arXiv:2303.15677v1 [math.CV] 28 Mar 2023

用于带边界黎曼曲面上 L^2 全纯一形式的法贝尔级数

ERIC SCHIPPERS 和 MOHAMMAD SHIRAZI

Abstract. 设有一个紧曲面 $\mathscr{R}$，其上有指定点 z_1，.....， z_n，以及保角映射 f_k，将单位圆盘映入互不重叠的拟圆盘，并将 0 映至 z_k。令Σ 为从 $\mathscr{R}$中删去 f_k 的像的闭包后得到的黎曼曲面。我们定义在 $\mathscr{R}$ 上亚纯且仅在 z_1，.....， z_n处有极点的形式，并称之为法贝尔-蒂茨形式。它们类似于球面上的法贝尔多项式。我们证明， Σ 上的任意 L^2 全纯一形式都能唯一表示为法贝尔-蒂茨形式的级数。该级数在 $L^2(\Sigma)$中收敛，并且在 Σ的紧子集上一致收敛。

1. Introduction

法贝尔级数是与球面上的若尔当域相关联的多项式级数；在对区域和曲线作出充分假设的条件下，它们可以逼近 Ω 中的全纯函数。收敛意义、区域的正则性以及被逼近全纯函数的正则性均可有不同选择。法贝尔级数相较于幂级数具有某些优势。例如，在许多解析条件下，法贝尔级数在所讨论区域的任意紧子集上一致收敛到该函数。一般理论可参见 J. M Anderson 和 P. K. Suetin 的专著 [1, 21]。本文将法贝尔级数推广到由从紧曲面 $\mathscr{R}$ 中删去 n 个若尔当域 Σ 而得到的黎曼曲面上的 L^2 全纯一形式。我们以 H. Tietz 命名这些级数为法贝尔-蒂茨级数；他开创了黎曼曲面上法贝尔级数的研究。我们考察黎曼曲面上一个 L^2 1-形式的法贝尔-蒂茨级数，并研究其在L^2中的收敛性；这里的黎曼曲面由从紧曲面中删去互不重叠的拟圆盘而得到。

我们先回顾平面上的一些基本理论。法贝尔多项式的一个核心特点是，它们由逼近所针对区域之补集的黎曼映射构造而成。令 $\mathbb{C}$ 表示复平面，$\overline{\mathbb{C}}$ 表示黎曼球面，$\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ 表示单位圆盘。设 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 为一个共形映射。对于整数 $n \geq 1$，与该映射对应的法贝尔多项式 Φ_n 是 $(f^{-1}(z))^{-n}$的主部。在球面上 $f(\mathbb{D})$ 的补集上的全纯函数可以用法贝尔多项式级数逼近；在各种解析和几何条件下，这种逼近比幂级数展开更具优势。

本文的结果部分受到 Y. Shen [19], 的以下优美定理的启发，其中一个方向此前已由 A. C̦avuc̦s [4]获得。设 U 为球面中 $f(\mathbb{D})$ 的补集的内部。每个在 U 上的具有 L^2 阶导数的全纯函数 h，当且仅当 $f(\mathbb{D})$ 是拟圆盘时，都有唯一的法贝尔级数，其导数在 L^2 中收敛于 h。

2020年数学主题分类：30F30、30E10、30H20、30C49。Eric Schippers 感谢加拿大自然科学与工程研究理事会（NSERC）的资助。

一个拟圆盘。（为使其与本文记号保持一致，我们对表述作了些许修改，但未改变该定理的实质内容。）这与 V. Napalkov 和 R. Yulmukhametov [10]的一个定理密切相关，该定理表述如下。设 Ω 是平面中的一个若尔当域，记 $\mathcal{B}(\Omega)$ 为 Ω 上 L^2 全纯函数的伯格曼空间，并记 $B(\Omega)$ 和 $B(\Omega)$ 为反全纯 L^2函数。令 Ω^* 表示球面中的外部若尔当域。从 $\mathcal{B}(\Omega)$ 到 $\to \mathcal{B}(\Omega^*)$ 的积分变换

$$\overline{h} \mapsto \iint_{\Omega} \frac{\overline{h(\zeta)}}{(\zeta - z)^2} dA_\zeta \quad z \in \Omega^* \tag{1.1}$$

当且仅当 Ω 是拟圆盘时，它是一个同构。

我们将 C.avu.s 和 Shen 的结果沿一个方向推广到通过移除多个拟圆盘 $\mathscr{R}$ 得到的黎曼曲面 $\mathscr{R}$ 上的 L^2 1-形式。在 $\mathscr{R}$ 为球面时，这些 1-形式化简为 $h(z)dz$，其中 h 与上文相同。为此，我们需要将法贝尔多项式自然地推广到黎曼曲面上。H. Tietz [22, 23, 24, 25] 最早研究了这类推广。取代法贝尔多项式的形式在紧曲面 $\mathscr{R}$上全纯，除了在指定点 z_1、……、 z_n处有极点。Tietz 的方法是在黎曼曲面上定义一个柯西核，并施加规范化条件使其唯一，再将柯西核视为生成函数。球面上法贝尔多项式生成函数的例子可参见 [6, 11, 21] 。等价地，也可以将柯西核视为定义了一个积分算子（Faber 算子），并将法贝尔级数作为该算子的输出。由此得到的级数在紧子集上一致收敛。一般黎曼曲面上的柯西核之所以不唯一，是因为曲面上存在一个 g维的全纯一形式族，可以将其加到某个特定的柯西核上，而不改变其奇异部分。在球面上，不存在非平凡的全纯一形式，因此不会出现不唯一性问题。

相反，我们采用 M. Schiffer 的算子 [5, 13, 15]，将（1.1）推广到黎曼曲面。尽管本文不强调这一点，但该算子是通过对我们称为柯西-Royden 核的柯西核 [12], 求导得到的，而后者又由格林函数得到。“希弗算子”具有全纯积分核，我们可以利用希弗算子在具有指定极点的紧曲面上得到亚纯形式。我们称这些形式为法贝尔-蒂茨形式，尽管它们与 Tietz 所定义的形式并不完全相同。我们利用 M. Shirazi 的希弗算子和 Faber 算子的同构定理 [20] （另见 E. Schippers、M. Shirazi 和 W. Staubach [14], 以及 E. Schippers 和 W. Staubach [17], 对 Napalkov 和 Yulmukhametov 相关定理的推广），从而得到级数表示及其收敛性。

我们的主要结果如下。设 $f_1, \ldots, f_n$ 是从单位圆盘 $\mathbb{D}$ 到紧黎曼曲面 $\mathscr{R}$ 的共形映射。假设 $\Omega_k = f_k(\mathbb{D})$ 是闭包互不相交的拟圆盘，并设 $\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_n$。令 Σ 为 $\mathscr{R}$ 中 Ω 的闭包的补集。我们定义法贝尔-蒂茨形式，并证明除点 $z_k = f(0)$ 处指定的极点外，这些形式在 $\mathscr{R}$ 上全纯。我们证明，Σ 上的每个 L^2 全纯一形式 α 都有唯一的法贝尔级数分解，该级数在 L^2 中收敛到 α。此级数还在 Σ 的紧子集上一致收敛。

本文关注的是如何利用固定的基构造显式的法贝尔型级数。此前，作者与 W. Staubach 针对嵌套的黎曼

带边界曲面 [14]得到了稠密性结果。研究表明，内曲面上的 L^2 全纯一形式可以在 L^2 中由外曲面上的全纯一形式逼近（函数的狄利克雷空间也有类似结果）。N. Askaripour 和 T. Barron [2, 3]，利用庞加莱级数，得到了不同阶微分（自守形式） L^2 空间的稠密性结果；有关 L^1 全纯二次微分的稠密性结果，也可参见其中的参考文献。关于以其他意义在更大区域上进行逼近的其他定理，例如一致逼近，可参见 Gauthier 和 Sharifi [9]。文献综述可参见 F. Sharifi [18]和 Fornæss等人 [8]。

2. Preliminaries and background

2.1. 紧曲面的函数空间与格林函数 e.

定义 2.1. 在任意黎曼曲面上，定义近复结构的对偶为
$*$ 在局部坐标 $z = x + iy$下，定义为

$$*(a\,dx + b\,dy) = a\,dy - b\,dx.$$

这与坐标的选择无关。对于任意复函数 h，也可以在满足条件的坐标下计算得到

$$2\partial_z h = dh + i * dh. \tag{2.1}$$

定义 2.2. 若复值函数 f 在开集 U 上满足C^2 且 $d * df = 0$，则称其为调和函数。若复一形式 α 满足 C^1 以及 $d\alpha = 0$ 和 $d * \alpha = 0$，则称其为调和复一形式。

等价地，调和1-形式是在局部上可表示为 df （其中 f 是某个调和函数）的形式。当然，调和1-形式和函数必须是 C^∞。

用上横线表示函数和形式的复共轭，例如 $\overline{\alpha}$。全纯一形式是在坐标中可写成 $h(z)\,dz$（其中 h 是全纯函数）的形式，而反全纯一形式则是在局部上可写成 $h(z)\,d\bar{z}$（其中 h 是全纯函数）的形式。

用 $L^2(U)$ 表示黎曼曲面中开集 U 上满足以下条件的 ω 1-形式的集合：

$$\iint_U \omega \wedge *\overline{\omega} < \infty$$

（注意，被积函数在每一点均为正，这一点可通过在局部坐标中写出该表达式看出。）在本文中， U 将是一个无边界的紧黎曼曲面或一个带边黎曼曲面。对于 α， $\beta \in L^2(U)$，定义配对

$$(\omega_1, \omega_2) = \iint_U \omega_1 \wedge *\overline{\omega_2} \tag{2.2}$$

为

定义 2.3。全纯一形式的伯格曼空间为

$$\mathcal{A}(U) = \{\alpha \in L^2(U) : \alpha \text{ holomorphic}\}. \tag{2.3}$$

反全纯一形式的伯格曼空间记为 $\overline{\mathcal{A}(U)}$。我们也将

$$\mathcal{A}_{\text{harm}}(U) = \{\alpha \in L^2(U) : \alpha \text{ harmonic}\} \tag{2.4}$$

并称其为调和 Bergman 空间。

对于本文中 U 的所有取值，Bergman 空间相对于内积 (2.2) 都是希尔伯特空间。

注意， $\mathcal{A}(U)$ 和 $\mathcal{A}(U)$ 关于内积 (2.2) 正交。事实上，我们有如下直和分解

$$\mathcal{A}_{\mathrm{harm}}(U) = \mathcal{A}(U) \oplus \overline{\mathcal{A}(U)}. \tag{2.5}$$

若将内积限制在 $\alpha, \beta \in \mathcal{A}(U)$ 上，那么由于 $*\overline{\beta} = i\overline{\beta}$，我们有

$$(\alpha, \beta) = i \iint_U \alpha \wedge \overline{\beta}.$$

设 $f\colon U \to V$ 是一个双全纯映射。我们将 $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathrm{harm}}(V)$ 在 f 下的拉回记为 $f^*\alpha.$。明确地说，若 α 在局部坐标 w 下表示为 $a(w)\, dw + b(w)\, d\bar{w}$ 和 $w = f(z)$，则拉回为

$$f^*\left(a(w)\, dw + \overline{b(w)}\, d\bar{w}\right) = a(f(z))f'(z)\, dz + \overline{b(f(z))f'(z)}\, d\bar{z}.$$

Bergman 空间都是保角不变的，也就是说，若 $f\colon U \to V$ 是一个双全纯映射，则 $f^*\mathcal{A}(V) = \mathcal{A}(U)$，且这保持内积（即 f^* 是酉算子）。对于反全纯空间和全调和空间也有类似结论。

定义 2.4。我们将 $\mathcal{A}^e_{\mathrm{harm}}(U)$ 定义为 $\mathcal{A}_{\mathrm{harm}}(U)$ 中恰当元素构成的子空间； $\mathcal{A}^{\mathrm{e}}(\Sigma)$ 和 $\mathcal{A}^{\mathrm{e}}(\Sigma)$ 也作类似定义。

我们还考虑边界周期为零的 1-形式，并称其为半恰当。

定义 2.5。设 Σ 是一个有 n 个边界且边界同胚于圆周的黎曼曲面。若对任意与边界曲线 $\partial_k\Sigma$ 同伦的简单闭曲线 γ，全纯一形式 $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathrm{harm}}(\Sigma)$ 满足 L^2 ，则称其为半恰当。

$$\int_\gamma \alpha = 0.$$

Σ 上半恰当全纯一形式构成的空间记为 $\mathcal{A}^{\mathrm{se}}(\Sigma)$。

对于紧曲面 $\mathscr{R}$，格林函数 $\mathscr{G}$ 定义为满足以下条件的唯一函数 $\mathscr{G}(w, w_0;\, z, q)$：当 z、 q 不同时，

(1) $\mathscr{G}$ 在 w 上关于 $\mathscr{R}\backslash\{z, q\}$ 调和；(2) 对于包含 z 的开集 U 上的局部坐标 ϕ， $\mathscr{G}(w, w_0;\, z, q)+\log\,|\phi(w)-\phi(z)|$ 关于 $w \in U$ 调和；(3) 对于包含 q 的开集 U 上的局部坐标 ϕ， $\mathscr{G}(w, w_0;\, z, q)-\log\,|\phi(w)-\phi(q)|$ 关于 $w \in U$ 调和；(4) 对所有 $w_0 \neq q$、 z， $\mathscr{G}(w_0, w_0;\, z, q) = 0$。

这类函数的存在性是黎曼曲面理论中的一个标准事实，参见例如 H. Royden [12]。“格林函数”这一术语并非普遍使用，本文取自[12]。由其性质可知，在 z 中任何非奇异点处， $\mathscr{G}$ 也是调和的。通常我们会在 $\mathscr{G}$ 的记号中省略点“w_0”，因为它只会改变一个加法常数，而该常数在求导后会消失。

2.2. 带帽曲面与希弗算子。本文所说的共形映射是指全纯双射。若我们称 f 是区域 D 上的共形映射而未指定其像，则意指它是到其像上的全纯双射；也就是说，它在 D.上一一对应

给定一个黎曼曲面 R，如果存在一个共形映射 $\phi: U \to \mathbb{C}$，它定义在包含 Γ 的开集 U 上，且 $\phi(\Gamma)$ 在通常意义下是平面中的拟圆，那么我们称 Γ 中的简单闭曲线 R 为拟圆。

所谓带帽曲面 $\mathscr{R}$，Ω_1，...，Ω_n，是指以下数据：

(1) 一个无边界的紧曲面 $\mathscr{R}$；(2) $\mathscr{R}$ 中有限个单连通域 Ω_1，...，Ω_n；满足：

(a) 对于 $k = 1$，...，n，Ω_k 的边界是若尔当曲线；(b) 对所有 $k \neq l$，cl $\Omega_k \cap$ 与 cl Ω_l 的交集为空。

域 Ω_k 称为"帽"。所谓带有共形映射 f_1，...，f_n 的带帽曲面，是指上述带帽曲面连同共形映射

$$f_k : \mathbb{D} \to \Omega_k.$$

映射 f_k 指定了 $k = 1$ 的指定点 $p_k = f_k(0)$，.....，n。

在全文中，我们将记作

$$\Omega = \cup_{k=1}^{n} \Omega_k$$

and

$$\Sigma = \mathscr{R} \backslash \operatorname{cl} \Omega$$

其中，cl 表示拓扑闭包，而共形映射记作

$$f = (f_1, \ldots, f_n).$$

为简便起见，我们将带帽曲面的数据记为 $(\mathscr{R}, \Omega)$，将带有共形映射的带帽曲面的数据记为 $(\mathscr{R}, \Omega\ f)$。

我们定义希弗算子如下：

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \overline{\mathcal{A}(\Omega)} &\to \mathcal{A}(\Sigma) \\ \overline{\alpha} &\mapsto \frac{1}{\pi i} \iint_{\Omega} \partial_w \partial_z \mathscr{G}(w; z, q) \wedge_w \overline{\alpha(w)}. \end{aligned}$$

这里 $z \in \Sigma$。该算子是有界的，且与 q [14, 17] 无关。

3. Faber series for forms

3.1. 带帽曲面的 Faber 算子。设 $\mathscr{R}$ 为一个紧曲面。固定互不相同的点 z_1、.....、$z_n \in \mathscr{R}$，并记 $\mathscr{R}' = \mathscr{R} \backslash \{z_1, \ldots, z_n\}$。取 $\mathscr{R}$ 的一组曲线同伦基

$$a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$$

其中 g 是 $\mathscr{R}$ 的亏格。如有需要，可以选择它，使得交矩阵具有以下形式

$$a_j \cdot b_k = \delta_{jk} \tag{3.1}$$

其中，δ_{jk} 是克罗内克 δ 函数 [7]。

$\mathscr{R}$ 上的每个上同调类都有一个调和代表元。也就是说，对于任意给定的周期，都存在一个调和一形式 $\alpha+\overline{\beta}\in\mathcal{A}(\mathscr{R})\oplus\mathcal{A}(\mathscr{R})$，其周期即为这些给定的周期。也就是说，给定 λ_1、……、λ_g、μ_1、……、μ_g，存在一个 $\alpha+\overline{\beta}$，使得

$$\int_{a_j}(\alpha+\overline{\beta})=\lambda_j,\quad \text{and}\quad \int_{b_k}(\alpha+\overline{\beta})=\mu_k.$$

在本文余下部分，我们固定全纯一形式空间的一组基

$$\mathcal{A}(\mathscr{R})=\operatorname{span}\{\gamma_1,\dots,\gamma_g\}.$$

于是，我们得到反全纯一形式的一组对应的基

$$\overline{\mathcal{A}(\mathscr{R})}=\operatorname{span}\{\overline{\gamma_1},\dots,\overline{\gamma_g}\}.$$

注3.1. $\mathcal{A}_{\text{harm}}(\mathscr{R})$有一组特定的基如下。若同调基满足交性质 (3.1)，则众所周知，存在唯一的 1-形式 $\gamma_k\in\mathcal{A}(\mathscr{R})$，使得

$$\int_{a_j}\gamma_k=\delta_{jk}.$$

周期矩阵为

$$\Pi_{jk}=\int_{b_j}\gamma_k.$$

它是对称的，且虚部正定。

对于 $k=1$、……、$n-1$，令 β_k为 $\mathscr{R}$上的唯一亚纯一形式，它在 z_k处有留数为 1 的简单极点，在 z_n处有留数为 -1 的简单极点，且无其他极点。令 Γ_1、……、Γ_n为一组简单闭曲线，使得 Γ_k 相对于 z_k 的绕数为 1，而相对于其他点的绕数为 0。如有需要，我们可以选择不相交曲线。例如，给定带帽曲面 $\mathscr{R}$，相对于 Ω_k 取正向的曲线 $\partial\Omega_k$构成这样一组曲线。给定 $\mathscr{R}$上的任意亚纯一形式α，且其在 $\mathscr{R}\backslash\{z_1,\dots,z_n\}$上全纯，则存在唯一的 $\beta\in\operatorname{span}\{\beta_1,\dots,\beta_{n-1}\}$，使得

$$\int_{\Gamma_k}\alpha-\beta=0\quad\text{for}\quad k=1,\dots,n.$$

定义空间

$$\overline{X}(\Sigma)=\left\{\alpha\in\mathcal{A}(\Sigma):\exists\,\overline{\sigma}\in\overline{\mathcal{A}(\mathscr{R})}\text{ s.t. }\alpha-\overline{\sigma}\in\mathcal{A}^e(\Sigma)\right\}.$$

以下结论已在 [17] 中证明。

定理 3.2. 设 $(\mathscr{R},\Omega)$ 是一个带帽曲面，且 $\Sigma=\mathscr{R}\backslash\operatorname{cl}\Omega$。若帽是拟圆盘，则 T 是到 $\overline{X}(\Sigma)$ 上的同构。

Let

$$\mathbf{R}_\Sigma:\mathcal{A}(\mathscr{R})\to\mathcal{A}(\Sigma)$$
$$\mathbf{R}_\Omega:\mathcal{A}(\mathscr{R})\to\mathcal{A}(\Omega)$$

是限制算子。同样，R_Σ、R_Ω 是 $\mathcal{A}(\mathscr{R})$ 上的限制算子，而 R^h_Ω、R^h_Σ 表示 $\mathcal{A}_{\text{harm}}(\mathscr{R})$ 上的限制算子。

以下对 Faber 算子的推广在逼近论中发挥着核心作用。定义

$$\Theta : \overline{\mathcal{A}(\Omega)} \oplus \mathcal{A}(\mathscr{R}) \to \mathcal{A}^{se}(\Sigma)$$
$$(\overline{\gamma}, \tau) \mapsto \mathbf{T}\overline{\gamma} + \mathbf{R}_{\Sigma}\tau.$$

我们有如下结果。

定理 3.3（[17]）。设 $(\mathscr{R}, \Omega)$ 是一个带帽曲面，且 $\Sigma = \mathscr{R}\backslash \mathrm{cl}\Omega$。若帽是拟圆盘，则 Θ 是一个有界同构。

注 3.4。定理 3.2 和定理 3.3 可视为对 Napalkov 和 Yulmukhametov 定理 [10] 的一个方向上的推广；该定理已在引言中提及。他们的定理指出，在 $\mathscr{R} = \overline{\mathbb{C}}$的情形下，T 是同构当且仅当 Ω 是拟圆盘。这些定理以两种不同的方式考虑了曲面的上同调。

注 3.5。这个同构的逆映射可以显式给出 [17]。对于 Σ上的恰当调和形式 α ，我们令 $\mathbf{O}^e\alpha \in \mathcal{A}_{\mathrm{harm}}(\Omega)$ 为唯一的调和一形式，其原函数的边界值与 α 在 Γ上的原函数的边界值相同（相差一个常数）。所谓"相同的边界值"需要作相当充分的说明。可以证明，对于拟圆，这一过程是定义良好的——详情见 [15, 17]。暂且接受这一点，我们可以给出逆映射的一个简单公式。接着，定义

$$\mathbf{O}' : \mathcal{A}^{se}_{\mathrm{harm}}(\Sigma) \to \mathcal{A}_{\mathrm{harm}}(\Omega)$$
$$\beta \mapsto \mathbf{O}^e(\beta - \mathbf{R}^h_{\Sigma}\sigma) + \mathbf{R}^h_{\Omega}\sigma$$

其中 σ 是 $\mathcal{A}_{\mathrm{harm}}(\mathscr{R})$ 中唯一使 $\beta - \mathbf{R}^h_{\Sigma}\sigma$ 为恰当形式的元素。利用这一点，我们定义增广 overfare 映射

$$\mathbf{O}^{aug} : \mathcal{A}^{se}_{\mathrm{harm}}(\Sigma) \to \mathcal{A}_{\mathrm{harm}}(\Omega) \oplus \mathcal{A}_{\mathrm{harm}}(\mathscr{R})$$
$$\beta \mapsto (\mathbf{O}'\beta, \sigma). \tag{3.2}$$

令 $\mathbf{P}_{\mathscr{R}}$ 为有界正交投影

$$\mathbf{P}_{\mathscr{R}} : \mathcal{A}_{\mathrm{harm}}(\mathscr{R}) \to \mathcal{A}(\mathscr{R})$$

类似地，$\mathbf{P}_{\mathscr{R}}$ 是投影到 $\mathcal{A}_{\mathrm{harm}}(\Omega)$ 的反全纯部分上的投影。

根据这些定义，

$$\Theta^{-1} = \left(-\overline{\mathbf{P}}_{\Omega}\right) \oplus \mathbf{P}_{\mathscr{R}}$$

（注意，与 [17] 相比，符号约定有所改变。）

4. Faber-Tietz series

4.1. 法贝尔-蒂茨形式。设 $\mathscr{R}$、Ω_1、. . .、Ω_n 为带帽曲面，其共形映射为 f_1、. . .、 f_n,

$$f_k : \mathbb{D} \to \Omega_k.$$

记 $\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_n$。假设对于 $k = 1$, ..., n, 有 $z_k = f_k(0)$。

我们定义所承诺的法贝尔-蒂茨形式。这些亚纯微分可能仅在点 z_1、.....、 z_n 处具有奇点。这些微分取决于 f_1、.....、 f_n。 7

设 $e_k^m \in \overline{\mathcal{A}(\mathbb{D})} \oplus \cdots \overline{\oplus \mathcal{A}(\mathbb{D})}$（等式右侧有 n 个 $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ 的副本）为一形式

$$\big(0, \ldots, 0, m\,\overline{z}^{m-1} d\,\bar{z}, 0, \ldots, 0\big)$$

其中非零项位于直和的 k 分量中。

定义 4.1（法贝尔-蒂茨形式）。设 $m \geq 1$ 为整数，且 $k \in \{1, \ldots, n\}$。在 z_k 处有奇点的第 m、k 个法贝尔-蒂茨形式为

$$\alpha_k^m = \mathbf{T}(f^{-1})^*(e_k^m).$$

这里，$e \in \mathcal{A}(\mathbb{D})$ 的拉回 $(f^{-1})^* e \in \overline{\oplus \cdots \oplus} \mathcal{A}(\mathbb{D})$ 指的是 $\mathcal{A}(\Omega)$ 中的一个 1-形式，其在 $\overline{\Omega}_k$ 上的限制为 $(f_k^{-1})^* e$。由 T 的性质（见定理 3.2），α_k^m 属于 $\mathcal{A}(\Sigma)$。我们还可以进一步说明：它可延拓为 $\mathscr{R}$ 上的亚纯微分，且仅在点 z_1、……、z_n 处有极点。下面证明这一点。

定理 4.2。对于任意整数 $m \geq 1$ 和 $k \in \{1, \ldots, n\}$，法贝尔-蒂茨形式 α_k^m 可全纯延拓至 $\mathscr{R} \backslash \{z_k\}$。此外，$\alpha_k^m$ 在 z_k 处有一个 $m+1$ 阶极点；在由 f_k 定义的坐标中，z_k 处的主部为

$$f^* \alpha_k^m = \left(\frac{m}{\zeta^{m+1}} + h(\zeta) \right) d\zeta$$

其中，$h(\zeta)$ 在 0 处全纯。

证明。固定 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 和 $m \geq 1$。对于 $0 < r < 1$，令 $\Gamma_r^k = f_k(|z| = r)$，并注意到该曲线是解析的，且与 $\partial_k \Omega$ 同伦。对于任意环域 $\mathbb{A}_r = \{z : \ r < |z| < 1\}$，我们令 $A_r = f(\mathbb{A}_r)$。固定 $q \in \Sigma$（其位置并不重要）。取一个 r_0，使得 $0 < r_0 < 1$。

在下面的第三个等式中使用 [15, 定理 4.8]，并利用斯托克斯定理进行计算，可得

$$\begin{aligned}
\alpha_k^m = \mathbf{T}(f^{-1})^*(e_k^m)(z) &= -\frac{1}{\pi i} \iint_{\Omega_k} \partial_z \partial_w \mathscr{G}(w; z, q) \wedge_w (f^{-1})^* e_k^m \\
&= -\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_r^k} \partial_z \partial_w \mathscr{G}(w; z, q) \overline{(f^{-1}(w))}^m \\
&= -\lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_r^k} \partial_z \partial_w \mathscr{G}(w; z, q) (f^{-1}(w))^{-m} \\
&= -\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_{r_0}^k} \partial_z \partial_w \mathscr{G}(w; z, q) (f^{-1}(w))^{-m} \\
&= -\frac{1}{\pi i} \partial_z \int_{\Gamma_{r_0}^k} \partial_w \mathscr{G}(w; z, q) (f^{-1}(w))^{-m}. \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

在倒数第二个等式中，我们使用了被积函数在 w 中的 A_r 内全纯这一事实。

上述表达式最右端在 $\Gamma_{r_0}^k$ 的外部关于 z 全纯。由于 r_0 是任意的，我们看到 α_k^m 实际上在 $\mathscr{R} \backslash \{z_k\}$ 上全纯。

为证明第二个断言，我们将 (4.1) 中最后一个积分用 f 所诱导的坐标表示。设 η、ζ 由 $w = f(\eta)$ 和 $z = f(\zeta)$ 给出。假设 $|\zeta| > r = |\eta|$，利用 8

定义 pr　将 $\mathscr{G}$ 的 f 替换为局部坐标 ϕ 后，在 z 附近我们看到　　t

$$\begin{aligned} f^*\alpha_k^m(z) &= -f^*\frac{1}{\pi i}\partial_z \int_{\Gamma_r^k} \partial_w \mathscr{G}(w;z,q)(f^{-1}(w))^{-m} \\ &= \partial_\zeta \int_{|\eta|=r} \eta^{-m}\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\eta-\zeta}+\psi(\eta;\zeta)\right)d\eta \\ &= \partial_\zeta\left(-\frac{1}{\zeta^m}+\int_{|\eta|=r}\eta^{-m}\psi(\eta;\zeta)d\eta\right) \\ &= \frac{m}{\zeta^{m+1}}d\zeta+\int_{|\eta|=r}\eta^{-m}\partial_\zeta\psi(\eta;\zeta)d\eta \end{aligned}$$

其中，$\psi(\eta;\zeta)$ 在 ζ 内调和且无奇点，并在 η 内全纯。假定沿相对于 0 的正向（平面上的逆时针方向）所确定的方向对 $|z|=r$ 进行积分。由于第二个被积函数在 η 内全纯，第二个积分与 r 无关。令 $r\searrow 0$，我们看到上述公式对于去心邻域 0 上的 ζ 成立。因此，

$$f^*\alpha_k^m(\zeta)=\left(\frac{m}{\zeta^{m+1}}+h(\zeta)\right)d\zeta$$

其中第二项在 ζ 内全纯且无奇点。　□

今后，我们用 α_k^m 表示到 $\mathscr{R}$ 的亚纯延拓。

4.2. 1-形式的法贝尔级数。本节定义法贝尔-蒂茨级数，并证明：如果帽是拟圆盘，那么任意 L^2 全纯一形式的法贝尔-蒂茨级数都有一个在 L^2 内收敛的唯一法贝尔级数。

在 [17, 推论7.5] 中已经证明，Σ上的每个上同调类在 $\mathcal{A}(\Sigma)$中都有一个代表元。因此，我们可以作出如下陈述。

命题4.3. 设（$\mathscr{R}$，Ω f）是一个带帽曲面，具有共形映射，且 $\Sigma=\mathscr{R}\backslash\mathrm{cl}\,\Omega$。设 $\nu\in\mathcal{A}(\Sigma)$。存在唯一的1-形式

$$\tau=\sum_{k=1}^{g}c_k\gamma_k$$

and

$$\beta=\sum_{k=1}^{n-1}\epsilon_k\beta_k.$$

使得

$$\nu-\beta-\tau\in\overline{X}(\Sigma).$$

证明。给定 ν，令

$$\epsilon_k=\int_{\partial_k\Sigma}\nu.$$

我们所说的对 $\partial_k\Sigma$ 的积分，是指沿任意一条与 $\partial_k\Sigma$同伦的光滑曲线 γ 所作的积分。该积分与 γ 无关，因此定义良好。若令

$$\beta = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \beta_k$$

于是， $\nu - \beta$ 的边界周期为零。存在唯一的调和一形式 $\rho \in \mathcal{A}_{\mathrm{harm}}(\mathscr{R})$，使得

$$\int_{a_k} (\nu - \beta) = \int_{a_k} \rho \quad \text{and} \quad \int_{b_k} (\nu - \beta) = \int_{b_k} \rho, \quad k = 1, \ldots, g,$$

从而

$$\nu - \beta - \rho \in \mathcal{A}^e(\Sigma).$$

利用分解

$$\rho = \tau + \overline{\sigma}, \quad \delta, \sigma \in \mathcal{A}(\mathscr{R}),$$

我们得到 $\nu - \tau - \beta \in \overline{X}(\Sigma)$，如所述。 □

注4.4。系数 ϵ_k 和 c_k 可以通过积分公式计算。第一个公式

$$\epsilon_k = \int_{\partial_k\Sigma} \nu \tag{4.2}$$

已在上文的证明中出现。给定 $\mathcal{A}_{\mathrm{harm}}(\mathscr{R})$的一组特定基后，可以得到 c_k 的显式表达式。例如，若基如注3.1中所述，我们解方程

$$A_j = \int_{a_j} \sum_k (c_k\gamma_k + d_k\overline{\gamma_k}) = c_j + d_j$$

$$B_j = \int_{b_j} \sum_k (c_k\gamma_k + d_k\overline{\gamma_k}) = \sum_k \left(\Pi_{jk}c_k + \overline{\Pi}_{jk}d_j\right)$$

对于 c_k 和 d_k，其中

$$A_j = \int_{a_j} (\nu - \beta), \qquad B_j = \int_{b_j} (\nu - \beta).$$

令

$$\tau = \sum_{k=1}^{n} c_k\gamma_k$$

容易看出，$\nu - \beta - \tau \in \overline{X}(\Sigma)$。

现在可以如下定义法贝尔多重级数。假设帽是拟圆盘。令 $\nu \in \mathcal{A}(\Sigma)$，并令

$$\beta = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \beta_k$$

与命题4.3中的定义相同。定义 $\overline{\delta}$ 和 τ 为

$$(\overline{\delta}, \tau) = \Theta^{-1}(\nu - \beta)$$

并注意到

$$\tau = \sum_{k=1}^{g} c_k \gamma_k.$$

对于某个 c_k。最后令

$$\overline{\delta}_k = \overline{\delta}\big|_{\Omega_k}$$

对于 $k = 1, \ldots, n$。现在我们可以将 $f_k^* \overline{\delta_k}$ 在 $\bar{z}$ 中展开为幂级数

$$f_k^* \overline{\delta_k} = \sum_{m=1}^{\infty} m h_m^k \overline{z}^{m-1} d\bar{z}. \tag{4.3}$$

定义 4.5。设 $(\mathscr{R}, \Omega\ f)$ 是一个带有共形映射且 $\Sigma = \mathscr{R} \backslash \mathrm{cl}\ \Omega$ 的带帽曲面。假设帽是拟圆盘。沿用上述记号，$\nu \in \mathcal{A}(\Sigma)$ 的法贝尔级数为

$$\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \beta_k + \sum_{k=1}^{g} c_k \gamma_k + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} h_m^k \alpha_k^m. \tag{4.4}$$

由法贝尔-蒂茨形式的定义和定理 3.3 可知

定理4.6。设 $(\mathscr{R}, \Omega\ f)$ 是一个带有共形映射且 $\Sigma = \mathscr{R} \backslash \mathrm{cl}\ \Omega$ 的带帽曲面。假设帽是拟圆盘。

设 $\nu \in \mathcal{A}(\Sigma)$。定义 4.5 中的法贝尔级数在 $\mathcal{A}(\Sigma)$ 中收敛到 ν。法贝尔级数是收敛到 ν 在 $\mathcal{A}(\Sigma)$ 中的 (4.4) 形式级数中唯一的一个。

注记4.7。注意，法贝尔级数中的每一项都是 $\mathcal{A}(\mathscr{R})$上的亚纯微分，且极点仅位于固定点 z_1、.....、z_n处。

此外，它在紧集上一致收敛，具体来说如下。

定理4.8。设 $\zeta = \phi(z)$是 Σ上的任意一个坐标图，将 U 映入复平面，使得在坐标中，$\nu = G(\zeta)\, d\zeta$，且第 M个部分和为

$$g_M(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \beta_k + \sum_{k=1}^{g} c_k \gamma_k + \sum_{m=1}^{M} \sum_{k=1}^{n} h_m^k \alpha_k^m.$$

对任意紧集 $K \subseteq U$，当 $M \to \infty$时，$g_M \to G$ 在 K 上一致收敛。

证明。序列 $g_M(\zeta)d\zeta$在伯格曼空间 $\mathcal{A}(\phi(U))$中收敛到 $G(\zeta)d\zeta$，其中$\phi(U)$是复平面的一个子集。根据伯格曼空间的一个标准结果，存在常数 C_K 使得

$$\sup_{\zeta \in K} |h(\zeta)| \leq C_k \| h(\zeta) d\zeta \|_{\mathcal{A}(U)}$$

将此应用于 $h(\zeta) = g_M(\zeta) - G(\zeta)$即可证明所述结论。 □

4.3. 法贝尔-蒂茨级数的共形不变性。本节指出，法贝尔级数在共形映射 $g: \mathscr{R}_1 \to \mathscr{R}_2$ 下保持不变。这是由构造直接得到的结论。令 $\mathcal{G}_k$ 和 T_k 分别表示 $\mathscr{R}_k$ 上的格林函数和希弗算子，其中 $k = 1, 2$。由唯一性可得 $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2 \circ (g \times g)$。因此，算子 T_k 在如下意义下保持不变：$g^* \mathrm{T}_2 = \mathrm{T}_1 g^*$ [17]。此外，函数空间是保角不变的，例如 $g^* \mathcal{A}(\Sigma_2) = \mathcal{A}(\Sigma_1)$。于是我们有

定理 4.9（法贝尔-蒂茨形式的共形不变性）。设 $\mathscr{R}, \Omega = \Omega_1, \ldots, \Omega_n$ 是一个带帽曲面，具有共形映射 $f = (f_1, \ldots, f_n)$。设 $g\colon \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ 是一个共形映射。令 $\Omega_k = g_k(\Omega_k)$ 且 $f_k = f_k \circ g$，则 $\mathscr{R}, \Omega_1, \ldots, \Omega_n$ 是一个带帽曲面，具有共形映射 $f_1, \ldots, f_n$。

^ ^ ^ 若 $\hat{}\alpha_k^m$是与 $(\mathscr{R}, \Omega\ f)$ 相关联的法贝尔-蒂茨形式，则与 $(\mathscr{R}, \Omega\ f)$ 相关联的法贝尔-蒂茨形式为

$$\alpha_k^m = g^* \hat{\alpha}_k^m.$$

由此立即可知，法贝尔-蒂茨级数也具有保角不变性。

^ ^ ^ 定理 4.10. 设 $(\mathscr{R}, \Omega\ f)$ 和 $(\mathscr{R}, \Omega\ f)$ 是带有共形映射的带帽曲面，且 $\hat{}g : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ 是一个共形双射。假设帽 Ω 是拟圆盘（因此 ^ ^ ^ Ω 也是拟圆盘）。令 $\Sigma = \mathscr{R} \backslash \mathrm{cl}\ \Omega$， Σ 同理。令 $\beta_k, k = 1, \ldots, n$ 和 $\hat{}\gamma_k, k = 1, \ldots, g$ 如定义 4.5 所述，并设

$$\beta_k = g^* \hat{\beta}_k, \quad k = 1, \ldots, n \quad and \quad \gamma_k = g^* \hat{\gamma}_k, \quad k = 1, \ldots, g.$$

若 $\hat{}\nu \in \mathcal{A}(\Sigma)$ 的法贝尔-蒂茨级数为

$$\hat{\nu} = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \hat{\beta}_k + \sum_{k=1}^{g} c_k \hat{\gamma}_k + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} h_m^k \alpha_k^m$$

于是， $\nu = g^* \hat{}\nu$ 的法贝尔-蒂茨级数为

$$\sum_{k=1}^{n} \epsilon_k \beta_k + \sum_{k=1}^{g} c_k \gamma_k + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} h_m^k \alpha_k^m.$$

这是在 g下逐项拉回法贝尔-蒂茨级数得到的，其中使用了定理 4.9以及拉回是等距映射这一事实。

4.4. 球面上法贝尔级数的恢复。本节将展示如何恢复球面 $\mathscr{R} = \overline{\mathbb{C}}$上的法贝尔级数。例如，参见 [1, 6, 11, 21] 中关于球面的标准定义。特别地，我们得到 Cavus [4] 和 Shen [19] 的收敛定理（其中一个方向）。

我们固定一个共形映射 $f\colon \mathbb{D} \to \Omega$，不过对于任意多个互不重叠的拟圆盘，同样的步骤也适用。注意，球面上不存在非平凡的全纯一形式，也就是说， $\mathcal{A}(\mathscr{R})$仅由恒等于零的形式组成。因此，除去平凡的第二个分量外， Θ 就是 T，我们可以在法贝尔-蒂茨级数的构造中用 T 代替 Θ。此外， $\Sigma = \mathscr{R} \backslash \mathrm{cl}\ \Omega$ 是单连通的，因此 $\overline{X}(\Sigma) = \mathcal{A}(\Sigma)$，而定理 3.2说明 T 是一个同构。

假设 Ω 是一个有界拟圆盘，因此 ∞ 位于 Σ 的内部。容易验证，

$$\mathscr{G}(w, w_0; z, q) = \log \left| \frac{(z - w_0)(w - q)}{(w - z)(q - w_0)} \right|$$

so

$$-\frac{1}{\pi i} \partial_w \mathscr{G}(w, w_0; z, q) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - q} \right) dw.$$

设定 $q = \infty$ ，我们得到柯西核

$$-\frac{1}{\pi i} \partial_w \mathscr{G}(w, w_0; z, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \frac{dw}{w - z}$$

以及希弗算子 T 的核为

$$\frac{1}{\pi i}\partial_z\partial_w\mathscr{G}(w,w_0;z,\infty)=-\frac{1}{\pi}\frac{dw\,dz}{(w-z)^2}. \tag{4.5}$$

对于 $\alpha=h(z)d\bar{z}\in\mathcal{A}(\Omega)$，希弗算子具有如下形式：

$$[\mathbf{T}\alpha](z)=\frac{1}{\pi}\iint_\Omega\frac{\overline{h(w)}}{(w-z)^2}\frac{d\bar{w}\wedge dw}{2i}dz.$$

因此，导言中提到的 Napalkov 和 Yulmukhametov 定理 [10] 的一个方向是定理 3.3 的特例。

推论4.11. 设 Σ 是球面上的一个拟圆盘，Ω 是其闭包的补集。那么 $\mathbf{T}:\mathcal{A}(\Omega)\to\mathcal{A}(\Sigma)$ 是一个同构。

事实上，他们证明了，在若尔当域中，Σ 是拟圆盘当且仅当 T 是一个同构。

对于 $m\geq 1$，记 $e^m=m\bar{z}^{m-1}d\bar{z}$。法贝尔-蒂茨形式定义如下：

$$\alpha^m=\mathbf{T}(f^{-1})^*e^m.$$

根据定理 4.2，$\alpha^m(z)=p(z)dz$，其中 $p\in\mathbb{C}[1/z]$ 是次数为 $m-1$的多项式。令 Φ^m表示 $\mathbb{C}[1/z]$ 中 α^m 在 $q=\infty$ 处取零的唯一原函数。

我们声称，对于固定的 $r_0\in(0,1)$

$$\Phi^m(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{f(|z|=r_0)}\frac{(f^{-1}(w))^m}{w-z}dw. \tag{4.6}$$

这正是与 f 和 Σ [6, 11, 21]相关联的 Faber 多项式的标准定义。为证明这一断言，我们计算

$$\begin{aligned}\partial_z\Phi^m&=\frac{1}{2\pi i}\int_{f(|z|=r_0)}\frac{(f^{-1})(w)^{-m}}{(w-z)^2}dw\,dz\\&=\lim_{r\nearrow 1}\frac{1}{2\pi i}\int_{f(|z|=r)}\frac{(f^{-1})(w)^{-m}}{(w-z)^2}dw\,dz\\&=\lim_{r\nearrow 1}\frac{1}{2\pi i}\int_{f(|z|=r)}\frac{\overline{f^{-1}(w)}^m}{(w-z)^2}dw\,dz\\&=\frac{1}{\pi}\iint_\Omega\frac{m\overline{f^{-1}(w)}^m}{(w-z)^2}\frac{d\bar{w}\wedge dw}{2i}\,dz\end{aligned}$$

so

$$\partial_z\Phi^m=[\mathbf{T}(f^{-1})^*e^m](z). \tag{4.7}$$

其中在第三个等号处，我们应用了“锚引理” [15, 定理 4.8]。

因此，在这种情况下，定理4.6简化为引言中提到的 C.avu.s [4] 的结果。

推论 4.12. 设 $f\colon \mathbb{D}\to\overline{\mathbb{C}}$ 是映到拟圆盘 Ω 上的共形映射，且 $\Sigma=\overline{\mathbb{C}}\setminus \operatorname{cl}\Omega$。对于任意 $\alpha\in\mathcal{A}(\Sigma)$，存在一个法贝尔级数

$$\alpha=\sum_{m=1}^{\infty}h_m\alpha^m$$

收敛到 α in $\mathcal{A}(\Sigma)$。这是收敛到 $\alpha\in\mathcal{A}(\Sigma)$ 的唯一法贝尔级数。

这里的 h_m 由下式确定：

$$\sum_{m=1}^{\infty}h_m\alpha^m=\mathbf{T}(f^{-1})^*\left(\sum_{m=1}^{\infty}h_me^m\right).$$

其中

$$\sum_{m=1}^{\infty}h_me^m$$

就是 $\mathbb{D}$ 中对应于 $\mathbf{T}(f^{-1})^*$ 下 α 的唯一原像的幂级数。

C.avu.用函数来表述这一结果；按本文的术语，这些函数恰好是 1-形式 $\alpha(z)=h(z)dz$ 的系数 $h(z)$。根据方程 (4.7)，$e^m=(\Phi^m)'(z)dz$。C.avu.将以 $(\Phi^m)'$ 表示的级数称为广义法贝尔级数。

注 4.13。Shen [19] 证明了逆命题也成立：如果任意 $\alpha\in\mathcal{A}(\Sigma)$ 都有这样的唯一展开，那么 Σ 就是一个拟圆盘。等价地，平方可和序列 ℓ^2 与 $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ 之间存在同构。这也与 Ch. Pommerenke 和 R. K¨uhnau [11] 利用格伦斯基矩阵刻画拟圆的结果有关。

注 4.14. C.avu.s 和 Shen 在有界域上研究法贝尔级数，并选择共形映射 f 将其映到无界补集。为保持一致，我们在此采用了不同的约定。

我们也可以用更经典的方式，将其表述为关于 Φ^m 的函数法贝尔级数。令 $\mathcal{D}_\infty(\Sigma)$ 表示在 ∞ 处取零的全纯函数的狄利克雷空间，其范数为 $\|h\|_{\mathcal{D}_*(\Sigma)}=\|\partial h\|_{\mathcal{A}(\Sigma)}$。类似地，$\mathcal{D}_0(\mathbb{D})$ 是在 $\mathbb{D}$ 上于 0 处取零的反全纯函数的狄利克雷空间。由推论 4.12 和方程 (4.7) 可立即得出，对于任意 $H(z)\in\mathcal{D}_\infty(\Sigma)$，存在唯一的展开式

$$H(z)=\sum_{m=1}^{\infty}h_m\Phi^m$$

该展开式在 $\mathcal{D}_\infty(\Sigma)$ 中收敛。

关于球面情形下拟圆盘上具有 L^2 阶导数的函数的法贝尔级数，以及 C.avu.s、Shen 和 Napalkov-Yulmukhametov 定理之间的相互关系，详见综述 [16]。

References

[1] Anderson, J. M. 法贝尔算子。有理逼近与插值（佛罗里达州坦帕，1983），1–10，数学讲义，1105，施普林格出版社，柏林，1984年。[2] Askaripour, N.、Barron, T. 关于开黎曼曲面上全纯 k-微分的延拓。《休斯顿数学杂志》40（4），1117–1126（2014）。

[3] Askaripour, N. 与 Foth, T. 关于开黎曼曲面上的全纯 k-微分。《复变函数与椭圆方程》57（2012），第10期，1109—1119。[4] C̦avu̦s, A. 拟共形边界有限区域上的伯格曼空间中广义法贝尔级数逼近。《逼近理论杂志》87（1996），第1期，25–35。[5] Courant, R. 狄利克雷原理、共形映射与极小曲面。附 M. Schiffer 的附录。1950年原版重印。施普林格出版社，纽约—海德堡，1977年。核函数与共形映射。《组合数学》8，（1951年），205–249。[6] Duren, P. 单叶函数。《数学科学基础丛书》 [《数学科学基本原理》], **259**。施普林格出版社，纽约，1983年。[7] Farkas, H. M.；与 Kra, I. 黎曼曲面。第二版。数学研究生教材，71。施普林格出版社，纽约，1992年。[8] Fornæss, J.E.、Forstneri ̌c, F.、Fornæss Wold, E.：全纯逼近：魏尔斯特拉斯、龙格、冈—外尔与梅尔格良的传承。arXiv:1802.03924v3。[9] Gauthier, P.M.、Sharifi, F. 非紧黎曼流形子集上的卢津型调和逼近。《数学分析及其应用杂志》474（2），1132–1152。（2019年）。[10] Napalkov, V. V.（小）、Yulmukhametov, R. S. 关于伯格曼空间中的希尔伯特变换。（俄文）《数学札记》70（2001年），第1期，68–78；译文见《数学札记》70（2001年），第1—2期，61–70。[11] Pommerenke, C. 单叶函数，附 Gerd Jensen 关于二次微分的一章。《数学研究》/《数学教材》，第XXV卷。Vandenhoeck & Ruprecht，G ̈ottingen，1975年。[12] Royden, H. L. 紧黎曼曲面上的函数论。《数学分析杂志》18，1967年，295–327。[13] Schiffer, M. 与 Spencer, D. 有限黎曼曲面上的泛函。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1954年。[14] Schippers, E.、Shirazi, M. 与 Staubach, W. 拟圆所围带边黎曼曲面上的希弗比较算子与逼近，《几何分析杂志》31（2021年），第6期，5877—5908。[15] Schippers, E.；Staubach, W. 黎曼曲面上拟圆的普列梅利—索霍茨基同构与希弗算子。《数学年刊》378（2020年），第3—4期，1613–1653。[16] Schippers, E.；与 Staubach, W. 拟圆上的分析——通过传输问题与跳跃问题的统一方法。《EMS数学科学综述》9（2022年），第1期，31—97。[17] Schippers, E. 与 Staubach, W. 黎曼曲面上调和1-形式的散射理论。预印本。arXiv:2112.00835。[18] Sharifi, F. 黎曼曲面上的一致逼近（2016年）。电子学位论文库。3954。https://ir.lib.uwo.ca/etd/3954 [19] Shen, Y. 具有拟共形延拓的单叶函数的法贝尔多项式及其应用。《中国科学A辑》52（2009年），第10期，2121—2131。[20] Shirazi, M. 任意亏格带边黎曼曲面上的法贝尔算子与格伦斯基算子及希弗同构”。博士论文，曼尼托巴大学，2020年。[21] Suetin, P. K. 法贝尔多项式级数，由 E. V. Pankratiev 从1984年俄文原版翻译。解析方法与特殊函数，1。Gordon and Breach Science Publishers，阿姆斯特丹，1998年。[22] Tietz, H. 闭黎曼曲面上的法贝尔展开（德文），《纯粹与应用数学杂志》190（1952年），第22–33页。¨Tietz, H. 闭黎曼曲面上函数的部分分式分解与乘积表示（德文），《数学档案》4（1953年），第31–38页。[23]Tietz, H. 法贝尔级数与洛朗分解，《密歇根数学杂志》4（1957年），第175–179页。¨Tietz, H. 非紧黎曼曲面上的法贝尔理论（德文），《数学年刊》132（1957年），第412–429页。