具体而言，第4.1节给出了关于 x-单调、 x-有界和 n-可剥离绘图的结果，而第 4.2 节则展示了不同类型的圆柱绘图与 c-单调绘图之间的关系。

2 简单绘图类别概述

本节将详细概述文献中研究过的简单绘图类别。此外，我们还定义强 c-单调绘图这一类别，并明确区分两种圆柱绘图。

以下大多数类别的定义都依赖于平面中的某种表示以及一个固定的无界单元。不过，在全文中，我们考虑弱同构意义下的绘图，并且仅使用这些特殊表示来简化论证。特别是，对于某个类别 X 中的绘图$\mathcal{D}$，我们关于无交叉子绘图的所有陈述以及绘图的包含关系，对于任何与 X 中任一绘图弱同构的绘图$\mathcal{D}'$ 也成立。为了便于阅读，我们不再逐一说明这一点。

我们将简单绘图中的顶点记为 v_1、……、v_n。对于边 $e = \{v_a, v_b\}$，我们约定 $a < b$。然后，利用由顶点指标诱导的全序 $<$，我们对边进行比较：给定两条不相邻边$e = \{v_a, v_b\}$ 和 $f = \{v_c, v_d\}$，不失一般性地设 $a < c$，我们称 e 和 f

- 分离，如果 $a < b < c < d$，交
- 错[1], 如果 $a < c < b < d$，且嵌
- 套，如果 $a < c < d < b$。

直线绘图。 简单绘图中研究得最多的类别大概是平面中的直线绘图，其中每条边都是连接其两个端点的线段。对于完全图 K_n 的直线绘图，不允许有三个顶点位于同一条直线上，否则边会穿过顶点。因此，K_n 的直线绘图等价于平面中处于一般位置的 n 个点。此外，不失一般性地，我们可以假设没有两个顶点具有相同的 x 坐标。

具有 n 个顶点的凸直线绘图，记作$\mathcal{C}_n$，是指所有顶点都处于凸位置的 K_n 直线绘图。我们称之为“该”绘图，因为它在弱同构意义下是唯一的。$\mathcal{C}_n$ 的组合描述如下：存在一种顶点次序，使得两条边相交当且仅当它们交错 [31]。

X-单调且 x-有界绘图。 设$\mathcal{D}$ 是平面上的一个简单绘图，其中任意两个顶点的 x 坐标都不相同。如果平面上的每条垂直线与$\mathcal{D}$ 的每条边至多相交一次，则称$\mathcal{D}$ 为 x-单调绘图；示例见图2(a)。如果每条边都完全位于分别经过其左端点和右端点的垂直线之间，则称$\mathcal{D}$ 为 x-有界绘图。 X-单调绘图是直线绘图的一种自然推广，而显然，x-有界绘图是 x-单调绘图的一种推广。对于 x-单调绘图和 x-有界绘图，在强同构意义下，我们可以假设所有顶点都位于同一条水平线上，并按从左到右的顺序将它们标记为 v_1、……、v_n。此外，可以在 $\mathcal{O}(n^5)$ 时间内判定给定的 K_n 的简单绘图是否与某个 x-单调绘图 [8] 弱同构。

2页书绘图。 另一类简单绘图是 2页书绘图。其定义如下：所有顶点都位于同一条水平线上，即书的脊线上；每条边的相对内部完全位于脊线上方或下方，这分别定义了书的两个页；示例见图 2(b)。这些绘图

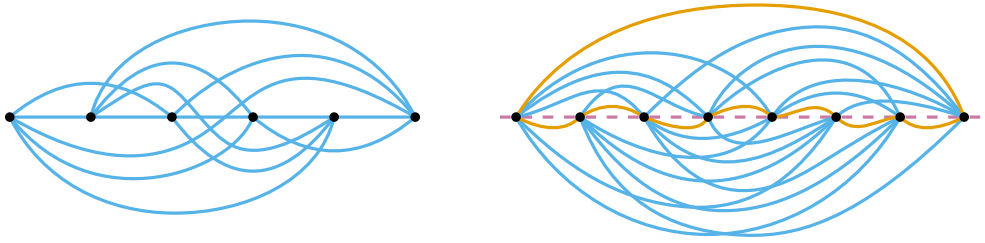
[1] 我们称这种情形为交错，文献中也称之为交叉；参见 Barát、Gyárfás 和 Tóth [14]。不过，为了避免与两条边实际发生交叉相混淆，我们选择了另一个名称。

与书嵌入密切相关，书嵌入允许使用两个以上的页面；详情见 Bernhart 和 Kainen [16] 。以下观察可由两个事实推得：脊线不会与任何边相交，并且简单绘图中的两条边至多相交一次。

▶ **观察 2.1**。 在2页书绘图中，两条边相交，当且仅当它们位于同一页，并且相对于脊线上的顶点顺序彼此交错。s一页上，并且相对于脊线上的顶点顺序彼此交错。

由此很容易看出，具有 K_n 和 $n \geq 3$ 的简单绘图当且仅当包含一个完全无交叉的[2]哈密顿圈时，才与2页书绘图弱同构。进一步可知，由单页诱导的子绘图与$\mathcal{C}_n$ 的某个子绘图弱同构，并且每个2页书绘图都与某个 x-单调绘图弱同构，例如，可以将所有边绘制成相应页面中的半圆。不过，并非所有2页书绘图都与直线绘图弱同构。特别地，存在 K_n的2页书绘图，例如图 2(b)中的绘图，其交叉数少于 K_n 的任何直线绘图所能具有的 [3]。

对于2页书绘图的脊线，我们实际上可以使用将平面划分为两个连通分支的任意简单曲线。特别地，圆也是可行的。在这种情况下，我们沿脊线上的顶点得到一个圆周顺序 π° 。不过，通过选择某个顶点作为 v_1 ，并规定沿圆的某个方向为递增方向，我们可以由 π° 构造出一个线性顺序 π 。如果边 e 和 f 在某个可能的 π选择下交错，那么对于所有可能的 π选择， e 和 f 也都交错。因此，观察 2.1 对于沿圆形脊线的任意线性顺序都成立。相比之下，对于某个这样的线性顺序而言分离的每一对边 π ，在另一个线性顺序 π' 下都会嵌套，反之亦然。



(a) (b)

图2 (a) 一个 x-单调绘图，关于 K_6。(b) 一个交叉数最小的2页书绘图，关于 K_8。脊线以紫色虚线绘制，完全无交叉的哈密顿圈以橙色绘制。

可壳化绘图。 Ábrego 等人 [4] 提出了可壳化绘图这一概念。如果存在顶点的一个有序子集 $v_1, \ldots, v_s$ ，使其满足以下两个性质，则简单绘图$\mathcal{D}$ 是 s-可壳化的。首先， v_1 和 v_s 与$\mathcal{D}$的同一个胞腔 F相邻。其次，对于每个 $1 \leq i < j \leq s$， v_i 和 v_j 都与$\mathcal{D}_{ij}$中的胞腔 F_{ij} 相邻，其中$\mathcal{D}_{ij}$ 是由顶点 $v_i, \ldots, v_j$ 诱导的$\mathcal{D}$ 的子绘图，而 F_{ij} 是包含 F的胞腔。容易看出，图中任意一个具有 n 个顶点的 x-有界绘图都是n-可壳化的（简称可壳化），只需将顶点按水平方向从左到右排序，并令 F 为无界胞腔即可。可壳化绘图还有几种推广，例如双壳可绘图（见 Ábrego 等人 [2]）和序列可壳化绘图（见 Mutzel 和 Oettershagen [30]）；有兴趣的读者可参阅相应论文。

[2] 如果简单绘图 $\mathcal{D}$ 的子绘图 $\mathcal{D}'$ 中，$\mathcal{D}'$ 的任何边都不与$\mathcal{D}$的任何边相交，我们就称其为完全无交叉 。这样做是为了将它们与无交叉 子绘图明确区分开来；在后者中，$\mathcal{D}'$ 的边只是不与$\mathcal{D}'$的其他边相交。

c-单调绘图。为了刻画下一类绘图，我们采用文献 [6]中的定义。若简单绘图中的一条边 e 被每条从点 O 出发的射线 e 至多穿过一次，则称该边相对于平面中的点 O 为c-单调边。若平面上的简单绘图$\mathcal{D}$ 中所有边都相对于同一个点 O 为c-单调，且没有两个顶点位于从 O 出发的同一条射线上，则称$\mathcal{D}$ 为*c*-单调绘图。“c-单调”中的字母“c”是“圆周地”（circ ularly）的缩写，而“O”代表“原点”。考察c-单调绘图$\mathcal{D}$时，我们假设给定了一个与之对应的适当固定点 O 。此外，在强同构意义下，我们还可以假设$\mathcal{D}$ 的所有顶点都位于同一个以 O为中心的圆上。

除了作为 x-单调绘图的推广之外，c-单调绘图还因以下原因而受到关注：在简单绘图 $\mathcal{D}$ 中，任意顶点 v 的星 $\mathcal{S}_v$ 都可以通过在 $\mathcal{D}$ 的 $n-1$ 个顶点上取一个平面生成树 $\mathcal{T}$ 来扩展，其中排除 v，使得 $\mathcal{S}_v+\mathcal{T}$ 也构成平面图；参见 García、Pilz 和 Tejel [20, 推论 3.4]。结构 $\mathcal{S}_v+\mathcal{T}$ 随后要么自身包含较大的平面子绘图（如匹配、路径和圈），要么强制在 $\mathcal{D}$ 中存在一个较大的 c-单调子绘图。有关这一思想的更多细节，请参见 Fulek [18, 定理 1 的证明。1]

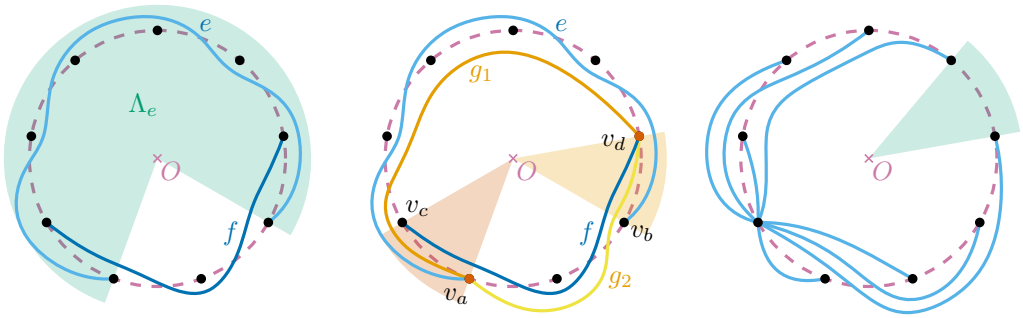


图 3 **(a)** 浅蓝色边 e 的楔形区域 Λ_e（阴影部分为海绿色）。深蓝色边 f 与 e 一起覆盖平面，这在强 c-单调绘图中是不允许的。**(b)** 引理 2.2 的示意图：一对不相邻边（蓝色）覆盖平面，这会迫使一对关联边覆盖平面；要么是较深的（g_1）版本，要么是较浅的（g_2）版本的 g。**(c)** 引理 2.2 的条件 3：星不被海绿色楔形区域内的任何射线交叉。

强 c-单调绘图。给定 c-单调绘图中的一条边 e，我们将楔形区域 Λ_e 的 e 定义为以 O 为顶点的闭楔形区域，其边界为从 O 出发、经过 e 的端点的射线，并且包含 e。对于边集 E，如果 E 中的边对应的楔形区域的并集是整个平面，我们就称这些边覆盖平面。图 3(a) 展示了这些术语的示意图。显然，至少需要两条边才能覆盖平面。这引出了强 c-单调绘图的定义。如果 c-单调绘图$\mathcal{D}$ 中不存在一对边能够覆盖平面，那么我们称$\mathcal{D}$ 为强 *c*-单调。等价地，如果对于$\mathcal{D}$中的任意一对边 e 和 f，都存在一条从 O 出发且不与 e 或 f相交的射线，那么该 c-单调绘图就是强 c-单调的。注意，所有 x-单调绘图也都是强 c-单调的：选择一个位于绘图下方足够远的 O，使得从 O 出发的每条射线与$\mathcal{D}$ 中的每条边至多相交一次；那么，所有背离$\mathcal{D}$的射线都不会与$\mathcal{D}$中的任何边相交。对于 K_n，强 c-单调性可以如下刻画。

▶**引理 2.2**。设 $\mathcal{D}$ 是一个 K_n的 *c*-单调绘图。则以下条件等价：**1.** 不存在一对边 e 和 f 在 $\mathcal{D}$ 中覆盖平面。**2.** 不存在一对关联边 e 和 f 在 $\mathcal{D}$ 中覆盖平面。**3.** 在 $\mathcal{D}$ 中不存在覆盖平面的星。

证明。显然，第一个条件蕴含第二个条件。为证明第二个条件蕴含第一个条件，设两条不相邻边 $e = \{v_a, v_b\}$ 和 $f = \{v_c, v_d\}$ 覆盖平面。那么， e 的楔形区域 Λ_e 与 f 的楔形区域 Λ_f 在顶点 O处相交于两个楔形区域。不失一般性地，假设它们分别位于 v_a 与 v_c之间，以及 v_b 与 v_d之间；示意图见图 3(b)。现在考虑边 $g = \{v_a, v_d\}$。或者 g 包含于 Λ_e中，此时关联边g 和 f 覆盖平面；或者 g 包含于 Λ_f 中，此时关联边 g 和 e 覆盖平面。这就证明了前两个条件的等价性。第二个条件与第三个条件的等价性是直接的：一个星覆盖平面，当且仅当它的两条边（这两条边是关联边）覆盖平面。◀

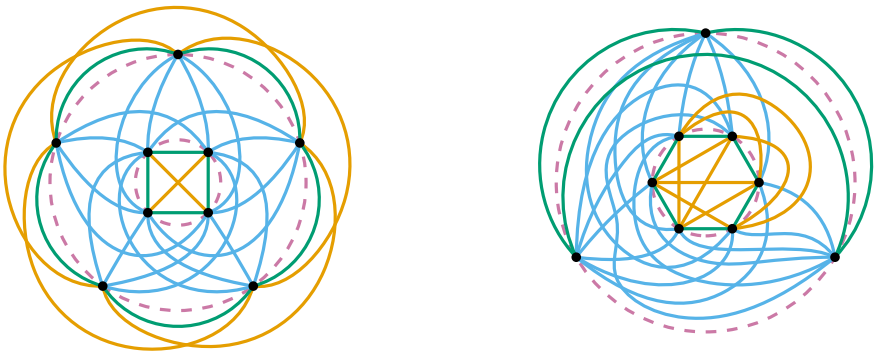
尤其是第三个条件很容易验证，至少手动验证时是如此，只需进行 n 次检查，而不必像检查所有边对时那样进行$\mathcal{O}(n^4)$ 次检查；另见图3(c)。

圆柱绘图。 根据 [4]，中引入的定义，如果一个简单绘图是柱面的，则其所有顶点都位于两个同心圆上，且没有边与这两个圆中的任何一个相交。“柱面”这个名称源于将其想象成绘制在圆柱体表面上的图形：顶点放置在两个边缘上，每条边都完全位于顶盖、侧面或底盖上。这是 Hill猜想的最少交叉绘图 的推广，其中 K_n 的该绘图记作$\mathcal{Z}_n$。在每个边缘上等距放置一半顶点，并将边绘制为测地线，即可构造这种绘图。图4(a)展示了一个示例；更多细节请参阅 Harary 和 Hill [24]，或 Guy、Jenkyns 和 Schaer [23]。

对于上文定义的平面中的柱面绘图，我们分别将外圆之外、两个圆之间以及内圆之内的区域称为外面、侧面和内面。此外，我们将连接来自不同圆的两个顶点的边称为侧边，将连接内圆或外圆上的两个顶点的边分别称为内或外圆边。特别地，我们将连接其所在圆上两个相邻顶点的圆边称为边缘边。有关这些术语的示例，请参见图4。

由于不允许任何边穿过这两个同心圆，因此所有侧边都必须位于侧面内。然而，与此相反，内（分别为外）圆边既可以位于内（分别为外）面内，也可以位于侧面内。此外，根据定义还可得出以下观察结果。

▶**观察 2.3**。 设 D 为一个圆柱绘图。则由其中一个圆上的所有顶点诱导的 D 的子绘图与一个2页书绘图强同构。



(a) **(b)**

图4 **(a)** Hill 的绘图$\mathcal{Z}_9$ 在平面中绘制。两个同心圆绘制为紫罗兰色，边缘边为海绿色，所有其他圆边为橙色，侧边为浅蓝色。**(b)** 具有相同颜色编码的 K_9 任意（非强）柱面绘图。

强圆柱绘图。 如果在一个圆柱绘图中，所有内圆边都位于内面，且所有外圆边都位于外面，则称该绘图为强柱面。特别地，Hill 绘图 $\mathcal{Z}_n$ 是强柱面的。在文献中，“圆柱绘图”一词也用于指代我们所称的强圆柱绘图。此外，Ruiz-Vargas [33]将无限开圆柱面上的任意绘图定义为“圆柱绘图”，而他所称的“单调圆柱画法”等价于我们的 c-单调绘图。

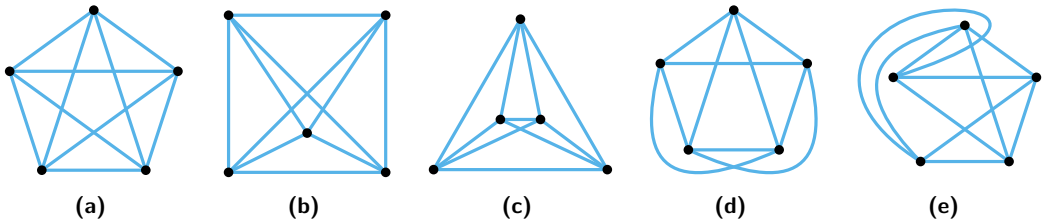


图5 K_5的五种非同构简单画法：(a) 凸直线绘图 $\mathcal{C}_5$。(a) – (c) K_5的三种直线绘图类型。(c) 从某种意义上说，Hill 绘图 $\mathcal{Z}_5$。(e) 扭曲绘图 $\mathcal{T}_5$。**(a) 和 (e)** K_5的两种交叉数极大的绘图。

交叉数极大的绘图。 在完全图 K_n 的简单绘图 $\mathcal{D}$ 中，由4个顶点诱导的任意子绘图至多包含一个交叉。如果每4元顶点组都诱导出一个交叉，从而 $\mathcal{D}$ 恰好包含 $\binom{n}{4}$ 个交叉，那么我们称 $\mathcal{D}$ 为交叉数极大的。例如，图5(a)和图5(e)中的 K_5 绘图，以及一般情况下的$\mathcal{C}_n$，都是交叉数极大的。

扭曲绘图与广义扭曲绘图。 在研究交叉数极大的绘图时，Harborth 和 Mengersen [27] 引入了 K_n的另一种特殊绘图，它推广了图5(e)中的绘图。Harborth [25] 在空三角形的背景下进一步分析了该绘图，Pach、Solymosi 和 Tóth [31] 后来将其命名为扭曲绘图。若 K_n 的顶点存在一种排列，使得两条边相交当且仅当它们彼此嵌套，则 K_n 的简单绘图是扭曲绘图 。这唯一确定了 K_n的扭曲绘图；除弱同构外，我们将其记为$\mathcal{T}_n$，并使用这一确定的排列将其顶点从v_1 到 v_n编号。实现这一特殊交叉性质的一种可能方式如图6(a)所示。此外，图2(a)中的绘图实际上是$\mathcal{T}_6$的一个 x-单调表示；对于 $n \geq 7$，这已不再可能。然而，$\mathcal{T}_n$ 可以绘制成 c-单调形式，使得存在一条从 O 出发并与所有边相交的射线；图6(b)给出了一个示例。这是下述扭曲绘图推广的定义性质 [6]：若 c-单调绘图$\mathcal{D}$是 K_n 的绘图，则称其为广义扭曲 （简称g-扭曲），如果存在一条从

O 与$\mathcal{D}$的所有边都相交。已有研究表明 [7] ，对于$\mathcal{D}$ 的绘图，若 K_n且 $n \geq 7$，则

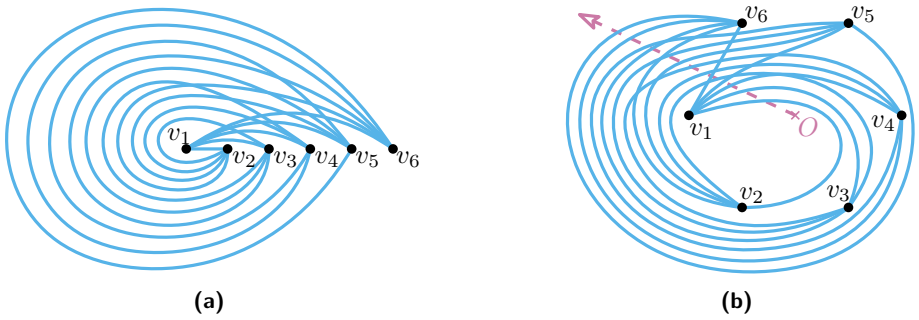


图6 以通常方式绘制的扭曲绘图$\mathcal{T}_6$ ， 以及（**a**）和（**b**）作为 c-单调绘图。

当且仅当$\mathcal{D}$ 中由 5 个顶点诱导的每个子绘图都与扭曲绘图$\mathcal{T}_5$弱同构时，它才与 g-扭曲绘图弱同构。这尤其意味着，所有 g-扭曲绘图都是交叉数极大的绘图。关于 g-扭曲绘图的更多信息，感兴趣的读者可参阅 [6, 7, 21]。

广义凸绘图。 Arroyo、McQuillan、Richter 和 Salazar [11] 引入了以下一类简单绘图：在简单绘图中，每个三角形都会将平面分成两个连通分支，其闭包称为该三角形的侧。如果三角形的一个侧 S 满足：对于其中的任意一对顶点 v_a 和 v_b，边$\{v_a, v_b\}$ 完全包含在 S 中，则称该侧为凸侧。若简单绘图$\mathcal{D}$ 满足 K_n 广义凸[3]（简称*g*-凸），即$\mathcal{D}$ 中的每个三角形都有一个凸侧。 [11, 定理 2.6]已证明，当且仅当由 5 个顶点诱导的每个子绘图都与 K_5的三种直线绘图之一弱同构时，该绘图才是 g-凸的；见图 5(a)–5(c)。

此外，还存在遗传凸绘图这一子类（简称 *h*-凸），其中三角形的凸边可通过包含关系继承。Arroyo、Richter 和 Sunohara [12]证明，对于 K_n，这等价于所谓的伪球面绘图，即对球面上绘图的推广，其中边被绘制为测地线。再进一步，若存在一个胞腔 F 位于$\mathcal{D}$ 中，使得对于$\mathcal{D}$ 中的每个三角形，不包含 F 的那条边都是凸的，则称 h-凸绘图$\mathcal{D}$ 为面凸（简称*f*-凸）。对于 K_n，Arroyo、McQuillan、Richter 和 Salazar [10]证明，这等价于众所周知的伪线性绘图。而伪线性绘图又是直线绘图的推广，并且是 x-单调绘图的一个子类。有关 g-凸绘图及其子类的更多信息，请参见 [10, 11, 12]。

概述。 本节最后概述所引入的所有绘图类别，并展望接下来几节将要展示的内容。鉴于一幅图胜过千言万语，我们通过图 7 来进行说明。

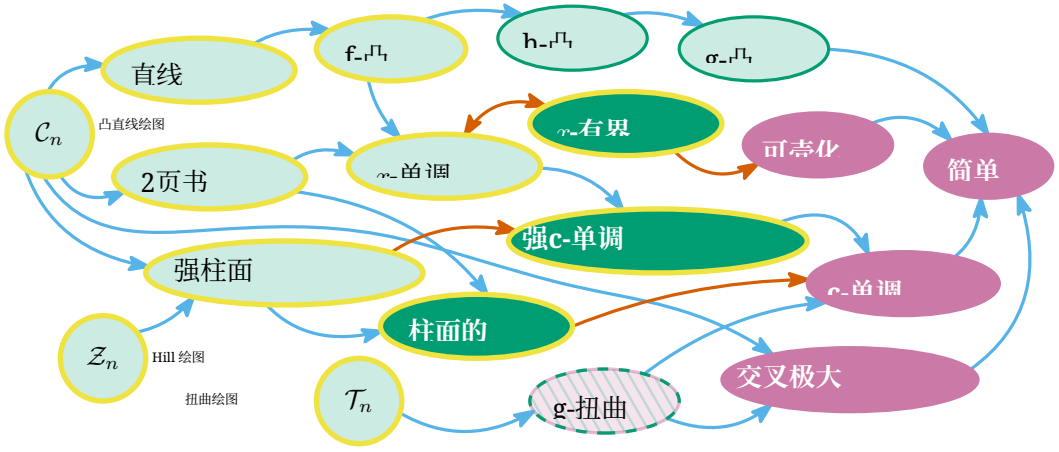


图 7 K_n的不同类别简单绘图概览。单箭头表示源类别是目标类别的真子集（就弱同构而言）；双箭头表示两者相等。每个深橙色箭头表示本文给出的结果。海绿色圆盘标出猜想 1.1 已（现已）得到证明的类别；我们重点关注颜色较深的海绿色类别。所有我们验证了猜想 1.2 的类别均以黄色边界突出显示。紫色类别的两个猜想仍未解决，而对于 g-扭曲绘图，猜想 1.1 已部分得到证明。

[3] Arroyo 等人 [10, 11, 12] 称它们为“凸绘图”。但由于在这些绘图中，三角形的两侧都可以是凸的，我们更倾向于称其为“广义凸绘图”。

3 任意顶点对之间的无交叉哈密顿路径

本节旨在说明猜想 1.2 确实是对猜想 1.1 的强化，并证明这些猜想对于强 c-单调绘图和圆柱绘图成立。由于关于每一对顶点之间是否存在无交叉哈密顿路径的问题是新提出的（猜想 1.2），因此有必要检验这一问题是否确实合理。可以证明，在 K_n 的每个直线绘图中，所有这些无交叉哈密顿路径实际上都存在。其主要思路是从某个起始顶点出发，按照圆周顺序访问所有顶点。我们将形式化证明留给读者，因为该结论也可由本文后文给出的更一般结果推出。

作为另一项合理性检验，利用我们的旋转系统数据库 [1], ，我们可以确认猜想 1.2 对所有具有 $n \leq 9$ 个顶点的简单绘图均成立。此外，Manfred Scheucher（私人通信）使用来自 [15] 的 SAT 框架，确认猜想 1.2 对所有具有 $n \leq 10$ 个顶点的简单绘图以及所有具有 $n \leq 12$ 个顶点的 g-凸绘图均成立。

一个与预先指定无交叉哈密顿路径 $\mathcal{P}$ 的两个端点相关的问题，是固定某条边属于 $\mathcal{P}$。在 K_n 的直线绘图中，这很容易做到，因为一条边的支撑直线会将顶点集分成两部分，且两部分的凸包互不相交。此外，在 [15], 的 arXiv 版本中，Bergold、Felsner、M. Reddy 和 Scheucher 在定理 4.1 中证明，即使在 K_n 的 g-凸绘图 $\mathcal{D}$ 中，对于 $\mathcal{D}$ 中的每条边 e，也存在一条包含 e 的无交叉哈密顿路径。然而，对于 K_n 的任意简单绘图，这并不总是可行。例如，选择扭曲绘图 $\mathcal{T}_n$ 中的边 $\{v_1, v_n\}$：由于它与所有不相邻边都交叉，因此它不可能属于任何包含三条以上边的无交叉路径。

3.1 路径猜想蕴含圈猜想

作为本文的第一个主要结果，我们建立猜想 1.1 和猜想 1.2 之间的联系。我们首先注意到，简单绘图 $\mathcal{D}$ 中的每条完全无交叉边，都可以添加到 $\mathcal{D}$ 的一个无交叉子绘图中，而不会引入任何新的交叉。

▶ **观察 3.1**。设 D 是一个关于 K_n 的简单绘图，其中有 $n \geq 3$，且包含一条完全无交叉边 $e = \{v_a, v_b\}$，以及一条端点为 v_a 和 v_b的无交叉哈密顿路径。那么 D 包含一个无交叉哈密顿圈。

这一观察表明，对于所有包含完全无交叉边的绘图，猜想 1.2 至少与猜想 1.1 同样强。这包括例如 x-有界绘图，因为当顶点按从左到右的顺序排列时，任意两条分离边在 x-有界绘图中都不会相交。特别地，我们有以下结论。

▶ **观察 3.2.** 设 D 是一个 x-有界的 K_n 绘图，其顶点为 $v_1, \ldots, v_n$，按从左到右的顺序标记。那么边 $\{v_1, v_2\}$ 和 $\{v_{n-1}, v_n\}$ 是完全无交叉的。

接下来我们将证明，每个圆柱绘图都包含完全无交叉边。对于侧面中的一条圆边 $e = \{v_a, v_b\}$ 以及圆 C上的端点，我们考虑完全包含在侧面内、且仅由 e 和 C的一部分围成的唯一区域 F；图 8 给出了一个示例。我们称 e 守护顶点 v，当且仅当v 位于 F的边界上，也就是说，e 沿 C的顺时针方向或逆时针方向守护 v_a 与 v_b 之间（包括两者）的所有顶点。在特别情况下，e 始终守护其自身的端点。类似于观察 2.1，我们得到以下结论。

▶**观察 3.3**。 设 e 是圆柱绘图 D 的侧面中的一条圆边。设f 是 D 的另一条边，它与 e 不相 *incident*，且也位于 D 的侧面中。那么，当且仅当 e 恰好守护 f 的一个端点时，e 和 f 相交。

我们进一步称 e 保护另一条边 f，如果 f 也位于侧面中，且其两个端点均由 e保护；这等价于 f 完全位于 F之中。因此，两条边不可能相互保护。

▶**观察 3.4**。 设 e 是圆柱绘图 D 侧面中的一条圆边，V_e 是由 e保护的顶点集合，并设 e 保护另一条圆边 f。那么，由 f 保护的顶点集合是 V_e的真子集。

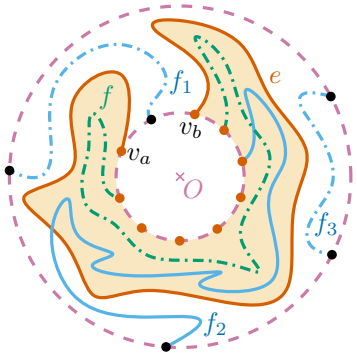


图 8 橙色圆边 e 保护所有橙色顶点和海绿色边 f。区域F 以浅橙色阴影标出。为支持观察 3.3，图中还以浅蓝色绘出了边 f_i 的另外三个例子。实线边 f_2 与 e相交，而所有点划线边均不与 e相交。

根据这些观察，我们现在可以给出关于圆柱绘图的以下基本结构性结论；稍后我们也会用它来证明有关这类绘图的大多数结果。

▶**引理 3.5**。 设 D 是一个圆柱绘图。那么，D 中至多有两条圆周边（每个圆上至多一条）不是完全无交叉的。

证明。 不失一般性，考虑内圆。首先，若一条圆周边 e 位于内面中，那么根据观察 2.1 和 2.3，e 无交叉。此外，若 e 位于侧面中，则还需分两种情况。若 e 只守护其自身的端点，则根据观察 3.3，它无交叉。或者，e 守护内圆上的所有顶点。此时，e 可能有交叉，但 e 也会守护所有其他位于侧面中的内圆圆周边。特别地，根据观察 3.4，所有被 e 守护的这些圆周边都只守护其自身的端点。因此，根据前两种情况，所有其他内圆圆周边均无交叉。
◀

▶**推论 3.6**。 对于每个圆柱绘图或 x-有界绘图，以及任何其他包含完全无交叉边的绘图，猜想 *1.2* 蕴含猜想 *1.1*。

遗憾的是，并非所有 K_n 的简单绘图都具有完全无交叉边。Harborth 和 Mengersen [26] 已经观察到，对于每个 $n \geq 8$，都存在 K_n的简单绘图，其中每条边都会与其他边相交。此外，Kynčl 和 Valtr [29] 证明，存在 K_n 的简单绘图，其中每条边最多会与 $\Omega(n^{3/2})$ 条其他边相交。然而，通过一次考察 K_n 的所有简单绘图，我们仍然可以证明猜想1.1和猜想1.2之间的关系。

12 迈向完全图简单绘图中的无交叉哈密顿圈

▶ **定理 3.7**。 固定 $n \geq 3$ 。如果猜想 *1.2* 对所有 K_{n+1}的简单绘图都成立，那么猜想 *1.1* 对所有 K_n的简单绘图也成立。

证明。设 D 是某个固定 $n \geq 3$ 的 K_n 的任意简单绘图，并假设猜想 1.2 对所有 K_{n+1} 的简单绘图都成立。考虑顶点 v_n ∈D，尤其是 v_n 的星。不失一般性，设 v_n 的旋转按顺时针顺序为 v_1、……、v_{n-1}。我们通过以下方式复制 v_n，构造 K_{n+1} 的一个简单绘图 D′（构造示意见图 9(a)）。我们在 D 的胞腔中、靠近 v_n 的位置放置一个新顶点 v_{n+1}；该胞腔与 v_n 相邻，且边 $\{v_n, v_{n-1}\}$ 和 $\{v_n, v_1\}$ 位于其边界上。然后，对 $1 \leq i \leq n-1$，我们添加边 $\{v_{n+1}, v_i\}$：从 v_{n+1} 出发，沿逆时针方向绕过 v_n，直至到达边 $\{v_n, v_i\}$，然后沿着 $\{v_n, v_i\}$ 前行，直到到达 v_i。这样，边 $\{v_{n+1}, v_i\}$ 恰好与所有边 $\{v_n, v_j\}$（其中 $i < j < n$）以及 D 中与 $\{v_n, v_i\}$ 相交的所有边相交。最后，我们用一条完全无交叉边连接 v_n 和 v_{n+1}。

根据假设，D′ 包含一条无交叉哈密顿路径 P，其端点为 v_n和 v_{n+1}。由于 $n+1 \geq 4$，对于 D′ 中满足 $1 \leq i \leq n-1$ 的任意顶点 v_i，路径 P 既不会同时使用 $\{v_i, v_n\}$ 和 $\{v_i, v_{n+1}\}$，也不会使用边 $\{v_n, v_{n+1}\}$。因此，在 P 中识别 v_n 和v_{n+1} 会在 D 中生成一个哈密顿圈 C。由于所有边 $\{v_i, v_{n+1}\}$ 与 $\{v_i, v_n\}$ 的交叉情况相同，只有与关联于 v_n 和 v_{n+1}的边的交叉除外，所以圈 C 也是无交叉的。又因为 D 是任意的，这就完成了证明。◀

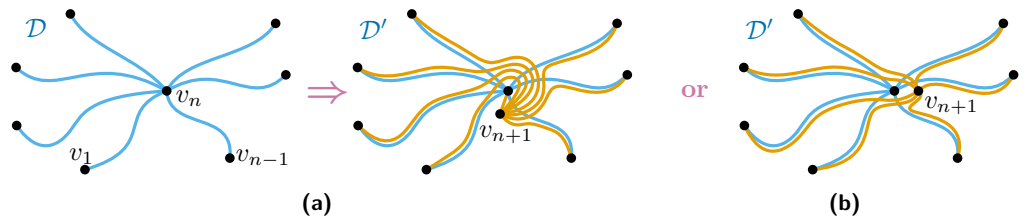


图 9 (a) 向 K_n的简单绘图中添加一个顶点的基本构造。**(b)** 一种可能的不同放置方式，以及其关联边的不同布线方式。

我们指出，Harborth 和 Mengersen [27]也曾使用所述构造，通过归纳法生成 K_n的交叉数极大的绘图。此外，若要得到适用于简单绘图某个子类的定理 3.7 的类似结论，就必须确保绘图 $\mathcal{D}'$ 的构造方式能够使其也属于该子类。为此，我们实际上有几种改变构造的方式，同时又不改变其本质上的交叉性质。首先，顶点 v_{n+1} 可以放置在与 v_n关联的任意一个 $n-1$胞腔中。其次，根据边绕过 v_n 时是沿顺时针方向还是逆时针方向，可以用 n 种不同的方式将与v_{n+1} 关联的边分成两组。示例见图 9(b)。特别地，对于强 c-单调绘图，我们可以将 v_{n+1} 直接放在圆周顺序中紧邻 v_n 的位置，并绘制所有边，使其相对于 O均为 c-单调。由此可知，$\mathcal{D}'$ 也是强 c-单调的（根据引理 2.2，我们只需检查$\mathcal{D}'$中的每个星）。

▶**推论 3.8**。 如果猜想 *1.2* 对所有强 *c*-单调绘图都成立，那么猜想 *1.1* 也对所有强 *c*-单调绘图成立。

我们注意到，例如，对于 g-扭曲或 g-凸绘图这两类绘图，类似的陈述是否成立并不是显而易见的。

3.2 证明简单绘图子类的全路径猜想

本节将证明强 c-单调绘图和圆柱绘图满足猜想 1.2。作为这两种情形的基础，我们首先验证 x-单调绘图满足该猜想。由于稍后将在这一更一般的设定中用到，我们针对 x-有界绘图给出以下定义。设在一个 x-有界绘图 $\mathcal{D}$ 中有一条边 $e = \{v_a, v_b\}$，我们考虑分别经过 v_a 和 v_b 的垂直线之间（包括这两条垂直线）的区域 F。边 e 将 F 分成两个连通分支，我们将它们的闭包称为 e 的两个 侧。如果 $\mathcal{D}$ 的一个子绘图，特别是其中的一条边或一个顶点，完全包含在 e 的一侧中，我们就称其位于 e上方 或 下方。根据 x-有界绘图的定义，以及简单绘图中的两条边至多有一个公共点这一事实，可以得到以下观察。

▶**观察 3.9**。 设 e 和 f 是一个 x-有界绘图 D 中的两条边，且 f 的两个端点都位于 e的同一侧。那么整条边 f 都位于该侧。

据此，我们可以通过归纳法，将 $\mathcal{D}$的某些子绘图上的无交叉路径组合起来，得到 $\mathcal{D}$中的一条无交叉哈密顿路径。为方便起见，我们只针对 x-单调绘图陈述以下命题。关于 x-有界绘图的类似结论将在稍后由定理 4.4 推出。

▶**命题 3.10**。 设 D 是 K_n 的一个 x-单调绘图，且 v_a 和 v_b 是 D 中的两个顶点。那么 D 中存在一条端点为 v_a 和 v_b的无交叉哈密顿路径。

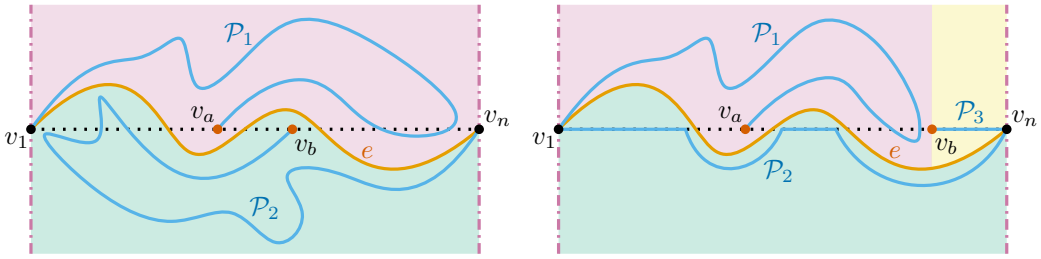
证明。 我们对 n使用归纳法证明该结论。对于 $n \leq 3$，结论显然成立。对于 $n > 3$，顶点 v_1、……、 v_n按照惯例，按水平方向从左到右标记。

首先，设 v_a和 v_b（其中 a、$b \notin \{1, n\}$）分别位于边 $e = \{v_1, v_n\}$的两侧，不失一般性，设 v_a 在上方， v_b 在下方。下文的示意图见图 10(a)。由所有位于 e 上方且排除 v_n 的顶点所诱导的子绘图，以及由所有位于 e 下方且排除 v_1 的顶点所诱导的子绘图，都是 D 的真子绘图，并且显然是 x-单调的。因此，根据归纳假设，存在一条无交叉路径 P_1，其端点为 v_a 和 v_1，经过 e 上方除 v_n 以外的所有顶点；还存在另一条无交叉路径 P_2，其端点为 v_n 和 v_b，经过 e 下方除 v_1以外的所有顶点。此外，根据观察 3.9， e 将 P_1 与 P_2隔开。因此，通过 e 将 P_1 与 P_2 连接起来，可得到一条端点为 v_a 和 v_b的无交叉哈密顿路径。

接下来，设 v_a和 v_b（其中 $1 < a < b$）位于 e的同一侧，不失一般性，设它们位于 e 上方。示意图见图10(b)。那么，根据归纳假设并采用与前面类似的方法，存在一条无交叉路径$\mathcal{P}_1$，其端点为 v_a 和 v_1，经过 e 上方且位于 v_b左侧的所有顶点；另有一条无交叉路径 $\mathcal{P}_2$，其端点为 v_1 和 v_n，经过 e下方的所有顶点；还有第三条无交叉路径 $\mathcal{P}_3$，其端点为 v_n 和 v_b，经过 v_n 与 v_b 之间且位于 e上方的所有顶点。路径 $\mathcal{P}_3$ 可能仅由一个顶点构成，这种情况发生在 $b = n$时；至多$\mathcal{P}_2$ 会包含 e，这种情况发生在 e正下方没有顶点时。此外，根据 x-单调性，$\mathcal{P}_1$ 不会与 $\mathcal{P}_3$ 交叉；根据观察 3.9，$\mathcal{P}_2$ 不会与另外两条路径中的任何一条交叉。因此，将这三条路径连接起来，可得到一条端点为 v_a 和 v_b的无交叉哈密顿路径。对于情形$a < b < n$，论证类似，只需将左右互换。

最后，如果 $v_a = v_1$ 和 $v_b = v_n$，那么按给定顺序从左到右的路径就是一条无交叉哈密顿路径，其端点为 v_a 和 v_b。◀

接下来我们将证明，强 c-单调绘图在局部表现得与 x-单调绘图非常相似。回顾第2节中对边 e 的楔形区域 Λ_e 的定义，并注意，以下引理通常并不适用于（非强）c-单调绘图。



(a) (b)

图 10 在 v_a 和 v_b 位于边 $e = \{v_1, v_n\}$的(a) 不同侧或(b) 同侧时，在 K_n 的 x-单调绘图中，寻找两个给定顶点 v_a 和 v_b 之间无交叉哈密顿路径的两种情况。边以橙色绘制，较长的路径则以浅蓝色绘制。

▶**引理 3.11**。 设 e 是强 c-单调绘图 D 中的一条边。则由 e 的楔形区域 Λ_e 中的所有顶点诱导出的 D 的子绘图 D_e 完全包含于 Λ_e 中，并且与一个 x-单调绘图强同构。

证明。 假设一条边 f 的两个端点都在 Λ_e 中，并且从 Λ_e 的一条边界射线离开。那么 f 必定会环绕 O 并从另一条边界射线再次进入 Λ_e 。因此， e 和 f 覆盖了平面，这与强c-单调性矛盾。因此，$\mathcal{D}_e$ 完全包含于 Λ_e中。此外，存在一个平面的同胚，将$\mathcal{D}_e$ 映射为一个 x-单调绘图；例如，先以 O 为中心相应地旋转平面，然后通过 Λ_e的补集将 O 移至无穷远处。◀

对于以 O 为原点的 c-单调绘图 $\mathcal{D}$ ，设 O 周围圆周顺序中有两个相邻顶点。我们将以 O 为顶点、以从 O 出发经过这两个顶点的射线为边界，且不包含 $\mathcal{D}$ 中其他任何顶点的闭楔形区域称为 D 的间隙。此外，我们将连接两个相邻顶点的边称为间隙边，并将其与相应的间隙关联起来。于是，间隙边 e 对应的楔形区域 Λ_e 要么与其间隙相同，要么等于其间隙补集的闭包。结合引理 3.11，这意味着强 c-单调绘图具有以下核心性质。

▶**推论 3.12**。 设 D 是一个强 c-单调绘图。那么，要么所有间隙边都包含在各自对应的间隙中，要么 D 与某个 x-单调绘图强同构。

证明。 假设存在一条间隙边 e 不包含在其间隙中。那么楔形区域Λ_e （对应于 e ）就是其间隙补集的闭包，因此包含 $\mathcal{D}$中的所有顶点。由此，根据引理 3.11，$\mathcal{D}$ 与某个 x-单调绘图强同构。◀

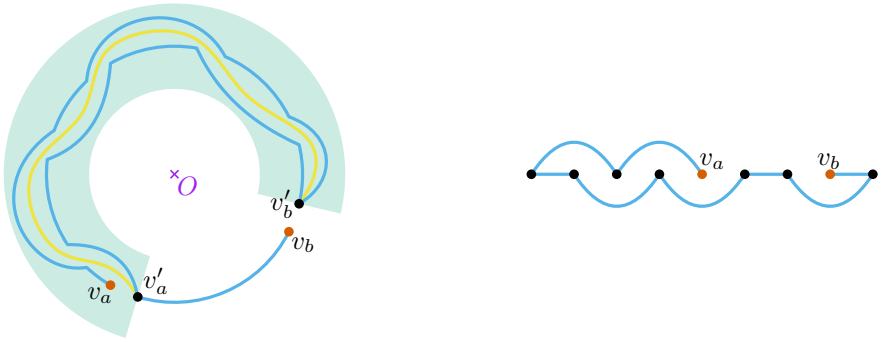
推论 3.12 意味着，对于每个不与某个 x-单调绘图强同构的强 c-单调绘图，其间隙边构成一个无交叉哈密顿圈。

▶**定理 3.13**。 设 D 是 K_n 的一个强 c-单调绘图，且 v_a 和 v_b 是 D 中的两个顶点。那么，D 中存在一条端点为 v_a 和 v_b的无交叉哈密顿路径。

证明。 如果 $\mathcal{D}$ 与某个 x-单调绘图强同构，那么该结论由命题 3.10 得出。因此，根据推论 3.12，我们可以假设所有间隙边都包含在各自的间隙中。

我们区分两种情况。如果 v_a 和 v_b 在 O周围的圆周顺序中相邻，那么由间隙边构成的连接它们的哈密顿路径是无交叉的。否则，令 v'_a 和 v'_b 分别为沿 O 周围的顺时针圆周顺序中紧邻

v_a 和 v_b之前的顶点；示意见图11(a)。进一步，不失一般性，设边 $e = \{v'_a, v'_b\}$ 的楔形区域包含 v_a。于是，根据引理 3.11，由 Λ_e 中的顶点诱导的子绘图 $\mathcal{D}_e$ 与一个 x-单调绘图强同构。因此，根据命题 3.10，$\mathcal{D}_e$中存在一条端点为 v_a 和 v'_a的无交叉哈密顿路径。最后，沿 O 周围的逆时针顺序用间隙边将该路径从 v'_a 延伸至 v_b，即可在$\mathcal{D}$ 中得到一条端点为 v_a 和 v_b的哈密顿路径；根据引理 3.11 及上述假设，该路径无交叉。◀



(a) (b)

图11 (a) 在 K_n的强 c-单调绘图中构造两个给定顶点之间的无交叉哈密顿路径。(b) 扭曲绘图中两个给定顶点之间的一条无交叉哈密顿路径。为提高可读性，边没有按照通常的方式绘制，而是用示意图表示。

根据推论 3.8，这也证明了强 c-单调绘图中的猜想 1.1。

▶ **推论3.14**。 设 D 是一个带有 $n \geq 3$的强 c-单调绘图。则 D 包含一个无交叉哈密顿圈。

我们在此指出，扭曲绘图$\mathcal{T}_n$同样满足猜想1.1和猜想1.2。要构造无交叉哈密顿路径或圈，我们只需确保不使用任何一对嵌套边。图11(b)展示了扭曲绘图中两个给定顶点之间的一条可能的无交叉哈密顿路径，该路径只使用定义顶点顺序中彼此距离至多为二的顶点之间的边。

在图12(a)中，我们给出了一个强 c-单调绘图的例子。根据观察 3.2 和引理 3.5，由于它没有任何完全无交叉边，因此它与任何 x-单调绘图或圆柱绘图都不弱同构。它也不是 g-凸的，因为其中包含没有凸边的三角形。特别地，这意味着推论3.14验证了猜想 1.1 对比此前已知的更多简单绘图成立。

此外，图 12(b)展示了一个圆柱绘图$\mathcal{D}_{10}$，它既不是 g-凸的，也不与任何强 c-单调绘图弱同构。例如，对于其非 g-凸性，由五个深橙色顶点诱导的子绘图与图5(d)中的非直线绘图 K_5 弱同构。要证明$\mathcal{D}_{10}$ 不与任何强 c-单调绘图弱同构，我们需要更复杂的论证。下面给出基本思路。

首先，设想将一个 c-单调绘图映射到球面上，使原点O 与我们记作 P_∞的无穷远点成为相对的两极。于是，就 c-单调性的定义而言，O 与 P_∞的行为完全相同，因此可以互换。接下来，我们考察简单绘图中的子结构，它们限制了 O 和

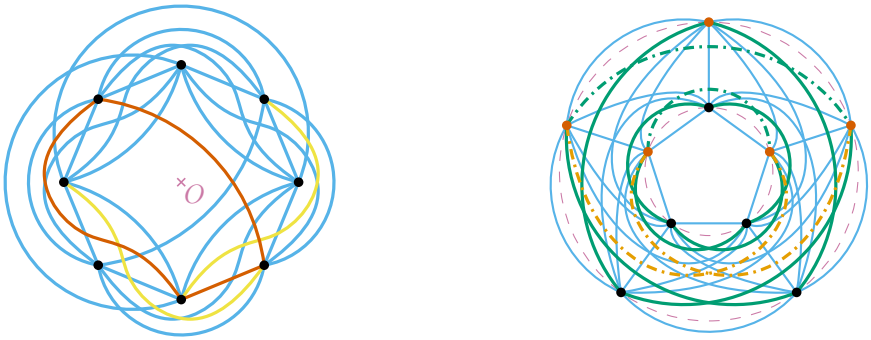


图 12 (a) 一个强 c-单调绘图 K_8，它既不是 x-单调的，也不是柱面的或 g-凸的。深橙色三角形没有凸边，这一点可由两条黄色边证明。(b) 一个柱面绘图 $\mathcal{D}_{10}$ K_{10}，它既不是强 c-单调的，也不是 g-凸的。

P_∞ 的放置方式，使得绘图 $\mathcal{D}$ 能够成为 c-单调绘图。第一种结构称为云[4]，，是一个简单闭曲线$\mathcal{B}$，由$\mathcal{D}$ 中各边相对内部的部分组成；所有相关边的端点都位于$\mathcal{B}$的同一侧，我们称该侧为云的内部，且没有端点位于$\mathcal{B}$上。因此，$\mathcal{B}$ 的两侧以类似于三角形两侧的方式定义。图13(a)展示了一个同样出现在$\mathcal{D}_{10}$中的云。第二种结构称为鱼，其定义方式与云相同，但$\mathcal{D}$的一个顶点位于简单闭曲线$\mathcal{B}$上。图13(a)中构成云的边实际上还构成了五条鱼，其中一条如图13(b)所示。这五条鱼的内部交集称为云的中心单元，在图13(a)中以海绿色阴影表示。对于 c-单调绘图中的鱼或云$\mathcal{B}$，O 或 P_∞ 必定位于其内部，因为$\mathcal{B}$ 至多包含一个顶点，在该顶点处它可以改变围绕 O 的环绕方向，而不会迫使某条边违反 c-单调性。如果 O 和 P_∞ 都位于外部，那么$\mathcal{B}$ 就必须至少改变两次方向。现在注意到，$\mathcal{D}_{10}$实际上包含两个这样的云，它们由图12(b)中的海绿色边构成，且内部互不相交。因此，O 必定位于其中一个云的中心单元内，而P_∞ 必定位于另一个云的中心单元内。最后，我们考察椒盐卷饼，它们是长度为 4 的圈，在平面中将某个区域环绕两次；图 13(c) 中以橙色阴影表示。如果在一个 c- 单调绘图$\mathcal{D}$中，O 位于该区域内，那么椒盐卷饼的某一对边将覆盖平面，从而$\mathcal{D}$ 不是强c-单调的。根据上述论证以及 Gioan [22, 定理 3.10] 中的一个结果，即 K_n 的弱同构画法可以通过三角形翻转相互转换，这对于所有与$\mathcal{D}_{10}$弱同构的 c-单调绘图都成立；图12(b)中的椒盐卷饼以点划线绘制。

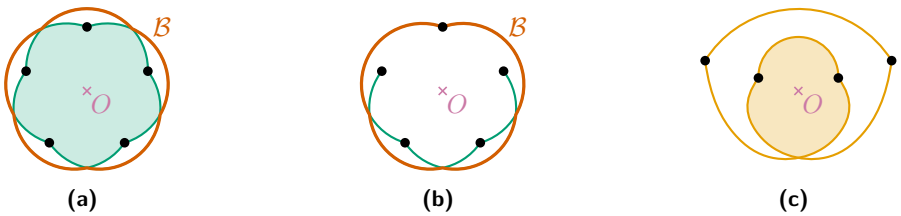


图 13 我们用来证明$\mathcal{D}_{10}$ （来自图 12(b)）与任何强 c-单调绘图都不弱同构的三个结构：(a) 一朵云、(b) 一条鱼和(c) 一个椒盐卷饼。

[4] Arroyo、Bensmail 和 Richter [9] 使用了类似的结构来刻画伪线性绘图。

既然我们现在知道，并非所有圆柱绘图都与强 c-单调绘图弱同构，我们便以验证猜想 1.2 对圆柱绘图成立来结束本节。在证明中，我们采用了与针对强 圆柱绘图的猜想 1.1 的“课堂证明”类似的思路。

▶**定理 3.15.** 设 D 是 K_n 的一个圆柱绘图，且 v_a 和 v_b 是 D 中的两个顶点。那么 D 包含一条端点为 v_a 和 v_b 的无交叉哈密顿路径。

证明. 由引理 3.5 可知，每个圆上的圆周边至多有一条不是完全无交叉的。此外，如果一条圆周边 f 有交叉，那么 f 位于侧面内，并守护其所在圆上的所有顶点。下面分两种情况讨论。

先设 v_a 和 v_b 位于$\mathcal{D}$的不同圆上。以下过程如图 14(a) 所示。我们构造一条无交叉路径$\mathcal{P}_1$，从 v_a 出发，并在可能的情况下按顺时针顺序遍历同一个圆上的所有顶点。如果没有圆周边与其他边交叉，那么沿着这些边行进即可得到所需结果。如果途中遇到一条有交叉的圆周边 f_1，则不取 f_1，而改取边 e_1，到达 v_a 之前的第一个顶点，然后沿逆时针方向继续遍历该圆的其余部分。同样，我们构造一条无交叉路径$\mathcal{P}_2$，从 v_b 出发并遍历第二个圆上的所有顶点；必要时用圆边 e_2 替代有交叉的圆周边 f_2。最后，用一条侧边 e 连接$\mathcal{P}_1$ 和$\mathcal{P}_2$ 中分别不同于 v_a 和 v_b 的端点（除非相应路径仅含一个顶点）。由此得到 D 中的一条哈密顿路径$\mathcal{P}$，其端点为 v_a 和 v_b。此外，$\mathcal{P}$ 是无交叉的，因为 e、e_1 和 e_2 是$\mathcal{P}$ 中唯一可能与其他边交叉的边。然而，如果存在 e_1 和/或 e_2，那么 f_1 和/或 f_2 会将侧面最多分割成三个区域，使得 e 位于其中一个区域 A，而 e_1 和 e_2 则位于 A 的补集的两个不同连通分支中。

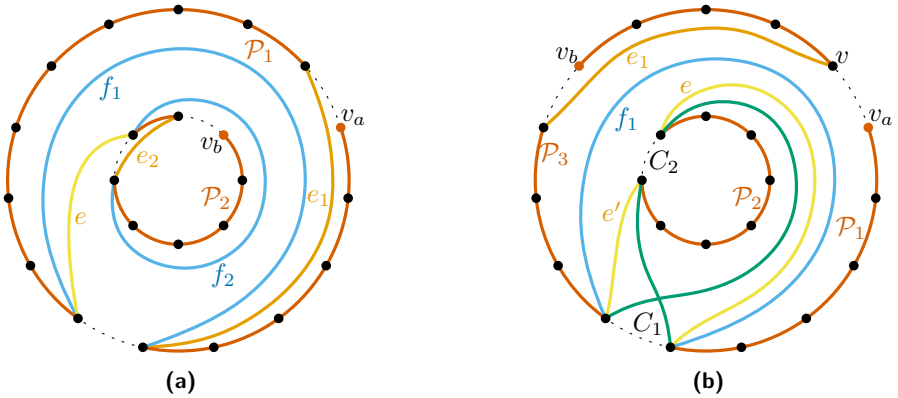


图 14 在圆柱绘图中，当 v_a 和 v_b 位于（**a**）不同的圆或（**b**）同一个圆上时，构造连接给定顶点 v_a 和 v_b的无交叉哈密顿路径。两种情况下均展示了含有交叉圆周边的情形。

设 v_a 和 v_b 位于同一个圆 C_1 上，并假设另一个圆 C_2上至少有一个顶点。示意见图 14(b)。根据引理 3.5，存在一条由完全无交叉的圆周边组成、经过 C_2 的所有顶点的路径 $\mathcal{P}_2$。为连接其余顶点，首先假设 C_1 上的所有圆周边都完全无交叉。于是，设 $\mathcal{P}_1$ 为一条由完全无交叉的圆周边组成的路径，它从 v_a 出发，沿 C_1 上的顺时针顺序经过所有顶点，直到到达 v_b 前的一个顶点。相应地，设$\mathcal{P}_3$ 为一条由完全无交叉的圆周边组成的路径，它从 v_b 出发，沿 C_1 上的顺时针顺序经过所有顶点，直到到达 v_a 前的一个顶点。这样，$\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_3$ 覆盖了 C_1 的所有顶点。在剩下的情形中，若 C_1 上存在一条且仅有一条带交叉的圆周边 f_1，

不失一般性，假设沿着 C_1 的顺时针方向， f_1 位于 v_a 和 v_b 之间。于是，设 P_1 为一条完全无交叉的路径，它从 v_a 出发，沿 C_1 上的顺时针顺序经过所有顶点，直到到达 f_1 的第一个端点。对于路径 P_3, ，我们从v_b 出发，沿 C_1 上的顺时针顺序，经过完全无交叉的圆周边，直到到达 v_a 前的最后一个顶点 v 。如果 v_b 是 f_1的第二个端点，那么 P_1 和 P_3 已覆盖 C_1 的所有顶点。否则，我们用边 e_1 将 P_3 延伸至 v ，并连接到 v_b 前、沿 C_1 的顺时针顺序排列的最后一个顶点；然后从该处沿 C_1 逆时针方向继续，仍然经过完全无交叉的圆周边，直到到达 f_1 的第二个端点。接着，用两条侧边 e 和 e' 将三条路径 P_1, 、P_2, 和 P_3 连接起来，得到一条端点为 v_a 和 v_b 的哈密顿路径 P。特别地，连接 P_1 和 P_3 的端点（分别不同于 v_a 和 v_b ）与 P_2 的端点之间有两种不同的连接方式（除非相应的路径只有一个顶点）。由于任意四元顶点组至多产生一个交叉，因此这两种方式中至少有一种由不交叉的边对 e 和 e' 构成。由此，P 中唯一可能出现的交叉位于连接边 e 和 e'之间，以及非边缘边 e_1（若存在）上。然而，在这种情况下，由于 f_1 将侧面分割为两个区域，使得 e_1 无法进入包含 e 和 e' 的区域，因此 P 再次没有交叉。

最后，如果所有顶点都位于同一个圆上，那么根据观察 2.3，$\mathcal{D}$ 与一个 2页书绘图强同构。由于每个 2页书绘图都与一个 x-单调绘图弱同构，根据命题 3.10，结论成立。证明完毕。◀

同样，根据推论 3.6，这也意味着猜想 1.1 对圆柱绘图成立。

▶ **推论 3.16**。 设 D 是一个具有 $n \geq 3$ 的 K_n 圆柱绘图。那么 D 包含一个无交叉哈密顿圈。

4 简单绘图类之间的关系

本节旨在分析不同简单绘图类之间的包含关系，特别是图 7 中以深橙色标记的那些类。

4.1 X有界绘图

我们首先证明，每个 x有界绘图 $\mathcal{D}$ of K_n 都弱同构于一个x-单调绘图。这也可以由 Balko、Fulek 和 Kynčl [13,引理 4.8] 的一个结果推出。不过，由于他们的证明依赖于该论文中的许多其他结果，难以理解其中的思路，因此我们在此给出一个自成一体的证明。我们证明的主要依据是下面的引理。

▶ **引理 4.1**。 设 $e = \{v_a, v_b\}$ 是一条边， v 是一个顶点，其 x坐标位于 v_a 和v_b 之间，且它们处于 x 有界绘图中。则 e 至少一次穿过经过 v 的垂直线，位置在 v上方或 v下方，但绝不会同时出现在两侧。

证明。回顾第 3.2 节， e 将 v_a 与 v_b 之间的垂直条带分成两侧，一侧位于 e 上方，另一侧位于 e下方。不失一般性地假设， v 位于e 下方，且 v_a 位于 v_b左侧；示意见图 15(a)。此外，我们考虑边$f_1 = \{v_a, v\}$和 $f_2 = \{v, v_b\}$。根据观察 3.9， f_1 和 f_2 都完全位于 e 下方，并且根据 x-有界性， f_1 位于经过 v 的垂直线左侧，而 f_2 位于其右侧。因此， f_1 与 f_2 的并集将 v_a 与 v_b 之间的垂直条带分成两个部分，即上部和下部，使得 e 包含在上部中，而从 v 开始向下延伸的垂直射线包含在下部中。于是， e 只在 v上方穿过经过 v 的垂直线；为了连接 v_a 和 v_b，它至少必须穿过该线一次。◀

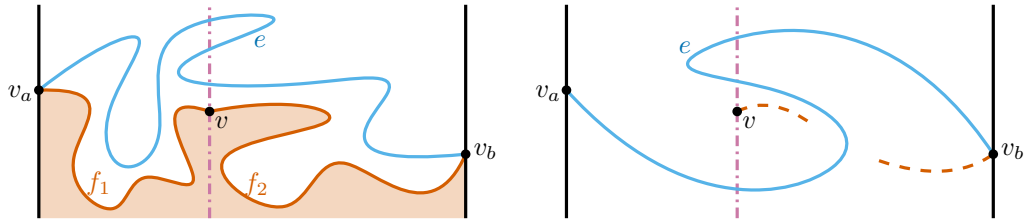


图15 (a) 边 e 只能在一侧（上方或下方）与经过 v 的垂直紫色直线交叉，因为另一侧位于由 f_1 和 f_2围成的橙色区域内。(b) 边 e在两侧都与经过 v 的垂直直线交叉；深橙色虚线边 $f_2 = \{v, v_b\}$ 无法再插入 v 和 v_b 之间的垂直条带内，否则会与其关联边 e交叉。

对于证明而言，绘图中存在边 f_1 和 f_2 至关重要。反过来，如果边 e 在 v 所在垂直线的两侧都与其相交，那么这两条边中至少有一条将无法再以 x-有界的方式添加；见图15(b)。因此，引理 4.1及其后续结果仅适用于 x-有界的完全图绘图。

从这里开始，论证大多具有技术性。我们首先针对 x-有界绘图 $\mathcal{D}$中的每个顶点 v，在 $\mathcal{D}$的边集上引入偏序 $<_v$，该偏序由以下关于 $e <_v f$的四个条件定义：

- e 和 f 与 v关联，且 e 在同一侧（左侧或右 ight),
- e 在 v 下方与经过 v 的垂直直线交叉，且 f 与 v关联；f 在 v 上方
- 与经过 v 的垂直直线交叉，且 e 与 v关联；或者，经过 v 的垂直直
- 线在 v 下方与 e 交叉，并在 v 上方与 f交叉。

对于固定的顶点 v，这四个条件中的任意一个都可能在两条边之间诱导出一种次序。然而，根据引理 4.1，对于每一对边，四个条件中至多有一个成立，因此第四个条件是定义良好的。注意，如果两条边都在 v 的同一侧与穿过 v 的垂直线相交，或者一条边完全位于 v 的左侧而另一条边完全位于 v 的右侧，则 e 与 f 之间不存在关系。此外，可以验证反对称性和传递性均成立。由于没有任何边与其自身相关联，这些条件实际上诱导出了一个偏序。在图16中，我们展示了顶点处边的这种偏序的两个示例。

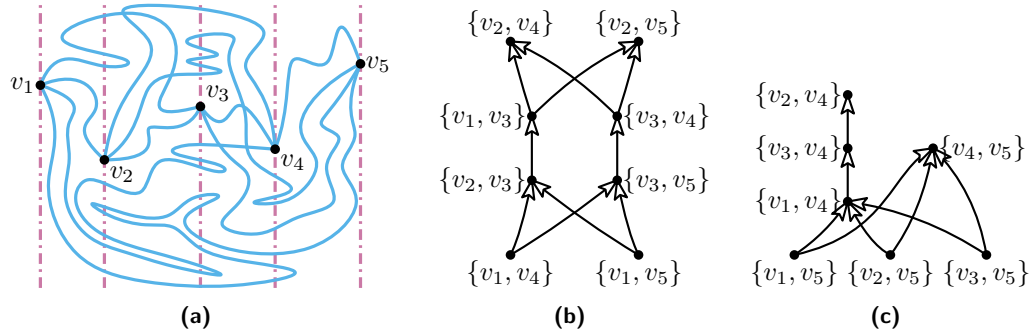


图16 (a) 将扭曲绘图 $\mathcal{T}_5$ 实现为一幅相当曲折的 x有界绘图；紫罗兰色线条标示了各边的边界。(b) 图(a)中绘图的偏序 $<_{v_3}$ 的哈斯图。 (c) 图(a)中绘图的偏序 $<_{v_4}$ 的哈斯图。

接下来，我们讨论如何通过这些偏序确定 x 有界绘图的所有交叉。回顾一下，我们还对顶点从左到右给出了一个全序 $<$。特别地，对于 $v < w$，偏序 $<_v$ 和 $<_w$ 确定了对于两条可比较的边，它们分别以何种从下到上的次序进入和离开 v 与 w 之间的垂直条带。以下观察的示例说明见图17(a)。

▶**观察4.2**。设 D 是 K_n 的 x-有界绘图。若对于 D 中的两条边 e 和 f 以及顶点 $v < w$，不等式 $e <_v f$ 和 $e >_w f$ 成立，则 e 和 f 在 v 与 w之间的垂直条带中存在交叉。

特别地，如果两条边是嵌套的或交错的，那么它们恰好在四个端点中的两个端点处具有可比性。因此，利用观察4.2并扩展观察 3.9，我们可以根据 e 和 f 是嵌套的还是交错的，分类确定两条边 e 和 f 必须以何种模式经过彼此的端点下方或上方才能形成交叉；如果它们是分离的，则无论如何都不会交叉。以下观察中的一些情况见图 17(b)示例。

▶ 观察*4.3*。设 D 是 K_n 的 x-有界绘图，其顶点 v_1、...、v_n 从左到右排列。设 $e = \{v_a, v_b\}$ 和 $f = \{v_c, v_d\}$ 是 D 中的两条边，且 $a \le c$，并约定 $a < b$ 和 $c < d$。则当且仅当以下两个条件之一成立时，e 和 f 相交：e 和 f 是嵌套的，且（$e <_{v_c} f$ 和 $e >_{v_d} f$）或（$e >_{v_c} f$ 和 $e <_{v_d} f$）；或者 e 和 f 是交错的，且（$e <_{v_c} f$ 和 $e >_{v_b} f$）或（$e >_{v_c} f$ 和 $e <_{v_b} f$）。

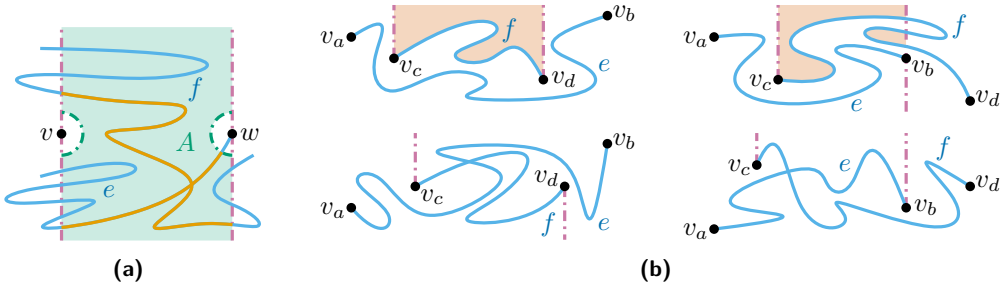


图17 (a) 观察4.2的示意图：e 和 f 的橙色部分（位于最右侧入口点与其右侧第一个出口点之间）必须在海绿色区域 A 内相交（即 v 与 w 之间的垂直条带，但不包括分别以 v 和 w为中心、半径为 ε 的小球）。**(b)** 观察4.3的示意图：左侧是两个嵌套情形，右侧是两个交错情形。在下方的情形中，边根据观察4.2相交。在上方的情形中，边不可能相交，因为 e 若要进入 f 上方的深橙色区域，就必须与 f 至少相交两次。

我们陈述上述观察时采用了 $a \le c$，以涵盖关联边的情形；关联边无论如何都不可能相交。有了这一点，我们就可以证明，每个 x-有界的K_n 绘图都与某个 x-单调绘图弱同构。这与 Fulek、Pelsmajer、Schaefer 和 Štefankovič 的一项结果 [19, 引理2.6]的思路相似：每个 x-有界绘图都可以变为 x-单调绘图，同时不改变任意一对边之间交叉的奇偶性，也不改变任何顶点周围的旋转。不过，他们的结果也适用于非完全图的绘图，但在他们的设定中，绘图不必是简单的。具体而言，即使初始的 x-有界绘图是简单的，应用他们的变换后得到的 x-单调绘图也可能不再简单。

▶**定理 4.4**。设 D 是一个 x-有界的 K_n 绘图，其顶点为 v_1、……、v_n，并按从左到右的顺序排列。则存在一个 x-单调绘图 D'，它与 D 弱同构，并具有相同的顶点顺序。

证明。 我们将构造一个 x-单调绘图 $\mathcal{D}'$，使其具有与 $\mathcal{D}$ 完全相同的交叉边对集合，以及相同的顶点顺序 v_1，……，v_n 并且这些顶点从左到右排列；以下步骤的示例请参见图 18。

我们按顺序将顶点 v_1、……、v_n 放置在一条水平线上。对于边，我们从左到右考察顶点之间的垂直条带，并在每个条带中同时添加所有边，具体如下。我们分别规定边从左侧进入条带以及从右侧离开条带的位置顺序，两种情况下均按从下到上的顺序排列。随后，用线段连接所有相应的入口点和出口点。

具体而言，对于 $i = 1$、……、$n-1$，我们归纳地考察包含顶点 v_i 和 v_{i+1} 的垂直条带。我们可以假设，所有从左侧进入、并在经过 v_i 的垂直线时位于 v_i 下方或上方的边，其入口点均由顶点 v_{i-1} 和 v_i 之间垂直条带中的右侧出口点给出。这些入口点将相应的边从下到上排列成一个线性顺序，我们记作 $<_i^{\leftarrow}$；这就是顶点 v_i 和 v_{i+1} 之间条带左边界上的顺序。对于顶点 v_1 和 v_2 之间的第一个条带，没有这样的边从左侧进入，也就是说，此时的顺序为空。无论如何，接下来仍需将与 v_i 相 incident 的边加入这一顺序。

为此，我们将所有与 v_i 相 incident、且在 $\mathcal{D}$ 中向右离开 v_i 的边，插入到 $<_i^{\leftarrow}$ 中，位置在穿过 v_i 下方垂直线的边与穿过 v_i 上方直线的边之间。此外，我们按照 $<_{v_i}$ 在 $\mathcal{D}$ 中的顺序添加这些边；该顺序与这些边在 v_i 处按逆时针旋转给出的顺序相同。因此，所得顺序 $<_i^{\leftarrow}$ 与 $\mathcal{D}$ 中的偏序 $<_{v_i}$ 一致。

接下来，我们建立一个顺序 $<_i^{\rightarrow}$；即 v_i 和 v_{i+1} 之间条带右边界上的顺序。为此，我们将边分成三组：在 v_{i+1} 下方离开条带的边、终止于 v_{i+1} 的边，以及在 v_{i+1} 上方离开条带的边。根据引理 4.1，这三组的定义是明确的。还要注意，这三组中的边通常不会在 $<_i^{\leftarrow}$ 中连续出现。为得到 $<_i^{\rightarrow}$，我们先处理所有在 v_{i+1} 下方离开条带的边，接着处理所有终止于 v_{i+1} 的边，最后处理所有在 v_{i+1} 上方离开条带的边；在每一组中，都保留由 $<_i^{\leftarrow}$ 给出的边的相对顺序。由此，对于来自这三组中不同组的两条边，

$<_i^{\rightarrow}$ 与偏序 $<_{v_{i+1}}$ 在$\mathcal{D}$中一致。

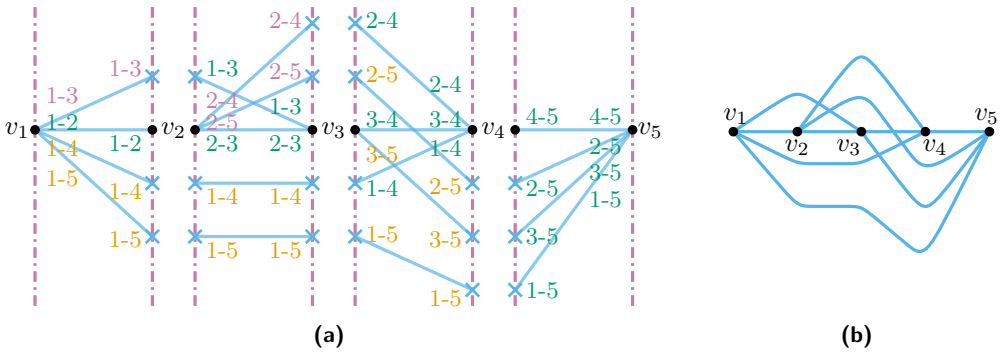


图 18 (a) 将图16(a)中的 x 有界绘图按条带逐一重新绘制为弱同构的 x 单调绘图的四个步骤。注意，顶点 v_2 至 v_4 各出现在两个步骤中。对于边 $\{v_a, v_b\}$，从下到上放置的点对“a-b”分别对应每个条带左边界和右边界上的顺序 $<_i^{\leftarrow}$ 和 $<_i^{\rightarrow}$。点对的颜色表示边被分入的三组，具体见 $<_i^{\rightarrow}$：橙色表示从条带下方离开的边，v_{i+1}；海绿色表示终止于 v_{i+1} 的边；紫罗兰色表示从条带上方离开的边，v_{i+1}。(b) 最终结果，其中各条带间过渡点处的边已平滑处理。

22 迈向完全图简单绘图中的无交叉哈密顿圈

最后，我们按照 $<_i^{\rightarrow}$给出的从下到上的顺序，在经过 v_{i+1}的垂直线上标记各边的出口点，使得每条经过 v_{i+1}下方或上方的边都有各自的出口点，而所有终止于 v_{i+1} 的边都共享 v_{i+1} 的位置作为出口点。对于每条边，我们用一条线段将条带左边界上的相应入口点与条带右边界上的出口点连接起来。于是，分别属于边 e 和 f的两条线段在$\mathcal{D}'$ 中交叉，当且仅当 e 和 f 的顺序在 $<_i^{\leftarrow}$和 $<_i^{\rightarrow}$之间发生变化。不失一般性，设 $e <_i^{\leftarrow} f$ 和 $f <_i^{\rightarrow} e$。接下来，我们通过应用观察4.2证明，$\mathcal{D}'$ 中属于 e 和 f 的线段之间的这次交叉，唯一对应于$\mathcal{D}$中 e 和 f 的一次交叉。

由于条带右边界上的三组中，各组都保留了条带左边界上的相对顺序，因此 e 和 f 必定被放入右边界上的不同组中。因此， $f <_i^{\rightarrow} e$ 意味着 $f <_{v_{i+1}} e$ 也成立。

对于偏序 $<_{v_i}$ ，边 e 和 f 可能不可比较。不过，必定存在一个顶点 $w \le v_i$ ，使得 e 和 f 相对于 $<_w$可比较；至少，对于 e 或 f的起始顶点而言，情况如此。取 $k \le i$ 为极大元，使得 e 和f 相对于 $<_{v_k}$可比较。因此，对于所有 $k < j \le i$，边 e 和 f 都在 v_j的同一侧穿过经过 v_j 的垂直线。由于对于在 v_j上方或下方交叉的边， $<_j^{\leftarrow}$与 $<_{j-1}^{\rightarrow}$ 一致；而对于放置在条带右边界同一组中的边， $<_{j-1}^{\rightarrow}$ 与 $<_{j-1}^{\leftarrow}$ 一致，所以 $e <_i^{\leftarrow} f$ 意味着 $e <_k^{\leftarrow} f$ 成立。因此，由于 e和 f相对于 $<_{v_k}$可比较，且这与 $<_k^{\leftarrow}$一致，我们得到 $e <_{v_k} f$。于是，根据观察4.2，e 和 f 在$\mathcal{D}$中顶点 v_k 与 v_{i+1} 之间的垂直条带内交叉。

此外， e 和 f 相对于 $<_{v_{i+1}}$是可比较的。因此，在$\mathcal{D}'$ 中， e 与 f 之间任何可能出现的进一步交叉，都对应于$\mathcal{D}$ 中 e 与 f 之间位于经过 v_{i+1}的垂直线右侧的一处交叉。这种交叉不可能存在，因为 $\mathcal{D}$ 是简单的。

剩下要证明的是，$\mathcal{D}$ 中的每一处交叉也都存在于$\mathcal{D}'$中。根据观察4.3，我们知道，$\mathcal{D}$ 中的每一处交叉都与涉及的不相邻边 e 和 f 在两个偏序 $<_{v_i}$ 和 $<_{v_j}$ 之间的次序变化一一对应，其中 $i < j$，也就是说，在 e 和 f的两个端点处。这种变化意味着 $<_i^{\leftarrow}$和 $<_j^{\rightarrow}$的次序也相应改变，从而在构造$\mathcal{D}'$时产生一处交叉。◀

在我们的构造中，边在最晚的可能时刻相交，也就是在观察4.2所给区域最右侧的条带中。此外，我们一直隐含地使用引理4.1，因为否则次序 $<_{v_i}$ 就无法明确定义。因此，与引理4.1类似，定理4.4对于非完全图的绘图并不成立。例如，图 19(a)展示了一个 x-有界绘图 $\mathcal{D}_b$ ；如下文所论证的，不存在与之弱同构的x-单调绘图$\mathcal{D}_m$ 。也就是说，不存在一个 x-单调绘图，其交叉边对集合与$\mathcal{D}_b$相同。

反设$\mathcal{D}_m$ 存在。注意，Gioan 定理 [22, 定理 3.10] 并不适用于非完全图的绘图。具体而言，$\mathcal{D}_b$ 与$\mathcal{D}_m$ 甚至可能不具有相同的旋转系统，而且存在于$\mathcal{D}_b$中的云或鱼等结构，可能并不存在于$\mathcal{D}_m$ 中，反之亦然。因此，由于我们尚未找到任何更简单的证明方法，只能检查沿 x轴排列的 6 个顶点的全部 360 种可能次序，即模反射置换，并逐一论证每种次序对于$\mathcal{D}_m$都不可能。下面我们将说明主要步骤和思路；这些内容本身或许也有一定价值，但详细证明留给有兴趣的读者。

我们先通过一些纯组合论证，减少需要详细检查的排列数。与观察 3.2 中一样，排列中的首个顶点和末尾两个顶点都不能诱导出带有交叉的边。例如，排列

$(v_1, v_2, v_3, v_5, v_4, v_6)$ 不可能成立，因为边 $\{v_4, v_6\}$ 必须与边 $\{v_3, v_5\}$ 相交。仅凭这种论证，就已经将可能的排列数减少到 64 个。更一般地，在 x-单调绘图中，两条分离边绝不可能相交。因此，例如，排列 $(v_1, v_2, v_4, v_3, v_5, v_6)$ 不可能成立，因为边 $\{v_2, v_4\}$ 必须与边 $\{v_3, v_5\}$ 相交。这进一步将可能的排列数缩减到 40 个。此外，如果一条边 e 与一个三角形 Δ 相交奇数次，那么 e 的一个端点必定位于 Δ 内部，另一个端点则位于其外部。特别是，在 x-单调排列中， Δ 的三个顶点不可能全都位于 e 的两个端点之间，因为这样一来， e 的两个端点就必定位于 Δ之外。例如，边 $\{v_3, v_6\}$ 与三角形 $\{v_2, v_4, v_5\}$ 相交一次，因此排列 $(v_1, v_3, v_2, v_4, v_5, v_6)$ 不可能成立。这又排除了 19 种情况。

为了排除剩余的 21 种情况，我们使用观察4.3，该观察建立了交叉与边经过彼此端点下方和上方之间的联系。在 x-单调绘图的情况下，该观察对非完全图同样成立；而在 x-有界绘图的情况下，图是完全图只是为了使这些次序$<_v$ 定义良好。作为示例，我们考虑次序 $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$；图19(b)给出了示意图。我们首先添加边 $e = \{v_1, v_6\}$，使得不失一般性地，v_2 位于 e下方。然后，由于 $\{v_2, v_3\}$与 e相交， v_3 必须位于 e 上方； v_4 也必须位于 e上方，因为 $\{v_3, v_4\}$不与 e相交；而 v_5又必须位于 e下方，因为 $\{v_4, v_5\}$与 e相交。此外，边 $\{v_2, v_6\}$经过 v_4下方且不与 $\{v_4, v_5\}$相交，因此它也必须经过 v_5 下方。最后，边 $\{v_1, v_5\}$必须经过 v_2 下方才能与 $\{v_2, v_6\}$相交，但这样一来它就不能再与 $\{v_2, v_3\}$相交；这就产生了矛盾。对其余 20 种情况采用类似的推理，即可完成证明：不存在一个与 D_b弱同构的 x-单调绘图 D_m 。

值得指出的是，从$\{v_3, v_6\}$ 和$\{v_4, v_6\}$ 中移除这些边后，$\mathcal{D}_b$ 便得到一个子绘图$\mathcal{D}'_b$，它存在一个与之弱同构的 x-单调绘图$\mathcal{D}'_m$ 。不过，要得到该绘图，需要改变边$\{v_2, v_4\}$ 和 $\{v_3, v_5\}$ 在其端点处旋转顺序中的位置；见图19(c)。这也进一步说明，对于非完全图的绘图，不同的旋转系统可能产生相同的交叉边对集合。

此外，请注意，在$\mathcal{D}_b$ 中，仅缺少三条边$\{v_1, v_3\}$、$\{v_1, v_4\}$和$\{v_5, v_6\}$；一旦$\{v_1, v_6\}$ 固定，这三条边便无法再以 x-有界的方式添加；回想一下图15(b)。不过，将这三条边全部添加进去，就能轻松得到 K_6 的一个（一般的）简单绘图。

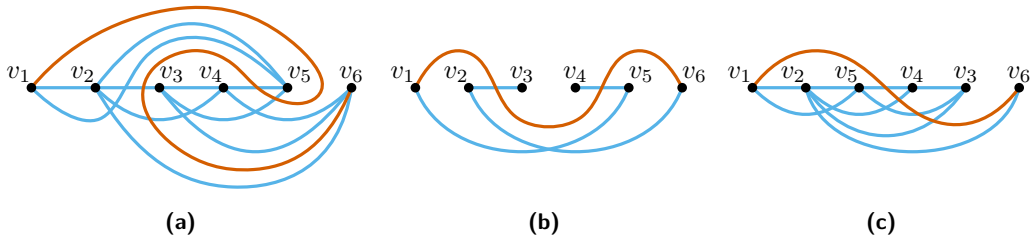


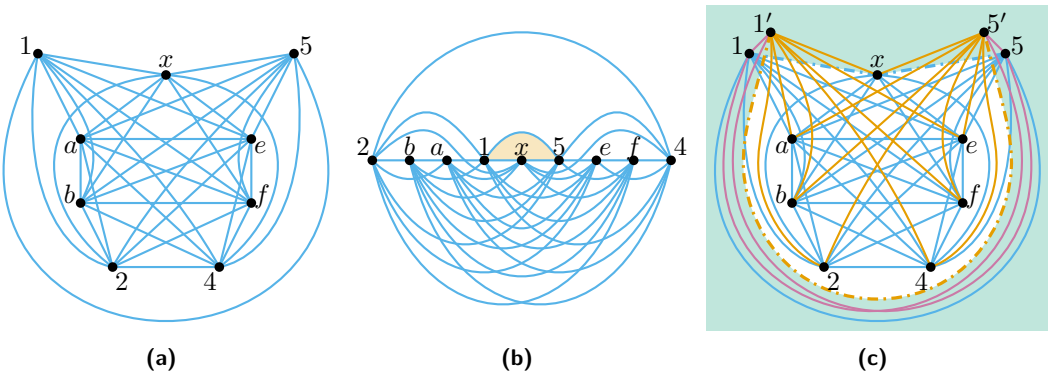
图19 (a) 一个非完全图的 x-有界绘图$\mathcal{D}_b$，它与任何 x-单调绘图都不弱同构；深橙色的边是 x-有界的，但不是 x-单调的。(b) 示意图说明，按照给定的顶点顺序，不存在与$\mathcal{D}_b$弱同构的 x-单调绘图 $\mathcal{D}_m$ 。(c) 一个 x-单调绘图$\mathcal{D}'_m$，它与$\mathcal{D}_b$ 的一个子绘图弱同构，但具有不同的（部分）旋转系统。

我们以一个 K_{11} 的可剥离绘图为例结束第4.1节，该绘图不同构于任何 x-有界绘图。Balko、Fulek 和 Kynčl [13, 定理 4.9] 中已经声称了一个类似的结果：对于一个可剥离绘图 $\mathcal{D}_9$，不存在 K_9的 x-单调绘图与其弱同构

于 D_9 且具有与 D_9相同的无界胞腔。特别地，在图20(b)中，我们给出了一个与 D_9弱同构的 x- 单调绘图；对应于 D_9 原始无界胞腔的胞腔以橙色阴影表示。然而，我们可以通过增加两个顶点扩展他们的例子，得到一个确实具有所声称性质的简单绘图 D_{11} ；见图20(c)。具体而言，我们在原始无界胞腔内复制顶点1和5，这与图 9中的构造类似。显然，D_{11} 仍然是可剥离的。此外，从 D_{11}, 中移除顶点1和5后，我们得到一个与 D_9弱同构的绘图 D'_9 。因此，根据 Balko、Fulek 和 Kynčl 的结果，不存在任何 x-单调绘图与 D_{11} 弱同构，且其无界胞腔位于 D_9 和 D'_9的无界胞腔并集内；该区域在图20(c)中以海绿色阴影表示。另一方面，该并集恰好是由边 $\{1, x\}$、$\{x, 5\}$ 和 $\{1', 5'\}$ 的部分所形成的鱼的内部；图20(c)中以点划线表示。与 c-单调绘图类似，任何 x-单调绘图的无界面都必须位于每条鱼的内部。综合这两个论证，我们得出结论：不存在与 D_{11}弱同构的 x-单调绘图，或者根据定理 4.4，不存在与 D_{11}弱同构的 x-有界绘图。

关于上述推理再补充两点：首先，在图20(b)所示的 x-单调绘图中，所述的顶点复制会破坏 x-单调性，因为例如，我们必须将 $1'$ 放在橙色胞腔内部，并让边 $\{1', 5\}$ 绕过顶点 1。其次，我们可以在 $\mathcal{D}_{11}$ 上重复复制过程，从而得到任意大的可壳化绘图，且它们都不与任何 x-有界绘图弱同构。

▶ **观察4.5**。对于所有 $n \geq 11$ ，都存在一些 K_n 的可壳化绘图，它们不与任何 x-有界绘图弱同构。



(a) (b) (c)

图20 （**a**）Balko、Fulek 和 Kynčl [13, 图 21] 中的原始可壳化绘图$\mathcal{D}_9$ ，顶点标记与他们论文中的一致。（**b**）与$\mathcal{D}_9$弱同构的 x-单调绘图。（**c**）扩展后的可壳化绘图$\mathcal{D}_{11}$, ，它不再与任何 x-有界绘图弱同构。新增的边中，属于$\mathcal{D}'_9$ 的为橙色，其余为紫色。

4.2 圆柱绘图与 c-单调绘图

最后，我们将注意力转向不同类型的圆柱绘图。具体而言，我们将证明，每个圆柱绘图都与某个 c-单调绘图弱同构，并且每个强柱面绘图都与某个强 c-单调绘图弱同构。需要强调的是，本节中的所有结果都适用于任意图的绘图，而不仅仅是完全图。我们的第一步是证明：我们可以重新绘制一个圆柱绘图 $\mathcal{D}$，且不改变任何交叉性质，使得相对于两条圆的公共中心 O ，所有边都是 c-单调的。为此，我们定义一个类似于复分析中

闭曲线的绕数的概念，即将边 e 的连续绕数 ω_e 定义为： e 沿逆时针方向O 完整绕行的总次数（取实数）。为确定 ω_e的符号，我们将$\mathcal{D}$ 的所有侧边从外圆定向到内圆，并为所有圆边赋予任意但固定的方向。 ω_e 的负值意味着， e 沿顺时针方向绕 O运行。为确保对所有边 e而言， ω_e 都有明确定义，我们可以不失一般性地假设，没有任何内圆边实际经过 O。我们可以同时为$\mathcal{D}$中的每条边 e 给出 ω_e的一个界。

▶**引理 4.6**。 设 D 是一个圆柱绘图。则存在一个圆柱绘图 D'，它与 D 强同构，并且对 D'中的每条边 e 都有 $|\omega_e| < 1$ 。

证明。 注意， $|\omega_e| < 1$ 对每条圆边 e 总是成立， e 否则它就会与自身相交。进一步设 e_0 和 e_1 是满足以下条件的两条侧边： $\omega_{e_0} = \min_{e\in E}(\omega_e)$以及 $\omega_{e_1} = \max_{e\in E}(\omega_e)$，其中 E 是$\mathcal{D}$中所有侧边的集合。注意，$\omega_{e_1} - \omega_{e_0} < 2$ 否则 e_0 和 e_1 将不得不至少相互交叉两次。

因此，存在一个平面的同胚，通过适当旋转外圆，将 $\mathcal{D}$ 变换为一个圆柱绘图 $\mathcal{D}'$ ，其中对于 $\mathcal{D}'$中的每条边 e 都有 $|\omega_e| < 1$ 。◀

换句话说，我们可以变换每个圆柱绘图$\mathcal{D}$ ，使得$\mathcal{D}$的每条边 e 绕 O一周所经过的距离都小于一圈；这是 e 相对于 O为 c-单调所必需的条件。要进一步将$\mathcal{D}$ 变换为 c-单调绘图，基本上只需“拉伸”它的所有边。

▶**命题 4.7.** 设 D 为一个圆柱绘图。那么存在一个 c-单调绘图 D'，它与 D 弱同构。

证明。 我们将论证，$\mathcal{D}$ 中的所有交叉在组合意义上都由两个圆上的顶点位置、边位于内面、侧面还是外面这一选择，以及边绕 O 的方向决定。

根据观察 2.3，由两个圆分别诱导的子绘图与 2页书绘图弱同构。因此，同一个圆上的两条圆边之间的交叉由观察 2.1 决定。此外，圆边与侧边之间的交叉由观察 3.3 决定。该观察还意味着，来自不同圆的两条圆边之间不会发生交叉。最后，两条侧边 e 和f 不交叉当且仅当 $0 \le \delta + \omega_f - \omega_e \le 1$，其中 δ 是从 e 的端点到 f 的端点沿逆时针方向测得的外圆弧长所占的比例。

由于根据引理 4.6，我们还可以假设对于$\mathcal{D}$中的每条边 e， $|\omega_e| < 1$ 都成立，因此我们可以轻松地重新绘制所有边，使其相对于 O 呈 c-单调，同时不改变任何边 e 的 ω_e 值、其端点的位置，或 e所在的面。根据上述论证，这样便得到一个 c-单调绘图$\mathcal{D}'$ ，它与$\mathcal{D}$弱同构。◀

为了证明每个强圆柱绘图 $\mathcal{D}$ 都与一个强 c-单调绘图弱同构，我们首先关注侧边，并根据命题 4.7 假设 $\mathcal{D}$ 是 c-单调的。特别地，我们也将 c-单调绘图中的楔形区域和覆盖平面这两个概念用于$\mathcal{D}$。注意，两条相邻侧边绝不可能覆盖平面，否则它们就必须彼此相交。然而，两条不相邻侧边 e 和 f 可能覆盖平面。在这种情况下， ω_e 和 ω_f 的符号必须相同，否则 e 和 f 就会彼此相交两次。我们将这样一对符号为负的侧边称为顺时针双螺旋，将符号为正的一对称为逆时针双螺旋；例如见图 21(a)。

▶**引理 4.8**。 设 D 是一个圆柱绘图。那么存在另一个圆柱绘图 D'，它与 D 弱同构，且不含双螺旋。

证明。 我们将通过在内圆上的顶点周围移动，一次移除一个双螺旋；这一过程借助平面的一个同胚完成，且不改变这些顶点在圆上的顺序。根据命题 4.7 及其证明，我们可以假设初始绘图 $\mathcal{D}$ 是 c-单调的，并且在移动一些顶点后，可以使过程中得到的每个绘图再次成为 c-单调的，同时不改变顶点的位置。

令 $e = \{v_a, v_b\}$ 和 $f = \{v_c, v_d\}$ 构成一个顺时针双螺旋，其中 v_a 和 v_c 位于外圆上；图示见图 21(b)。进一步设 v'_a 是外圆上沿逆时针方向与 v_a 相邻的顶点。接着，我们沿内圆逆时针移动顶点 v_d，使其移出楔形区域 Λ_e，进入 v_a 和 v'_a之间的楔形区域 A。这样便移除了由 e 和 f构成的双螺旋。为保持顶点的圆周顺序，从而保持弱同构，我们还沿内圆逆时针方向移动位于 v_d 原位置与新位置之间的每个顶点，将其移入楔形区域 A。

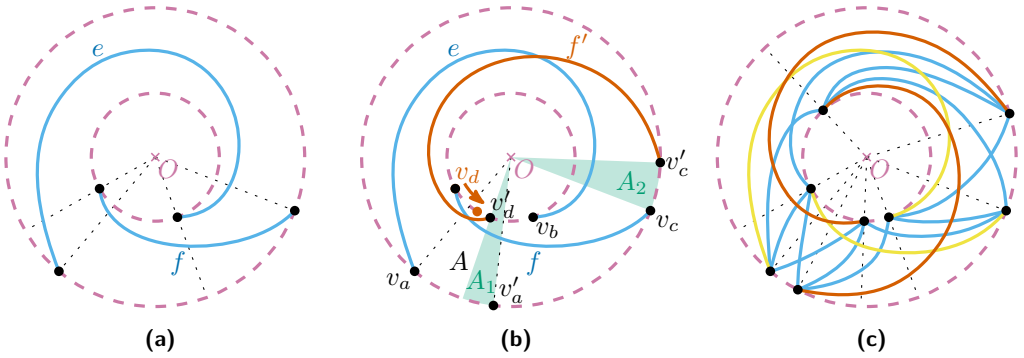


图 21 **(a)** 形成顺时针双螺旋的两条边 e 和 f。**(b)** 移动顶点 v_d以及可能的其他顶点 v'_d，以消除由 e 和 f形成的顺时针双螺旋。这不会产生任何新的逆时针双螺旋。**(c)** 圆柱绘图中 K_8的一条顺时针（黄色）双螺旋和一条逆时针（深橙色）双螺旋；为方便起见，省略圆边。

还需证明这一过程中不会产生新的双螺旋。由于我们只沿逆时针方向移动内圆上的顶点，因此这一过程中不会产生新的顺时针双螺旋。此外，每个新的逆时针双螺旋都必须包含一个被移动的顶点 v'_d。因此，设 $f' = \{v'_c, v'_d\}$ 是一条边，在 v'_d移动后与 $\omega_{f'} > 0$ 相连。根据简单性，边 f, v'_c 必须位于 v_c 和 v_a之间（不包括 v_c），即外圆上沿逆时针方向位于两者之间。因此，存在楔形区域 A_1，位于 v'_d 和 v'_a 之间，以及楔形区域 A_2，位于 v_c 和 v'_c 之间；它们都位于 $\Lambda_{f'}$ 的闭补集中，且内部不相交。特别地，任何侧边 e' 若沿逆时针方向穿过 A_1 并且 $\omega_{e'} > 0$，从而可能与 f'形成双螺旋，则必须在外圆上于 v'_c 之后、但最迟在顶点 v_a 处开始；同时，为了与边 e保持简单性，必须在内圆上的顶点 v_b 之前结束。由于 v_c 位于 Λ_e 中，因此沿 O周围的逆时针方向位于 v_b 和 v'_c 之间，e' 无法穿过 A_2。因此，f' 不可能成为任何逆时针双螺旋的一部分。

我们以类似的方式消除逆时针双螺旋，同时沿顺时针方向移动内圆上的顶点。在这些步骤中的每一步，我们都会使双螺旋的总数至少减少一个。因此，经过有限步后，我们得到一个不含双螺旋的弱同构圆柱图$\mathcal{D}'$。

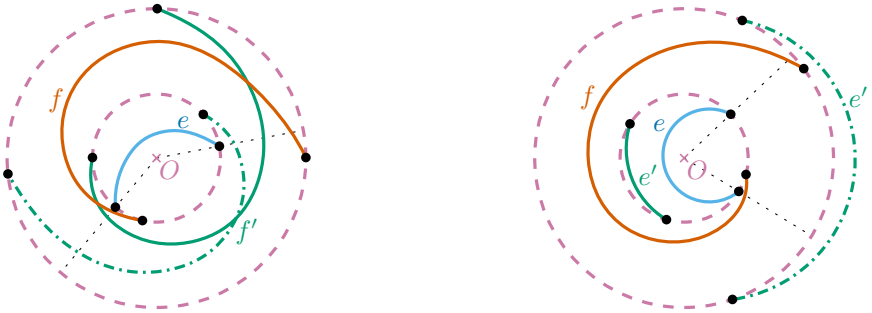
◀

实际上，我们本可以用强同构来表述引理 4.8。采用弱同构，只是因为我们在证明过程中始终保持绘图为 c-单调；这样做是为了方便，因为它能让双螺旋的定义更加简洁。还要指出的是，即使是一个圆柱绘图 K_n，也可能同时包含顺时针双螺旋和逆时针双螺旋；见图21(c)。

回顾一下本文最后证明所需的内容：根据定义，在强圆柱绘图中，所有圆边都必须位于内面或外面。此外，如果一条圆边 e覆盖另一条圆边 e'（位于同一个圆或另一个圆上），且 e' 的两个端点都位于 Λ_e中，也就是说， e 和 e' 合在一起有可能覆盖平面（具体取决于$\Lambda_{e'}$），我们就称前一条圆边覆盖后一条圆边。

▶ **定理4.9**。 设 D 是一个强圆柱绘图。那么，存在一个强 c-单调绘图 D'，它与 D 弱同构。

证明。根据命题 4.7 和引理 4.8，我们不妨假设 $\mathcal{D}$ 是 c-单调的，且不含双螺旋。因此，侧边的子绘图 $\mathcal{D}_\ell$ 已经是强c-单调的。我们从头开始，适当地将所有圆边添加到 $\mathcal{D}'$ 中，从而构造出 $\mathcal{D}_\ell$ 。由于每条圆边所在的面由强柱面性质确定，且顶点位置由$\mathcal{D}_\ell$确定，因此所有交叉的奇偶性也都已确定。剩下的任务是，对于每条圆边 Λ_e，通过选择沿 O的顺时针或逆时针方向来确定 e，同时不违反强c-单调性或 $\mathcal{D}'$的简单性。由于两条圆边若相互交叉两次，也意味着它们合在一起覆盖平面，因此我们只需关注强c-单调性。



■ **图22 (a)** 侧边 f 排除了一种适用于 e的方向。另一条侧边 f' 无法排除适用于 e 的另一种方向，否则 f 和 f' 要么彼此相交两次（实线 f'），要么形成双螺旋（点划线 f'）。**(b)** 侧边 f 也排除了所有被 e覆盖的圆边 e' 的一种方向；点划线所示的 e' 是不可能的。

我们首先考察 Λ_e 和 Λ_f之间可能的相互作用：对于圆边 e 和侧边 f，一旦确定了 e 的两种方向之一，也就是确定了 e 与 f 是否可能覆盖平面。假设存在侧边 f 和 f'，使得选择 e 的一种方向会导致 e 和 f 覆盖平面，而选择另一种方向则会导致 e 和 f'覆盖平面。那么 f 和 f' 要么彼此相交两次，要么形成双螺旋；无论哪种情况都会导致矛盾。示例见图22(a)。因此，对于所有侧边而言，边 e 的两种潜在方向中至少有一种可用。

此外，如果侧边 f排除了 e 的一个方向，那么对于所有被 e覆盖的圆边，一旦 e 沿其唯一可用方向绘出， f 也会排除相应的方向；示例见图22(b)。也就是说，两条各自仅有一个可用方向的圆边 e 和 e' 不会覆盖平面。

最后，如果有圆边的两个方向都可用，我们就选择一条以 O 为起点的射线 r，并为所有剩余的这些边选择不会与 r相交的方向。因此，这些边中任意两条都不能覆盖平面。此外，设 e 是一条因侧边 f 而被迫沿某一方向绘制的圆边，设 e' 是一条两个方向都可用的圆边。那么 e 和 e' 不能覆盖平面，否则 f 和 e' 也会覆盖平面，这与 e' 的两个方向都可用相矛盾。因此，这就构造出了一个强 c-单调绘图 $\mathcal{D}'$，它与 $\mathcal{D}$弱同构。◀

定理4.9的证明依赖于初始绘图 $\mathcal{D}$ 是强 柱面的这一点，因为在侧面绘制圆边时，其绕 O 的方向从一开始就已固定。特别是，我们在图 12(b) 的椒盐卷饼结构中利用了这一点；在该结构中，我们构造了一个并非强 c-单调的圆柱绘图。

5 结论

本文将 Rafla 的简单绘图中哈密顿圈猜想（猜想 1.1）推广为一个关于给定端点对之间的哈密顿路径的猜想（猜想 1.2）。我们概述了已知的简单绘图子类（第2节），并分析了它们之间的包含关系（第 4 节）。此外，我们证明了若干绘制类别满足这一新猜想，尤其是强 c-单调绘图和圆柱绘图（第 3.2 节）。

下一个目标是将我们的结果推广到更多类别的简单绘图，尤其是具有偶数个顶点的广义扭曲绘图。在此基础上，我们进一步着眼于 c-单调绘图和交叉数极大的绘图。前者之所以受到关注，是因为它们具有我们在第2节定义之后提到的特征。后者之所以受到关注，是因为它们可能只包含少量平面子绘图。

另一个耐人寻味的问题是，弄清楚为什么猜想 1.1 对一般的简单绘图应当成立，而对星形简单绘制却不再成立，其根本原因是什么。此外，了解猜想1.1和猜想1.2之间的关系（定理 3.7）是否可以针对单个绘图而非整个绘图集合进行更具体的表述，以及猜想 1.1 是否也能推出猜想 1.2，也将很有意义。不过，我们要指出的是，即使猜想 1.2 在猜想 1.1 不推出猜想 1.2 的意义下严格更强，它也有可能更容易证明。反过来，如果猜想 1.2 最终被证明是错误的，这或许也能为拉夫拉最初的猜想提供一些启示。

最后，关于简单绘图各类别之间的关系，我们想知道，以组合方式定义的 g-凸绘图类与诸如 c-单调绘图这类以拓扑方式定义的类别之间是否存在包含关系。

参考文献

1 Bernardo M. Ábrego、Oswin Aichholzer、Silvia Fernández-Merchant、Thomas Hackl、Jürgen Pammer、Alexander Pilz、Pedro Ramos、Gelasio Salazar 和 Birgit Vogtenhuber。《小型完全图的所有优良绘图》。载于 第*31*届欧洲计算几何研讨会论文集（*EuroCG 2015*），第57–60页，2015年。网址： http://eurocg15.fri.uni-lj.si/pub/eurocg15-book-of-abstracts.pdf。2 Bernardo M. Ábrego、Oswin Aichholzer、Silvia Fernández-Merchant、Dan McQuillan、Bojan Mohar、Petra Mutzel、Pedro Ramos、R. Bruce Richter 和 Birgit Vogtenhuber。《 K_n的双壳可绘图》。 *SIAM* 离散数学杂志，32(4)：2482–2492，2018年。 doi:10.1137/17M1147974。

3 Bernardo M. Ábrego、Oswin Aichholzer、Silvia Fernández-Merchant、Pedro Ramos 和 Gelasio Salazar。 K_n的双页交叉数。《离散与计算几何》，49(4)：747–777，2013年。 doi:10.1007/s00454-013-9514-0。4 Bernardo M. Ábrego、Oswin Aichholzer、Silvia Fernández-Merchant、Pedro Ramos 和 Gelasio Salazar。可剥离绘图与 K_n的圆柱交叉数。《离散与计算几何》，52(4)：743–753，2014年。 doi:10.1007/s00454-014-9635-0。5 Oswin Aichholzer、Florian Ebenführer、Irene Parada、Alexander Pilz 和 Birgit Vogtenhuber。关于完全图的半简单绘图。载于第十七届西班牙计算几何会议论文集（EGC 2017），第25–28页，2017年。网址： https://dmat.ua.es/en/egc17/documentos/book-of-abstracts.pdf。6 Oswin Aichholzer、Alfredo García、Javier Tejel、Birgit Vogtenhuber 和 Alexandra Weinberger。在完全图的简单绘图中寻找平面结构的扭曲方法。载于第38届国际计算几何研讨会论文集（SoCG 2022），第5:1–5:18页，2022年。 doi:10.4230/LIPIcs.SoCG.2022.5。7 Oswin Aichholzer、Alfredo García、Javier Tejel、Birgit Vogtenhuber 和 Alexandra Weinberger。通过五元组刻画广义扭曲绘图的旋转系统。载于第二十届西班牙计算几何会议论文集（EGC 2023），第71页，2023年。网址：https://egc23.web.uah.es/wp-content/uploads/2023/06/EGC23_paper_18.pdf。8 Oswin Aichholzer、Thomas Hackl、Alexander Pilz、Gelasio Salazar 和 Birgit Vogtenhuber。判定完全图优良绘图的单调性。载于第十六届西班牙计算几何会议论文集（EGC 2015），第33–36页，2015年。网址： https://dccg.upc.edu/egc15/en/wp-content/uploads/2013/10/AbstractsXVIEGC.pdf。9 Alan Arroyo、Julien Bensmail 和 R. Bruce Richter。将图的绘图扩展为伪直线排列。《计算几何杂志》，12(2)：3–24，2021年。 doi:10.20382/jocg.v12i2a2。10 Alan Arroyo、Dan McQuillan、R. Bruce Richter 和 Gelasio Salazar。Levi 引理、 K_n的伪线性绘图与空三角形。《图论杂志》，87(4)：443–459，2018年。doi:10.1002/jgt.22167。11 Alan Arroyo、Dan McQuillan、R. Bruce Richter 和 Gelasio Salazar。完全图的凸绘图：拓扑学与几何学的交汇。《当代数学艺术》，22(3)：27，2022年。doi:10.26493/1855-3974.2134.ac9。12 Alan Arroyo、R. Bruce Richter 和 Matthew Sunohara。将完全图的绘图扩展为伪圆排列。SIAM 离散数学杂志，35(2)：1050–1076，2021年。 doi:10.1137/20M1313234。13 Martin Balko、Radoslav Fulek 和 Jan Kynčl。 K_n的单调绘图的交叉数与组合刻画。《离散与计算几何》，53：107–143，2015年。 doi:10.1007/s00454-014-9644-z。14 János Barát、András Gyárfás 和 Géza Tóth。有序完全图中的单色生成树与匹配，2022年。 arXiv:2210.10135。15 Helena Bergold、Stefan Felsner、Meghana M. Reddy 和 Manfred Scheucher。使用 SAT 研究简单绘图中的平面哈密顿子结构。载于第39届欧洲计算几何研讨会论文集（EuroCG 2023），第2:1–2:7页，2023年。网址： https://dccg.upc.edu/eurocg23/wp-content/uploads/2023/03/Session-5B-Talk-1.pdf, arXiv:2305.09432v1。16 Frank Bernhart 和 Paul C. Kainen。图的书厚度。《组合理论杂志》B辑，27(3)：320–331，1979年。 doi:10.1016/0095-8956(79)90021-2。17 Florian Ebenführer。旋转系统的可实现性。硕士论文，格拉茨工业大学，奥地利，2017年。网址： https://diglib.tugraz.at/realizability-of-rotation-systems-2017。18 Radoslav Fulek。通过圆柱绘图估算简单拓扑图中的不相交边数量。SIAM 离散数学杂志，28(1)：116–121，2014年。 doi:10.1137/130925554。

30 朝着简单完全图绘图中无交叉哈密顿圈的方向

19 Radoslav Fulek、Michael J. Pelsmajer、Marcus Schaefer 和 Daniel Štefankovič。Hanani–Tutte 定理、单调绘图与层平面性。载于《几何图论三十篇论文》，第263–287页。Springer，2013年。 doi:10.1007/978-1-4614-0110-0_14。20 Alfredo García、Alexander Pilz 和 Javier Tejel。关于完全拓扑绘图中的平面子图。《当代数学艺术》，20(1):69–87，2021年。 doi:10.26493/1855-3974.2226.e93。21 Alfredo García、Javier Tejel、Birgit Vogtenhuber 和 Alexandra Weinberger。 K_n的广义扭曲绘图中的空三角形。载于第30届国际图绘制与网络可视化研讨会（GD 2022）论文集，第40–48页，2023年。 doi:10.1007/978-3-031-22203-0_4。22 Emeric Gioan。完全图绘图在三角形变异下的分类。《离散与计算几何》，67(4):985–1022，2022年。 doi:10.1007/s00454-021-00339-8。23 Richard K. Guy、Tom Jenkyns 和 Jonathan Schaer。完全图的环面交叉数。《组合理论杂志》，4(4):376–390，1968年。 doi:10.1016/S0021-9800(68)80063-8。24 Frank Harary 和 Anthony Hill。关于完全图中的交叉数。《爱丁堡数学学会学报》，13(4):333–338，1963年。 doi:10.1017/S0013091500025645。25 Heiko Harborth。完全图绘图中的空三角形。《离散数学》，191(1-3):109–111，1998年。 doi:10.1016/S0012-365X(98)00098-3。26 Heiko Harborth 和 Ingrid Mengersen。完全图绘图中的无交叉边。《组合理论杂志》B辑，17(3):299–311，1974年。 doi:10.1016/0095-8956(74)90035-5。27 Heiko Harborth 和 Ingrid Mengersen。具有最大交叉数的完全图绘图。载于第23届美国东南部组合学、图论与计算国际会议论文集，第225–228页，1992年。28 Jan Kynčl。简单完全拓扑图的计数。《欧洲组合学杂志》，30(7):1676–1685，2009年。 doi:10.1016/j.ejc.2009.03.005。29 Jan Kynčl 和 Pavel Valtr。关于简单完全拓扑图中与少数其他边交叉的边。《离散数学》，309(7):1917–1923，2009年。 doi:10.1016/j.disc.2008.03.005。30 Petra Mutzel 和 Lutz Oettershagen。完全图序列可壳化绘图的交叉数。载于第29届组合算法国际研讨会（IWOCA 2018）论文集，第273–284页，2018年。 doi:10.1007/978-3-319-94667-2_23。31 János Pach、József Solymosi 和 Géza Tóth。完全拓扑图中的不可避免构型。《离散与计算几何》，30(2):311–320，2003年。 doi:10.1007/s00454-003-0012-9。32 Nabil H. Rafla。完全图 K_n的优良绘图 D_n。博士论文，麦吉尔大学，蒙特利尔，1988年。网址： https://escholarship.mcgill.ca/concern/theses/x346d4920。33 Andres J. Ruiz-Vargas。拓扑图中的多条不相交边。《计算几何》，62:1–13，2017年。 doi:10.1016/j.comgeo.2016.11.003。34 Andrew Suk 和 Ji Zeng。简单完全拓扑图中的不可避免模式。载于第30届国际图绘制与网络可视化研讨会（GD 2022）论文集，第3–15页，2023年。 doi:10.1007/978-3-031-22203-0_1。35 Bang Wong。色盲。《自然·方法》，8(6):441，2011年。网址： https://www.nature.com/articles/nmeth.1618.pdf。