arXiv:2303.15641v1 [math.QA] 27 Mar 2023

由二阶自同构作用于与非退化偶格相关的顶点代数的不动点子代数的不可约弱模（第 2 部分）

Kenichiro Tanabe*

东京城市大学文理学院 〒158-8557 日本东京世田谷区玉堤 1-28-1 ktanabe@tcu.ac.jp

摘要

设 V_L 是与非退化偶格 L 相关的顶点代数，θ 是由 L 的 -1 对称性诱导的 V_L 的自同构，V_L^+ 是 V_L 在 θ 作用下的不动点子代数。在这一系列论文中，我们对不可约弱 V_L^+ -模进行分类，并证明任意不可约弱 V_L^+ -模都同构于某个不可约弱 V_L-模的弱子模，或同构于某个不可约 θ-扭曲 V_L-模的子模。设 $M(1)^+$ 是海森堡顶点算子代数 $M(1)$ 在 θ 作用下的不动点子代数。在本文（第 2 部分）中，我们证明任意非零弱 V_L^+ -模都包含一个不可约 $M(1)^+$-子模，并计算 $M(1)^+$ 的扩张群。

数学主题分类. 17B69 关键词. 顶点代数，格，弱模。

目录

1 引言 2 2 预备知识 4 3 弱 V_L^+ -模中 $M(1)^+$ 的朱代数的模：一般情形 17 4 $M(1)^+$ 的扩张群 20 附录 A2 32 记号 41

*本研究部分受资助于 -in-科学研究资助项目（编号：21K03172），日本学术振兴会。

1 引言

设 L 是一个有限秩非退化偶格，d 是与 L 相关联的顶点代数，θ 是由 L 的 -1 对称性诱导的 V_L 的自同构，而 V_L^+ 是 V_L 在 θ 作用下的不动点子代数。不动点子代数在顶点代数的研究中发挥着重要作用。例如，月光顶点代数 $V^\natural$ 构造为 [12] 中 V_Λ^+ 与某个不可约 V_Λ^+ -模的直和，其中 Λ 是 Leech 格。月光猜想 [7], 揭示了怪兽群与模函数之间出乎意料的联系，由 Borcherds 在 [6] 中借助 $V^\natural$ 得以证明。本系列论文旨在分类不可约弱 V_L^+ - 模（定义见定义 2.1 ）。由于原论文 [18]，篇幅较长，我们将其分为系列论文的三部分发表。本文为第二部分，是第 1 [19] 部分的续篇。下面我将再次陈述主要结果，该结果见 [19, 定理 1.1]:

定理 1.1. 设 L 是一个有限秩非退化偶格，其双线性形式为 $\langle\ ,\ \rangle$。以下是不可约弱模 V_L^+ -模的等价类的一组完备代表:

(1) $V_{\lambda+L}^\pm$, $\lambda+L\in L^\perp/L$，其中 $2\lambda\in L$。 (2) $V_{\lambda+L}\cong V_{-\lambda+L}$, $\lambda+L\in L^\perp/L$，其中 $2\lambda\notin L$。 (3) V^{T_χ}, $_L{}^\pm$，其中 $L/P\hat{}$ 的任意不可约模 T_χ 的中心特征为 χ。

在定理中，$L^\perp$ 是 L, $V_{\lambda+L}^\pm=\{u\in V_{\lambda+L}\mid\theta$ 的对偶格（u） $=\pm u\}$，对于带有 $2\lambda\in L$, L 的 $\hat{}$，L 是 L 由阶为 2 的循环群 $\langle\kappa\rangle$ 作典范中心扩张所得，其交换子映射为 $c(\alpha,\beta)=\kappa^{\langle\alpha,\beta\rangle}$，对于 $\alpha,\beta\in L$, $P=\{\theta$（a）$a^{-1}\mid a\in\hat{}L\}$，$V_L^{T_\chi}$ 是一个不可约 θ-扭曲 V_L-模，而 V^{T_χ}, $_L{}^\pm=\{u\in V_L^{T_\chi}\mid\theta$（$u$） $=\pm u\}$。注意，在定理 1.1 中，(3) 中的 V^{T_χ}, $_L{}^\pm$ 是 V_L^+ -模；然而，若 L 不是正定的，则 (1) 中的 $V_{\lambda+L}^\pm$ 和 (2) 中的 $V_{\lambda+L}$ 不是 V_L^+ -模（参见 [19, (2.18)]）。背景以及定理 1.1 的详细介绍见第 1 [19] 部分的第 1 节。我们注意到，由于弱模的定义中不要求任何分次，定理 1.1 并不能由 [13, 定理 8.1]，推出；该定理讨论的是满足某些条件的定点顶点代数的下有界广义模。事实上，若 L 不是正定的，则定理 1.1 中 (1) 和 (2) 所列的弱模不是下有界广义模。

令 $M(1)$ 为与 $\mathfrak{h}=\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{Z}}L$ 相关的海森堡顶点算子代数（定义见（2.35）下方的说明），令 $M(1)^+$ 为 $M(1)$ 在 θ作用下的不动点子代数。顶点算子代数 $M(1)^+$ 是 V_L^+ 的子代数，并且如 [19, 第 1], 节所述，$M(1)^+$ 的表示在定理 1.1 的证明中发挥着关键作用。$M(1)^+$-模的分类见 [9, 定理 4.5] （适用于 $\dim_{\mathbb{C}}\mathfrak{h}=1$ 的情形）以及 [10, 定理 6.2.2] （适用于一般情形），具体如下: 任意不可约 $M(1)^+$-模都同构于以下对象之一:

$$M(1)^\pm, M(1)(\theta)^\pm,\ \text{or}\ M(1,\lambda)\cong M(1,-\lambda)\ (0\neq\lambda\in\mathfrak{h}). \tag{1.1}$$

其中，$M(1)(\theta)$ 是不可约的 θ-扭曲 $M(1)$-模，$M(1)^\pm=\{u\in M(1)\mid\theta u=\pm u\}$，$M(1)(\theta)^\pm=\{u\in M(1)(\theta)\mid\theta u=\pm u\}$，而 $M(1,\lambda)$ 是由向量 e^λ 生成的不可约 $M(1)$-模，其中该向量满足：对所有 $\alpha\in\mathfrak{h}$，均有 $(\alpha(-1)1)_0e^\lambda=\langle\alpha、\lambda\rangle e^\lambda$，且 $(\alpha(-1)1)_ne^\lambda=0$ 、 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ （这些符号的精确定义见第2节中的 (2.31)–(2.55)）。在前一篇论文（第1部分）中，我们证明了当 L 的秩为 1 时，对于任意非零弱 V_L^+ -模 M，其中都存在一个非零的 $M(1)^+$-子模。在本文（第2部分）中，我们首先强化并推广这一结论。

任意秩的 L 结果。具体而言，我们证明，对于任意非零弱 V_L^+-模 M， M 中存在一个不可约 $M(1)^+$-子模（命题 3.5 和推论 4.12）。接下来，我们研究 $M(1)^+$ 的扩张群和广义 Verma 模（定义见 [8, 定理 6.2] ）（命题 4.9、推论 4.10 和引理 4.11）。我们将在第 3 部分说明如何运用这些结果。设 M 是一个不可约弱 V_L^+ -模。由推论 4.12， M 中存在一个不可约 $M(1)^+$-子模 K。若 $K \cong M(\theta)^{\pm}$，则本文第3节中的相同论证表明， M 是一个 V_L^+ -模。此时， [20, 命题 4.15] 表明， M 同构于定理 1.1 (3) 中的某个不可约弱 V_L^+ -模。假设 $K \cong M(1)^{\pm}$ 或 $M(1,\lambda)$，其中 $0 \neq \lambda \in \mathfrak{h}$。由于 V_L^+ 是不可约 $M(1)^+$-模的直和，对于 V_L^+ 的任意不可约 $M(1)^+$-子模 N， M 的 V_L^+ -模结构会诱导出一个作用于弱 $M(1)^+$-模的交织算子 $I(\quad x): N \times K \to M((x))$（定义见定义2.2）。我们用 Q 表示 M 的弱 $M(1)^+$-子模，它是 $I(\quad x)$ 的像。本文第3节中的相同论证表明，Q 中存在一个不可约 $M(1)^+$-子模 R。此外，若 $R \neq Q$，则 Q/R 是一个不可约 $M(1)^+$-模，并且由命题 4.9，正合列 $0 \to R \to Q \to Q/R \to 0$ 分裂，即 $Q \cong R \oplus Q/R$ 作为 $M(1)^+$-模成立。由于 V_L^+ 是不可约 $M(1)^+$-模的直和，由此可得 M 是不可约 $M(1)^+$-模的直和。此外，我们发现，该直和中的不可约 $M(1)^+$-模两两不同构。利用 [1, 定理 5.13] 和 [4, 定理 7.7], 中得到的不可约 $M(1)^+$-模的融合规则（见定义2.2下方的说明），我们可以确定具有这种 $M(1)^+$-模结构的弱 V_L^+ -模 M，从而 M 是定理 1.1 (1) 和 (2) 中的某个不可约弱 V_L^+ -模。

我们简要说明证明命题 3.5（第3节的主要结果）的基本思路。设 V为一个顶点代数， M为一个弱 V-模。对于 $a \in V$和 $u \in M$，我们定义 $\epsilon(a,u) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$如下：

$$a_{\epsilon(a,u)}u \neq 0 \text{ and } a_i u = 0 \text{ for all } i > \epsilon(a,u) \tag{1.2}$$

若 $Y_M(a,x)u \neq 0$，且 $\epsilon(a,u) = -\infty$；若 $Y_M(a,x)u = 0$。众所周知，顶点算子代数 $M(1)^+$由权为 2 的齐次元素 $\omega^{[i]}$、权为 4 的 $J^{[i]}$（或 $H^{[i]}$），以及权为 $r+1 (1 \leq i \leq d, 1 \leq m < l \leq d, r = 1, 2, 3)$ 的 $S_{lm}(1,r)$ 生成，并且对于任意 k、$l \in \mathbb{Z}$ 以及任意一对不同的元素 i、$j \in \{1,\dots,d\}$，均有 $[\omega_k^{[i]}, \omega_l^{[j]}] = [\omega_k^{[i]}, H_l^{[j]}] = [H_k^{[i]}, H_l^{[j]}] = 0$（这些符号见 (2.59) 和 (2.61)）。因此，对于任意非零弱 V_L^+ -模 M，由[19, 引理 3.7] 可知，存在 $\{\omega_1^{[i]}, H_3^{[i]}\}_{i=1}^d$ 在 M 中的一个共同特征向量 u，使得$\epsilon(\omega^{[i]},u) \leq 1$ 且 $\epsilon(H^{[i]},u) \leq 3$，对所有 $i = 1$，……，d均成立。对 $\max\{\epsilon(S_{ij}(1,1)\ u) \mid i > j\}$ 使用归纳法，可得 $\{\omega_1^{[i]}, H_3^{[i]}\}_{i=1}^d$的一个共同特征向量，我们仍用同一符号 u表示它，使得 $\epsilon(\omega^{[i]},u) \leq 1$、 $\epsilon(H^{[i]},u) \leq 3$，且 $\epsilon(S_{lm}(1,r)\ u) \leq r$，对所有 $i = 1$，……，d、$1 \leq m < l \leq d$以及 $r = 1$、2、3 均成立。也就是说， $u \in \Omega^{M(1)^+}(M)$（定义见 (2.3)）。由于 u是 $\{\omega_1^{[i]}, H_3^{[i]}\}_{i=1}^d$的一个共同特征向量， $A(M(1)^+)u$是有限维的，其中 $A(M(1)^+)$ 是 $M(1)^+$ 的朱代数（定义见 (2.28)–(2.30)）。因此，由 [8, 定理 6.2] 可得所需结论。

接下来，我们将说明证明命题 4.9（第 4 节的主要结果）的基本思路。该结果表明，在大多数情况下，正合列

$$0 \to W \to N \xrightarrow{\pi} M \to 0 \tag{1.3}$$

分裂为两个不可约 $M(1)^+$-模 $W = \oplus_{i \in \delta + \mathbb{Z}_{\geq 0}} W_i$、 $M = \oplus_{i \in \gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}} M_i$ 和一个弱 $M(1)^+$-模 N，其中 $\omega = \sum_{j=1}^d \omega^{[j]}$ 是 $M(1)^+$ 的共形向量（Virasoro 元），并且 $M_i := \{u \in M \mid \omega_1 u = iu\}$ 对于 $i \in \mathbb{C}$。确切地说，在第 4 节中，我们处理正合列 (1.3) 中 M 为一般 $M(1)^+$-模的情形，以证明推论 4.10；然而，在这里

我们假设 M 是不可约的，以简化论证。与第 1 [19], 部分一样，我们借助计算机代数系统 Risa/Asir[16]，首先在 $M(1)^+$ 中找出 $\omega^{[i]}$、$H^{[i]}$（$i=1,\ \ldots,\ d$） $S_{lm}(1,r)$（$1\le m<l\le d,\ r=1,\ 2,\ 3$）的某些关系（(4.12)–(4.15)）。对于 $\zeta=(\zeta^{[1]},\ \ldots,\ \zeta^{[d]})\ \ \xi=(\xi^{[1]},\ \ldots,\ \xi^{[d]})\ \in\mathbb{C}^d$，令 $v\in M_\gamma$ 满足：对于所有 $i=1,\ \ldots,\ d$，$(\omega_1^{[i]}-\zeta^{[i]})v=(H_3^{[i]}-\xi^{[i]})v=0$。假设 $(W,M_\gamma)\ncong(M(1)^+,\ M(1)_1^-)$，$(M(1)^-,\ M(1)_0^+)$。利用由 (4.12)–(4.15) 得到的关系 (4.16)–(4.22)，我们可以取 $u\in N_\gamma$ 使得 $\pi(u)=v$，$(\omega_1^{[i]}-\zeta^{[i]})u=(H_3^{[i]}-\xi^{[i]})u=0$ 对所有 $i=1,\ \ldots,\ d$ 以及 $u\in\Omega^{M(1)^+}(N_\gamma)$ 成立（引理 4.4 和引理 4.6）。研究以下两种情形后，我们得到如下结果：

(1) $M\ncong W$的情形。假设正合列 (1.3) 不分裂。由于 N 中由 u 生成的 $M(1)^+$-子模与 W 的交集非平凡，因此有 $\delta\in\gamma+\mathbb{Z}_{\ge0}$。对 (1.3) 取受限对偶后，同样的论证表明 $\gamma\in\delta+\mathbb{Z}_{\ge0}$，从而 $\delta=\gamma$。由于 $M\ncong W$，我们有 $N_\gamma\cong W_\gamma\oplus M_\gamma$ 作为 $A(M(1)^+)$- 模，因此正合列 (1.3) 分裂。这与引理 4.7 矛盾。

(2) $M=W$ 与 $M\in\{M(1)^\pm,\ M(1)(\theta)^\pm\}$ 的情形。再次利用关系 (4.16)–(4.22)，我们有 $N_\gamma\cong M_\gamma\oplus W_\gamma$ 作为 $A(M(1)^+)$-模，因此正合列 (1.3) 分裂（引理 4.8）。

复杂的计算是借助计算机代数系统 Risa/Asir[16]完成的。本文中，“直接计算”一词通常指借助 Risa/Asir 进行直接计算。诸如 (2.68)、(4.12)、(4.16)、(4.37) 等，以及附录 A2 中的 (A2.1)–(A2.36) 等计算细节，可在网上 [17] 查阅。

本文的组织结构如下。第2节回顾顶点代数弱模的一些基本性质。我们还回顾海森堡代数 $M(1)$及其不动点代数$M(1)^+$。第3节证明，对于任意非零弱 V_L^+-模 M，都存在一个 $M(1)^+$ 的非零子模 M。第 4 节研究 $M(1)^+$的扩张群和广义 Verma 模。附录 A2 列出了一些 a_kb在若干 a、$b\in V_L^+$ 以及 $k=0$、1、.....的计算，以得到对易关系$[a_i,b_j]=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{i}{k}(a_kb)^{i+j-k}$。记号部分列出了一些记号。

2 预备知识

我们假设读者熟悉 [5, 12, 14, 15] 中所介绍的顶点代数基础知识。

在全文中，V 是一个顶点代数，并且我们始终假设 V 含有一个元素 ω，使得对所有 $a\in V$ 都有 $\omega_0a=a_{-2}\mathbf{1}$。对于顶点算子代数 V，由于 V 具有共形向量（Virasoro 元），该条件自动成立。在全文中，我们采用 [19] 的记号和术语。下面将对其中一些术语进行说明。我们注意到，如果 V 是一个顶点算子代数，那么将 V 视为顶点代数时的模的概念，与将 V 视为顶点算子代数时的模的概念不同（参见 [14, 定义 4.1.1 和 4.1.6]）。为避免混淆，本文将 [14, 定义 4.1.1] 中定义的顶点代数的模称为弱模。下面写出弱 V-模的定义：

定义 2.1. 弱 V-模 M 是一个配备线性映射的 $\mathbb{C}$ 上的向量空间

$$\begin{aligned}Y_M(\ ,x):V\otimes_{\mathbb{C}}M&\to M((x))\\ a\otimes u&\mapsto Y_M(a,x)u=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nux^{-n-1}\end{aligned}\tag{2.1}$$

满足以下条件：

(1) $Y_M(1,x)$ =恒等映射$_{M}$。

(2) 对于 a、$b\in V$ 和 $u\in M$,

$$\begin{aligned}&x_0^{-1}\delta(\frac{x_1-x_2}{x_0})Y_M(a,x_1)Y_M(b,x_2)u-x_0^{-1}\delta(\frac{x_2-x_1}{-x_0})Y_M(b,x_2)Y_M(a,x_1)u\\&=x_1^{-1}\delta(\frac{x_2+x_0}{x_1})Y_M(Y(a,x_0)b,x_2)u.\end{aligned}\tag{2.2}$$

对于 $n\in\mathbb{C}$ 和一个弱 V-模 M，我们定义 $M_n=\{u\in V\mid \omega_1 u=nu\}$。对于 $a\in V_n(n\in\mathbb{C})$，$\mathrm{wt}\,a$ 表示 n。对于一个具有分解 $V=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n$ 的顶点代数 V，以及一个弱 V-模的子集 U，我们定义

$$\Omega_V(U)=\left\{u\in U\;\middle|\;\begin{array}{l}a_iu=0\text{ for all homogeneous elements }a\in V\\ \text{and } i>\mathrm{wt}\,a-1.\end{array}\right\}.\tag{2.3}$$

对于一个具有分解 $V=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n$ 的顶点代数 V，若弱 V-模 N 满足 N 具有分解 $N=\oplus_{n=0}^{\infty}N(n)$，且对所有齐次元素 $a\in V$、$i\in\mathbb{Z}$ 和 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，都有 $a_iN(n)\subset N(\mathrm{wt}\ a-i-1+n)$，则称其为 $\mathbb{N}$-分级的，其中对所有 $n<0$，我们定义 $N(n)=0$。对于一个具有分解 $V=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n$ 的顶点代数 V，若弱 V-模 N 满足 N 具有分解 $N=\oplus_{n\in\mathbb{C}}N_n$，且对所有 $n\in\mathbb{C}$ 都有 $\dim_{\mathbb{C}}N_n<\infty$，并且对于实部充分负的 n，都有 $N_n=0$，则称其为 V-模。我们回顾一下交织算子的定义，见 [11, 定义 5.4.1]。

定义2.2. 设 V为一个顶点代数，M、W和 N为三个弱 V-模。类型为 $\binom{N}{M\ W}$ 的交织算子是一个线性映射

$$\begin{aligned}I(\ ,x):M\otimes_{\mathbb{C}}W&\to N\{x\}\\ I(u,x)v&=\sum_{\alpha\in\mathbb{C}}u_\alpha v x^{-\alpha-1},\\ &u\in M,v\in W,\text{ and }u_\alpha\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(W,N),\end{aligned}\tag{2.4}$$

满足以下条件:

（1）对于 $u\in M$、$v\in W$和 $\alpha\in\mathbb{C}$,

$$u_{\alpha+m}v=0\text{ for sufficiently large }m\in\mathbb{N}.\tag{2.5}$$

（2）对于 $u\in M$ 和 $a\in V$,

$$\begin{aligned}&x_0^{-1}\delta(\frac{x_1-x_2}{x_0})Y(a,x_1)I(u,x_2)-x_0^{-1}\delta(\frac{x_2-x_1}{-x_0})I(u,x_2)Y(a,x_1)\\&=x_1^{-1}\delta(\frac{x_2+x_0}{x_1})I(Y(a,x_0)u,x_2).\end{aligned}\tag{2.6}$$

(3) 对于 $u\in M$,

$$I(\omega_0u,x)=\frac{d}{dx}I(u,x).\tag{2.7}$$

对于不可约弱 V-模 M、W，以及 N、 $I\binom{N}{M\ W}$ 表示类型为 $\binom{N}{M\ W}$ 的所有交织算子所构成的空间，我们称其维数为类型 $\binom{N}{M\ W}$ 的融合规则。本文中，对于一个从 $M\times W$ 到 N 的交织算子 $I(\quad x)$，我们仅考虑其像 $I(\quad x)$ 包含于 $N((x))$ 的情形。对于 $A\subset M$ 和 $B\subset W$，

$$A\cdot B \text{ denotes } \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{a_ib \mid a\in A, i\in\mathbb{Z}, b\in B\}\subset N. \tag{2.8}$$

对于交织算子 $I(\quad x): M\times W\to N((x))$，定义 $u\in M$ 和 $v\in W$，我们令 $\epsilon_I(u,v) =\epsilon(u,v)\in\mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$ 为

$$u_{\epsilon_I(u,v)}v\neq 0 \text{ and } u_iv=0 \text{ for all } i>\epsilon_I(u,v) \tag{2.9}$$

若 $I(u,x)v\neq 0$ 且 $\epsilon_I(u,v)=-\infty$ 若 $I(u,x)v=0$。对于 V 的子集 A 以及弱V-模 M 的子集 B，令

$$A_-B:=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{a_{-i}b \mid a\in A, b\in B, \text{ and } i\in\mathbb{Z}_{>0}\}\subset M \tag{2.10}$$

and

$$\langle A_-\rangle B:=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{a^{(1)}_{-i_1}\cdots a^{(n)}_{-i_n}b \;\middle|\; \begin{array}{l} n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, a^{(1)},\dots,a^{(n)}\in A, b\in B,\\ i_1,\dots,i_n\in\mathbb{Z}_{>0}\end{array}\right\}\subset M. \tag{2.11}$$

当 $B=\{b\}$ 时，我们分别将 A_-B 和 $\langle A_-\rangle B$ 简写为 A_-b 和 $\langle A_-\rangle b$。

引理 2.3. 设 $V=\oplus_{n=0}^{\infty}V_n$ 为顶点算子代数， A 和 B 为 $\bigcup_{n=1}^{\infty}V_n$ 的有限子集， M 为弱 V-模，U 为 M 的有限维子空间。假设 $A\cdot\langle A_-\rangle\mathbf{1}\subset\langle A_-\rangle\mathbf{1}$。对于每个 $a\in A$ 和 $b\in B$，我们选取 $\epsilon(a)$ $\epsilon(b)\in\mathbb{Z}$，使得 $\epsilon(a)\geq\max\{\{\epsilon(a,u) \mid u\in U\}\cup\{-1\}\}$，且$\epsilon(b)\geq\max\{\{\epsilon(b,u) \mid u\in U\}\cup\{-1\}\}$。对于 $j\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，定义

$$\delta(j):=\max\left\{\sum_{i=1}^{n}(\epsilon(a^{(i)})-\mathrm{wt}(a^{(i)})+1) \;\middle|\; \begin{array}{l} n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}, a^{(1)},\dots,a^{(n-1)}\in A, a^{(n)}\in B,\\ \sum_{i=1}^{n}\mathrm{wt}(a^{(i)})\leq j.\end{array}\right\}-1+j, \tag{2.12}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n}(\epsilon(a^{(i)})-\mathrm{wt}(a^{(i)})+1):=0$ 对于 $n=0$。

(1) 假设 $A\cdot(\langle A_-\rangle B_-\mathbf{1})\subset\langle A_-\rangle B_-\mathbf{1}$。对于每个 $a\in A$和 $b\in B$，我们选取 $\gamma(a)$ $\gamma(b)\in\mathbb{Z}_{\geq -1}$。那么，对于齐次元素 $c\in\langle A_-\rangle B_-\mathbf{1}$, $u\in U$，以及 $k\in\mathbb{Z}$, c_ku 是如下形式元素的线性组合

$$p^{(1)}_{\sigma_1}\cdots p^{(l)}_{\sigma_l}q_\tau p^{(l+1)}_{\sigma_{l+1}}\cdots p^{(m)}_{\sigma_m}u \tag{2.13}$$

其中 $l\ m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ $0\leq l\leq m$ $p^{(1)}\dots p^{(m)}\in A$ $\sigma_i\in\mathbb{Z}_{\leq\gamma(p^{(i)})}$ $i=1\dots l$ $\sigma_i\in$，且，，，，）（，，），）$\mathbb{Z}_{\geq\gamma(p^{(i)})+1}$ $i=l+1\dots m$ $q\in B$ $\tau\in\mathbb{Z}$（，，），，满足

$$\sum_{i=1}^{m}\mathrm{wt}(p^{(i)})+\mathrm{wt}(q)\leq\mathrm{wt}(c) \text{ and} \tag{2.14}$$

$$\mathrm{wt}(c)-k-1=\sum_{i=1}^{m}(\mathrm{wt}(p^{(i)})-\sigma_i-1)+\mathrm{wt}(q)-\tau-1. \tag{2.15}$$

特别地，$c_{\delta(\mathrm{wt}(c))}u$ 是以下形式元素的线性组合

$$p^{(1)}_{\epsilon(p^{(1)})}\cdots p^{(m)}_{\epsilon(p^{(m)})}q_{\epsilon(q)}u \tag{2.16}$$

其中 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$、$p^{(1)}$、...、$p^{(m)}\in A$ 和 $q\in B$。此外，对于 $k>\delta(\mathrm{wt}(c))$,

$$c_k u=0. \tag{2.17}$$

(2) 假设 $B\cdot\langle A_-\rangle\mathbf{1}\subset B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1}$。那么，对于齐次元素 $c\in B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1}$ 和 $u\in U$，$c_{\delta(\mathrm{wt}(c))}u$ 是如下形式元素的线性组合

$$q_{\epsilon(q)}p^{(1)}_{\epsilon(p^{(1)})}\cdots p^{(m)}_{\epsilon(p^{(m)})}u \tag{2.18}$$

其中 $m\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$、$p^{(1)}$、...、$p^{(m)}\in A$ 和 $q\in B$。此外，对于 $k>\delta(\mathrm{wt}(c))$,

$$c_k u=0. \tag{2.19}$$

(3) 假设 $B\cdot\langle A_-\rangle\mathbf{1}\subset B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1}$ 和 $A\cdot(B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1})\subset B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1}$。对于 $a\in A$，我们定义

$$\zeta(a):=\max\{\{\epsilon(a)\}\cup\{\delta(\mathrm{wt}\,a+\mathrm{wt}\,b-1)-\epsilon(b)\mid b\in B\}\}. \tag{2.20}$$

如果对所有 $a\in A$ 和 $u\in U$，$a_{\epsilon(a)}u\in U$，则顶点代数 M 的子空间 $W:=$ 张成 $_{\mathbb{C}}\{b_{\epsilon(b)}u\mid b\in B,u\in U\}$ 在对所有 $a\in A$，$a_{\zeta(a)}$ 的作用下稳定。此外，对于 $a\in A$ 和 $k>\zeta(a)$，$a_kW=0$。

(4) 假设 $B\cdot\langle A_-\rangle\mathbf{1}\subset B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1}$, $A\cdot(B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1})\subset B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1}$，且 $B\cdot(B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1})\subset B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1}$。对于任意 $a\in A, b\in B$ 和 $u\in U$，我们假设 $\epsilon(a,u)\geq\mathrm{wt}(a)-1$，并且值 $\epsilon(b)-\mathrm{wt}(b)+1$ 是一个与 $b\in B$ 无关的常数，记为 ρ。我们定义 $W:=$ 张成$_{\mathbb{C}}\{b_{\epsilon(b)}u\mid b\in B,u\in U\}$。如果对于所有 $a\in A$ 和 $u\in U$，$a_{\mathrm{wt}(a)-1}u\in U$ 成立，那么对于任意齐次元素$c\in B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1}$，$c_{\mathrm{wt}(c)-1}W\subset W$，且对于所有 $k>$，$c_kW=0\,\mathrm{wt}(c)-1$。

证明。（1）设 $c:=a^{(1)}_{-i_1}\cdots a^{(n)}_{-i_n}b_{-i_{n+1}}\mathbf{1}\in\langle A_-\rangle B_-\mathbf{1}$，其中 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$、$a^{(1)}$、.....、$a^{(n)}\in A$、$b\in B$，以及 i_1、.....、i_n、$i_{n+1}\in\mathbb{Z}_{>0}$。我们将对 $\mathrm{wt}\,c$ 使用归纳法证明（2.13）–（2.15）。若 $c=\mathbf{0}$ 或 $c=b_{-i}\mathbf{1}$ 且 $b\in B$ 和 $i\in\mathbb{Z}_{>0}$，则结论成立。设 $n\geq 1$。定义 $f:=a^{(2)}_{-i_2}\cdots a^{(n)}_{-i_n}b_{-i_{n+1}}\mathbf{1}$，并注意到 $\mathrm{wt}(f)<\mathrm{wt}(c)$。对于 $k\in\mathbb{Z}$，利用 [19, 引理 2.2], ，可得

$$\begin{aligned}c_k u&=(a^{(1)}_{-i_1}f)_k u\\&=\sum_{\substack{s\leq\gamma(a^{(1)})\\ s+t+i_1=k}}\binom{-s-1}{i_1-1}a^{(1)}_s f_t u+\sum_{\substack{s\geq\gamma(a^{(1)})+1\\ s+t+i_1=k}}\binom{-s-1}{i_1-1}f_t a^{(1)}_s u\\&\quad+(-1)^{i_1}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+i_1-1}{i_1-1}\binom{\gamma(a^{(1)})+i_1}{l+i_1}(a^{(1)}_l f)_{k-i_1-l}u.\end{aligned} \tag{2.21}$$

在（2.21）的第二项中，根据归纳假设，在将 c、k 和 u 分别替换为 f、t 和 $a^{(1)}_s u$ 后，我们发现 $f_t a^{(1)}_s u$ 是形如（2.13）–（2.15）的元素的线性组合。在（2.21）的第三项中，由于对于 $l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，$\mathrm{wt}(a^{(1)}_l f)=\mathrm{wt}(c)-i_1-l<\mathrm{wt}(c)$，根据归纳假设，在将 c 和 k 替换为 $a^{(1)}_l f$ 和

$k-i_1-l$ 后，我们发现 $(a_l^{(1)}f)_{k-i_1-l}u$ 是形如（2.13）–（2.15）的元素的线性组合。因此，（2.13）–（2.15）成立。

我们将证明 (2.16) 和 (2.17)。设 $k \geq \delta(\mathrm{wt}\, c)$. 对于 $a \in A$，置 $\gamma(a) = \epsilon(a)$；对于 $b \in B$，置 $\gamma(b) = \epsilon(b)$。假设在 $c_k u$ 的展开中，形如 (2.13) 的元素的系数不为零。由于 $p_j u = 0$ for $p \in A$ and $j > \epsilon(p)$，我们有 $l = m$，从而有 $\tau \leq \epsilon(q)$。由 (2.15),

$$\begin{aligned}
0 &= -\mathrm{wt}(c) + k + 1 + \sum_{i=1}^{m}(\mathrm{wt}(p^{(i)}) - \sigma_i - 1) + \mathrm{wt}(q) - \tau - 1 \\
&\geq -\mathrm{wt}(c) + \delta(\mathrm{wt}(c)) + 1 + \sum_{i=1}^{m}(\mathrm{wt}(p^{(i)}) - \sigma_i - 1) + \mathrm{wt}(q) - \tau - 1 \\
&\geq -\mathrm{wt}(c) + \Big(\sum_{i=1}^{m}(\epsilon(p^{(i)}) - \mathrm{wt}(p^{(i)}) + 1) + (\epsilon(q) - \mathrm{wt}(q) + 1) - 1 + \mathrm{wt}(c)\Big) + 1 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{m}(\mathrm{wt}(p^{(i)}) - \sigma_i - 1) + \mathrm{wt}(q) - \tau - 1 \\
&= \sum_{i=1}^{m}(\epsilon(p^{(i)}) - \sigma_i) + (\epsilon(q) - \tau) \geq 0
\end{aligned}$$

从而对于所有 $i = 1, \ldots, m$，有 $k = \delta(\mathrm{wt}(c))$，$\epsilon(p^{(i)}) = \sigma_i$，以及 $\epsilon(b) = \tau$。这里我们使用了 (2.14) 以及 $\delta(\mathrm{wt}(c))$ 的定义 (2.12)。因此，(2.16) 和 (2.17) 成立。

(2) 与 (1) 中相同的论证表明这些结果成立。

(3) 对于 $j \in \mathbb{Z}_{>0}$，根据 $\delta(j)$ 的定义，我们有 $\delta(j) - 1 \geq \delta(j-1)$，因此对于所有 $i = 0, \ldots, j$，有 $\delta(j) - i \geq \delta(j-i)$。令 $u \in U$ 和 $k \in \mathbb{Z}_{\geq \zeta(a)}$。对于 $a \in A$ 和 $b \in B$,

$$a_k b_{\epsilon(b)}u = b_{\epsilon(b)}a_k u + [a_k, b_{\epsilon(b)}]u = b_{\epsilon(b)}a_k u + \sum_{i=0}^{\infty}\binom{k}{i}(a_i b)_{k+\epsilon(b)-i}u. \tag{2.22}$$

对于 $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，由于

$$\begin{aligned}
k + \epsilon(b) - i &\geq \zeta(a) + \epsilon(b) - i \geq \delta(\mathrm{wt}\, a + \mathrm{wt}\, b - 1) - i \\
&\geq \delta(\mathrm{wt}\, a + \mathrm{wt}\, b - 1 - i) = \delta(\mathrm{wt}(a_i b)),
\end{aligned} \tag{2.23}$$

由 (2) 可得这些结果。

(4) 对于任意 $a \in A$ 和 $u \in U$，由于 $\epsilon(a, u) \geq \mathrm{wt}(a) - 1$，我们取 $\epsilon(a) = \mathrm{wt}(a) - 1$。对于齐次元素 $c \in B_-\langle A_-\rangle \mathbf{1}$，根据 δ 的定义 (2.12),

$$\delta(\mathrm{wt}(c)) = \max\{\epsilon(b) - \mathrm{wt}(b) \mid b \in B\} + \mathrm{wt}(c) = \rho + \mathrm{wt}(c) - 1. \tag{2.24}$$

对于 $a \in A$ 和 $b \in B$，由 (2.24) 得,

$$\begin{aligned}
\delta(\mathrm{wt}(a) + \mathrm{wt}(b) - 1) - \epsilon(b) &= \rho + \mathrm{wt}(a) + \mathrm{wt}(b) - 2 - \epsilon(b) \\
&= \epsilon(b) - \mathrm{wt}(b) + \mathrm{wt}(a) + \mathrm{wt}(b) - 1 - \epsilon(b) \\
&= \mathrm{wt}(a) - 1.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

由于我们在 (2) 中选取了 $\epsilon(a) = \mathrm{wt}(a) - 1$, $\zeta(a) = \mathrm{wt}(a) - 1$。由 (2)，结论对$a \in A$成立。对于 b, $b' \in B$, $u \in U$ 和 $j \geq \mathrm{wt}(b) - 1$，由 Borcherds恒等式（参见 [14, (3.1.7)]，将其中使用的符号分别替换为 $u = b, v = b', l = -1, m = j + 1$ 和 $n = \epsilon(b')$）可得

$$b_j b'_{\epsilon(b')} u = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{j+1}{i} (b_{-1+i} b')_{j+1+\epsilon(b')-i} u. \tag{2.26}$$

由于

$$\begin{aligned} \delta(\mathrm{wt}(b_{-1+i}b')) &= \rho + \mathrm{wt}(b) + \mathrm{wt}(b') - i - 1 \\ &= \epsilon(b') - \mathrm{wt}(b') + \mathrm{wt}(b) + \mathrm{wt}(b') - i \\ &= (\mathrm{wt}(b) - 1) + 1 + \epsilon(b') - i \\ &\leq j + 1 + \epsilon(b') - i, \end{aligned} \tag{2.27}$$

由 (2)，这些结果对 $b \in B$ 成立。因此，对于任意齐次元素 $c \in B_-\langle A_-\rangle \mathbf{1}$，对 $\mathrm{wt}\, c$ 作归纳论证即可得到这些结果。

□

我们从 [21, 第 2]节回顾顶点算子代数 V 的朱代数 $A(V)$。对于齐次的 $a \in V$和 $b \in V$，我们定义

$$a \circ b = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\mathrm{wt}\, a}{i} a_{i-2} b \in V \tag{2.28}$$

and

$$a * b = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\mathrm{wt}\, a}{i} a_{i-1} b \in V. \tag{2.29}$$

通过线性性，我们将 (2.28) 和 (2.29) 延拓到任意的 $a \in V$。我们还定义 $O(V) =$ 张成$_{\mathbb{C}}\{a \circ b \mid a, b \in V\}$。于是，商空间

$$A(V) = M/O(V), \tag{2.30}$$

称为 V的朱代数，由 [21, 定理 2.1.1]知，它是一个具有乘法 (2.29) 的结合 $\mathbb{C}$-代数。[21, 定理 2.2.1] 表明，对于顶点算子代数 V，所有不可约 $\mathbb{N}$-分次弱 V-模的同构类集合与不可约 $A(V)$-模的同构类集合之间存在一一对应。

我们回顾与海森堡代数相关的顶点算子代数 $M(1)$，以及与非退化偶格 L相关的顶点代数 V_L，内容来自 [14, 第6.3–6.5] 节和 [10, 第2节2]。设 $\mathfrak{h}$ 为配备非退化对称双线性型 $\langle$ 的有限维向量空间 $\rangle$。定义一个李代数

$$\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}C \tag{2.31}$$

具有李括号关系

$$[\beta \otimes t^m, \gamma \otimes t^n] = m\langle \beta, \gamma \rangle \delta_{m+n,0} C, \qquad [C, \hat{\mathfrak{h}}] = 0 \tag{2.32}$$

对于 β、$\gamma \in \mathfrak{h}$ 和 m、$n \in \mathbb{Z}$。对于 $\beta \in \mathfrak{h}$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，$\beta(n)$ 表示 $\beta \otimes t^n \in \hat{\mathfrak{h}}$。设 $\mathfrak{h}$ 的两个李子代数为：

$$\hat{\mathfrak{h}}_{\geq 0} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{h} \otimes t^n \oplus \mathbb{C}C \qquad \text{and} \qquad \hat{\mathfrak{h}}_{<0} = \bigoplus_{n \leq -1} \mathfrak{h} \otimes t^n. \tag{2.33}$$

对于 $\beta \in \mathfrak{h}$，$\mathbb{C}e^\beta$ 表示由条件 $\gamma \in \mathfrak{h}$ 唯一确定的一维 $\hat{\mathfrak{h}}_{\geq 0}$-模

$$\gamma(i) \cdot e^\beta = \begin{cases} \langle \gamma, \beta \rangle e^\beta & \text{for } i = 0 \\ 0 & \text{for } i > 0 \end{cases} \qquad \text{and} \qquad C \cdot e^\beta = e^\beta. \tag{2.34}$$

我们取一个 $\hat{\mathfrak{h}}$-模

$$M(1, \beta) = \mathscr{U}(\hat{\mathfrak{h}}) \otimes_{\mathscr{U}(\hat{\mathfrak{h}}_{\geq 0})} \mathbb{C}e^\beta \cong \mathscr{U}(\hat{\mathfrak{h}}_{<0}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}e^\beta \tag{2.35}$$

其中 $\mathscr{U}(\mathfrak{g})$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的泛包络代数。于是，$M(1) = M(1, 0)$ 具有顶点算子代数结构，其共形向量为

$$\omega = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{h}} h_i(-1) h_i'(-1)\mathbf{1} \tag{2.36}$$

其中 $\{h_1, \ldots, h_{\dim \mathfrak{h}}\}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一组基，$\{h_1', \ldots, h_{\dim \mathfrak{h}}'\}$ 是其对偶基。此外，对于任意 $\beta \in \mathfrak{h}$，$M(1, \beta)$ 都是不可约的 $M(1)$-模。顶点算子代数 $M(1)$ 称为与海森堡代数 $\oplus_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} \mathfrak{h} \otimes t^n \oplus \mathbb{C}C$ 相关的顶点算子代数。

设 L 是一个非退化偶格。我们定义 $\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$，并将 L 的对偶记为 $L^\perp$：对于所有 $\beta \in L\}$，$L^\perp = \{\gamma \in \mathfrak{h} \mid \langle \beta, \gamma \rangle \in \mathbb{Z}$。取 $\mathfrak{h}$ 为 $M(1)$，我们定义 $V_{\lambda+L} = \oplus_{\beta \in \lambda+L} M(1, \beta) \cong \mathscr{U}(\hat{\mathfrak{h}}_{<0}) \otimes_{\mathbb{C}} (\oplus_{\beta \in \lambda+L} \mathbb{C}e^\beta)$，其中 $\lambda + L \in L^\perp/L$。于是，$V_L = V_{0+L}$ 具有唯一的顶点代数结构，该结构与 $M(1)$ 的作用相容，称为与 L 相关的顶点代数（参见 [14, 第 6.5] 节）。此外，对于每个 $\lambda + L \in L^\perp/L$，向量空间 $V_{\lambda+L}$ 是一个不可约弱V_L-模，它具有如下分解：

$$V_{\lambda+L} = \bigoplus_{n \in \langle \lambda, \lambda \rangle/2 + \mathbb{Z}} (V_{\lambda+L})_n \text{ where } (V_{\lambda+L})_n = \{a \in V_{\lambda+L} \mid \omega_1 a = na\}. \tag{2.37}$$

令 L 为 L 被 $\langle \kappa \rangle$ 这一 2 阶循环群的典范中心扩张，其交换子映射为 $c(\alpha, \beta) = \kappa^{\langle \alpha, \beta \rangle}$ 其中 α、$\beta \in L$：

$$0 \to \langle \kappa \rangle \to \hat{L} \xrightarrow{-} L \to 0. \tag{2.38}$$

于是，L 的 -1-等距变换诱导出 L 的一个 2 阶自同构 θ，并诱导出 V_L 的一个 2 阶自同构；滥用记号，我们也将后者记为 θ（见 [12, (8.9.22)]）。在 $M(1)$ 中，我们有

$$\theta(h^1(-i_1) \cdots h^n(-i_n)\mathbf{1}) = (-1)^n h^1(-i_1) \cdots h^n(-i_n)\mathbf{1} \tag{2.39}$$

其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$h^1$、……、$h^n \in \mathfrak{h}$，以及 i_1、……、$i_n \in \mathbb{Z}_{>0}$。记

$$V_L^+ = \{a \in V_L \mid \theta(a) = a\} \text{ and } M(1)^+ = \{a \in M(1) \mid \theta(a) = a\}. \tag{2.40}$$

对于一个弱 V_L-模 M，我们通过 $M \circ \theta = M$and 定义一个弱 V_L-模 $(M \circ \theta, Y_{M \circ \theta})$

$$Y_{M \circ \theta}(a, x) = Y_M(\theta(a), x) \tag{2.41}$$

对于 $a \in V_L$。那么，对于 $\lambda \in L^\perp$，有 $V_{\lambda+L} \circ \theta \cong V_{-\lambda+L}$。因此，对于满足 $2\lambda \in L$ 的 $\lambda \in L^\perp$，我们定义

$$V_{\lambda+L}^{\pm} = \{u \in V_{\lambda+L} \mid \theta(u) = \pm u\}. \tag{2.42}$$

接下来，我们回顾第 9] 节中从 [12, 构造的 θ-扭曲模（用于 $M(1)$ 和 V_L ）。设一个李代数

$$\hat{\mathfrak{h}}[-1] = \mathfrak{h} \otimes t^{1/2}\mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}C \tag{2.43}$$

其李括号关系为

$$[C, \hat{\mathfrak{h}}[-1]] = 0 \qquad \text{and} \qquad [\alpha \otimes t^m, \beta \otimes t^n] = m\langle\alpha, \beta\rangle\delta_{m+n,0}C \tag{2.44}$$

对于 α、$\beta \in \mathfrak{h}$ 和 m、$n \in 1/2 + \mathbb{Z}$。对于 $\alpha \in \mathfrak{h}$ 和 $n \in 1/2 + \mathbb{Z}$， $\alpha(n)$ 表示 $\alpha \otimes t^n \in \mathfrak{h}$。设 $\mathfrak{h}[-1]$ 的两个李代数子代数:

$$\widehat{\mathfrak{h}}[-1]_{\geq 0} = \bigoplus_{n \in 1/2+\mathbb{N}} \mathfrak{h} \otimes t^n \oplus \mathbb{C}C \qquad \text{and} \qquad \widehat{\mathfrak{h}}[-1]_{<0} = \bigoplus_{n \in 1/2+\mathbb{N}} \mathfrak{h} \otimes t^{-n}. \tag{2.45}$$

令 $\mathbb{C}\mathbf{1}_{\mathrm{tw}}$ 表示唯一的一个一维 $\mathfrak{h}[-1]_{\geq 0}$-模，使得

$$\begin{aligned} h(i) \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{tw}} &= 0 \quad \text{for } h \in \mathfrak{h} \text{ and } i \in \frac{1}{2} + \mathbb{N}, \\ C \cdot \mathbf{1}_{\mathrm{tw}} &= \mathbf{1}_{\mathrm{tw}}. \end{aligned} \tag{2.46}$$

我们取一个 $\mathfrak{h}[-1]$-模

$$M(1)(\theta) = \mathscr{U}(\widehat{\mathfrak{h}}[-1]) \otimes_{\mathscr{U}(\widehat{\mathfrak{h}}[-1]_{\geq 0})} \mathbb{C}u_\zeta \cong \mathscr{U}(\widehat{\mathfrak{h}}[-1]_{<0}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}u_\zeta. \tag{2.47}$$

我们定义 $\alpha \in \mathfrak{h}$,

$$\alpha(x) = \sum_{i \in 1/2+\mathbb{Z}} \alpha(i)x^{-i-1} \tag{2.48}$$

并且对于 $u = \alpha_1(-i_1) \cdots \alpha_k(-i_k)\mathbf{1} \in M(1)$,

$$Y_0(u, x) = {}^\circ_\circ \frac{1}{(i_1 - 1)!}\left(\frac{d^{i_1-1}}{dx^{i_1-1}}\alpha_1(x)\right) \cdots \frac{1}{(i_k - 1)!}\left(\frac{d^{i_k-1}}{dx^{i_k-1}}\alpha_k(x)\right)^\circ_\circ. \tag{2.49}$$

这里，对于 $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathfrak{h}$ 和 $i_1, \ldots, i_n \in 1/2 + \mathbb{Z}$，我们通过归纳定义 ${}^\circ_\circ\beta_1(i_1) \cdots \beta_n(i_n)^\circ_\circ$ b y

$$\begin{aligned} {}^\circ_\circ\beta_1(i_1)^\circ_\circ &= \beta_1(i_1) \qquad \text{and} \\ {}^\circ_\circ\beta_1(i_1) \cdots \beta_n(i_n)^\circ_\circ &= \begin{cases} {}^\circ_\circ\beta_2(i_2) \cdots \beta_n(i_n)^\circ_\circ\beta_1(i_1) & \text{if } i_1 \geq 0, \\ \beta_1(i_1)^\circ_\circ\beta_2(i_2) \cdots \beta_n(i_n)^\circ_\circ & \text{if } i_1 < 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{2.50}$$

设 $h^{[1]}, \ldots, h^{[\dim \mathfrak{h}]}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的标准正交基。我们定义 $c_{mn} \in \mathbb{Q}$，其中 $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 满足

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn}x^m y^n = -\log\left(\frac{(1+x)^{1/2} + (1+y)^{1/2}}{2}\right) \tag{2.51}$$

and

$$\Delta_x = \sum_{m,n=0}^{\infty} c_{mn} \sum_{i=1}^{\dim \mathfrak{h}} h^{[i]}(m)h^{[i]}(n)x^{-m-n}. \tag{2.52}$$

那么，对于 $u \in M(1)$，我们定义顶点算子 $Y_{M(1)(\theta)}$ 为

$$Y_{M(1)(\theta)}(u,x) = Y_0(e^{\Delta_x}u, x). \tag{2.53}$$

然后，[12, 定理 9.3。1] 表明，$(M(1)(\theta)\ Y_{M(1)(\theta)})$ 是一个不可约的 θ-扭曲 $M(1)$-模。我们定义 θ 在 $M(1)(\theta)$ 上的作用如下：

$$\theta(h^1(-i_1)\cdots h^n(-i_n)\mathbf{1}_{\mathrm{tw}} = (-1)^n h^1(-i_1)\cdots h^n(-i_n)\mathbf{1}_{\mathrm{tw}} \tag{2.54}$$

对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$h^1$、.....、$h^n \in \mathfrak{h}$、$i_1$、.....、$i_n \in 1/2 + \mathbb{Z}_{>0}$，并令

$$M(1)(\theta)^{\pm} = \{u \in M(1)(\theta) \mid \theta u = \pm u\}. \tag{2.55}$$

设 $P = \{\theta(a)a^{-1} \mid a \in \hat{}L\}$ 是 $\hat{}L$ 的一个子模。令 T_χ 为与中心特征 χ 相关的不可约 $\hat{}L/P$-模，使得 $\chi(\kappa) = -1$。我们令

$$V_L^{T_\chi} = M(1)(\theta) \otimes T_\chi. \tag{2.56}$$

然后，[12, 定理 9.5。3] 表明，$V_L^{T_\chi}$ 具有一个不可约的 θ-扭曲 V_L-模结构，并且与 $M(1)$ 的作用相容。我们定义 θ 在 $V_L^{T_\chi}$ 上的作用如下：

$$\theta(h^1(-i_1)\cdots h^n(-i_n)u) = (-1)^n h^1(-i_1)\cdots h^n(-i_n)u \tag{2.57}$$

对于 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$h^1$、...、$h^n \in \mathfrak{h}$、$i_1$、...、$i_n \in 1/2 + \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $u \in T_\chi$，并设

$$V_L^{T_\chi,\pm} = \{u \in V_L^{T_\chi} \mid \theta(u) = \pm u\}. \tag{2.58}$$

设 $h^{[1]}$、...、$h^{[d]}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的标准正交基。对于 $i = 1$、...、d，我们在 $M(1)^+$ 中定义以下元素：

$$\begin{aligned}
\omega^{[i]} &= \frac{1}{2}h^{[i]}(-1)^2\mathbf{1},\\
\omega &= \omega^{[1]} + \cdots + \omega^{[d]},\\
H^{[i]} &= \frac{1}{3}h^{[i]}(-3)h^{[i]}(-1)\mathbf{1} - \frac{1}{3}h^{[i]}(-2)^2\mathbf{1},\\
J^{[i]} &= h^{[i]}(-1)^4\mathbf{1} - 2h^{[i]}(-3)h^{[i]}(-1)\mathbf{1} + \frac{3}{2}h^{[i]}(-2)^2\mathbf{1}\\
&= -9H^{[i]} + 4(\omega^{[i]}_{-1})^2\mathbf{1} - 3\omega^{[i]}_{-3}\mathbf{1}.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

对于 $\alpha \in \mathfrak{h}$，我们定义

$$E(\alpha) = e^{\alpha} + \theta(e^{\alpha}). \tag{2.60}$$

我们回顾以下记号以及[10, 第 4 节和 5]: 对于任意一对不同的元素 i, $j \in \{1, \dots, d\}$ 以及 r, $s \in \mathbb{Z}_{>0}$,

$$\begin{aligned} S_{ij}(r,s) &= h^{[i]}(-r)h^{[j]}(-s)\mathbf{1}, \\ E^u_{ij} &= 5S_{ij}(1,2) + 25S_{ij}(1,3) + 36S_{ij}(1,4) + 16S_{ij}(1,5), \\ E^t_{ij} &= -16S_{ij}(1,2) + 145S_{ij}(1,3) + 19S_{ij}(1,4) + 8S_{ij}(1,5), \\ \Lambda_{ij} &= 45S_{ij}(1,2) + 190S_{ij}(1,3) + 240S_{ij}(1,4) + 96S_{ij}(1,5). \end{aligned} \tag{2.61}$$

由 [10, 命题 5.3.14] 可知, 在朱代数 ($A(M(1)^+)$ $*$) 中, $A^u = \oplus_{i,\ j}\mathbb{C}E^u_{ij}$和$A^t = \oplus_{i,\ j}\mathbb{C}E^t_{ij}$是双边理想, 且它们分别同构于 $d \times d$矩阵代数和$A^u * A^t = A^t * A^u = 0$。根据 [10, 命题 5.3.12],, 对于任意一对不同的元素 i、 $j \in \{1, \dots, d\}$, 有 $A^u * \Lambda_{ij} = \Lambda_{ij} * A^u = A^t * \Lambda_{ij} = \Lambda_{ij} * A^t = 0$。根据 [10, 命题 5.3.15], $A(M(1)^+)/(A^u + A^t)$是一个交换代数, 由 $\omega^{[i]}$、 $H^{[i]}$和 Λ_{jk}的像生成, 其中 $i = 1$、.....、 d以及j、 $k \in \{1, \dots, d\}$ 满足 $j \neq k$。

对于 $\lambda \in \mathfrak{h}$、 $k = 1$、.....、 d, 以及任意一对不同的元素 i、 $j \in \{1, \dots, d\}$,

$$\begin{aligned} \omega^{[k]}_1 e^\lambda &= \frac{\langle \lambda, h^{[k]} \rangle^2}{2} e^\lambda, \\ H^{[k]}_3 e^\lambda &= 0, \\ S_{ij}(1,1)_1 e^\lambda = -S_{ij}(1,2)_2 e^\lambda &= S_{ij}(1,3)_3 e^\lambda = \langle \lambda, h^{[i]} \rangle \langle \lambda, h^{[j]} \rangle e^\lambda, \end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned} \omega^{[k]}_1 h^{[j]}(-1)\mathbf{1} &= \delta_{jk} h^{[j]}(-1)\mathbf{1}, \\ H^{[k]}_3 h^{[j]}(-1)\mathbf{1} &= \delta_{jk} h^{[j]}(-1)\mathbf{1}, \\ S_{ij}(1,1)_1 h^{[j]}(-1)\mathbf{1} &= h^{[i]}(-1)\mathbf{1}, \\ S_{ij}(1,2)_2 h^{[j]}(-1)\mathbf{1} &= -2h^{[i]}(-1)\mathbf{1}, \\ S_{ij}(1,3)_3 h^{[j]}(-1)\mathbf{1} &= 3h^{[i]}(-1)\mathbf{1}, \end{aligned} \tag{2.63}$$

and

$$\begin{aligned} \omega^{[k]}_1 \mathbf{1}_{\mathrm{tw}} &= \frac{1}{16}\mathbf{1}_{\mathrm{tw}}, \\ H^{[k]}_3 \mathbf{1}_{\mathrm{tw}} &= \frac{-1}{128}\mathbf{1}_{\mathrm{tw}}, \\ S_{ij}(1,1)_1 \mathbf{1}_{\mathrm{tw}} = S_{ij}(1,2)_2 \mathbf{1}_{\mathrm{tw}} &= S_{ij}(1,3)_3 \mathbf{1}_{\mathrm{tw}} = 0, \\ \omega^{[k]}_1 h^{[j]}(-\frac{1}{2})\mathbf{1}_{\mathrm{tw}} &= \delta_{jk}\frac{9}{16} h^{[j]}(-\frac{1}{2})\mathbf{1}_{\mathrm{tw}}, \\ H^{[k]}_3 h^{[j]}(-\frac{1}{2})\mathbf{1}_{\mathrm{tw}} &= \delta_{jk}\frac{15}{128} h^{[j]}(-\frac{1}{2})\mathbf{1}_{\mathrm{tw}}, \\ S_{ij}(1,1)_1 h^{[j]}(-\frac{1}{2})\mathbf{1}_{\mathrm{tw}} &= \frac{1}{2} h^{[i]}(-\frac{1}{2})\mathbf{1}_{\mathrm{tw}}, \\ S_{ij}(1,2)_2 h^{[j]}(-\frac{1}{2})\mathbf{1}_{\mathrm{tw}} &= \frac{-3}{4} h^{[i]}(-\frac{1}{2})\mathbf{1}_{\mathrm{tw}}, \\ S_{ij}(1,3)_3 h^{[j]}(-\frac{1}{2})\mathbf{1}_{\mathrm{tw}} &= \frac{15}{16} h^{[i]}(-\frac{1}{2})\mathbf{1}_{\mathrm{tw}}. \end{aligned} \tag{2.64}$$

对于任意一对不同的元素 i、j、$k \in \{1,\dots,d\}$、l、$m \in \mathbb{Z}$ 和 r、$s \in \mathbb{Z}_{>0}$，通过直接计算可得

$$[h^{[j]}(l), S_{ij}(r,s)_m] = s\binom{l}{s}\binom{-l-m+r+s-2}{r-1}h^{[i]}(l+m-r-s+1), \tag{2.65}$$

$$[\omega_l^{[j]}, S_{ij}(1,r)_m] = rS_{ij}(1,r+1)_{m+l} + lrS_{ij}(1,r)_{m+l-1}, \tag{2.66}$$

$$[S_{kj}(1,1)_l, S_{ij}(1,r)_m] = r\sum_{t=1}^{r+1}\binom{l}{t}S_{ik}(1,t)_{l+m-r-1+t}. \tag{2.67}$$

我们还有

$$\begin{aligned}
S_{ij}(2,1) &= \omega_0 S_{ij}(1,1) - S_{ij}(1,2),\\
S_{ij}(3,1) &= \frac{1}{2}\omega_0^2 S_{ij}(1,1) - \omega_0 S_{ij}(1,2) + S_{ij}(1,3),\\
S_{ij}(2,2) &= \omega_0 S_{ij}(1,2) - 2S_{ij}(1,3),\\
S_{ij}(3,2) &= -\omega_{-2}^{[j]} S_{ij}(1,1) + 2\omega_{-1}^{[j]} S_{ij}(1,2) + \frac{1}{2}\omega_0^2 S_{ij}(1,2) - 2\omega_0 S_{ij}(1,3),\\
S_{ij}(3,3) &= \frac{-1}{2}\omega_0\omega_{-2}^{[j]} S_{ij}(1,1) + \frac{3}{2}\omega_{-2}^{[i]} S_{ij}(1,2)\\
&\quad - \omega_0\omega_{-1}^{[i]} S_{ij}(1,2) + \omega_0\omega_{-1}^{[j]} S_{ij}(1,2)\\
&\quad + \frac{1}{4}\omega_0^3 S_{ij}(1,2) + 2\omega_{-1}^{[i]} S_{ij}(1,3) - \omega_0^2 S_{ij}(1,3).
\end{aligned} \tag{2.68}$$

对于 $P \subset \{1,\dots,d\}$，我们定义子空间

$$M(1)_P := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{ h^{[i_1]}(-j_1)\dots h^{[i_n]}(-j_n)\mathbf{1} \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, i_1,\dots,i_n \in \{1,\dots,d\}, j_1,\dots,j_n \in \mathbb{Z}_{>0},\\ \left\{ l \in \{1,\dots,n\} \;\middle|\; |\{k \mid i_k = l\}| \text{ is odd} \right\} = P \end{array} \right\} \tag{2.69}$$

由 $M(1)$ 生成的子空间

$$M(1)_P^+ := M(1)_P \cap M(1)^+ \tag{2.70}$$

由 $M(1)^+$ 生成的子空间。注意，如果 $|P|$ 是奇数，则 $M(1)_P^+ = \{0\}$。

对于 P、$P' \subset \{1,\dots,d\}$，我们定义 $P \ominus P' := (P \cup P') \setminus (P \cap P') \subset \{1,\dots,d\}$.

引理 2.4。

（1）我们有 $M(1)^+ = \bigcup_{P \subset \{1,\dots,d\}} M(1)_P^+$。 $|P|$ *is even*

（2）对于 P、$P' \subset \{1,\dots,d\}$,

$$\begin{aligned}
&(M(1)_P)\cdot M(1)_{P'} \subset M(1)_{P\ominus P'} \text{ and}\\
&(M(1)_P^+)\cdot M(1)_{P'}^+ \subset M(1)_{P\ominus P'}^+.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

证明。结论 (1) 由 $M(1)_P^+$ 的定义得出。结论 (2) 由以下事实得出：对于 $i \in \{1,\dots,d\}$ 和 $j \in \mathbb{Z}$, $h^{[i]}(j)M(1)_{P'} \subset M(1)_{\{i\}\ominus P'}$。 □

对于满足 $p_1 > \cdots > p_{2t}$ 的 $P = \{p_1, \ldots, p_{2t}\} \subset \{1, \ldots, d\}$，我们定义

$$\begin{aligned} B_P &:= \{h^{[p_1]}(-1)h^{[p_2]}(-r_1)\cdots h^{[p_{2t-1}]}(-1)h^{[p_{2t}]}(-r_t)\mathbf{1} \mid r_1, \ldots, r_t \in \{1,2,3\}\} \\ &= \{S_{p_1,p_2}(1,r_1)_{-1}\cdots S_{p_{2t-1},p_{2t}}(1,r_t)_{-1}\mathbf{1} \mid r_1, \ldots, r_t \in \{1,2,3\}\}. \end{aligned} \tag{2.72}$$

由 (2.63)、(2.65) 和 (2.68)，我们知道

$$M(1)_P^+ = M(1)_\varnothing^+ \cdot (B_P)_-\mathbf{1} \tag{2.73}$$

因此，再次由 (2.65)，$M(1)_P^+$ 也由形如以下形式的元素张成

$$S_{p_1,p_2}(1,r_1)_{-s_1}\cdots S_{p_{2t-1},p_{2t}}(1,r_t)_{-s_t}a, \tag{2.74}$$

其中 $a \in M(1)_\varnothing^+$、s_1、...、$s_t \in \mathbb{Z}_{>0}$ 以及 r_1、...、$r_t \in \{1,2,3\}$。由 (2.63)、(2.65)、(2.68) 以及 [19,(3.4)、(3.5)、(3.7)、(3.9)、(3.10)、(3.11)]，$M(1)_P^+$ 由形如以下形式的元素张成

$$a_{-l_1}^{(1)}\ldots a_{-l_m}^{(m)}S_{p_1,p_2}(1,r_1)_{-s_1}\cdots S_{p_{2t-1},p_{2t}}(1,r_t)_{-s_t}\mathbf{1}, \tag{2.75}$$

其中 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$a^{(1)}$、...、$a^{(m)} \in \{\omega^{[j]}, H^{[j]} \mid j \in \{1,\ldots,d\}\}$、$l_1$、...、$l_m$、$s_1$、...、$s_t \in \mathbb{Z}_{>0}$，以及$r_1$、...、$r_t \in \{1,2,3\}$。由 (2.74)，同理可知，$M(1)_P^+$由形如以下形式的元素张成

$$S_{p_1,p_2}(1,r_1)_{-s_1}\cdots S_{p_{2t-1},p_{2t}}(1,r_t)_{-s_t}a_{-l_1}^{(1)}\ldots a_{-l_m}^{(m)}\mathbf{1}, \tag{2.76}$$

其中 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $a^{(1)}$,... , $a^{(m)} \in \{\omega^{[j]}, H^{[j]} \mid j \in \{1,\ldots,d\}\}$, $l_1, \ldots, l_m, s_1, \ldots, s_t \in \mathbb{Z}_{>0}$ 和 $r_1, \ldots, r_t \in \{1,2,3\}$。

注 2.5. 设 $u, v \in M(1)^+$, $i, j \in \mathbb{Z}, \rho, \sigma \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$, 以及 p, q一对 属于 $\{1,\ldots,d\}$ 的不同元素。在本文中，如果 $[u_i, v_j] = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{i}{k}(u_k v)_{i+j-k} \in M(1)_{\{p,q\}}^+$，那么我们经常将该元素表示为以下形式元素的线性组合

$$a_{i_1}^{(1)}\cdots a_{i_k}^{(k)}S_{pq}(1,r)_t b_{j_1}^{(1)}\cdots b_{j_l}^{(l)} \tag{2.77}$$

其中 $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $r = 1,2,3$, $t \in \mathbb{Z}$，以及

$$\begin{aligned} &(a^{(1)}, i_1), \ldots, (a^{(k)}, i_k) \in \{(\omega^{[k]}, m) \mid m \leq \rho\}_{k=1}^d \cup \{(H^{[k]}, n) \mid n \leq \sigma\}_{k=1}^d, \\ &(b^{(1)}, j_1), \ldots, (b^{(l)}, j_l) \in \{(\omega^{[k]}, m) \mid m \geq \rho+1\}_{k=1}^d \cup \{(H^{[k]}, n) \mid n \geq \sigma+1\}_{k=1}^d. \end{aligned} \tag{2.78}$$

在计算中，我们使用 [19, 引理 2.2] 以及附录 A2 中的数据 $a_k b\,(k = 0,1,\ldots)$。在大多数情况下，我们使用计算机代数系统 Risa/Asir[16]获得结果的显式表达式。

例如，我们将计算一对不同元素 i、$j \in \{1,\ldots,d\}$ 的 $[H_l^{[j]}, S_{ij}(1,1)_n]$

以及 l 和 $n\in\mathbb{Z}$。对于 $m\in\mathbb{Z}_{\geq -1}$，根据 [19, 引理 2.2], ，我们有

$$\begin{aligned}(\omega^{[j]}_{-2}S_{ij}(1,1))_n &= \sum_{\substack{r\leq m\\ r+s+2=n}}(-r-1)\omega^{[j]}_r S_{ij}(1,1)_s+\sum_{\substack{r\geq m+1\\ r+s+2=n}}(-r-1)S_{ij}(1,1)_s\omega^{[j]}_r\\ &\quad+\sum_{t=0}^{1}(t+1)\binom{m+2}{t+2}(\omega^{[j]}_t S_{ij}(1,1))_{n-2-t}\\ &= \sum_{\substack{r\leq m\\ r+s+2=n}}(-r-1)\omega^{[j]}_r S_{ij}(1,1)_s+\sum_{\substack{r\geq m+1\\ r+s+2=n}}(-r-1)S_{ij}(1,1)_s\omega^{[j]}_r\\ &\quad+\binom{m+2}{2}S_{ij}(1,2)_{n-2}+2\binom{m+2}{3}S_{ij}(1,1)_{n-3},\\ (\omega^{[j]}_{-1}S_{ij}(1,2))_n &= \sum_{\substack{r\leq m\\ r+s+1=n}}\omega^{[j]}_r S_{ij}(1,2)_s+\sum_{\substack{r\geq m+1\\ r+s+1=n}}S_{ij}(1,2)_s\omega^{[j]}_r\\ &\quad-\sum_{t=0}^{1}\binom{t}{0}\binom{m+1}{t+1}(\omega^{[j]}_t S_{ij}(1,2))_{n-1-t}\\ &= \sum_{\substack{r\leq m\\ r+s+1=n}}\omega^{[j]}_r S_{ij}(1,2)_s+\sum_{\substack{r\geq m+1\\ r+s+1=n}}S_{ij}(1,2)_s\omega^{[j]}_r\\ &\quad-2\binom{m+1}{1}S_{ij}(1,3)_{n-1}-2\binom{m+1}{2}S_{ij}(1,2)_{n-2}.\end{aligned}\tag{2.79}$$

由 (A2.4) 和 (2.79)，可得

$$\begin{aligned}&[H^{[j]}_l,S_{ij}(1,1)_n]=\sum_{k=0}^{3}\binom{l}{k}(H^{[j]}_k S_{ij}(1,1))_{l+n-k}\\ &=(-2\omega^{[j]}_{-2}S_{ij}(1,1)+4\omega^{[j]}_{-1}S_{ij}(1,2))_{l+n}\\ &\quad+4lS_{ij}(1,3)_{l+n-1}+\binom{l}{2}\frac{7}{3}S_{ij}(1,2)_{l+n-2}+\binom{l}{3}S_{ij}(1,1)_{l+n-3}\\ &=-2\Big(\sum_{\substack{r\leq m\\ r+s+2=l+n}}(-r-1)\omega^{[j]}_r S_{ij}(1,1)_s+\sum_{\substack{r\geq m+1\\ r+s+2=l+n}}(-r-1)S_{ij}(1,1)_s\omega^{[j]}_r\\ &\qquad+\binom{m+2}{2}S_{ij}(1,2)_{l+n-2}+2\binom{m+2}{3}S_{ij}(1,1)_{l+n-3}\Big)\\ &\quad+4\Big(\sum_{\substack{r\leq m\\ r+s+1=l+n}}\omega^{[j]}_r S_{ij}(1,2)_s+\sum_{\substack{r\geq m+1\\ r+s+1=l+n}}S_{ij}(1,2)_s\omega^{[j]}_r\\ &\qquad-2\binom{m+1}{1}S_{ij}(1,3)_{l+n-1}-2\binom{m+1}{2}S_{ij}(1,2)_{l+n-2}\Big)\\ &\quad+4lS_{ij}(1,3)_{l+n-1}+\binom{l}{2}\frac{7}{3}S_{ij}(1,2)_{l+n-2}+\binom{l}{3}S_{ij}(1,1)_{l+n-3}.\end{aligned}\tag{2.80}$$

3 弱 V_L^+-模中 $M(1)^+$ 的朱代数的模：一般情形

设 L 是一个有限秩非退化偶格 d 且 $\mathfrak{h} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} L$. 本节将证明，任意非零弱 $M(1)^+$-模中都存在一个不可约 V_L^+-模（命题 3.5）。在本节中， M 是一个弱 V_L^+ -模。

引理 3.1. 对于一个有限秩的非退化偶格 L，存在一列元素β_1、……、 $\beta_d \in L$，使得 $\langle \beta_i$、 $\beta_i \rangle \neq 0$ 对于 $i = 1$、……、 d 成立，并且 $\langle \beta_j$、 $\beta_k \rangle = 0$ 对任意一对不同的元素j、 $k \in \{1, \dots, d\}$成立。

证明。令 γ_1、……、 γ_d 为 $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L$ 的一组基，使得对于所有 $i \in \{1, \dots, d\}$ 以及满足 $j \neq k$ 的 j、$k \in \{1, \dots, d\}$，有 $\langle \gamma_i$、 $\gamma_i \rangle \neq 0$ 和 $\langle \gamma_j$、 $\gamma_k \rangle = 0$。由于 γ_1、……、 $\gamma_d \in \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L$，存在一个非零整数 m_i，使得对于所有 $i = 1$、……、 d 均有 $m\gamma_i \in L$。于是，元素 $\beta_i = m\gamma_i$（$i = 1$、……、 d）满足该条件。 □

令 $\Lambda = \oplus_{i=1}^d \mathbb{Z}\beta_i$ 为 L 的子格，使得对于 $i = 1$， $\langle \beta_i, \beta_i \rangle \neq 0$，……， d，并且对于任意一对不同的元素 $j, k \in \{1, \dots, d\}$， $\langle \beta_j, \beta_k \rangle = 0$。我们有

$$V^+_{\mathbb{Z}\beta_1} \otimes \cdots \otimes V^+_{\mathbb{Z}\beta_d} \subset V_L^+ \tag{3.1}$$

并取 $\mathfrak{h}$ 的标准正交基 $h^{[1]}, \dots, h^{[d]}$，其定义为

$$h^{[i]} = \frac{1}{\sqrt{\langle \beta^{[i]}, \beta^{[i]} \rangle}} \beta^{[i]} \quad (i = 1, \dots, d). \tag{3.2}$$

由于对于任意一对不同的元素 $i, j \in \{1, \dots, d\}$， $[h_l^{[i]}, h_m^{[j]}] = 0$，且 $l, m \in \mathbb{Z}$，利用引理 3.7]，对 d 作归纳可知，在弱 V_L^+-模 M 中，存在 $\{\omega_1^{[i]}, H_3^{[i]}\}_{i=1}^d$ 的共同特征向量 u，使得对所有 $i = 1, \dots, d$， $\epsilon(\omega^{[i]}, u) \leq 1$ 且 $\epsilon(H^{[i]}, u) \leq 3$。

引理 3.2. 设 U 是一个弱 $M(1)^+$-模的子空间。

(1) 设 $i, j \in \{1, \dots, d\}$ 满足 $i \neq j$和 $k \in \mathbb{Z}$，使得对所有 $u \in U$都有 $k \geq \epsilon(S_{ij}(1, 1)\ u)$。若 U在 $\omega_1^{[j]}$ 的作用下稳定，则

$$\epsilon(S_{ij}(1, r+1), u) \leq k + r \tag{3.3}$$

对所有 $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$均成立。

(2) 假设 $\alpha \in \mathbb{C}h^{[1]}$。设 $i \in \{2, \dots, d\}$ 和 $t \in \mathbb{Z}$ 满足对所有 $u \in U$都有 $t \geq \epsilon(E(\alpha)\ u)$。若 U在 $S_{i1}(1,1)_1$, 的作用下稳定，则

$$\epsilon(S_{i1}(1, 1)_0 E(\alpha), u) \leq t + 1. \tag{3.4}$$

证明. 对于(1)，取 $l, m \in \mathbb{Z}$ 和 $r \in \mathbb{Z}_{>0}$，由(2.66)得

$$S_{ij}(1, r+1)_{l+m} = \frac{1}{m}[\omega_l^{[j]}, S_{ij}(1, r)_m] - lS_{ij}(1, r)_{l+m-1}, \tag{3.5}$$

这蕴含(3.3)。

(2) 由于对所有 $m \in \mathbb{Z}_{>0}$， $S_{i1}(1,1)_m E(\alpha) = 0$，因此通过与上述相同的论证可得结论。 □

引理 3.3. 设 U 是弱 $M(1)^+$-模 M 的一个有限维子空间，满足对所有$k=1,\dots,d$ 和 $u\in U$，$\epsilon(\omega^{[k]},u)\le 1$，$\epsilon(H^{[k]},u)\le 3$，且 $\omega_1^{[k]}u\in U$, $H_3^{[k]}u\in U$。对于任意一对不同的元素 $i,j\in\{1,\dots,d\}$，我们将 $\max\{\{\epsilon(S_{ij}(1,1)\ u)\mid u\in U\}\cup\{-1\}\}$ 记作 $\epsilon(S_{ij})$。

(1) 设 i、j 是 $\{1,\dots,d\}$ 中两个不同的元素。我们定义 $W:=$ 张成$_{\mathbb{C}}\{S_{ij}(1,r)_{\epsilon(S_{ij})+r-1}u\mid r=1,2,3\}$。对于任意 $w\in W$ 和 $k=1,\dots,d$，有 $\epsilon(\omega^{[k]},w)\le 1,\epsilon(H^{[k]},w)\le 3$ 以及$\omega_1^{[k]}w, H_3^{[k]}w\in W$。

（2）假设 $\epsilon(S_{ij})\le 1$对于任意一对不同的元素 i，$j\in\{1,\dots,d\}$即 $U\subset\Omega^{M(1)^+}(M)$。对于 $P=\{p_1,\dots,p_{2t}\}\subset\{1,\dots,d\}$ 满足 $p_1>\cdots>p_{2t}$，我们定义

$$S_PU:=\text{张成}_{\mathbb{C}}\{S_{p_1,p_2}(1,r_1)_{r_1}\cdots S_{p_{2t-1},\ p_t}(1,r_t)_{r_t}u\mid u\in U\quad\text{以及}\ r_1,\ \dots,\ r_t\in\{1,2,3\}\}\tag{3.6}$$

以及 $SU:=\sum_{P\subset\{1,\dots,d\},\ |P|\ is\ even}S_PU$。于是，$SU$是 $\Omega^{M(1)^+}(M)$ 的一个 $A(M(1)^+)$-子模。

证明。(1) 我们可取 (i,j) 为 $(2,1)$。定义 $\epsilon(S):=\epsilon(S_{21}(1,1))$，$\epsilon(S_{21}(1,2)):=\epsilon(S)+1$，以及 $\epsilon(S_{21}(1,3)):=\epsilon(S)+2$。由引理 3.2 (1)，对于所有 $i=1,2,3$，有 $\epsilon(S_{21}(1,i))\ge\epsilon(S_{21}(1,i)\ u)$。定义 $A:=\{\omega^{[i]},H^{[i]}\}_{i=1}^d$，$B:=\{S_{21}(1,i)\mid i=1,2,3\}$，$\epsilon(\omega^{[i]}):=1=\mathrm{wt}(\omega^{[i]})-1$，以及对于 $i=1,\dots,d$，$\epsilon(H^{[i]}):=3=\mathrm{wt}(H^{[i]})-1$。为将引理 2.3 (3) 应用于 u，对于 $a\in A$，我们将计算定义于 (2.20) 中的 $\zeta(a)$。注意，$M(1)^+_\varnothing=\langle A_-\rangle\mathbf{1}$ 且$M(1)^+_{\{2,1\}}=B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1}=\langle A_-\rangle B_-\mathbf{1}$（$M(1)^+_P$的定义见 (2.70)）。由引理 2.4 (2)，有 $A\cdot\langle A_-\rangle\mathbf{1}\subset\langle A_-\rangle\mathbf{1}$，$A\cdot(\langle A_-\rangle B_-\mathbf{1})\subset\langle A_-\rangle B_-\mathbf{1}$，$B\cdot\langle A_-\rangle\mathbf{1}\subset B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1}$，以及$A\cdot(B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1})\subset B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1}$，其中符号 $\langle A_-\rangle\mathbf{1}$、$\langle A_-\rangle B_-\mathbf{1}$ 和 $B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1}$ 定义于 (2.10) 和 (2.11) 中。对于满足 $j\ge\min\{\mathrm{wt}(b)\mid b\in B\}=2$的 $j\in\mathbb{Z}$，根据 δ的定义 (2.12),

$$\delta(j)=\epsilon(S_{21}(1,1))-2+j.\tag{3.7}$$

对于 $a\in\{\omega_1^{[i]},H_3^{[i]}\}_{i=1}^d$和 $j=1,2,3$，由于 $\mathrm{wt}(a)\ge 2$，我们有

$$\begin{aligned}&\delta(\mathrm{wt}(a)+\mathrm{wt}(S_{21}(1,j))-1)-\epsilon(S_{21}(1,j))=\delta(\mathrm{wt}(a)+j)-(\epsilon(S_{21}(1,1))+j-1)\\&=\epsilon(S_{21}(1,1))-2+(\mathrm{wt}(a)+j)-(\epsilon(S_{21}(1,1))+j-1)=\mathrm{wt}(a)-1\end{aligned}\tag{3.8}$$

因此 $\zeta(a)=\mathrm{wt}(a)-1$。将引理 2.3 (3) 应用于 u，我们有 $a_{\mathrm{wt}(a)-1}U\subset U$ 和$a_kU=0$，对于 $a\in A$ 和 $k>\mathrm{wt}(a)-1$。

(2) 对于满足 $|P|$ 为偶数的 $P\subset\{1,\dots,d\}$，利用 (1)，对 $|P|$ 作归纳论证可得 $\epsilon(\omega^{[k]},u)\le 1,\epsilon(H^{[k]},u)\le 3$，以及 $\omega_1^{[k]}u\in S_PU$, $H_3^{[k]}u\in S_PU$，对所有 $k=1,\dots,d$和$u\in S_PU$均成立。令 $A:=\{\omega^{[i]},H^{[i]}\}_{i=1}^d$和

$$\begin{aligned}B&:=\left\{h^{[p_1]}(-1)h^{[p_2]}(-r_1)\cdots h^{[p_{2t-1}]}(-1)h^{[p_{2t}]}(-r_n)\mathbf{1}\ \middle|\ \begin{array}{l}t\in\mathbb{Z}_{\ge 0},r_1,\dots,r_t\in\{1,2,3\}\\p_1,\dots,p_{2t}\in\{1,\dots,d\}\text{ such that}\\p_1>\cdots>p_{2t}\end{array}\right\}\\&=\left\{S_{p_1,p_2}(1,r_1)_{-1}\cdots S_{p_{2t-1},p_{2t}}(1,r_t)_{-1}\mathbf{1}\ \middle|\ \begin{array}{l}t\in\mathbb{Z}_{\ge 0},r_1,\dots,r_t\in\{1,2,3\}\\p_1,\dots,p_{2t}\in\{1,\dots,d\}\text{ such that}\\p_1>\cdots>p_{2t}\end{array}\right\}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

由引理 2.4、(2.75) 和 (2.76)，可得 $A\cdot(B_-\mathbf{1})=\langle A_-\rangle B_-\mathbf{1}=B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1}=M(1)^+$。对于齐次元素 $u\in M(1)^+$，定义 $\epsilon(u):=\mathrm{wt}(u)-1$。注意，$\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{b_{\epsilon(b)}u\mid b\in B,u\in U\}=SU$。由于 $A\cdot\langle A_-\rangle\mathbf{1}\subset\langle A_-\rangle\mathbf{1}$ 和 $A\cdot M(1)^+=B\cdot M(1)^+=M(1)^+$，结论由引理 2.3 (4) 得出。

□

引理 3.4。对于非零弱 V_L^+-模 M，存在 $\Omega^{M(1)^+}(M)$ 的一个不可约 $A(M(1)^+)$-子模。

证明。设 $h^{[1]},\dots,h^{[d]}$ 是由 (3.2) 定义的 $\mathfrak{h}$ 的标准正交基。根据 (3.2) 后的论证，我们可以取 $\{\omega_1^{[i]},H_3^{[i]}\}_{i=1}^d$ 的一个共同特征向量 u，使得对于所有 $i=1,\dots,d$，$\epsilon(\omega^{[i]},u)\le 1$ 且 $\epsilon(H^{[i]},u)\le 3$。我们取一对不同的元素 i,j，使得对于任意一对不同的元素 $l,m\in\{1,\dots,d\}$，$\epsilon(S_{ij}(1,1)\,u)\ge\epsilon(S_{lm}(1,1)\,u)$。不妨设 $(i,j)=(2,1)$。定义 $\epsilon(S)=\epsilon\,S_{21}(1,1))\coloneqq\epsilon(S_{21}(1,1)\,u)$，$\epsilon(S_{21}(1,2))\coloneqq\epsilon(S)+1$，以及 $\epsilon(S_{21}(1,3))\coloneqq\epsilon(S)+2$。根据引理 3.2 (1)，对于所有 $i=1,2,3$，有 $\epsilon(S_{21}(1,i))\ge\epsilon(S_{21}(1,i)\,u)$。因此，如果 $\epsilon(S)\le 0$，那么 $u\in\Omega^{M(1)^+}(M)$，且 $\mathbb{C}u$ 是一个不可约 $A(M(1)^+)$-模。

从现在起，我们假设 $\epsilon(S)\ge 1$。我们定义子空间 $W\coloneqq\sum_{r=1}^3\mathbb{C}S_{21}(1,r)_{\epsilon(S)+r-1}u$ of M。令 $w\in W$ 和 (j,k) 为 $\{1,\dots,d\}$ 中一对不同的元素。我们将研究 $\epsilon(S_{jk}(1,1)\,w)$。注意，根据 $\epsilon(S)$ 的定义和引理 3.2，对于所有 $r\ge 1$，$\epsilon(S_{jk}(1,r)\,u)\le\epsilon(S)+r-1$。若 $\{j,k\}\cap\{1,2\}=\varnothing$，则

$$\epsilon(S_{jk}(1,1),w)\le\epsilon(S_{jk}(1,1),u)\tag{3.10}$$

因为对于所有 l、$m\in\mathbb{Z}$ 和 $r=1$，2、3，$S_{jk}(1,1)_lS_{21}(1,r)_m=S_{21}(1,r)_mS_{jk}(1,1)_l$。对于 $j\in\{3,\dots,d\}$、$r\in\{1,2,3\}$ 和 $l\in\mathbb{Z}$，由 (2.67)

$$S_{j1}(1,1)_lS_{21}(1,r)_{\epsilon(S)+r-1}u=S_{21}(1,r)_{\epsilon(S)+r-1}S_{j1}(1,1)_lu+r\sum_{s=1}^{r+1}\binom{l}{s}S_{2j}(1,s)_{\epsilon(S)-2+l+s}u.\tag{3.11}$$

因此，对于 $r=1$、2、3，有 $\epsilon(S_{j1}(1,1)\,S_{21}(1,r)_{\epsilon(S)+r-1}u)\le\max\{\epsilon(S_{j1}(1,1)\,u)\,1\}$，从而

$$\epsilon(S_{j1}(1,1),w)\le\max\{\epsilon(S_{j1}(1,1),u),1\}.\tag{3.12}$$

同样的论证表明，对于 $j\in\{3,\dots,d\}$，

$$\epsilon(S_{j2}(1,1),w)\le\max\{\epsilon(S_{j2}(1,1),u),1\}.\tag{3.13}$$

我们令 $(j,k)=(2,1)$。对于 $i\in\mathbb{Z}$ 和 $r=1$、2、3，根据 [14, 命题 4.5。7] 将 $u=S_{21}(1,1)\,v=S_{21}(1,r)$ $p=i$、$q=\epsilon(S)+r-1$、$l=\epsilon(S)+1$ 以及 $m=0$ 代入其中所使用的符号，我们得到

$$S_{21}(1,1)_iS_{21}(1,r)_{\epsilon(S)+r-1}u=\sum_{j=0}^{\epsilon(S)+1}\binom{\epsilon(S)+1}{j}(S_{21}(1,1)_{i-(\epsilon(S)+1)+j}S_{21}(1,r))_{2\epsilon(S)+r-j}u.\tag{3.14}$$

由引理 2.4 (2) 可知，$S_{21}(1,1)_{i-(\epsilon(S)+1)+j}S_{21}(1,r)$ 是 $M(1)^+_\varnothing$ 的一个元素。由于对于所有 $i=1$、……、d，$\epsilon(\omega^{[i]},u)\le 1$ 且 $\epsilon(H^{[i]},u)\le 3$，对于任意齐次元素 $a\in M(1)^+_\varnothing$，利用 (2.75)，对 $\mathrm{wt}\,a$ 作归纳论证可得，对于所有满足 $i>\mathrm{wt}(a)-1$ 的情形，均有 $a_iu=0$。我们看到，对于 $j\in\mathbb{Z}$ 和 $r\in\mathbb{Z}_{>0}$，

$$2\epsilon(S)+r-j-(\mathrm{wt}((S_{21}(1,1)_{i-(\epsilon(S)+1)+j}S_{21}(1,r)))-1)=\epsilon(S)+i-2.\tag{3.15}$$

因此，若 $\epsilon(S)\ge 2$，则由 (3.14) 可得 $S_{21}(1,1)_iS_{21}(1,r)_{\epsilon(S)+r-1}u=0$ 对所有 $i\ge\epsilon(S)$ 均成立，因此

$$\epsilon(S_{21}(1,1),w)\le\epsilon(S)-1.\tag{3.16}$$

对于任意 $w\in W$和 $i=1$，……，d，由引理 3.3 (1) 可知，$\omega_1^{[i]}w$、$H_3^{[i]}w\in W$ 以及 $\epsilon(\omega^{[i]},w)\le 1$、$\epsilon(H^{[i]},w)\le 3$。因此，若 $\epsilon(S)\ge 2$，则根据 (3.10)、(3.12)、(3.13) 和 (3.16)，我们可以取 W 中 $\{\omega_1^{[i]},H_3^{[i]}\}_{i=1}^d$ 的一个共同特征向量 v，使得对于满足 $\{i,j\}\ne\{1,2\}$ 的任意一对不同元素 i、$j\in\{1,\dots,d\}$，$\epsilon(S_{21}(1,1)\,v)<\epsilon(S_{21}(1,1)\,u)$，且 $\epsilon(S_{ij}(1,1)\,v)\le\max\{\epsilon(S_{ij}(1,1)\,u)\,1\}$。反复用这个 v 替换 u，我们得到一个非零元素 $u\in\Omega^{M(1)^+}(M)$。现在，由引理 3.3 (2) 即得结论，□

由引理 3.4 和 [8, 定理 6.2], ，我们得到如下结果；当 $\operatorname{rank} L = 1$ 时，该结果已在[19, 命题 3.13] 中得到:

命题 3.5. 设 L 是一个有限秩的非退化偶格， M 是一个非零弱 V_L^+ -模。则存在 M 的一个非零 $M(1)^+$-子模。

4 $M(1)^+$ 的扩张群

在本节中，我们研究秩为 d 的 $M(1)^+$ 的一些弱模。如第 1 节所述，在 [9, 定理 4.5] 中， $M(1)^+$-模在 $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{h} = 1$ 的情形下已得到分类；在 [10,定理 6.2.2] 中，一般情形也已得到分类（见（1.1））。本节中的结果将用于本系列论文的第 3 部分，以证明每个不可约弱 V_L^+ -模都是不可约 $M(1)^+$- 模的直和。当 $d = 1$ 时，本节中的一些结果已经在 [2, 第 5] 节中得到。在下面论证的某些部分，我们将使用 [2, 第 5] 节中的技巧。在整个本节中， M 是一个 $M(1)^+$-模， W 是一个不可约 $M(1)^+$-模，而 N 是一个弱 $M(1)^+$-模。在本节中，我们考虑以下正合列

$$0 \to W \to N \xrightarrow{\pi} M \to 0 \tag{4.1}$$

弱 $M(1)^+$-模。我们将使用 (2.59) 和 (2.61) 中的符号。注意，对于所有 i、$j = 1$、.....、d, $[\omega_1^{[i]}, \omega_1^{[j]}] = [\omega_1^{[i]}, H_3^{[j]}] = [H_3^{[i]}, H_3^{[j]}] = 0$。设 B 是 $M(0)$ 的一个不可约 $A(M(1)^+)$-子模。对于 $\zeta = (\zeta^{[1]}$、.....、$\zeta^{[d]})$ $\xi = (\xi^{[1]}$、.....、$\xi^{[d]}) \in \mathbb{C}^d$, 令 $v \in B$ 使得

$$(\omega_1^{[i]} - \zeta^{[i]})v = (H_3^{[i]} - \xi^{[i]})v = 0 \tag{4.2}$$

对于所有 $i = 1$、.....、d，并定义

$$W_{\zeta,\xi} = \bigcap_{j=1}^{d} \operatorname{Ker}(\omega_1^{[j]} - \zeta^{[j]}) \cap \bigcap_{j=1}^{d} \operatorname{Ker}(H_3^{[j]} - \xi^{[j]}) \cap W. \tag{4.3}$$

引理 4.1. 在上述设定下，存在 $u \in N$ 使得

$$\pi(u) = v, \quad (\omega_1^{[i]} - \zeta^{[i]})u, (H_3^{[i]} - \xi^{[i]})u \in W_{\zeta,\xi} \tag{4.4}$$

and

$$(\omega_1^{[i]} - \zeta^{[i]})^2 u = (H_3^{[i]} - \xi^{[i]})^2 u = 0 \tag{4.5}$$

对于所有 $i = 1$、.....、d。

证明。令 $u \in N$ 使得 $\pi(u) = v$。由于 $(\omega_1^{[i]} - \zeta^{[i]})u$、$(H_3^{[i]} - \xi^{[i]})u \in W$，并且对于所有 $i = 1$、.....、d, $\omega_1^{[i]}$ 和 $H_3^{[i]}$ 在 W 上的作用都是半单的，故 N 的子空间 $U :=$ 张成 $_{\mathbb{C}}\{a_{(1)} \cdots a_{(n)} u \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$a_{(1)}$、.....、$a_{(n)} \in \{\omega_1^{[i]}, H_3^{[i]}\}_{i=1}^d\}$ 是有限维的。对于 $\rho = (\rho^{[i]})_{i=1}^d$、$\sigma = (\sigma^{[i]})_{i=1}^d \in \mathbb{C}^d$, 定义

$$U_{\rho,\sigma} := \left\{ w \in U \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{there exists } n \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ such that} \\ (\omega_1^{[i]} - \rho^{[i]})^n w = (H_3^{[i]} - \sigma^{[i]})^n w = 0 \text{ for all } i = 1, \ldots, d. \end{array} \right\} \tag{4.6}$$

并取一个分解 $U = \oplus_{\rho,\sigma \in \mathbb{C}^d} U_{\rho,\sigma}$。对于任意 $\rho, \sigma \in \mathbb{C}^d$, 我们还取一个线性映射 $f^{\rho,\sigma} \in$ 张成 $_{\mathbb{C}}\{a_{(1)} \cdots a_{(n)} \mid n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, a_{(1)}, \ldots, a_{(n)} \in \{\omega_1^{[i]}, H_3^{[i]}\}_{i=1}^d\}$, 使得 $f^{\rho,\sigma}|_{U_{\rho,\sigma}} = \mathrm{id}_{U_{\rho,\sigma}}$

并且对所有 $(\mu,\nu) \neq (\rho,\sigma)$，都有 $f^{\rho,\sigma}|_{U_{\mu,\nu}} = 0$。我们记 $u = \sum_{\rho,\sigma\in\mathbb{C}^d} u_{\rho,\sigma}$，其中 $u_{\rho,\sigma} \in U_{\rho,\sigma}$。我们固定$i \in \{1,\dots,d\}$。由于 $(\omega_1^{[i]} - \zeta^{[i]})u \in W$，我们有

$$(\omega_1^{[i]} - \zeta^{[i]})u_{\rho,\sigma} = (\omega_1^{[i]} - \zeta^{[i]})f^{\rho,\sigma}u = f^{\rho,\sigma}(\omega_1^{[i]} - \zeta^{[i]})u \in W \cap U_{\rho,\sigma}. \tag{4.7}$$

由于 $\omega_1^{[i]}$ 在 W 上的作用是半单的，

$$(\omega_1^{[i]} - \rho^{[i]})(\omega_1^{[i]} - \zeta^{[i]})u_{\rho,\sigma} = 0. \tag{4.8}$$

由于 $u_{\rho,\ \sigma} \in U_{\rho,\ \sigma}$，存在 $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ 使得 $(\omega_1^{[i]} - \rho^{[i]})^k u_{\rho,\ \sigma} = 0$。当 $\rho^{[i]} \neq \zeta^{[i]}$ 时，将 $(\omega_1^{[i]} - \rho^{[i]})^k$ 和 (4.8) 的左边视为关于 $\omega_1^{[i]} - \rho^{[i]}$ 的多项式，并用后者除前者，得到 $(\omega_1^{[i]} - \rho^{[i]})u_{\rho,\ \sigma} = 0$，因此

$$u_{\rho,\sigma} = \frac{1}{\rho^{[i]} - \zeta^{[i]}}(\omega_1^{[i]} - \zeta^{[i]})u_{\rho,\sigma} \in W \tag{4.9}$$

由 (4.7) 得。同样的论证表明

$$(H_3^{[i]} - \sigma^{[i]})(H_3^{[i]} - \xi^{[i]})u_{\rho,\sigma} = 0 \tag{4.10}$$

并且若 $\sigma^{[i]} \neq \xi^{[i]}$，则 $u_{\rho,\ \sigma} \in W$。因此，若 $(\rho,\sigma) \neq (\zeta,\xi)$，则 $u_{\rho,\ \sigma} \in W$，所以我们可以取 $u = u_{\zeta,\ \xi} \in U_{\zeta,\ \xi}$。在这种情况下，由 (4.8) 和 (4.10)，(4.4) 和 (4.5) 成立。 □

设 $u \in N$满足 (4.4) 和 (4.5)。若 $(W,B) \ncong (M(1)^+, M(1)^-(0))$，则由[2, 引理 4.8] 可知

$$\epsilon(\omega^{[i]},u) \leq 1 \text{ and } \epsilon(H^{[i]},u) \leq 3 \tag{4.11}$$

对所有的 $i = 1,\dots,d$，其中 $\epsilon = \epsilon_{Y_N\circ}$

对于一对不同的元素 $i, j \in \{1, \dots, d\}$，直接计算表明 th at

$$
\begin{aligned}
0 = {} & 6\omega_{-2}^{[i]} S_{ij}(1,1) + 2\omega_{-2}^{[j]} S_{ij}(1,1) \\
& - 4\omega_0 \omega_{-1}^{[i]} S_{ij}(1,1) + \omega_0\omega_0\omega_0 S_{ij}(1,1) \\
& + 4\omega_{-1}^{[i]} S_{ij}(1,2) - 4\omega_{-1}^{[j]} S_{ij}(1,2) \\
& - 3\omega_0\omega_0 S_{ij}(1,2) + 6\omega_0 S_{ij}(1,3), \qquad (4.12) \\
0 = {} & 32\omega_{-3}^{[i]} S_{ij}(1,1) - 24H_{-1}^{[i]} S_{ij}(1,1) \\
& - 8\omega_{-3}^{[j]} S_{ij}(1,1) + 24H_{-1}^{[j]} S_{ij}(1,1) \\
& - 120\omega_0\omega_{-2}^{[i]} S_{ij}(1,1) + 36\omega_0\omega_{-2}^{[j]} S_{ij}(1,1) \\
& + 72\omega_0\omega_0\omega_{-1}^{[i]} S_{ij}(1,1) - 9\omega_0\omega_0\omega_0\omega_0 S_{ij}(1,1) \\
& + 12\omega_{-2}^{[i]} S_{ij}(1,2) + 12\omega_{-2}^{[j]} S_{ij}(1,2) \\
& - 72\omega_0\omega_{-1}^{[i]} S_{ij}(1,2) - 72\omega_0\omega_{-1}^{[j]} S_{ij}(1,2) \\
& + 18\omega_0\omega_0\omega_0 S_{ij}(1,2), \qquad (4.13) \\
0 = {} & 8\omega_{-3}^{[j]} S_{ij}(1,1) - 24H_{-1}^{[j]} S_{ij}(1,1) \\
& + 54\omega_0\omega_{-2}^{[i]} S_{ij}(1,1) - 36\omega_0\omega_{-2}^{[j]} S_{ij}(1,1) \\
& - 36\omega_0\omega_0\omega_{-1}^{[i]} S_{ij}(1,1) + 9\omega_0\omega_0\omega_0\omega_0 S_{ij}(1,1) \\
& + 54\omega_{-2}^{[i]} S_{ij}(1,2) - 12\omega_{-2}^{[j]} S_{ij}(1,2) \\
& + 72\omega_0\omega_{-1}^{[j]} S_{ij}(1,2) - 18\omega_0\omega_0\omega_0 S_{ij}(1,2) \\
& + 72\omega_{-1}^{[i]} S_{ij}(1,3), \qquad (4.14) \\
0 = {} & 14\omega_{-3}^{[j]} S_{ij}(1,1) + 12H_{-1}^{[j]} S_{ij}(1,1) - 3\omega_{-2}^{[j]} S_{ij}(1, \ 2) - 36\omega_{-1}^{[j]} S_{ij}(1,3)。 \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

以下结果是 (2.59)、引理 2.4 和 (2.75) 的直接推论：

引理 4.2. 设 K 是一个 $M(1)^+$-模，满足 $K = M(1)^+ \cdot K(0)$。那么， K 由 $a_{i_1}^{(1)} \cdots a_{i_n}^{(n)} b$ 张成，其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $b \in K(0)$, $a^{(j)} \in \{\omega^{[k]}, J^{[k]} \mid k = 1, \dots, d\} \cup \{S_{lm}(1,r) \mid 1 \leq m < l \leq d, r = 1, 2, 3\}$ 和 $i_j \in \mathbb{Z}_{\leq \mathrm{wt}\, a^j - 2}$，其中 $j = 1, \dots, n$。

引理 4.3. 设 U 是弱 $M(1)^+$-模的一个子空间，且在$\{\omega_1^{[i]}, H_3^{[i]}\}_{i=1}^d$的作用下稳定。假设对所有 $u \in U$ 及 $i = 1, \dots, d$，有 $\epsilon(\omega^{[i]}, u) \leq 1$ 且 $\epsilon(H^{[i]}, u) \leq 3$。令

i、$j \in \{1,\dots,d\}$，其中 $i \neq j$且 $\epsilon(S) \in \mathbb{Z}$，使得对所有 $u \in U$， $\epsilon(S) \geq \epsilon(S_{ij},u)$。那么，对于 $u \in U$

$$\begin{aligned}
0 = {} & -\epsilon(S)(\epsilon(S)+1)^2 S_{ij}(1,1)_{\epsilon(S)}u - (\epsilon(S)+2)(3\epsilon(S)+1)S_{ij}(1,2)_{\epsilon(S)+1}u \\
& + 4\epsilon(S)S_{ij}(1,1)_{\epsilon(S)}\omega_1^{[i]}u - 4S_{ij}(1,1)_{\epsilon(S)}\omega_1^{[j]}u \\
& - 2(3\epsilon(S)+1)S_{ij}(1,3)_{\epsilon(S)+2}u + 4S_{ij}(1,2)_{\epsilon(S)+1}\omega_1^{[i]}u - 4S_{ij}(1,2)_{\epsilon(S)+1}\omega_1^{[j]}u, \qquad (4.16)\\
0 = {} & -\epsilon(S)(\epsilon(S)+1)(3\epsilon(S)^2+27\epsilon(S)+22)S_{ij}(1,1)_{\epsilon(S)}u \\
& - 2(3\epsilon(S)^3+39\epsilon(S)^2+82\epsilon(S)+24)S_{ij}(1,2)_{\epsilon(S)+1}u \\
& + 8\epsilon(S)(3\epsilon(S)+11)S_{ij}(1,1)_{\epsilon(S)}\omega_1^{[i]}u + 8(3\epsilon(S)-13)S_{ij}(1,1)_{\epsilon(S)}\omega_1^{[j]}u \\
& - 48(3\epsilon(S)+1)S_{ij}(1,3)_{\epsilon(S)+2}u + 8(3\epsilon(S)-13)S_{ij}(1,2)_{\epsilon(S)+1}\omega_1^{[j]}u \\
& - 8S_{ij}(1,1)_{\epsilon(S)}H_3^{[i]}u + 8S_{ij}(1,1)_{\epsilon(S)}H_3^{[j]}u \\
& + 8(3\epsilon(S)+11)S_{ij}(1,2)_{\epsilon(S)+1}\omega_1^{[i]}u, \qquad (4.17)\\
0 = {} & 2(3\epsilon(S)^3+21\epsilon(S)^2+42\epsilon(S)+14)S_{ij}(1,2)_{\epsilon(S)+1}u - 8(3\epsilon(S)-7)S_{ij}(1,1)_{\epsilon(S)}\omega_1^{[j]}u \\
& + 4(18\epsilon(S)+7)S_{ij}(1,3)_{\epsilon(S)+2}u - 8(3\epsilon(S)-7)S_{ij}(1,2)_{\epsilon(S)+1}\omega_1^{[j]}u \\
& - 8S_{ij}(1,1)_{\epsilon(S)}H_3^{[j]}u + 3\epsilon(S)(\epsilon(S)+1)^2(\epsilon(S)+4)S_{ij}(1,1)_{\epsilon(S)}u \\
& - 12\epsilon(S)(\epsilon(S)+4)S_{ij}(1,1)_{\epsilon(S)}\omega_1^{[i]}u - 36S_{ij}(1,2)_{\epsilon(S)+1}\omega_1^{[i]}u \\
& + 24S_{ij}(1,3)_{\epsilon(S)+2}\omega_1^{[i]}u, \qquad (4.18)\\
0 = {} & -S_{ij}(1,2)_{\epsilon(S)+1}u - 5S_{ij}(1,1)_{\epsilon(S)}\omega_1^{[j]}u - S_{ij}(1,3)_{\epsilon(S)+2}u - 11S_{ij}(1,2)_{\epsilon(S)+1}\omega_1^{[j]}u \\
& + 2S_{ij}(1,1)_{\epsilon(S)}H_3^{[j]}u - 6S_{ij}(1,3)_{\epsilon(S)+2}\omega_1^{[j]}u. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

若 u 是 $\{\omega_1^{[i]},\omega_1^{[j]},H_3^{[i]},H_3^{[j]}\}$ 的共同特征向量，且其特征值为 $\{\zeta^{[i]},\zeta^{[j]},\xi^{[i]},\xi^{[j]}\}$:

$$(\omega_1^{[i]}-\zeta^{[i]})u = (\omega_1^{[j]}-\zeta^{[j]})u = (H_3^{[i]}-\xi^{[i]})u = (H_3^{[j]}-\xi^{[j]})u = 0, \qquad (4.20)$$

then

$$
\begin{aligned}
0 = &-(\epsilon(S)-1)\big((18\zeta^{[i]}+3)\epsilon(S)^5+(-54\zeta^{[i]}+6)\epsilon(S)^4\\
&+(1-36\zeta^{[j]}-78\zeta^{[i]}-216\zeta^{[j]}\zeta^{[i]}+216(\zeta^{[i]})^2)\epsilon(S)^3\\
&+(-2+4\zeta^{[j]}+22\zeta^{[i]}+744\zeta^{[j]}\zeta^{[i]}+24(\zeta^{[i]})^2)\epsilon(S)^2\\
&+(12\zeta^{[i]}-192\zeta^{[j]}\zeta^{[i]}-48(\zeta^{[i]})^2-1152\zeta^{[j]}(\zeta^{[i]})^2)\epsilon(S)\\
&+384\zeta^{[j]}(\zeta^{[i]})^2-16\zeta^{[j]}\zeta^{[i]}\big)\\
&+8\big((9\epsilon(S)^4+12\epsilon(S)^3+(-18\zeta^{[i]}-36\zeta^{[j]})\epsilon(S)^2+(-24\zeta^{[i]}-1)\epsilon(S)\\
&-4\zeta^{[j]}-6\zeta^{[i]}-24\zeta^{[j]}\zeta^{[i]}+24(\zeta^{[i]})^2\big)\xi^{[i]}\\
&-8\big(((18\zeta^{[i]}+3)\epsilon(S)^2+(-24\zeta^{[i]}+1)\epsilon(S)+24(\zeta^{[i]})^2+(-24\zeta^{[j]}-6)\zeta^{[i]}-4\zeta^{[j]})\big)\xi^{[j]}, \qquad (4.21)\\
0 = &-(\epsilon(S)-1)\big((18\zeta^{[j]}+3)\epsilon(S)^5+(-54\zeta^{[j]}+6)\epsilon(S)^4\\
&+(1-36\zeta^{[i]}-78\zeta^{[j]}-216\zeta^{[i]}\zeta^{[j]}+216(\zeta^{[j]})^2)\epsilon(S)^3\\
&+(-2+4\zeta^{[i]}+22\zeta^{[j]}+744\zeta^{[i]}\zeta^{[j]}+24(\zeta^{[j]})^2)\epsilon(S)^2\\
&+(12\zeta^{[j]}-192\zeta^{[i]}\zeta^{[j]}-48(\zeta^{[j]})^2-1152\zeta^{[i]}(\zeta^{[j]})^2)\epsilon(S)\\
&+384\zeta^{[i]}(\zeta^{[j]})^2-16\zeta^{[i]}\zeta^{[j]}\big)\\
&+8\big((9\epsilon(S)^4+12\epsilon(S)^3+(-18\zeta^{[j]}-36\zeta^{[i]})\epsilon(S)^2+(-24\zeta^{[j]}-1)\epsilon(S)\\
&-4\zeta^{[i]}-6\zeta^{[j]}-24\zeta^{[i]}\zeta^{[j]}+24(\zeta^{[j]})^2\big)\xi^{[j]}\\
&-8\big(((18\zeta^{[j]}+3)\epsilon(S)^2+(-24\zeta^{[j]}+1)\epsilon(S)+24(\zeta^{[j]})^2+(-24\zeta^{[i]}-6)\zeta^{[j]}-4\zeta^{[i]})\big)\xi^{[i]}. \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

证明。首先注意，在 (4.21) 中交换 $\zeta^{[i]}$ 与 $\zeta^{[j]}$、$\xi^{[i]}$ 与 $\xi^{[j]}$ 的位置，即可得到 (4.22)。因此，方程 (4.21) 和 (4.22) 本质上相同；不过，我们将它们都列在这里，以便后续使用。由引理 3.2，$\epsilon(S_{ij}(1,r)\,u) \le \epsilon(S)+r-1$ 对所有 $r=1$、2、..... 以及 $u\in U$ 均成立。我们将引理 2.3 (2) 应用于 (4.12)，其中 $A:=\{\omega^{[i]},\omega^{[j]},H^{[i]},H^{[j]}\}$,$B:=\{S_{ij}(1,r)\mid r=1,2,3\}$, $\epsilon(\omega^{[k]}):=\mathrm{wt}(\omega^{[k]})-1=1$, $\epsilon(H^{[k]}):=\mathrm{wt}(H^{[k]})-1=3$对 $k=i,j$成立，而 $\epsilon(S_{ij}(1,r))=\epsilon(S)+r-1$对 $r=1$、2、3 成立。由引理 2.4，得到 $A\cdot\langle A_-\rangle\mathbf{1}\subset\langle A_-\rangle\mathbf{1}$, $A\cdot(\langle A_-\rangle B_-\mathbf{1})\subset\langle A_-\rangle B_-\mathbf{1}$, $B\cdot\langle A_-\rangle\mathbf{1}\subset B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1}$，以及 $A\cdot(B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1})\subset B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1}$，其中符号$\langle A_-\rangle\mathbf{1}$、$\langle A_-\rangle B_-\mathbf{1}$和 $B_-\langle A_-\rangle\mathbf{1}$ 定义于 (2.10) 和 (2.11) 中。(4.12) 中每一项的权均为 5。与 (3.8) 中相同的论证表明 $\delta(5)=\epsilon(S)+3$，其中 δ定义于 (2.12) 中。由引理 2.3 (2)，(4.12) 对 u 的第 $(\epsilon(S)+3)$ 次作用是以下形式元素的线性组合

$$
q_{\epsilon(q)}p^{(1)}_{\epsilon(p^{(1)})}\cdots p^{(m)}_{\epsilon(p^{(m)})}u \qquad (4.23)
$$

其中 $m\in\mathbb{Z}_{\ge0}$, $p^{(1)},\dots,p^{(m)}\in A$ 和 $q\in B$。为了得到结果 (4.16) 的显式表达式，我们使用计算机代数系统 Risa/Asir[16]。对 u 施加 (4.13)–(4.15) 的 $(\epsilon(S)+4)$ 次作用，同样的论证表明 (4.17)–(4.19) 成立。从 (4.16)–(4.19) 中删去包含 $S_{ij}(1,3)^{\epsilon(S)+2}u$ and$S_{ij}(1,2)^{\epsilon(S)+2}u$ 的项，得到 (4.21) 和 (4.22)。

□

引理 4.4. 设

$$
0\to W\to N\xrightarrow{\pi}M\to 0 \qquad (4.24)
$$

是弱 $M(1)^+$-模的正合列，其中 W 是不可约的 $M(1)^+$-模，N 是弱 $M(1)^+$-模，而 $M=\oplus_{i\in\gamma+\mathbb{Z}_{\ge0}}M_i$ 是一个 $M(1)^+$-模。设 B 是一个不可约

$A(M(1)^+)$-子模，且不同构于 $W(0)$； v 是 B 中 $\{\omega_1^{[i]}, H_3^{[i]}\}_{i=1}^d$ 的共同特征向量，其特征值为 $\{\zeta^{[i]}, \xi^{[i]}\}_{i=1}^d$:

$$(\omega_1^{[i]} - \zeta^{[i]})v = (H_3^{[i]} - \xi^{[i]})v = 0. \tag{4.25}$$

若 $(W, B) \ncong (M(1)^+, M(1)^-(0))$，则存在 $u \in N_\gamma$，使其在典范投影 $N_\gamma \to M_\gamma$ 下的像为 v，满足

$$(\omega_1^{[i]} - \zeta^{[i]})u = (H_3^{[i]} - \xi^{[i]})u = 0 \tag{4.26}$$

对所有 $i = 1,\dots,d$, 均成立。

证明。利用 [2, 命题 4.3] 以及 $i = 1,\dots,d$ 上不可约$M(1)^+$-模的 $\omega_1^{[i]}$ 和 $H_3^{[i]}$ 的特征值（见 [3, 表 1],），可知当 $W = M(1)(\theta)^\pm$ 或 $B = M(1)(\theta)^\pm(0)$ 时结论成立。下面讨论其他情形。对于满足 (4.2) 的 $v \in B$，取满足 (4.4) 和 (4.5) 的 $u \in N$。

设 $B = \mathbb{C}e^\lambda$，其中 $\lambda \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$。在这种情况下，对于 $i = 1, \dots, d$，有 $\zeta^{[i]} = \langle \lambda, h^{[i]} \rangle^2/2$ 和 $\xi^{[i]} = 0$。注意到 $\zeta^{[1]}, \dots, \zeta^{[d]}$ 中至少有一个不为零。令 $W = M(1, \mu)$。由于作为 $A(M(1)^+)$-模，$B \ncong W(0)$，因此有 $\mu \in \mathfrak{h} \setminus \{0, \pm\lambda\}$。由 [2, 命题 4.3],， $\cap_{j=1}^d \operatorname{Ker} H_3^{[j]} \cap M(1, \mu) = \mathbb{C}e^\mu$

$$M(1, \mu)_{\zeta,(0,\dots,0)} = \bigcap_{j=1}^d \operatorname{Ker}(\omega_1^{[j]} - \zeta^{[j]}) \cap \mathbb{C}e^\mu. \tag{4.27}$$

假设

$$(\omega_1^{[i]} - \zeta^{[i]})u \neq 0 \text{ or } H_3^{[i]}u \neq 0 \text{ for some } i \in \{1, \dots, d\}. \tag{4.28}$$

由（4.4）可知 $M(1, \mu)_{\zeta,\ (0,\dots,0)} \neq 0$，因此由（4.27）可得，对所有 $j = 1, \dots, d$， $\langle \lambda, h^{[j]} \rangle = \pm\langle \mu, h^{[j]} \rangle$。于是， $\gamma = \langle \lambda, \lambda \rangle/2 = \langle \mu, \mu \rangle/2$。由此以及 $\lambda \neq \pm\mu$，我们看到存在一个 $A(M(1)^+)$-子模，它是 $N(0)$ 的子模，并且同构于 $B \oplus M(1, \mu)(0) \cong M(1, \lambda)(0) \oplus M(1, \mu)(0)$。因此结论得证。若 $W = M(1)^\pm$，则由 $M(1)_{\zeta,\ (0,\dots,0)}^\pm = 0$ 这一事实可得结论。

若 $B = \mathbb{C}1 = M(1)^+(0)$，则用上述相同的论证即可得出结论。

令 $B = M(1)^-(0)$， $W = M(1, \lambda)$，使得 $\lambda \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$，且对某个 $j \in \{1, \dots, d\}$， $v = h^{[j]}(-1)1$。由于对所有 $i = 1, \dots, d$， $\xi^{[i]} = \delta_{ij}$，由命题 4.3] 可得 [2,

$$M(1, \lambda)_{\zeta,\xi} \subset \mathbb{C}h^{[j]}(-1)e^\lambda. \tag{4.29}$$

假设存在 $i \in \{1, \dots, d\}$ $\omega^{[i]} - \delta_{ij}\ u \neq 0$ $H^{[i]} - \delta_{ij}\ u \neq 0$ $M\ 1\ \lambda\ \zeta\ \xi \neq$, 使得 0 或 $(\ )$。那么，$(\ ,\ )$,因此对所有 $k = 1 \dots d$, 均有 $\delta_{jk} = \langle \lambda, h^{[k]} \rangle^2/2 + \delta_{jk}$，这与 $\lambda \neq 0$ 矛盾。证毕。 □

我们将为引理 4.6 和 4.8 引入以下符号:

定义 4.5. 设 $R[x]$ 是一个定义在交换环 R 上的多项式环。对于两个多项式 $A_1 = \sum_{i=0}^{\deg A_1} A_1、_i x^i$、$A_2 = \sum_{i=0}^{\deg A_2} A_2、_i x^i \in R[x]$，其中 $A_{ki} \in R$，我们定义多项式 $G(A_1, A_2) \in \hat{}\,\hat{}\,\hat{}\,\hat{}R[x]$ 如下。首先，我们准备定义在 $\mathbb{C}$ 上的不定元 $A_1,0, \dots, A_1,\deg A_1, A_2,0, \dots, A_2,\deg A_2$。我们定义 $\hat{}R := \mathbb{C}[\hat{}A_1,0, \dots, \hat{}A_1,\deg A_1, \hat{}A_2,0, \dots, \hat{}A_2,\deg A_2]$ 以及两个多项式 $\hat{}\ A_1 := \sum_{i=0}^{\deg A_1} \hat{}A_1,_i x^i, \hat{}A_2 := \sum_{i=0}^{\deg A_2} \hat{}A_2,_i x^i \in \hat{}R[x]$。下文中，$\deg \hat{}P$ 是 $\hat{}\ P \in \hat{}R[x]$ 关于 x 的次数。如果

ˆ ˆ ˆ

若将 A_1 移至 (4.36) 的右边，并将 A_2 移至 (4.35) 的右边，且将 A_1 和 A_2 视为变量 $\zeta^{[1]}$ 的多项式，那么 (4.32) 中的 $G(A_1, A_2)$ 是一个非零标量倍数，等于

$$\begin{aligned}&\epsilon(S_{i1})^5\epsilon(S_{i1}-1)^4(\epsilon(S_{i1})+1)(2\epsilon(S_{i1})+1)\\&\quad\times(3\epsilon(S_{i1})-2)(3\epsilon(S_{i1})+1)^2(3\epsilon(S_{i1})^2+3\epsilon(S_{i1})-2).\end{aligned}\tag{4.37}$$

由于 $G(A_1, A_2) = 0$，我们有 $\epsilon(S_{i1}) \leq 1$。

假设 $\langle\lambda,\lambda\rangle = 0$。那么，我们可以假设对所有 $j = 3, 4, \ldots\ldots, d$，都有 $0 \neq \langle\lambda, h^{[1]}\rangle^2 = -\langle\lambda, h^{[2]}\rangle^2$ 和 $\langle\lambda, h^{[j]}\rangle = 0$。将 $\zeta^{[2]} = -\zeta^{[1]}$ 代入 (4.21) 和 (4.22)，根据上述相同的论证可得 $\epsilon(S_{21}) \leq 1$。

在 $\langle\lambda,\lambda\rangle \neq 0$ 和 $\langle\lambda,\lambda\rangle = 0$ 这两种情形下，对于其余的 i, j，由于 $\zeta^{[i]}$ 或 $\zeta^{[j]}$ 中有一个为 0，根据上述相同的论证也可得 $\epsilon(S_{ij}) \leq 1$。

(2) 令$B \cong M(1)^-(0)$。假设$W \ncong M(1)^+$。若 $d = 1$，则结论见 [2,定理 5。5]假设 $d \geq 2$。令 i，j为 $\{1, \ldots, d\}$中的一对不同元素。若 $(\zeta^{[i]}, \xi^{[i]}) = (\zeta^{[j]}, \xi^{[j]}) = (0, 0)$，则由 (4.11) 和 (4.21) 可得

$$0 = \epsilon(S_{ij})^2(\epsilon(S_{ij})-1)(\epsilon(S_{ij})+1)(3\epsilon(S_{ij})^2+3\epsilon(S_{ij})-2)\tag{4.38}$$

因此 $\epsilon(S_{ij}) \leq 1$。

假设 $(\zeta^{[i]}, \xi^{[i]}) = (0, 0)$，且 $(\zeta^{[j]}, \xi^{[j]}) = (1, 1)$。由 (4.11) 和 (4.21) 可得

$$0 = (\epsilon(S_{ij})-2)(\epsilon(S_{ij})-1)(3\epsilon(S_{ij})^4+12\epsilon(S_{ij})^3-11\epsilon(S_{ij})^2-20\epsilon(S_{ij})-16)\tag{4.39}$$

因此 $\epsilon(S_{ij}) = 1$或 2。我们进一步假设 $\epsilon(S_{ij}) = 2$。由 (4.16)–(4.19) 可得,

$$S_{ij}(1,2)_3w = -2S_{ij}(1,1)_2w \text{ and } S_{ij}(1,3)_4w = 3S_{ij}(1,1)_2w.\tag{4.40}$$

我们注意到 $S_{ij}(1, 1)_2w \in W$。利用对易关系（见注 2.5）和（4.40），我们得到

$$\omega_1^{[k]}S_{ij}(1,1)_2w = H_3^{[k]}S_{ij}(1,1)_2w = 0\tag{4.41}$$

对所有 $k = 1, \ldots\ldots, d$。由 [2, 命题 4.3] 可知，在任意不可约 $M(1)^+$-模中，除了 $\mathbf{1} \in M(1)^+$ 外，不存在满足 $\omega_1^{[k]}v = H_3^{[k]}v = 0$对所有$k = 1, \ldots\ldots, d$的非零元素 v。这就产生了矛盾。

上述相同的论证表明，当 $B \cong M(1)^+(0)$ 或 $M(1)(\theta)^{\pm}(0)$ 时，结论同样成立。

□

引理 4.7. 对于任意一对非同构不可约 $M(1)^+$-模 M、W，使得 $(M, W) \ncong (M(1)^+, M(1)^-)$ 且 $(M(1)^-, M(1)^+)$，$\mathrm{Ext}^1_{M(1)^+}(M, W) = 0$。

证明。设 N 为一个弱 $M(1)^+$-模，并且

$$0 \to W \to N \xrightarrow{\pi} M \to 0\tag{4.42}$$

一个弱 $M(1)^+$-模的正合列。我们将 $M = \oplus_{i\in\gamma+\mathbb{Z}_{\geq 0}}M_i$记为 $M_\gamma \neq 0$，并将 $W = \oplus_{i\in\delta+\mathbb{Z}_{\geq 0}}W_i$记为 $W_\delta \neq 0$。根据引理 4.4 和引理 4.6，存在 $u \in \Omega^{M(1)^+}(N)$，使得 $0 \neq \pi(u) \in M_\gamma$。

假设 $W\cap(M(1)^+\cdot u)\neq 0$。由于 $W_\delta\subset W\cap(M(1)^+\cdot u)$, $\delta\in\gamma+\mathbb{Z}_{\geq 0}$。由于 $W\cap(M(1)^+\cdot u)\neq 0$, 我们有 $\mathrm{Ext}^1_{M(1)^+}(M,W)\neq 0$，因此根据命题 2.5]和命题 3.5]，有 $\mathrm{Ext}^1_{M(1)^+}(W,M)\neq 0$ [2,。因此，存在一个弱$M(1)^+$-模的非分裂正合列 $0\to M\to N\to W\to 0$ 。与上面相同的论证表明 $\gamma\in\delta+\mathbb{Z}_{\geq 0}$，从而 $\gamma=\delta$。由于$M\ncong W$, $N(0)=N_\gamma\cong M_\gamma\oplus W_\delta$作为 $A(M(1)^+)$-模。因此，正合列 (4.42) 分裂，矛盾。

□

引理 4.8。对于 $M=M(1)^+$、$M(1)^-$、$M(1)(\theta)^+$ 以及 $M(1)(\theta)^-$, $\mathrm{Ext}^1_{M(1)^+}(M,M)=0$。

证明。设 W 是一个 $M(1)^+$-模，使得 $W\cong M$、N 是一个弱 $M(1)^+$-模，并且

$$0\to W\to N\xrightarrow{\pi} M\to 0 \tag{4.43}$$

一个弱 $M(1)^+$-模的正合列。我们取 $v\in M(0)$ 和 $u\in N$ 如 (4.2)、(4.4) 和 (4.5) 中所示。在 $M=M(1)^+$ 的情形下，与引理 [2, Proposition 5.1] 的证明中相同的论证表明，$\mathrm{Ext}^1_{M(1)^+}(M(1)^+,M(1)^+)=0$。

对于 $M=M(1)^-$ 或 $M(1)(\theta)^\pm$，只需证明 $N(0)\cong W(0)\oplus M(0)\cong M(0)\oplus$是 $A(M(1)^+)$-$M(0)$模。在朱代数 $A(M(1)^+)$ 中，我们有

$$\omega^{[i]}*H^{[i]}\equiv H^{[i]}*\omega^{[i]} \tag{4.44}$$

并回顾来自 [10, (6.1.11) 和 (6.1.10)] 的以下关系：

$$(\omega^{[i]}-\mathbf{1})*(\omega^{[i]}-\frac{1}{16}\mathbf{1})*(\omega^{[i]}-\frac{9}{16}\mathbf{1})*H^{[i]}\equiv 0, \tag{4.45}$$

$$(132(\omega^{[i]})^2-65\omega^{[i]}-70H^{[i]}+3)*H^{[i]}\equiv 0 \tag{4.46}$$

对于 $i=1,\dots,d$。这里，我们注意到 H_a 在 [10,第 6] 节中等于 $-9H^{[a]}$ 在投影 $M(1)^+\to A(M(1)^+)$ 下的像，其中 $a=1,\dots,d$。令 A_1 为 (4.45) 右端除以 $H^{[i]}$ 所得的商，并令 A_2 为 (4.46) 右端除以 $H^{[i]}$ 所得的商： $A_1:=(\omega^{[i]}-\mathbf{1})*(\omega^{[i]}-(1/16)\mathbf{1})*(\omega^{[i]}-(9/16)\mathbf{1})$，以及 $A_2:=132(\omega^{[i]})^2-65\omega^{[i]}-70H^{[i]}+3$。若将 A_1 和 A_2 视为 $\omega^{[i]}$ 中的多项式，则 (4.32) 中的 $G(A_1,A_2)$ 是下式的非零标量倍数

$$(H^{[i]}-1)*(H^{[i]}-\frac{-1}{128})*(H^{[i]}-\frac{15}{128}) \tag{4.47}$$

因此

$$H^{[i]}*(H^{[i]}-1)*(H^{[i]}-\frac{-1}{128})*(H^{[i]}-\frac{15}{128})\equiv 0 \tag{4.48}$$

对所有的 $i=1,\dots,d$。

(1) 令 $M=M(1)(\theta)^+$。由于对于 W 中任意一对不同的元素 $i,j\in\{1,\dots,d\}$，都有 $S_{ij}(1,1)_1\mathbf{1}_{\mathrm{tw}}=0\,S_{ij}(1,1)_1u\in\mathbb{C}v$。注意到 $\omega_1^{[i]}\mathbf{1}_{\mathrm{tw}}=(1/16)\mathbf{1}_{\mathrm{tw}}$ 和 $H_3^{[i]}\mathbf{1}_{\mathrm{tw}}=(-1/128)\mathbf{1}_{\mathrm{tw}}$。由 (4.45) 和 (4.48)，对所有 $w\in N(0)$，有 $\omega_1^{[i]}w=(1/16)w$ 和 $H_3^{[i]}w=(-1/128)w$。为简便起见，我们将 $\epsilon(S_{ij}(1,1)\ u)$ 记为 $\epsilon(S)$。由 (4.21),

$$0=\epsilon(S)(11\epsilon(S)^2-15\epsilon(S)+6)(6\epsilon(S)^3+6\epsilon(S)^2-7\epsilon(S)+1) \tag{4.49}$$

因此 $\epsilon(S)=0$。由引理 3.2 (1)，对所有 $k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$，有 $S_{ij}(1,k)_ku=0$，从而 $N(0)\cong M(1)(\theta)^+(0)\oplus M(1)(\theta)^+(0)$ 是 $A(M(1)^+)$-模。

(2) 设 $M = M(1)^-$。我们考察 $N(0)$。由于 $N(0)/W(0) \cong M(1)^-(0)$，所以 $A^u \cdot N(0) \neq 0$。由于 $A^t \cdot N(0) \subset W(0)$ $A^u * A^t = 0$，且对于任意非零的 $w \in W(0)$，都有 $A^u \cdot w \neq 0$，因此 $A^t \cdot N(0) = 0$。对于任意一对不同的元素 i、$j \in \{1, \ldots, d\}$，由 [10, 命题 5.3 可知 $A^u * \Lambda_{ij} = 0$。采用相同的论证可得 $\Lambda_{ij} \cdot N(0) = 0$。我们注意到，$\omega^{[i]}|_{N(0)}$的特征值为 0 或 1，而 $H^{[i]}|_{N(0)}$ 的特征值也为 0 或 1。取一个非零的 $v \in M(0)$ 和如 (4.2)、(4.4) 及 (4.5) 中所示的 $u \in N$。固定 $i = 1$，....., d。由 (4.48),

$$H_3^{[i]} u = u \text{ or } H_3^{[i]} u = 0. \tag{4.50}$$

我们研究以下三种情形:

(2-1) 若 $H_3^{[i]} u = u$，则由 (4.45) 可得 $\omega_1^{[i]} u = u$。(2-2) 情形为 $H_3^{[i]} u = 0$ 且 $(\omega_1^{[i]} - 1)^2 u = 0$。由于 $(\omega_1^{[i]} - 1)u \in W(0)$，并且不存在非零向量 $w \in M(1)^-(0)$ 使得 $\omega_1^{[i]} w = w$ 且 $H_3^{[i]} w = 0$，因此有 $(\omega_1^{[i]} - 1)u = 0$。(2-3) 情形为 $H_3^{[i]} u = 0$ 且 $(\omega_1^{[i]})^2 u = 0$。由于 $0 \neq u \in M(0) \cong M(1)^-(0)$，存在 k 使得 $H_3^{[k]} u \neq 0$。上文 (2-1) 中的论证表明，$H_3^{[k]} u = u$ 且$\omega_1^{[k]} u = u$。由于 $\omega_1^{[k]} \omega_1^{[i]} u = \omega_1^{[i]} u$，我们有 $E_{kk}^u \omega_1^{[i]} u = \omega_1^{[i]} u$ 属于 $W(0)$。由 [10, 引理 5.2.2]，$\omega_1^{[i]} u = 0$。

因此 $A(M(1)^+) \cdot u = A^u \cdot u$。由于 A^u 同构于矩阵代数，$A^u \cdot u$ 是一个不可约的 $A(M(1)^+)$-模。因此 $N(0) \cong M(1)^-(0) \oplus M(1)^-(0)$。

(3) 对于 $M = M(1)(\theta)^-$ 的情形，与上文 (2) 中相同的论证表明，$N(0) \cong M(1)(\theta)^-(0) \oplus M(1)(\theta)^-(0)$。

□

由引理 4.7 、4.8, [2, 命题 2.5], 和 [4, 命题 3.5], ，我们得到以下结果 :

命题 4.9. 若一对不可约 $M(1)^+$-模 (M, W) 满足以下条件之一，则 $\mathrm{Ext}^1_{M(1)^+}(M, W) = \mathrm{Ext}^1_{M(1)^+}(W, M) = 0$。

(1) $M \cong M(1, \lambda)$，其中 $\lambda \in \mathfrak{h} \setminus \{0\}$和 $W \ncong M(1, \lambda)$。
(2) $M \cong M(1)(\theta)^{\pm}$。(3) $M \cong M(1)^+$ 和 $W \ncong M(1)^-$。
(4) $M \cong M(1)^-$ 和 $W \ncong M(1)^+$。

以下结果可由引理 4.4 和引理 4.6 直接推出。这里，我们将 [8,定理 6.2]中与朱代数的模 U相关联的 $\mathbb{N}$-分次模 $M(U)$称为广义 Verma 模。

推论 4.10。设 Ω 是一个不可约的 $A(M(1)^+)$-模，满足 $\Omega \ncong M(1)_0^+ = \mathbb{C}\mathbf{1}$。则与 Ω 相关联的 $M(1)^+$ 的广义 Verma 模是不可约的。

证明。设 $N = \oplus_{i \in \delta + \mathbb{Z}_{\geq 0}} N_i$with $N_\delta =$Ω 为与 Ω 相关联的 $M(1)^+$ 的广义 Verma 模，且 $W = \oplus_{i \in \gamma + \mathbb{Z}_{\geq 0}} W_i$ 为 M 的极大子模，使得 $\Omega \cap W = 0$。我们取 γ，从而

使得 $W_\gamma \neq 0$ if $W \neq 0$。注意到 $\gamma - \delta \in \mathbb{Z}_{>0}$。对正合列$0 \to W \to N \to N/W \to 0$取受限对偶，得到以下正合列

$$0 \to (N/W)' \to N' \to W' \to 0. \tag{4.51}$$

注意，根据 [4, 命题 3.5]，$(N/W)' \ncong M(1)^+$。设 $W_\gamma \neq 0$，并令 B 为 W'_γ 的一个不可约$A(M(1)^+)$-子模。由引理 4.4 和引理 4.6，存在一个非零的 $u' \in \Omega^{M(1)^+}(N'_\gamma)$。对于任意满足 $\omega_2 a = 0$ 和 $i \in \mathbb{Z}_{\geq \operatorname{wt} a}$ 的齐次元素 $a \in M(1)^+$，由 [11,5.2.4] 可得

$$0 = \langle a_i u', w\rangle = (-1)^{\operatorname{wt} a}\langle u', a_{2\operatorname{wt} a - i - 2} w\rangle \tag{4.52}$$

对所有 $w \in N$ 均成立。由于对所有 $i = 1$，……，d，都有 $\omega_2 \omega^{[i]} = \omega_2 J^{[i]} = 0$，由引理 4.2 和 (4.52) 可得 $u' = 0$，矛盾。 □

引理 4.11. 设 W 是与 $A(M(1)^+)$-模 $\mathbb{C}1$ 相关的广义 Verma 模，并且$\pi\colon W \to M(1)^+$ 是典范投影。那么，对于某个$k \in \{1, \ldots, d\}$，$\operatorname{Ker}\pi \cong (M(1)^-)^{\oplus k}$ 是 $M(1)^+$-模。

证明。T 与 [2, (6.1)] 中相同的论证表明，存在一个非分裂正合列 e

$$0 \to M(1)^- \to N \to M(1)^+ \to 0 \tag{4.53}$$

$M(1)^+$-模。因此，$\operatorname{Ker}\pi \neq 0$。令 $u \in W$，使得 $\pi(u) = 1$。注意，$u \in \Omega^{M(1)^+}(N)$。由于 $M(1)_0^- = 0$，对于所有 $k = 1$、……、d，不同元素 i、$j \in \{1, \ldots, d\}$ 的有序对，以及 $r = 1$、2、3，我们都有 $\omega_1^{[k]} u = H_3^{[k]} u = S_{ij}(1, r)_r u = 0$。对于 $i = 1$、……、d，$P(8)_H$ 中的 ^{i} 表示在 $P^{(8)}$ 中将 ω 替换为 $\omega^{[i]}$ 并将 H 替换为 $H^{[i]}$ 后得到的元素，其中 $_H$ 见 [19, (3.27)]。我们已在引理 3.5] 中证明，$_{P^{(8)}、{}^H} = 0$。直接计算可得

$$0 = P_6^{(8),H,i} u = 144(\omega_0^{[i]} - 3H_2^{[i]})u \tag{4.54}$$

对所有 $i = 1, \ldots, d$，在 u 上作用 (4.12) 的第三个作用，得到

$$0 = S_{ij}(1,2)_1 u + S_{ij}(1,3)_2 u \tag{4.55}$$

对任意一对不同的元素 $i, j \in \{1, \ldots, d\}$。由 (4.54)、(4.55) 以及

$$S_{ij}(1,1)_0 u = -(\omega_0 S_{ij}(1,1))_1 u = -S_{ji}(1,2)_1 u - S_{ij}(1,2)_1 u \tag{4.56}$$

对于任意一对不同的 $i, j \in \{1, \ldots, d\}$，$N_1$，均由 $\{\omega_0^{[j]} u, S_{ij}(1,2)_1 u \mid i, j = 1, \ldots, d, i \neq j\}$ 张成。对于不同的 $i, j, k \in \{1, \ldots, d\}$，根据 (4.54)、(4.55) 及对易关系（见

注 2.5），直接计算可得

$$\begin{aligned}
\omega_1^{[j]}\omega_0^{[j]}u &= \omega_0^{[j]}u,\\
\omega_1^{[i]}\omega_0^{[j]}u &= 0,\\
H_3^{[j]}\omega_0^{[j]}u &= \omega_0^{[j]}u,\\
H_3^{[i]}\omega_0^{[j]}u &= 0,\\
S_{ij}(1,1)_1\omega_0^{[j]}u &= -S_{ij}(1,2)_1u,\\
S_{ij}(1,2)_2\omega_0^{[j]}u &= 2S_{ij}(1,2)_1u,\\
S_{ij}(1,3)_3\omega_0^{[j]}u &= -3S_{ij}(1,2)_1u,\\
\omega_1^{[i]}S_{ij}(1,2)_1u &= S_{ij}(1,2)_1u,\\
\omega_1^{[j]}S_{ij}(1,2)_1u &= 0,\\
H_3^{[i]}S_{ij}(1,2)_1u &= S_{ij}(1,2)_1u,\\
H_3^{[j]}S_{ij}(1,2)_1u &= 0,\\
S_{ij}(1,1)_1S_{ij}(1,2)_1u &= -\omega_0^{[j]}u,\\
S_{ij}(1,2)_2S_{ij}(1,2)_1u &= 0,\\
S_{ij}(1,3)_3S_{ij}(1,2)_1u &= 0,\\
S_{kj}(1,1)_1S_{ij}(1,2)_1u &= 0,\\
S_{kj}(1,2)_2S_{ij}(1,2)_1u &= 0,\\
S_{kj}(1,3)_3S_{ij}(1,2)_1u &= 0,\\
S_{ki}(1,1)_1S_{ij}(1,2)_1u &= S_{kj}(1,2)_1u,\\
S_{ki}(1,2)_2S_{ij}(1,2)_1u &= -2S_{kj}(1,2)_1u,\\
S_{ki}(1,3)_3S_{ij}(1,2)_1u &= 3S_{kj}(1,2)_1u.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

因此，由 (2.63)，对每个 $j=1,\dots,d$，线性满射 $M(1)^-(0) \to U^{\langle j\rangle} := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\omega_0^{[j]}u, S_{ij}(1,2)_1u \mid i\neq j\}$ 将 $h^{[j]}(-1)1$ 映至 $\omega_0^{[j]}u$，并将 $h^{[i]}(-1)1$ 映至 $-S_{ij}(1,2)_1u$ 的映射 $i\neq j$ 是一个 $A(M(1)^+)$-同态。由于 $M(1)^-(0)$ 是一个不可约的 $A(M(1)^+)$-模，若 $U^{\langle j\rangle}\neq 0$，则 $U^{\langle j\rangle}\cong M(1)^-(0)$ 作为 $A(M(1)^+)$-模。由于 $\sum_{j=1}^d U^{\langle j\rangle} = N_1$，$(W/(M(1)^+\cdot(\sum_{j=1}^d U^{\langle j\rangle}))_1 = 0$。因此 $(W/(M(1)^+\cdot(\sum_{j=1}^d U^{\langle j\rangle}))\cong M(1)^+$，故 $\mathrm{Ker}\ \pi = M(1)^+\cdot(\sum_{j=1}^d U^{\langle j\rangle})$。现在由推论 4.10 可得结论。 □

由引理 3.4、命题 3.5、推论 4.10 和引理 4.11，我们得到以下结果。

推论 4.12. 设 L 是有限秩非退化偶格，且 M 是一个非零弱 V_L^+-模。那么，存在一个 M 的不可约 $M(1)^+$-子模。

证明。根据引理 3.4，存在 $\Omega^{M(1)^+}(M)$ 的不可约 $A(M(1)^+)$-子模 Ω。令 N 为与 Ω 相关联的 $M(1)^+$ 的广义 Verma 模（命题 3.5），并令 $f: N\to M$ 相关联的 $M(1)^+$-同态。若 $\Omega\ncong\mathbb{C}1$，则根据推论 4.10，N 是不可约的，因此 $f(N)$ 也是不可约的。若 $\Omega\cong\mathbb{C}1$，则根据引理 4.11，$M(1)^-\subset f(N)$ 或 $f(N)\cong M(1)^+$。证明完毕。 □

附录 A2

在本附录中，对于某些 $a,b \in M(\mathbf{1})^+$，我们列出 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 的 $a_k b$ 计算。对于下文未列出的 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$， $a_k b = 0$。利用这些结果，我们可以计算对易关系 $[a_i, b_j] = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{i}{k} (a_k b)_{i+j-k}$。令 $h^{[1]}$, ..., $h^{[d]}$ 为 $\mathfrak{h}$ 的标准正交基。本附录的其余部分中， i、 j、 k、 l 是 $\{1, \ldots, d\}$ 的不同元素。

$$\omega_0^{[j]} S_{ij}(1,1) = S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1}, \qquad \omega_1^{[j]} S_{ij}(1,1) = S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1}, \tag{A2.1}$$

$$\omega_0^{[j]} S_{ij}(1,2) = 2S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \quad \omega_1^{[j]} S_{ij}(1,2) = 2S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1}, \quad \omega_2^{[j]} S_{ij}(1,2) = 2S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1}, \tag{A2.2}$$

$$\begin{aligned}
\omega_0^{[j]} S_{ij}(1,3) &= -\omega_{-2}^{[j]} S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 2\omega_{-1}^{[j]} S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1}, \\
\omega_1^{[j]} S_{ij}(1,3) &= 3S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \\
\omega_2^{[j]} S_{ij}(1,3) &= 3S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1}, \\
\omega_3^{[j]} S_{ij}(1,3) &= 3S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned} \tag{A2.3}$$

$$\begin{aligned}
H_0^{[j]} S_{ij}(1,1) &= -2\omega_{-2}^{[j]} S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 4\omega_{-1}^{[j]} S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1}, \\
H_1^{[j]} S_{ij}(1,1) &= 4S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \\
H_2^{[j]} S_{ij}(1,1) &= \frac{7}{3} S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1}, \\
H_3^{[j]} S_{ij}(1,1) &= S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned} \tag{A2.4}$$

$$\begin{aligned}
H_0^{[j]} S_{ij}(1,2) &= -6\omega_0 \omega_{-2}^{[j]} S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 6\omega_{-2}^{[i]} S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad - 4\omega_0 \omega_{-1}^{[i]} S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + 12\omega_0 \omega_{-1}^{[j]} S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad + \omega_0 \omega_0 \omega_0 S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + 8\omega_{-1}^{[i]} S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad - 6\omega_0 \omega_0 S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \\
H_1^{[j]} S_{ij}(1,2) &= -6\omega_{-2}^{[j]} S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 12\omega_{-1}^{[j]} S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1}, \\
H_2^{[j]} S_{ij}(1,2) &= \frac{38}{3} S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \\
H_3^{[j]} S_{ij}(1,2) &= 8S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1}, \\
H_4^{[j]} S_{ij}(1,2) &= 4S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned} \tag{A2.5}$$

$$
\begin{aligned}
H_0^{[j]}S_{ij}(1,3) &= \frac{40}{29}\omega_{-3}^{[j]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + \frac{60}{29}H_{-1}^{[j]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad + \frac{-60}{29}\omega_{-2}^{[j]}S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \\
H_1^{[j]}S_{ij}(1,3) &= -12\omega_0\omega_{-2}^{[j]}S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 12\omega_{-2}^{[i]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad - 8\omega_0\omega_{-1}^{[i]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + 24\omega_0\omega_{-1}^{[j]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad + 2\omega_0\omega_0\omega_0S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + 16\omega_{-1}^{[i]}S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad - 12\omega_0\omega_0S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \\
H_2^{[j]}S_{ij}(1,3) &= \frac{-37}{3}\omega_{-2}^{[j]}S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + \frac{74}{3}\omega_{-1}^{[j]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1}, \\
H_3^{[j]}S_{ij}(1,3) &= 27S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \\
H_4^{[j]}S_{ij}(1,3) &= 18S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1}, \\
H_5^{[j]}S_{ij}(1,3) &= 10S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned} \tag{A2.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_0^{[i]}S_{ij}(1,1) &= \omega_0S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1} - S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1}, \\
\omega_1^{[i]}S_{ij}(1,1) &= S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned} \tag{A2.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_0^{[i]}S_{ij}(1,2) &= \omega_0S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} - 2S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \\
\omega_1^{[i]}S_{ij}(1,2) &= S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned} \tag{A2.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_0^{[i]}S_{ij}(1,3) &= \omega_{-2}^{[j]}S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1} - 2\omega_{-1}^{[j]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + \omega_0S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \\
\omega_1^{[i]}S_{ij}(1,3) &= S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned} \tag{A2.9}
$$

$$
\begin{aligned}
H_0^{[i]}S_{ij}(1,1) &= 2\omega_{-2}^{[j]}S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + \omega_0\omega_0\omega_0S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad - 4\omega_{-1}^{[j]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} - 3\omega_0\omega_0S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad + 6\omega_0S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \\
H_1^{[i]}S_{ij}\mathbf{(1,1)} &= 2\omega_0\omega_0S_{ij}\mathbf{(1,1)}_{-1}\mathbf{1} - 4\omega_0S_{ij}\mathbf{(1,2)}_{-1}\mathbf{1} + 4S_{ij}\mathbf{(1,3)}_{-1}\mathbf{1}, \\
H_2^{[i]}S_{ij}\mathbf{(1,1)} &= \frac{7}{3}\omega_0S_{ij}\mathbf{(1,1)}_{-1}\mathbf{1} + \frac{-7}{3}S_{ij}\mathbf{(1,2)}_{-1}\mathbf{1}, \\
H_3^{[i]}S_{ij}\mathbf{(1,1)} &= S_{ij}\mathbf{(1,1)}_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned} \tag{A2.10}
$$

$$
\begin{aligned}
H_0^{[i]}S_{ij}(1,2) &= -6\omega_{-2}^{[i]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + 4\omega_0\omega_{-1}^{[i]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} - 8\omega_{-1}^{[i]}S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
H_1^{[i]}S_{ij}(1,2) &= -4\omega_{-2}^{[j]}S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 8\omega_{-1}^{[j]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + 2\omega_0\omega_0 S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} - 8\omega_0 S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
H_2^{[i]}S_{ij}(1,2) &= \frac{7}{3}\omega_0 S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + \frac{-14}{3}S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
H_3^{[i]}S_{ij}(1,2) &= S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.11}
$$

$$
\begin{aligned}
H_0^{[i]}S_{ij}(1,3) &= \frac{-4}{3}H_{-1}^{[i]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + \frac{16}{9}\omega_{-3}^{[i]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + \frac{-11}{3}\omega_0\omega_{-2}^{[i]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + 2\omega_0\omega_0\omega_{-1}^{[i]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + \frac{4}{3}\omega_{-2}^{[i]}S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1} - 4\omega_0\omega_{-1}^{[i]}S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
H_1^{[i]}S_{ij}(1,3) &= -2\omega_0\omega_{-2}^{[j]}S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 6\omega_{-2}^{[i]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad - 4\omega_0\omega_{-1}^{[i]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + 4\omega_0\omega_{-1}^{[j]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + \omega_0\omega_0\omega_0 S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + 8\omega_{-1}^{[i]}S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad - 4\omega_0\omega_0 S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
H_2^{[i]}S_{ij}(1,3) &= \frac{7}{3}\omega_{-2}^{[j]}S_{ij}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + \frac{-14}{3}\omega_{-1}^{[j]}S_{ij}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + \frac{7}{3}\omega_0 S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
H_3^{[i]}S_{ij}(1,3) &= S_{ij}(1,3)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.12}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,1)_0 S_{ij}(1,1) &= \omega_0\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1} + \omega_0\omega_{-1}^{[j]}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,1)_1 S_{ij}(1,1) &= 2\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1} + 2\omega_{-1}^{[j]}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,1)_2 S_{ij}(1,1) &= 0,\\
S_{ij}(1,1)_3 S_{ij}(1,1) &= \mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.13}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,1)_0 S_{ij}(1,2) &= 2H_{-1}^{[i]}\mathbf{1} - 2H_{-1}^{[j]}\mathbf{1} + 2\omega_0^2\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1} + \omega_0^2\omega_{-1}^{[j]}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,1)_1 S_{ij}(1,2) &= 2\omega_0\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1} + \omega_0\omega_{-1}^{[j]}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,1)_2 S_{ij}(1,2) &= 4\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,1)_3 S_{ij}(1,2) &= 0,\\
S_{ij}(1,1)_4 S_{ij}(1,2) &= 2\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.14}
$$

$$
\begin{aligned}
&S_{ij}(1,1)_0S_{ij}(1,3) = 3\omega_0 H^{[i]}_{-1}\mathbf{1} - \omega_0 H^{[j]}_{-1}\mathbf{1} + \omega_0^3\omega^{[i]}_{-1}\mathbf{1} + \omega_0^3\omega^{[j]}_{-1}\mathbf{1},\\
&S_{ij}(1,1)_1S_{ij}(1,3) = 3H^{[i]}_{-1}\mathbf{1} + H^{[j]}_{-1}\mathbf{1} + \omega_0^2\omega^{[i]}_{-1}\mathbf{1} + \omega_0^2\omega^{[j]}_{-1}\mathbf{1},\\
&S_{ij}(1,1)_2S_{ij}(1,3) = 3\omega_0\omega^{[i]}_{-1}\mathbf{1},\\
&S_{ij}(1,1)_3S_{ij}(1,3) = 6\omega^{[i]}_{-1}\mathbf{1},\\
&S_{ij}(1,1)_4S_{ij}(1,3) = 0,\\
&S_{ij}(1,1)_5S_{ij}(1,3) = 3\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.15}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,1)_0S_{kj}(1,1) &= S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,1)_1S_{kj}(1,1) &= S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.16}
$$

$$
\begin{aligned}
&S_{ij}(1,1)_0S_{kj}(1,2) = 2S_{ki}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
&S_{ij}(1,1)_1S_{kj}(1,2) = 2S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1},\\
&S_{ij}(1,1)_2S_{kj}(1,2) = 2S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.17}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,1)_0S_{kj}(1,3) = &-3\omega^{[k]}_{-1}S_{ki}(1,1)_{-2}\mathbf{1} + \omega_0\omega^{[k]}_{-1}S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&+ \omega_0^3 S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 2\omega^{[k]}_{-1}S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1}\\
&- 3S_{ki}(1,2)_{-3}\mathbf{1} + 3\omega_0 S_{ki}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,1)_1S_{kj}(1,3) = &\ 3S_{ki}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,1)_2S_{kj}(1,3) = &\ 3S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,1)_3S_{kj}(1,3) = &\ 3S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.18}
$$

$$
S_{ij}(1,1)_0S_{ki}(1,1) = S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1}, \qquad S_{ij}(1,1)_1S_{ki}(1,1) = S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\tag{A2.19}
$$

$$
\begin{aligned}
&S_{ij}(1,1)_0S_{ki}(1,2) = 2S_{kj}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
&S_{ij}(1,1)_1S_{ki}(1,2) = 2S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1},\\
&S_{ij}(1,1)_2S_{ki}(1,2) = 2S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.20}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,1)_0S_{ki}(1,3) = &\ 3\omega^{[k]}_{-2}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} - 2\omega_0\omega^{[k]}_{-1}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&+ \omega_0^3 S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 2\omega^{[k]}_{-1}S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1}\\
&- 3\omega_0 S_{kj}(1,2)_{-2}\mathbf{1} + 3\omega_0 S_{kj}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,1)_1S_{ki}(1,3) = &\ 3S_{kj}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,1)_2S_{ki}(1,3) = &\ 3S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,1)_3S_{ki}(1,3) = &\ 3S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.21}
$$

$$
\begin{aligned}
&S_{ij}(1,2)_0S_{ij}(1,2) = -3\omega_0H_{-1}^{[i]}\mathbf{1} - \omega_0H_{-1}^{[j]}\mathbf{1} - \omega_0^3\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1} + \omega_0^3\omega_{-1}^{[j]}\mathbf{1},\\
&S_{ij}(1,2)_1S_{ij}(1,2) = -6H_{-1}^{[i]}\mathbf{1} - 2H_{-1}^{[j]}\mathbf{1} - 2\omega_0^2\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1} + \omega_0^2\omega_{-1}^{[j]}\mathbf{1},\\
&S_{ij}(1,2)_2S_{ij}(1,2) = -6\omega_0\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1},\\
&S_{ij}(1,2)_3S_{ij}(1,2) = -12\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1},\\
&S_{ij}(1,2)_4S_{ij}(1,2) = 0,\\
&S_{ij}(1,2)_5S_{ij}(1,2) = -6\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.22}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,2)_0S_{ij}(1,3) &= -8\omega_{-1}^{[i]}H_{-1}^{[i]}\mathbf{1} - 2\omega_{-2}^{[i]}\omega_{-2}^{[i]}\mathbf{1} + 2\omega_{-2}^{[j]}\omega_{-2}^{[j]}\mathbf{1} + 8\omega_{-1}^{[j]}H_{-1}^{[j]}\mathbf{1}\\
&\quad - 7\omega_0^2H_{-1}^{[i]}\mathbf{1} + 2\omega_0^2\omega_{-1}^{[i]}\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1} - 2\omega_0^2\omega_{-1}^{[j]}\omega_{-1}^{[j]}\mathbf{1} - 3\omega_0^2H_{-1}^{[j]}\mathbf{1}\\
&\quad - 19\omega_0^4\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1} + 2\omega_0^4\omega_{-1}^{[j]}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_1S_{ij}(1,3) &= -6\omega_0H_{-1}^{[i]}\mathbf{1} - \omega_0H_{-1}^{[j]}\mathbf{1} - \omega_0^3\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1} + \omega_0^3\omega_{-1}^{[j]}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_2S_{ij}(1,3) &= -12H_{-1}^{[i]}\mathbf{1} - 4\omega_0^2\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_3S_{ij}(1,3) &= -12\omega_0\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_4S_{ij}(1,3) &= -24\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_5S_{ij}(1,3) &= 0,\\
S_{ij}(1,2)_6S_{ij}(1,3) &= -12\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.23}
$$

$$
\begin{aligned}
&S_{ij}(1,2)_0S_{kj}(1,1) = -2S_{ki}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
&S_{ij}(1,2)_1S_{kj}(1,1) = -2S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1},\\
&S_{ij}(1,2)_2S_{kj}(1,1) = -2S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.24}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,2)_0S_{kj}(1,2) &= 6\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,1)_{-2}\mathbf{1} - 2\omega_0\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad - \omega_0^3S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1} - 4\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + 6S_{ki}(1,2)_{-3}\mathbf{1} - 6\omega_0S_{ki}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_1S_{kj}(1,2) &= -6S_{ki}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_2S_{kj}(1,2) &= -6S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_3S_{kj}(1,2) &= -6S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.25}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,2)_0S_{kj}(1,3) &= 16\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,1)_{-3}\mathbf{1} - 4H_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + 44\omega_0\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,1)_{-2}\mathbf{1} + 2\omega_0\omega_{-2}^{[i]}S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad - 16\omega_0^2\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1} - \omega_0^4S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad - 10\omega_{-2}^{[k]}S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1} - 4\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,2)_{-2}\mathbf{1}\\
&\quad + 2\omega_0S_{ki}(1,2)_{-3}\mathbf{1} - 4\omega_0\omega_{-1}^{[i]}S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_1S_{kj}(1,3) &= 12\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,1)_{-2}\mathbf{1} - 4\omega_0\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad - 2\omega_0^3S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1} - 8\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + 12S_{ki}(1,2)_{-3}\mathbf{1} - 12\omega_0S_{ki}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_2S_{kj}(1,3) &= -12S_{ki}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_3S_{kj}(1,3) &= -12S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_4S_{kj}(1,3) &= -12S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.26}
$$

$$
S_{ij}(1,2)_0S_{ki}(1,1) = 2S_{kj}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \qquad S_{ij}(1,2)_1S_{ki}(1,1) = S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1}, \tag{A2.27}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,2)_0S_{ki}(1,2) &= 6\omega_{-2}^{[k]}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} - 4\omega_0\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + \omega_0^3S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 4\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad - 3\omega_0S_{kj}(1,2)_{-2}\mathbf{1} + 6\omega_0S_{kj}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_1S_{ki}(1,2) &= 4S_{kj}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_2S_{ki}(1,2) &= 2S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.28}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,2)_0S_{ki}(1,3) &= -16\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,1)_{-3}\mathbf{1} + 4H_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad - 98\omega_0\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,1)_{-2}\mathbf{1} + 34\omega_0^2\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + 3\omega_0^4S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 2\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,2)_{-2}\mathbf{1}\\
&\quad + 22\omega_0\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1} - 4\omega_0^3S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + 6\omega_0S_{kj}(1,3)_{-2}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_1S_{ki}(1,3) &= 9\omega_{-2}^{[k]}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} - 6\omega_0\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + 3\omega_0^3S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 6\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad - 9\omega_0S_{kj}(1,2)_{-2}\mathbf{1} + 9\omega_0S_{kj}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_2S_{ki}(1,3) &= 6S_{kj}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,2)_3S_{ki}(1,3) &= 3S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.29}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,3)_0 S_{ij}(1,3) &= 2\omega_0\omega_{-1}^{[i]}H_{-1}^{[i]}\mathbf{1} + 5\omega_0\omega_{-2}^{[i]}\omega_{-2}^{[i]}\mathbf{1} + \omega_0\omega_{-2}^{[j]}\omega_{-2}^{[j]}\mathbf{1} + 2\omega_0\omega_{-1}^{[j]}H_{-1}^{[j]}\mathbf{1} \\
&\quad + \omega_0^3 H_{-1}^{[i]}\mathbf{1} - \omega_0^3\omega_{-1}^{[i]}\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1} - \omega_0^3\omega_{-1}^{[j]}\omega_{-1}^{[j]}\mathbf{1} - 3\omega_0^3 H_{-1}^{[j]}\mathbf{1} \\
&\quad + 7\omega_0^5\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1} + \omega_0^5\omega_{-1}^{[j]}\mathbf{1}, \\
S_{ij}(1,3)_1 S_{ij}(1,3) &= 4\omega_{-1}^{[i]}H_{-1}^{[i]}\mathbf{1} + 5\omega_{-2}^{[i]}\omega_{-2}^{[i]}\mathbf{1} + \omega_{-2}^{[j]}\omega_{-2}^{[j]}\mathbf{1} + 4\omega_{-1}^{[j]}H_{-1}^{[j]}\mathbf{1} \\
&\quad + 7\omega_0^2 H_{-1}^{[i]}\mathbf{1} - \omega_0^2\omega_{-1}^{[i]}\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1} - \omega_0^2\omega_{-1}^{[j]}\omega_{-1}^{[j]}\mathbf{1} - 3\omega_0^2 H_{-1}^{[j]}\mathbf{1} \\
&\quad + 19\omega_0^4\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1} + \omega_0^4\omega_{-1}^{[j]}\mathbf{1}, \\
S_{ij}(1,3)_2 S_{ij}(1,3) &= 15\omega_0 H_{-1}^{[i]}\mathbf{1} + 5\omega_0^3\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1}, \\
S_{ij}(1,3)_3 S_{ij}(1,3) &= 30H_{-1}^{[i]}\mathbf{1} + 10\omega_0^2\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1}, \\
S_{ij}(1,3)_4 S_{ij}(1,3) &= 30\omega_0\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1}, \\
S_{ij}(1,3)_5 S_{ij}(1,3) &= 60\omega_{-1}^{[i]}\mathbf{1}, \\
S_{ij}(1,3)_6 S_{ij}(1,3) &= 0, \\
S_{ij}(1,3)_7 S_{ij}(1,3) &= 30\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.30}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,3)_0 S_{kj}(1,1) &= -3\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,1)_{-2}\mathbf{1} + \omega_0\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad + \omega_0^3 S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 2\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad - 3S_{ki}(1,2)_{-3}\mathbf{1} + 3\omega_0 S_{ki}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \\
S_{ij}(1,3)_1 S_{kj}(1,1) &= 3S_{ki}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \\
S_{ij}(1,3)_2 S_{kj}(1,1) &= 3S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1}, \\
S_{ij}(1,3)_3 S_{kj}(1,1) &= 3S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.31}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,3)_0 S_{kj}(1,2) &= -16\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,1)_{-3}\mathbf{1} + 4H_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad - 44\omega_0\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,1)_{-2}\mathbf{1} - 2\omega_0\omega_{-2}^{[i]}S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad + 16\omega_0^2\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + \omega_0^4 S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad + 10\omega_{-2}^{[k]}S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + 4\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,2)_{-2}\mathbf{1} \\
&\quad - 2\omega_0 S_{ki}(1,2)_{-3}\mathbf{1} + 4\omega_0\omega_{-1}^{[i]}S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1}, \\
S_{ij}(1,3)_1 S_{kj}(1,2) &= -12\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,1)_{-2}\mathbf{1} + 4\omega_0\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad + 2\omega_0^3 S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 8\omega_{-1}^{[k]}S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1} \\
&\quad - 12S_{ki}(1,2)_{-3}\mathbf{1} + 12\omega_0 S_{ki}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \\
S_{ij}(1,3)_2 S_{kj}(1,2) &= 12S_{ki}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \\
S_{ij}(1,3)_3 S_{kj}(1,2) &= 12S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1}, \\
S_{ij}(1,3)_4 S_{kj}(1,2) &= 12S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.32}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,3)_0S_{kj}(1,3) &= 30H^{[i]}_{-1}S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + 20\omega^{[i]}_{-3}S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1} - 30\omega^{[i]}_{-2}S_{ki}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,3)_1S_{kj}(1,3) &= -40\omega^{[k]}_{-1}S_{ki}(1,1)_{-3}\mathbf{1} + 10H^{[k]}_{-1}S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad - 110\omega_0\omega^{[k]}_{-1}S_{ki}(1,1)_{-2}\mathbf{1} - 5\omega_0\omega^{[i]}_{-2}S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + 40\omega_0^2\omega^{[k]}_{-1}S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 5\omega_0^4S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + 25\omega^{[k]}_{-2}S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + 10\omega^{[k]}_{-1}S_{ki}(1,2)_{-2}\mathbf{1}\\
&\quad - 5\omega_0S_{ki}(1,2)_{-3}\mathbf{1} + 10\omega_0\omega^{[i]}_{-1}S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,3)_2S_{kj}(1,3) &= -30\omega^{[k]}_{-1}S_{ki}(1,1)_{-2}\mathbf{1} + 10\omega_0\omega^{[k]}_{-1}S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + 5\omega_0^3S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 20\omega^{[k]}_{-1}S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad - 30S_{ki}(1,2)_{-3}\mathbf{1} + 30\omega_0S_{ki}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,3)_3S_{kj}(1,3) &= 30S_{ki}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,3)_4S_{kj}(1,3) &= 30S_{ki}(1,2)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,3)_5S_{kj}(1,3) &= 30S_{ki}(1,1)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.33}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,3)_0S_{ki}(1,1) &= 3\omega^{[k]}_{-2}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} - 2\omega_0\omega^{[k]}_{-1}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + \omega_0^3S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 2\omega^{[k]}_{-1}S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad - 3\omega_0S_{kj}(1,2)_{-2}\mathbf{1} + 3\omega_0S_{kj}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,3)_1S_{ki}(1,1) &= S_{kj}(1,3)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.34}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,3)_0S_{ki}(1,2) &= -16\omega^{[k]}_{-1}S_{kj}(1,1)_{-3}\mathbf{1} + 4H^{[k]}_{-1}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad - 98\omega_0\omega^{[k]}_{-1}S_{kj}(1,1)_{-2}\mathbf{1} + 34\omega_0^2\omega^{[k]}_{-1}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + 3\omega_0^4S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 2\omega^{[k]}_{-1}S_{kj}(1,2)_{-2}\mathbf{1}\\
&\quad + 22\omega_0\omega^{[k]}_{-1}S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1} - 4\omega_0^3S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + 6\omega_0S_{kj}(1,3)_{-2}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,3)_1S_{ki}(1,2) &= 6\omega^{[k]}_{-2}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} - 4\omega_0\omega^{[k]}_{-1}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad + \omega_0^3S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 4\omega^{[k]}_{-1}S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1}\\
&\quad - 3\omega_0S_{kj}(1,2)_{-2}\mathbf{1} + 6\omega_0S_{kj}(1,3)_{-1}\mathbf{1},\\
S_{ij}(1,3)_2S_{ki}(1,2) &= 2S_{kj}(1,3)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.35}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{ij}(1,3)_0 S_{ki}(1,3) = &-120\omega_{-1}^{[k]}\omega_{-1}^{[j]}S_{kj}(1,1)_{-2}\mathbf{1} - 300\omega_{-4}^{[j]}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} \\
&- 180H_{-1}^{[j]}S_{kj}(1,1)_{-2}\mathbf{1} - 60H_{-2}^{[j]}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} \\
&+ 40\omega_0\omega_{-1}^{[k]}\omega_{-1}^{[j]}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 240\omega_0\omega_{-3}^{[j]}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} \\
&- 90\omega_0^2\omega_{-2}^{[j]}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 20\omega_0^3\omega_{-1}^{[j]}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} \\
&+ 330\omega_{-2}^{[k]}S_{kj}(1,2)_{-2}\mathbf{1} + 780\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,2)_{-3}\mathbf{1} \\
&- 90H_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1} + 180H_{-1}^{[j]}S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1} \\
&- 120\omega_0^2\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1} - 135\omega_0^4S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1} \\
&- 470\omega_{-2}^{[k]}S_{kj}(1,3)_{-1}\mathbf{1} - 500\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,3)_{-2}\mathbf{1} \\
&+ 750S_{kj}(1,3)_{-4}\mathbf{1}, \\
S_{ij}(1,3)_1 S_{ki}(1,3) = &-8\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,1)_{-3}\mathbf{1} + 2H_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} \\
&- 49\omega_0\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,1)_{-2}\mathbf{1} + 17\omega_0^2\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} \\
&+ 9\omega_0^4S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + \omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,2)_{-2}\mathbf{1} \\
&+ 11\omega_0\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1} - 6\omega_0^3S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1} \\
&+ 9\omega_0S_{kj}(1,3)_{-2}\mathbf{1}, \\
S_{ij}(1,3)_2 S_{ki}(1,3) = &\ 9\omega_{-2}^{[k]}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} - 6\omega_0\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} \\
&+ 3\omega_0^3S_{kj}(1,1)_{-1}\mathbf{1} + 6\omega_{-1}^{[k]}S_{kj}(1,2)_{-1}\mathbf{1} \\
&- 9\omega_0S_{kj}(1,2)_{-2}\mathbf{1} + 9\omega_0S_{kj}(1,3)_{-1}\mathbf{1}, \\
S_{ij}(1,3)_3 S_{ki}(1,3) = &\ 3S_{kj}(1,3)_{-1}\mathbf{1},
\end{aligned}
\tag{A2.36}
$$

记号

V 一个顶点代数。U 一个弱 V-模的子空间。对于所有齐次 $a \in V$，若 $i >$ wt $a - 1\}$，则 $\Omega_V(U) = \{u \in U \mid a_i u = 0$。$\mathfrak{h}$ 一个配备非退化对称双线性形式 $\langle , \rangle$ 的有限维向量空间。$h^{[1]}$, $\ldots, h^{[d]}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的标准正交基。$M(1)$ 与海森堡代数相关的顶点算子代数。L 一个有限秩非退化偶格。d 表示 L 的秩。V_L 与 L 相关的顶点代数。θ 由 L 的 -1 对称性诱导的 V_L 的自同构。$M(1)^+$ 是 $M(1)$ 在 θ 作用下的不动点子代数。V_L^+ 是 V_L 在 θ 作用下的不动点子代数。$I(x)$ 是 $M(1)^+$ 的一个交织算子。$\epsilon(u,v)$ $u_{\epsilon(u,v)}v \neq 0$，且对于所有 $i > \epsilon(u,v)$，若 $I(u,x)v \neq 0$，则 $u_i v = 0$；若 $\epsilon(u,v) = -\infty$，且 $I(u,x)v = 0$，其中 $I\colon M \times W \to N((x))$ 是一个交织算子，并且 $u \in M$, $v \in W$（见 (2.9)）。$A(V)$ 表示顶点算子代数 V 的朱代数。$A_- B :=$ 张成$_{\mathbb{C}}\{a_{-i}b \mid a \in A, b \in B,$ 和 $i \in \mathbb{Z}_{>0}\}$（见 (2.10)）。$\langle A_- \rangle B$ 见 (2.11)。$\omega = (1/2)\sum_{i=1}^{d} h^{[i]}(-1)^2\mathbf{1}$。$E(\alpha) = e^{\alpha} + \theta(e^{\alpha})$，其中 $\alpha \in \mathfrak{h}$。$\omega^{[i]} = (1/2)h^{[i]}(-1)^2$。$H^{[i]} = (1/3)(h^{[i]}(-3)h^{[i]}(-1)\mathbf{1} - h^{[i]}(-2)^2\mathbf{1})$。

利益冲突
作者声明不存在利益冲突。

致谢
作者感谢匿名审稿人提出的宝贵意见。

参考文献

[1] T. Abe，《电荷共轭轨形的融合规则》，《代数杂志》242 (2001), 624–655。[2] T. Abe，《正定偶格 L 的顶点算子代数 V_L^+ 的有理性》，《数学杂志》249 (2005), 455–484。[3] T. Abe 和 C. Dong，《顶点算子代数 V_L^+ 的不可约模的分类：一般情形》，《代数杂志》273 (2004), 657–685。[4] T. Abe、C. Dong 和 H. S. Li，《顶点算子代数 $M(1)^+$ 和 V_L^+ 的融合规则》，《数学物理通讯》253 (2005), 171–219。[5] R. Borcherds，《顶点代数、卡茨-穆迪代数与怪兽群》，《美国国家科学院院刊》83 (1986), 3068–3071。

[6] R. Borcherds, 《怪物月光与怪物李超代数》, 《数学发明》109 (1992), 405–444。[7] J. H. Conway 和 S. P. Norton, 《怪物月光》, 《伦敦数学会会刊》11 (1979), 308–339。[8] C. Dong、H. S. Li 和 G. Mason, 《顶点算子代数的扭曲表示》, 《数学年刊》310 (1998), 571–600。[9] C. Dong 和 K. Nagatomo, 《顶点算子代数$M(1)^+$的不可约模的分类》, 《代数杂志》216 (1999), 384–404。[10] C. Dong 和 K. Nagatomo, 《顶点算子代数$M(1)^+$的不可约模的分类: II. 高秩》, 《代数杂志》240 (2001), 289–325。[11] I. B. Frenkel、Y. Huang 和 J. Lepowsky, 《顶点算子代数及其模的公理化方法》, 《美国数学会回忆录》104, 美国数学会, 1993。[12] I. B. Frenkel、J. Lepowsky 和 A. Meurman, 《顶点算子代数与怪兽》, 《纯粹与应用数学》134, 学术出版社, 1988。[13] Yi-Zhi Huang, 《分次受限顶点（超）代数的生成元、张成集及扭曲模的存在性》, 《数学精选》（新辑）26 (2020), 第 62 号论文, 42 页。[14] J. Lepowsky 和 H. S. Li, 《顶点算子代数及其表示导论》, 《数学进展》227, Birkhäuser Boston, Inc., 美国马萨诸塞州波士顿, 2004。[15] H. S. Li, 《顶点算子、顶点超代数及模的局部系统》, 《纯粹与应用代数杂志》109 (1996), 143–195。[16] Risa/Asir, http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir.html。[17] K. Tanabe, https://sites.google.com/view/computer-nondeg-va-part2。[18] K. Tanabe, 《由二阶自同构作用于与非退化偶格相关的顶点代数的不动点子代数的不可约弱模》, https://arxiv.org/abs/1910.07126。[19] K. Tanabe, 《由二阶自同构作用于与非退化偶格相关的顶点代数的不动点子代数的不可约弱模（第1部分）》, 《代数杂志》575 (2021), 31–66。[20] G. Yamskulna, 《当 L 为任意秩非退化偶格时, 顶点代数 V_L^+ 的不可约模的分类》, 《代数杂志》320 (2008), 2455–2480。[21] Y. Zhu, 《顶点算子代数特征的模不变性》, 《美国数学会杂志》9 (1996), 237–302。