arXiv:2303.15692v1 [math.QA] 28 Mar 2023

扭曲弱模上的顶点代数的 Schur-Weyl 型对偶

Kenichiro Tanabe*

文理学院 东京城市大学 1-28-1玉堤，世田谷区，东京 158-8557 日本 ktanabe@tcu.ac.jp

摘要

设 V 是一个可数维顶点代数， G 是 Aut V 的一个有限阶子群， V^G 是 V 在 G 的作用下的不动点子代数， $\mathscr{S}$ 是一个有限的 G-稳定集合，其中的元素是与 G 中可能不同的自同构相关联的互不等价不可约扭曲弱 V-模。我们证明了 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$ 和 V^G 在 $\mathscr{S}$ 中扭曲弱 V-模的直和上的作用满足一种 Schur-Weyl 型对偶，其中 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$ 是一个与 G、$\mathscr{S}$ 及由 G 在 $\mathscr{S}$ 上的作用自然确定的 2-余循环 α 相关联的有限维半单结合代数。作为该结果的自然推论，对于任意 $g\in G$，每个不可约 g-扭曲弱 V-模都是完全可约的弱 V^G-模。

数学主题分类：17B69 关键词：顶点代数、Schur–Weyl 型对偶、弱模。

1 引言

设 V 是一个顶点代数（参见 [4, 17]）， G 是 Aut V 中的一个有限阶子群。我们将 V 在 G 作用下的不动点子代数记为 V^G：对所有 $g\in G$}，都有 $V^G=\{a\in V\mid g(a)=a$。不动点子代数在顶点代数的研究中发挥着重要作用，尤其是在构造有趣的实例方面，其中月光顶点代数 $V^\natural$ 是一个典型例子 [4, 14]。关于 V^G 的一个主要问题，是如何用 V 和 G 来描述 V^G-模。沿着 [5]，中针对简单顶点算子代数 V 提出的各种思路，Dong 和 Mason 开始系统地研究 V^G 的表示，并证明了当 G 是可解群 [11] 时，(G,V^G) 具有 Schur-Weyl 型对偶。值得一提的是，作为 Schur-Weyl 型对偶的一个推论，当 G 是阿贝尔群或二面体群时， [11] 建立了简单顶点算子代数中的伽罗瓦对应；一般情形则见 [15] 。[10, 13, 20, 24] 利用 [25] 中的 Zhu 代数及其推广，在 [7, 8, 9, 20] 中扩展了 Schur-Weyl 型对偶。与这一问题相关，系统地研究扭曲 V-模（参见 [7, 14, 16, 19]）有以下原因：对于 $g\in G$，每个 g-扭曲的 V-模都是一个 V^G-模；此外，有猜想认为，在对 V 施加某些条件时，

*研究 部分经费由日本学术振兴会科学研究补助金（编号：21K03172）资助 .

每个不可约 V^G-模都包含在某个不可约 g-扭曲的 V-模中，其中 $g \in G$ 满足某些条件（参见 [5]）。设 $\mathscr{S}$ 是一个有限的、对 G 稳定的集合（定义见 (3.1) 之后的说明），由与 G 中可能不同的自同构相关联的两两不等价不可约扭曲 V-模组成。在 [13] 中构造了一个与 G、$\mathscr{S}$ 以及由 G 在 $\mathscr{S}$ 上的作用自然确定的 2-余循环 α 相关联的有限维半单结合 $\mathbb{C}$-代数 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$（定义见 (3.7)）。代数 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$ 作用在直和 $\mathscr{M} = \oplus_{M\in\mathscr{S}} M$ 上，而 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$ 与 V^G 的作用彼此对易。上述 Schur-Weyl 型对偶讨论的是 $\mathscr{M}$ 在 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S}) \otimes_{\mathbb{C}} V^G$ 作用下的分解。在 [11, 13, 24] 中，他们研究了 $\mathscr{S}$ 由与单个自同构 $g \in G$ 相关联的 g-扭曲 V-模组成的情形；需要指出的是，在这种情形下，$\mathscr{M}$ 也是一个 g-扭曲的 V-模。若非如此，一般而言 $\mathscr{M}$ 并非扭曲的 V-模，因为扭曲 V-模的定义取决于 V 的各个自同构，因此，与不同自同构相关联的扭曲 V-模的直和并不总是扭曲的 V-模。这一事实使得研究 $\mathscr{M}$ 变得困难。为克服这一困难，Miyamoto 和作者引入了 G-扭曲 Zhu 代数，使我们能够以统一的方式研究扭曲 V-模；并且在 [20, 的定理 2] 中，我们证明了对于任意有限的、对 G 稳定的集合 $\mathscr{S}$，只要其中包含两两不等价的不可约扭曲 V-模，就有 Schur-Weyl 型对偶。

本文旨在将[20, 定理 2] 中的 Schur-Weyl 型对偶推广到顶点代数的扭曲弱模。若分别将“顶点算子代数”和“（扭曲）V-模”替换为“顶点代数”和“（扭曲）弱V-模”，则这里的设定与上文完全相同。这里提到，格顶点代数 V_L 的不动点子代数 V_L^+ 的弱模已在 [23] 中得到分类，其中 L 是一个非退化偶格；并且每个弱 V_L^+ -模都是某个扭曲弱 V_L^+ -模的子模。对于 Heisenberg 顶点算子代数 $M(1)$ 的不动点子代数 $M(1)^+$，文献 [22]也证明了满足某些条件的弱模具有相同结果。这些例子使我们预期，扭曲弱 V-模也满足 Schur-Weyl 型对偶。对于有限阶自同构 $g \in \operatorname{Aut} V$，记$\mathscr{T}_g$ 为所有不可约 g-扭曲弱 V-模构成的集合，并定义 $\mathscr{T}_G = \cup_{g\in G}\mathscr{T}_g$。设 $\mathscr{S}$ 是由两两不等价的不可约扭曲弱 V-模组成的有限 G-稳定子集，且$\mathscr{M} = \oplus_{M\in\mathscr{S}} M$。在 V是可数维简单顶点代数的假设下，文献 [2, 3, 12]研究了（$\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$ V^G）的 Schur-Weyl 型对偶。该文假设 $\mathscr{S}$由与单个自同构 $g \in G$ 相关的 g-扭曲弱 V-模组成。如果情况并非如此，例如扭曲 V-模的情形，那么一般而言，$\mathscr{M}$并不是扭曲弱 V-模。此外，由于扭曲弱 V-模的定义中未假设任何分次，我们无法将 G-扭曲 Zhu 代数用于扭曲弱 V-模。为克服这一困难，我们将不使用 G-扭曲 Zhu 代数，而改用弱（V,T）-模（定义见定义 2.2）。作者 [21] 引入了这一概念，作为扭曲弱模概念的推广，适用于任意正整数 T，并且在取直和时封闭。对于任意有限阶自同构 $g \in \operatorname{Aut} V$，以及任意为 g的阶的倍数的 T，每个 g-扭曲弱 V-模都成为弱（V,T）-模。弱（V,T）-模这一概念使我们能够以统一的方式研究扭曲弱 V-模（引理 2.4）。我们陈述本文的主要结果，即一般情形下（$\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$ V^G）的 Schur-Weyl 型对偶：

定理 1.1. 设 V 是一个可数维单顶点代数，G 是 $\operatorname{Aut} V$ 中的一个有限阶子群，$\mathscr{S}$ 是一个有限的、G-稳定的两两不等价弱 (V,T)-模集合，并且 $\mathscr{M} = \oplus_{M\in\mathscr{S}} M$。在 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S}) \otimes_{\mathbb{C}} V^G$ 的作用下，空间 $\mathscr{M}$ 分解为直和

$$\mathscr{M} = \bigoplus_{j\in J,\lambda\in\Lambda_j} W_\lambda^j \otimes_{\mathbb{C}} M_\lambda^j. \tag{1.1}$$

此外

(1) 对于任意 $j \in J$和 $\lambda \in \Lambda_j$， M_λ^j是非零的不可约弱 (V^G, T)-模。

(2) 对于 j_1， $j_2 \in J$和 $\lambda_1 \in \Lambda_{j_1}$， $\lambda_2 \in \Lambda_{j_2}$， $M_{\lambda_1}^{j_1}$和 $M_{\lambda_2}^{j_2}$作为弱 (V^G, T)-模同构，当且仅当 $(j_1, \lambda_1) = (j_2, \lambda_2)$。

在该定理中， $\{W_\lambda^j \mid j \in J, \lambda \in \Lambda_j\}$ 是不可约 $\mathscr{A}_\alpha(G, \mathscr{S})$-模的同构类的完备代表集，而 M_λ^j是 W_λ^j 在 $\mathscr{M}$中的重数空间，其中 $j \in J$和 $\lambda \in \Lambda_j$上 V^G自然作用（关于3.13）、（3.17）以及（3.15）之前的说明中给出了 W_λ^j和 M_λ^j的精确定义）。

注意，如果 $\mathscr{S}$ 是一个由互不等价的不可约扭曲弱 V-模组成的 $\mathscr{T}_G$ -稳定子集，那么 $\mathscr{M} = \oplus_{M \in \mathscr{S}} M$ 就成为一个弱 V^G-模。因此，在这种情况下，根据弱（V, T）-模的定义（定义2.2），我们可以在定理 1.1中将“弱（V^G, T）-模”替换为“弱 V^G-模”。令 $T = |G|$，便得到定理1.1的以下特殊情形：

推论 1.2. 设 V 是一个可数维的简单顶点代数， G 是 Aut V的一个有限阶子群， $\mathscr{S}$ 是由互不等价的不可约扭曲弱V-模组成的 $\mathscr{T}_G$ 的有限 G-稳定子集，并且 $\mathscr{M} = \oplus_{M \in \mathscr{S}} M$。在 $\mathscr{A}_\alpha(G, \mathscr{S}) \otimes_{\mathbb{C}} V^G$ 的作用下，空间 $\mathscr{M}$ 分解为直和

$$\mathscr{M} = \bigoplus_{j \in J, \lambda \in \Lambda_j} W_\lambda^j \otimes_{\mathbb{C}} M_\lambda^j. \tag{1.2}$$

此外

(1) 对 任意 $j \in J$和 $\lambda \in \Lambda_j$， M_λ^j均非零，且是不可约弱 V^G-模 .

(2) 对于 j_1， $j_2 \in J$和 $\lambda_1 \in \Lambda_{j_1}$， $\lambda_2 \in \Lambda_{j_2}$和 $M_{\lambda_1}^{j_1}$同构为弱 V^G-模，当且仅当 $(j_1, \lambda_1) = (j_2, \lambda_2)$。

特别地，对于任意 $g \in G$ ，每个不可约 g-扭曲弱 V-模都是完全可约的弱 V^G-模。

我们简要介绍基本思路。关键结果是下面的引理 2.7 ，它刻画了 V在弱 (V, T)-模 M上的作用所具有的一种“结合性”：对于 a， $b \in V$， $u \in M$，以及 m， $n \in (1/T)\mathbb{Z}$，

$$a_m b_n u \in \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{(a_i b)_{m+n-i} u \in M \mid i \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.3}$$

当 M 是一个（扭曲）弱 V-模时，这一结果是众所周知的（参见[17, 命题 4.5。7]）。然而在一般情形下，由于弱（V, T)-模结构的复杂性，这一结果远非显然。在证明中，我们使用了 [20] 和 [21] 中发展的方法。一旦引理2.7得以确立， [12, 第 7] 节中的论证对于弱（V, T)-模同样适用，从而得到定理1.1。

本文的组织结构如下。在第2 节中，我们回顾弱（V、 T）-模的一些基本性质，并给出一些结果。在第3 节中，在回顾代数$\mathscr{A}_\alpha(G, \mathscr{S})$的一些性质后，我们证明主要定理。

2 预备知识

本文中，$\mathbb{Z}$ 表示全体整数的集合，T是一个固定的正整数，并且（V，Y，$\mathbf{1}$）是一个顶点代数。回顾一下，V是底层向量空间，Y（x）是从$V\otimes_{\mathbb{C}} V$到 V（（x））的线性映射，而 $\mathbf{1}$ 是真空向量。对于 $g\in \operatorname{Aut} V$，$|g|$ 表示 g的阶。对于$g\in \operatorname{Aut} V$或有限阶、一个是 $|g|$的倍数的正整数 n 以及 $r=0$，$\mathbf{1}$，...，$n-1$，我们定义 V（g，r）$=\{a\in V\mid ga=e^{-2\pi\sqrt{-1}r/n}a\}$。对于 $a\in V$，$a^{(g,r)}$ 表示分解 $V=\oplus_{r=0}^{n-1}V$（g，r）中 a 的第 r个分量，即 $a=\sum_{r=0}^{n-1}a^{(g,r)}$，$a^{(g,r)}\in V$（$g$，$r$）。对于 i，$j\in\mathbb{Z}$，我们定义

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}_{\le i}&=\{k\in\mathbb{Z}\mid k\le i\},\\ \mathbb{Z}_{\ge i}&=\{k\in\mathbb{Z}\mid k\ge i\},\\ \mathbb{C}[z,z^{-1}]_{\le i}&=\operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{z^k\mid k\le i\},\ \text{and}\\ \mathbb{C}[z,z^{-1}]_{i,j}&=\operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{z^k\mid i\le k\le j\}.\end{aligned}\tag{2.1}$$

2.1 $\mathbb{C}[z,z^{-1}]$的子空间

对于 γ、$q\in\mathbb{Z}$ 和 $\alpha\in\mathbb{Q}$，我们用 $O(\gamma,\alpha,q;z)$ 表示由以下元素张成的 $\mathbb{C}[z,z^{-1}]$ 子空间：

$$\operatorname{Res}_x\left((1+x)^{\alpha+1}x^{q-j}\sum_{i\in\mathbb{Z}_{\le\gamma}}z^ix^{-i-1}\right)=\sum_{i=0}^{\gamma-q+j}\binom{\alpha+1}{i}z^{i+q-j},\quad j=0,1,\dots\tag{2.2}$$

和 z^i，$i\in\mathbb{Z}_{\ge\gamma+1}$，它将在引理 2.6 和 2.7 中使用。本文中的子空间 $O(\gamma,\alpha,q;z)$ 记作 $O(\gamma,\alpha+1,q;z)$，其中 [21]。注意到

$$O(\gamma,\alpha,q;z)\subset O(\gamma,\alpha,q+1;z)\subset\cdots.\tag{2.3}$$

以下结果是 [21, 引理 3.2] 及其证明的一个特殊情形。

引理 2.1. 对于 γ、$q\in\mathbb{Z}$和 $\alpha\in\mathbb{Q}$，对角映射 $\mathbb{C}[z,z^{-1}]\ni f\mapsto(f,\dots,f)\in\mathbb{C}[z,z^{-1}]^{\oplus T}$诱导出一个同构

$$\mathbb{C}[z,z^{-1}]/\bigcap_{s=0}^{T-1}O(\gamma,\alpha+\frac{s}{T},q;z)\xrightarrow{\cong}\bigoplus_{s=0}^{T-1}\mathbb{C}[z,z^{-1}]/O(\gamma,\alpha+\frac{s}{T},q;z)\tag{2.4}$$

作为向量空间。此外，左侧商空间中的每个代表元都可以唯一地取自 (2.4) $\mathbb{C}[z,z^{-1}]_{\gamma+1-T(\gamma-q)}$。

对于 $r=0$、...、$T-1$和 $i\in\mathbb{Z}_{\le\gamma}$，由引理 2.1 可知，存在唯一的 $E^{(r)}(\gamma,\alpha,q,i;z)\in\mathbb{C}[z,z^{-1}]_{\gamma+1-T(\gamma-q),\gamma}$使得

$$E^{(r)}(\gamma,\alpha,q,i;z)\equiv\delta_{r,s}z^i\pmod{O(\gamma,\alpha+\frac{s}{T},q;z)},\qquad s=0,1,\dots,T-1.\tag{2.5}$$

为方便起见，我们还对 $i\in\mathbb{Z}_{\ge\gamma+1}$定义 $E^{(r)}(\gamma,\alpha,q,i;z)=0$。

2.2 (V,T)-模

在本小节中，我们回顾弱（V，T）-模的定义及其性质，这些内容来自[21]。我们还展示关于弱（V，T）-模的一些结果。对于 M上的向量空间 $\mathbb{C}$，我们定义三个

线性单射

$$\begin{aligned}\iota_{x,y}:&M[[x^{1/T},y^{1/T}]][x^{-1/T},y^{-1/T},(x-y)^{-1}]\to M(\!(x^{1/T})\!)(\!(y^{1/T})\!),\\ \iota_{y,x}:&M[[x^{1/T},y^{1/T}]][x^{-1/T},y^{-1/T},(x-y)^{-1}]\to M(\!(y^{1/T})\!)(\!(x^{1/T})\!),\\ \iota_{x,x-y}:&M[[x^{1/T},y^{1/T}]][x^{-1/T},y^{-1/T},(x-y)^{-1}]\to M(\!(y^{1/T})\!)(\!(x-y)\!)\end{aligned}$$

by

$$\begin{aligned}\iota_{x,y}f&=\sum_{j,k,l}u_{j,k,l}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{l}{i}(-1)^i x^{j+l-i}y^{k+i},\\ \iota_{y,x}f&=\sum_{j,k,l}u_{j,k,l}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{l}{i}(-1)^{l-i}y^{k+l-i}x^{j+i},\\ \iota_{y,x-y}f&=\sum_{j,k,l}u_{j,k,l}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{j}{i}y^{k+j-i}(x-y)^{l+i}\end{aligned}$$

$=\sum_{j、k、l}u_{j、k、l}x^jy^k(x-y)^l\in M[[x^{1/T},y^{1/T}]][x^{-1/T},y^{-1/T},(x-y)^{-1}]$，$u_{j、k、l}\in M$。关于 f

现在我们写出 弱 （V， T）-模的定义，这称为 V， T-模，见[21,定义 2.1]。

定义 2.2。 弱 (V， T)-模 M是一个在 $\mathbb{C}$上的向量空间，并配备了一个线性映射

$$\begin{aligned}Y_M(\ ,x):V\otimes_{\mathbb{C}}M&\to M(\!(x)\!)\\ a\otimes u&\mapsto Y_M(a,x)u=\sum_{n\in(1/T)\mathbb{Z}}a_nux^{-n-1}\end{aligned}\tag{2.6}$$

使得满足以下条件:

(1) $Y_M(1,x)=\mathrm{id}_M$. (2) 对于 a、 $b\in V$ 和 $u\in M$，存在 $Y(a,b,u|x,y)\in M[[x^{1/T},y^{1/T}]][x^{-1/T},y^{-1/T},(x-y)^{-1}]$，使得

$$\begin{aligned}\iota_{x,y}Y(a,b,u|x,y)&=Y_M(a,x)Y_M(b,y)u,\\ \iota_{y,x}Y(a,b,u|x,y)&=Y_M(b,y)Y_M(a,x)u,\quad\text{and}\\ \iota_{y,x-y}Y(a,b,u|x,y)&=Y_M(Y(a,x-y)b,y)u.\end{aligned}$$

对于一个弱 (V,T)-模 M，其子空间 N 称为 M 的弱 (V,T)-子模，如果 $(N,Y_M|_N)$ 是一个弱 (V, T)-模，其中 $Y_M|_N$ 是 Y_M 在 N 上的限制。非零弱 (V,T)-模 M 称为不可约或简单的，如果 M 除了 0 和其自身 M 之外没有其他子模。对于弱 (V,T)- 模 M 和 N，若线性映射 f: $M\to N$ 满足对所有 $a\in V$、 $u\in M$，都有 $f(a_iu)=a_if(u)$，且 $i\in(1/T)\mathbb{Z}$，则称其为同态。对于弱 (V,T)- 模 M 和 N，如果存在同态 f: $M\to N$ 和 g: $N\to M$，使得 $f\circ g=\mathrm{id}_N$ 且 $g\circ f=\mathrm{id}_M$，则称 M 与 N 作为弱 (V,T)- 模同构，记作 $M\cong N$。对于弱 (V,T)- 模 M 的子模 N，商空间 M/N 是一个弱 (V, T)-模。对于一组弱 (V,T)-模 $\{M_i\}_{i\in I}$，直和 $\oplus_{i\in I}M_i$ 是一个弱 (V,T)-模。

设 M 是一个弱 (V,T)-模。对于 $a\in V$ 和 $s=0$，1，……， $T-1$，我们定义

$$Y_M^s(a,x)=\sum_{i\in s/T+\mathbb{Z}}a_ix^{-i-1}.\tag{2.7}$$

显然， $\sum_{s=0}^{T-1} Y_M^s(a,x) = Y_M(a,x)$ 成立。对于 a、$b \in V$、$u \in M$ 和 $s = 0, 1, \ldots, T-1$，记

$$Y_M(a,b,u|x_1,x_2) = \sum_{i,j\in(1/T)\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_{ijk} x_1^i x_2^j (x_1-x_2)^k,\ v_{ijk} \in M, \tag{2.8}$$

我们定义

$$Y_M^{(s)}(a,b|x_2,x_1-x_2)(u) = \iota_{x_2,x_1-x_2}\Big(\sum_{i\in -s/T+\mathbb{Z}} \sum_{j\in(1/T)\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_{ijk} x_1^i x_2^j (x_1-x_2)^k \Big). \tag{2.9}$$

根据定义，

$$\sum_{s=0}^{T-1} Y_M^{(s)}(a,b|x_2,x_0)(u) = Y_M(Y(a,x_0)b,x_2)u. \tag{2.10}$$

对于 $q \in \mathbb{Z}$, $M((x_2^{1/T}))((x_0))_{\geq q}$，表示 $M((x_2^{1/T}))((x_0))$ 中所有形如 $\sum_{i\in(1/T)\mathbb{Z}} u_{ij} x_2^i x_0^j$, $u_{ij} \in^{j\in\mathbb{Z}_{\geq q}} M$ 的元素所构成的集合。根据 [21, 注 2.6],，若 $Y_M(Y(a,x_0)b,x_2)u \in M((x_2^{1/T}))((x_0))_{\geq q}$，则对于任意 $s = 0, 1, \ldots, T-1$, $Y(s)_M(a,b|x_2,x_0)(u)$ 也成立。我们将 $Y(s)_M(a,b|x_2,x_0)$ 的展开式写作

$$Y_M^{(s)}(a,b|x_2,x_0) = \sum_{i\in(1/T)\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} Y_M^{(s)}(a,b;i,j) x_2^{-i-1} x_0^{-j-1},\ Y_M^{(s)}(a,b;i,j) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} M. \tag{2.11}$$

我们回顾 [21, (2.16)]，中的以下结果，它本质上与 Borcherds 恒等式相同：对于 $a,b \in V$, $u \in M$ 和 $j,k \in (1/T)\mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{j}{i} Y_M^{(s)}(a,b;j+k-i,l+i)(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{l}{i} (-1)^i (a_{l+j-i}b_{k+i} + (-1)^{l+1} b_{l+k-i}a_{j+i})u. \tag{2.12}$$

我们回顾一下文献 [21] 中所讨论的弱 (V,T)-模与（扭曲）弱 V-模这一概念之间的关系。在此之前，我们需要指出，如果 V 是一个顶点算子代数，那么将 V 视为顶点代数时的模概念，与将 V 视为顶点算子代数时的模概念不同（参见 [17, 定义 4.1.1 和 4.1.6]）。为避免混淆，本文始终将 [17, 定义 4.1.1] 中所定义的顶点代数的模称为弱模（参见 [23, 定义 2.1]）。我们使用“弱模”这一术语的原因是，当 V 是一个顶点算子代数时，将 V 视为顶点代数时的模被称为弱 V-模（参见 [1, 定义 2.3], [6, 页 150], 和 [19, 页 157]）。对于扭曲模和扭曲弱模，我们也采用这一规则。由 [21, 引理 2.4], 可知，下面给出的（扭曲）弱 V-模的定义与标准定义相同（[23, 定义 2.1] 和 [18, 定义 2.6]）：

定义 2.3. (1) 弱 $(V,1)$-模称为弱 V-模。

(2) 设 $g \in \mathrm{Aut}\, V$ 的阶有限。若弱 $(V,|g|)$-模 M 满足对所有 $s = 0, 1, \ldots, |g|-1$ 以及 $a \in V_{(g,s)}$，有 $Y_M(a,x) = Y_M^s(a,x)$，则称其为 g-扭曲弱 V-模。

以下结果表明，弱 (V,T)-模这一概念使我们能够以统一的方式研究扭曲弱 V-模。

引理 2.4. 设 $g \mathrm{Aut}\, V$ 的阶为有限阶，且 T 是 $|g|$ 和 $|h|$ 的公倍数。设 M 是一个 g-扭曲弱 V-模，N 是一个 h- 扭曲弱 V- 模。那么，$M \cong N$ 作为弱（V，T）- 模当且仅当 $g = h$ 和 $M \cong N$ 作为 g- 扭曲弱模。

证明。假设 $M \cong N$ 是弱（V， T）-模。注意到，对于所有 $r = 0$、1、...、 $|g|-1$，由于 V 是简单的，有 $V_{(g,\ rT/|g|)} \neq 0$。对于任意 $r = 0$、1、...、 $|g| - 1$ 以及 $0 \neq a \in V_{(g,\ rT/|g|)}$，由于 V 是简单的，$0 \neq Y_M$（a， x） $= Y_M^{rT/|g|}$（a， x），因此 Y_N（a， x） $= Y_N^{rT/|g|}$（a， x）。于是， $g = h$。证明的其余部分显然。 □

对于顶点代数 V，我们取张量代数 $B(V) = T(V \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\zeta^{1/T}, \zeta^{-1/T}])$，其中 $\zeta^{1/T}$是一个变量。对于弱 (V,T)-模 M，我们按如下方式将 M视为一个 $B(V)$-模：对于 $a \in V, i \in (1/T)\mathbb{Z}$，以及 $u \in M$，我们定义

$$(a \otimes \zeta^i) \cdot u = a_i u. \tag{2.13}$$

我们注意到，如果 V 是可数维的，那么 $B(V)$也是可数维的。下面的结果显然成立 s:

引理 2.5. 设 V为一个顶点代数，设 M、 N为弱 (V,T)-模。则

(1) M是不可约弱 (V,T)-模，当且仅当 M是不可约弱 $B(V)$-模。

(2) 当且仅当$M \cong N$作为弱(V,T)-模时，$M \cong N$作为 $B(V)$-模。

(3) （舒尔引理）若 V 是可数维的且 M 不可约，则$\mathrm{End}_V M$ $=\mathrm{End}_{B(V)} M \cong \mathbb{C}$。

设 M 是一个弱 (V,T)-模。对于 $a \in V$和 $u \in M$，我们定义 $\epsilon(a,u)$ $\in (1/T)\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ b y

$$a_{\epsilon(a,u)} u \neq 0 \text{ and } a_i u = 0 \text{ for all } i > \epsilon(a,u) \tag{2.14}$$

若 $Y_M(a,x)u \neq 0$，且当 $\epsilon(a,u) = -\infty$时若 $Y_M(a,x)u = 0$。

为叙述接下来的结果，我们预备如下符号。设 M是一个弱(V,T)-模， a、 $b \in V$、$u \in M$、 m、 $n \in (1/T)\mathbb{Z}$，以及 α、 β、 $\gamma \in \mathbb{Z}$满足 $\alpha \geq \epsilon(a,u)$、 $\beta \geq \epsilon(b,u)$和 $\gamma \geq \epsilon(a,b)$。我们记$m = l_1 + r_1/T$和 $n = l_2 + r_2/T$，其中 l_1、 $l_2 \in \mathbb{Z}$以及 $0 \leq r_1$、 $r_2 < T$。对于 $s = 0$， 1， ...， $T - 1$，我们定义一个线性映射 $Z_{m,\ n}^{(s)}(a,b,u;-)$: $\mathbb{C}[z, z^{-1}] \to M$ 如下:

$$Z_{m,n}^{(s)}(a,b,u;z^i) = Y_M^{(s)}(a,b;m+n-i,i)(u),\ i \in \mathbb{Z}. \tag{2.15}$$

定义见 $Y_{(s)\,M}(a,b;\ m+n-i,i)(u)$（2.11）。

引理 2.6。对于 $s = 0$、1、.....、 $T-1$ 和 $p(z) \in O(\gamma, \alpha + s/T, l_1 - \alpha + l_2 - \beta - 2;\ z)$， $Z_{m,\ n}^{(s)}(a,b,u;\ p(z))$ $=0$。

证明。若 $i \geq \gamma + 1$，然后 $Z_{m,\ n}^{(s)}(a,\ b,\ u;\ z^i) = 0$根据 (2.15) 以及 (2.10) 后面的说明。B y

(2.2), (2.12), (2.14) 和 (2.15)，对任意 $j = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,$

$$
\begin{aligned}
&Z^{(s)}_{m,n}(a,b,u;\sum_{i=0}^{\gamma}\binom{\alpha+s/T+1}{i}z^{i+l_1-\alpha+l_2-\beta-2-j})\\
&=\sum_{i=0}^{\gamma}\binom{\alpha+s/T+1}{i}Y^{(s)}_M(a,b;m+n-i-l_1+\alpha-l_2+\beta+2+j,i+l_1-\alpha+l_2-\beta-2-j)(u)\\
&=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{\alpha+s/T+1}{i}\\
&\quad\times Y^{(s)}_M(a,b;(\alpha+s/T+1)+(\beta+(r_1+r_2-s)/T+1+j)-i,l_1-\alpha+l_2-\beta-2-j+i)(u)\\
&=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{l_1-\alpha+l_2-\beta-2-j}{i}(-1)^i\big(a_{s/T+l_1+l_2-\beta-j-1-i}b_{\beta+(r_1+r_2-s)/T+1+j+i}\\
&\qquad+(-1)^{l_1-\alpha+l_2-\beta-j-1}b_{(r_1+r_2-s)/T+l_1-\alpha+l_2-1-i}a_{\alpha+s/T+1+i}\big)u\\
&=0.
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

这里我们使用了 $-1<(r_1+r_2-s)/T$。证明完毕。 □

以下是本文的关键结果。

引理 2.7。设 M是一个弱 (V,T)-模。对于 $a,b\in V,u\in M$，以及 $m,n\in(1/T)\mathbb{Z}$，

$$a_mb_nu\in\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{(a_ib)_{m+n-i}u\in M\mid i\in\mathbb{Z}\}. \tag{2.17}$$

证明。设 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{Z}$满足 $\alpha\geq\epsilon(a,u)$、$\beta\geq\epsilon(b,u)$，以及 $\gamma\geq\epsilon(a,b)$。记 $m=l_1+r_1/T$和 $n=l_2+r_2/T$，其中 $l_1,l_2\in\mathbb{Z}$以及 $0\leq r_1,r_2<T$。取 $\mu,\nu\in(1/T)\mathbb{Z}$，使得 $\epsilon(a,u)\leq\mu,\epsilon(b,u)\leq\nu$，并且 $m\equiv\mu,n\equiv\nu$(模 $\mathbb{Z}$)。我们定义一个劳朗多项式 $\Phi_{m,n}(z)\in\mathbb{C}[z,z^{-1}]$如下：

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{m,n}(z)\\
&=\sum_{j=0}^{\nu-n}\binom{m-\mu-1}{j}\mathrm{Res}_x(1+x)^{\mu+1}x^{m-\mu-1-j}\sum_{i\in\mathbb{Z}_{\leq\gamma}}E^{(r_1)}(\gamma,\alpha,l_1-\alpha+l_2-\beta,i;z)x^{-i-1}\\
&=\sum_{j=0}^{\nu-n}\binom{m-\mu-1}{j}\sum_{i=0}^{\gamma-(m-\mu-1-j)}\binom{\mu+1}{i}E^{(r_1)}(\gamma,\alpha,l_1-\alpha+l_2-\beta,i+m-\mu-1-j;z)\\
&\in\mathbb{C}[z,z^{-1}]_{\gamma+1-T(\gamma-l_1-l_2+\alpha+\beta),\gamma}.
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

对于任意 $i\in\mathbb{Z}$ 以及 $0\leq s\leq T-1$ 满足 $s\neq r_1$，由（2.5）可得，

$$E^{(r_1)}(\gamma,\alpha,l_1-\alpha+l_2-\beta,i;z)\equiv 0\pmod{O(\gamma,\alpha+\frac{s}{T},l_1-\alpha+l_2-\beta;z)} \tag{2.19}$$

因此由引理 2.6，$Z^{(s)}_{m,n}(a,b,u;\Phi_{m,n}(z))=0$。由引理 2.6，我们还可得

$$\Phi_{m,n}(z)=\sum_{j=0}^{\nu-n}\binom{m-\mu-1}{j}\sum_{i=0}^{\gamma-(m-\mu-1-j)}\binom{\mu+1}{i}z^{i+m-\mu-1-j}\pmod{O(\gamma,\alpha+\frac{r_1}{T},l_1-\alpha+l_2-\beta;z)} \tag{2.20}$$

因此由（2.12），

$$
\begin{aligned}
&Z_{m,n}^{(r_1)}(a,b,u;\Phi_{m,n}(z))\\
&=\sum_{j=0}^{\nu-n}\binom{m-\mu-1}{j}\sum_{i=0}^{\gamma-(m-\mu-1-j)}\binom{\mu+1}{i}Y^{(r_1)}(a,b,u;\mu+1+n+j-i,i+m-\mu-1-j)u\\
&=\sum_{j=0}^{\nu-n}\binom{m-\mu-1}{j}\sum_{i=0}^{\infty}\binom{m-\mu-1-j}{i}(-1)^i\left(a_{m-j-i}b_{n+j+i}u+(-1)^{m-\mu-j}b_{m+n-\mu-1-i}a_{\mu+1+i}u\right)\\
&=\sum_{k=0}^{\nu-n}\sum_{i=0}^{k}\binom{m-\mu-1}{k-i}\binom{m-\mu-1-k+i}{i}(-1)^i a_{m-k}b_{n+k}u\\
&=\sum_{k=0}^{\nu-n}\binom{k-1}{k}a_{m-k}b_{n+k}u\\
&=a_m b_n u.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

写出 $\Phi_{m,\ n}(a,\ b,\ u;\ z)\ =\sum_{i\in\mathbb{Z}}\lambda_i z^i,\ \lambda_i\in\mathbb{C}$，根据（2.10）可得

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathbb{Z}}\lambda_i(a_i b)_{m+n-i}u&=\sum_{s=0}^{T-1}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\lambda_i Y_M^{(s)}(a,b;m+n-i,i)(u)\\
&=\sum_{s=0}^{T-1}Z_{m,n}^{(s)}(\Phi_{m,n}(a,b,u;z))\\
&=Z_{m,n}^{(r_1)}(\Phi_{m,n}(a,b,u;z))\\
&=a_m b_n u.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

证明完成。 □

注 2.8。以下结果与引理2.7互补，由 [21, 引理 2。8]可得：对于弱（V，T）-模 M，a，$b\in V$，$u\in M$，以及 $m\in(1/T)\mathbb{Z}$，$l\in\mathbb{Z}$，

$$
(a_l b)_m u\in\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{a_{l+m-i}b_i u\in M\mid i\in(1/T)\mathbb{Z}\}.
\tag{2.23}
$$

因此，标准论证（参见 [17, 推论 4.5。15]）表明以下结果：设 V 为一个单顶点代数，M 为一个弱（V，T）-模，且有 $a\in V$, $u\in M$。若 $Y_M(a,x)u=0$，则 $a=0$ 或 $u=0$。

3 代数 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$ 及定理 1.1的证明

在本节中，V 是一个可数维的简单顶点代数，且 G 是 V 的一个有限阶子群。T本节在回顾代数 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$ 的若干性质后，[13], 我们将证明定理1.1。

3.1 代数 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$ 及其模

对于弱 (V,T)-模 (M,Y_M) 和 $\sigma\in\mathrm{Aut}\ V$，我们定义一个弱 (V,T)-模 $(M\cdot\sigma,Y_{M\cdot\sigma})$，其定义为$M\cdot\sigma=M$ 作为一个向量空间，且

$$
Y_{M\cdot\sigma}(a,x)=Y_M(\sigma a,x)\ \text{for}\ a\in V.
\tag{3.1}
$$

注意，若 M 是不可约的，则 $M\cdot\sigma$ 也是不可约的。一组 $\mathscr{S}$互不等价的不可约弱 (V,T)-模称为 G-稳定的，如果对于任意 $M\in\mathscr{S}$ 和 $\sigma\in G$，都存在 $N\in\mathscr{S}$，使得 $M\cdot\sigma\cong N$ 作为弱 (V,T)-模成立。对于有限右 G-集 $\mathscr{X}$，文献[13]构造了有限维半单结合$\mathbb{C}$-代数 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{X})$。对于有限的 G-稳定互不等价不可约弱 (V,T)-模集合 $\mathscr{S}$，我们根据文献 [13]回顾 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$ 的定义及其基本性质。直到本节结束，我们假设 $\mathscr{S}$ 是有限的 G-稳定互不等价不可约弱 (V,T)-模集合。令 $M\in\mathscr{S}$ 和 $\sigma\in G$。那么存在 $N\in\mathscr{S}$，使得 $N\cdot\sigma\cong M$ 作为弱 (V,T)-模成立。也就是说，存在一个同构 $\phi(\sigma,M)$：$M\to N$，它是向量空间之间的映射，满足

$$\phi(\sigma,M)Y_M(a,x)=Y_N(\sigma a,x)\phi(\sigma,M) \tag{3.2}$$

对所有 $a\in V$。对于 $\sigma,\tau\in G$，由 M 的不可约性，存在 $\alpha_M(\sigma,\tau)\in\mathbb{C}$使得

$$\phi(\sigma,M\cdot\tau^{-1})\phi(\tau,M)=\alpha_M(\sigma,\tau)\phi(\sigma\tau,M). \tag{3.3}$$

此外，对于 $\sigma,\tau,\rho\in G$ 和 $M\in\mathscr{S}$，我们有

$$\alpha_{M\cdot\rho^{-1}}(\sigma,\tau)\alpha_M(\sigma\tau,\rho)=\alpha_M(\sigma,\tau\rho)\alpha_M(\tau,\rho). \tag{3.4}$$

我们定义一个向量空间 $\mathbb{C}\mathscr{S}=\oplus_{M\in\mathscr{S}}\mathbb{C}e(M)$，其关于 $M\in\mathscr{S}$ 的一组基为 $e(M)$。向量空间 $\mathbb{C}\mathscr{S}$ 是一个结合代数，其乘法由 $e(M)e(N)=\delta_{M,N}e(N)$ 给出。我们定义 $\mathbb{C}\mathscr{S}$ 的一个子集$\mathscr{U}(\mathbb{C}\mathscr{S})=\{\sum_{M\in\mathscr{S}}\lambda_Me(M)\mid\lambda_M\in\mathbb{C}^\times\}$，其中 $\mathbb{C}^\times=\mathbb{C}\setminus\{0\}$。集合 $\mathscr{U}(\mathbb{C}\mathscr{S})$ 在作用下成为一个右 G-集

$$\sum_{M\in\mathscr{S}}\lambda_Me(M)\cdot\sigma=\sum_{M\in\mathscr{S}}\lambda_Me(M\cdot\sigma) \tag{3.5}$$

对于 $\sigma\in G$。对于 $\alpha(\sigma,\tau)=\sum_{M\in\mathscr{S}}\alpha_M(\sigma,\tau)e(M)$，我们有

$$(\alpha(\sigma,\tau)\cdot\rho)\alpha(\sigma\tau,\rho)=\alpha(\sigma,\tau\rho)\alpha(\tau,\rho) \tag{3.6}$$

对所有 σ、τ、$\rho\in G$，从而对 α：$G\times G\to\mathscr{U}(\mathbb{C}\mathscr{S})$ 是一个 2-余循环。

向量空间 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})=\mathbb{C}[G]\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\mathscr{S}$ 是一个结合 $\mathbb{C}$-代数，其乘法定义为

$$(\sigma\otimes e(M))\cdot(\tau\otimes e(N))=\alpha_N(\sigma,\tau)\sigma\tau\otimes e(M\cdot\tau)e(N). \tag{3.7}$$

我们如下定义 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$ 在 $\mathscr{M}=\oplus_{M\in\mathscr{S}}M$ 上的作用：对于 M、$N\in\mathscr{S}$、$u\in N$ 和 $\sigma\in G$，我们定义

$$\sigma\otimes e(M)\cdot u=\delta_{M,N}\phi(\sigma,M)u. \tag{3.8}$$

注意，$\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$ 和 V^G 在 $\mathscr{M}$ 上的作用彼此对易。对于 $M\in\mathscr{S}$，我们定义

$$G_M=\{\sigma\in G\mid M\cdot\sigma\cong M\text{ as weak }(V,T)\text{-modules}\}. \tag{3.9}$$

$\alpha_M=\alpha|_{G_M\times G_M}$显然是 G_M的一个 2-余循环限制映射。令 $\mathscr{O}_M$为 M在 G 作用下的轨道，并令 $G=\cup_{j=1}^kG_Mg_j$ 为一个右陪集分解，其中 $g_1=1$。于是$\mathscr{O}_M=\{M\cdot g_j\mid j=1,\dots,k\}$ 且 $G_{M\cdot g_j}=g_j^{-1}G_Mg_j$。我们定义 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$的几个子空间如下：

$$\begin{aligned}S(M)&=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\sigma\otimes e(M)\mid\sigma\in G_M\},\\ D(M)&=\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\sigma\otimes e(M)\mid\sigma\in G\},\\ D(\mathscr{O}_M)&=\mathrm{Span}\{\sigma\otimes e(M\cdot g_j)\mid\sigma\in G,j=1,\dots,k\}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

$\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$的子代数 $S(M)$同构于 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]$，即 2-余循环为 α_M的扭曲群代数。将 $\mathscr{S}$ 分解为轨道的不交并：

$$\mathscr{S}=\bigcup_{j\in J}\mathscr{O}_j. \tag{3.11}$$

令 M^j 为 $\mathscr{O}_j$的一个代表元。那么 $\mathscr{O}_j=\mathscr{O}_{M^j}=\{M^j\cdot\sigma\mid\sigma\in G\}$ 和 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})=\oplus_{j\in J}D(\mathscr{O}_{M^j})$。对于 $M\in\mathscr{S}$，令 Λ_{G_M,α_M} 为 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]$的所有不可约特征标 λ 的集合。我们用 $W(M)_\lambda$ 表示相应的不可约模。注意，M 是一个半单的 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]$-模。令 M^λ 为 M 中与 $W(M)_\lambda$ 同构的不可约 $\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]$-模之和。那么

$$M=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_{G_M,\alpha_M}}M^\lambda. \tag{3.12}$$

此外，$M^\lambda=W(M)_\lambda\otimes M_\lambda$，其中

$$M_\lambda=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]}(W(M)_\lambda,M) \tag{3.13}$$

是 M 中 $W(M)_\lambda$ 的重数。我们可以用以下方式将 M_λ 实现为 M 的一个子空间：令 $w\in W(M)_\lambda$ 为一个固定的非零向量。那么我们可以将 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]}(W(M)_\lambda,M)$ 与子空间

$$\{f(w)\mid f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]}(W(M)_\lambda,M)\} \tag{3.14}$$

的 M^λ。注意，$\mathbb{C}^{\alpha_M}[G_M]$和 V^{G_M}在 M上的作用彼此对易。因此，M^λ和M_λ是弱（V^{G_M}，T）-模。此外，M^λ和 M_λ是弱（V^G，T）-模。与[12, 推论 6.5 和定理 6.7] 中相同的论证表明，对于任意 $\lambda\in\Lambda_{G_M,\ \alpha_M}$，$M_\lambda\neq 0$ 和 M_λ 是一个不可约弱（V^{G_M}，T）-模。

设 $\mathscr{S}=\cup_{j\in J}\mathscr{O}_j$为一个轨道分解，并为每个 $j\in J$固定一个 $M^j\in\mathscr{O}_j$。为方便起见，记

$$G_j=G_{M^j},\quad \Lambda_j=\Lambda_{G_{M^j},\alpha_{M^j}},\quad \text{and}\quad W_{j,\lambda}=W(M^j)_\lambda \tag{3.15}$$

对于 $j\in J$ 和 $\lambda\in\Lambda_j$。我们有一个分解

$$M^j=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_j}W_{j,\lambda}\otimes M^j_\lambda \tag{3.16}$$

作为一个 $\mathbb{C}^{\alpha_{M^j}}[G_{M^j}]$-模。对于 $j\in J$和 $\lambda\in\Lambda_j$，记

$$W^j_\lambda=\mathrm{Ind}_{S(M^j)}^{D(M^j)}W_{j,\lambda}. \tag{3.17}$$

由 [13, 定理 3.6] 可知，代数 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$ 是半单的，且 $\{W^j_\lambda\mid j\in J,\lambda\in\Lambda_j\}$是不可约 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})$-模的同构类的完备代表集。由 [13, 命题 6.6 和 6.7] 可知，在 $\mathscr{A}_\alpha(G,\mathscr{S})\otimes_{\mathbb{C}}V^G$的作用下，空间 $\mathscr{M}$ 分解为

$$\mathscr{M}=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda_j}W^j_\lambda\otimes M^j_\lambda. \tag{3.18}$$

3.2 定理的证明 1.1

我们注意到 [12, 定理 4.7] 即使对于弱 (V,T)-模也成立。感谢引理 2.5、引理2.7、(3.18)、 [12, 推论 3.3 和定理 4.7], 与 [12, 定理 7.4] 中的相同论证，便可得出该结果。

参考文献

[1] T. Abe、G. Buhl 和 C. Dong，《有理性、正则性与 C_2-余有限性》，《美国数学会汇刊》356（2004），3391–3402。[2] D. Adamovi´c、C. H. Lam、V. Pedi´c 和 N. Yu，《关于循环轨形顶点代数中 Whittaker 型模的不可约性》，《代数杂志》539（2019），1–23。[3] D. Adamovi´c、C. H. Lam、V. Pedi´c 和 N. Yu，《关于 Whittaker 型模的不可约性：扭曲模与非阿贝尔轨形》，https://arxiv.org/abs/2212.14137，2022。[4] R. Borcherds，《顶点代数、Kac-Moody 代数与 Monster》，《美国国家科学院院刊》83（1986），3068–3071。[5] R. Dijkgraaf、C. Vafa、E. Verlinde 和 H. Verlinde，《轨道模型的算子代数》，《数学物理通讯》123（1989），485–526。[6] C. Dong、H. S. Li 和 G. Mason，《有理顶点算子代数的正则性》，《数学进展》132（1997），148–166。[7] C. Dong、H. S. Li 和 G. Mason，《顶点算子代数的扭表示》，《数学年刊》310（1998），571–600。[8] C. Dong、H. S. Li 和 G. Mason，《顶点算子代数的扭表示与结合代数》，《国际数学研究通知》（1998），389–397。[9] C. Dong、H. S. Li 和 G. Mason，《顶点算子代数与结合代数》，《代数杂志》206（1998），67–96。[10] C. Dong 和 G. Mason，《顶点算子代数的紧自同构群》，《国际数学研究通知》18（1996），913–921。[11] C. Dong 和 G. Mason，《关于量子伽罗瓦理论》，《杜克数学杂志》86（1997），305–321。[12] C. Dong、L. Ren 和 C. Yang，《顶点代数的轨形理论与伽罗瓦对应》，https://arxiv.org/abs/2302.09474，2023。[13] C. Dong 和 G. Yamskulna，《顶点算子代数、广义双代数与对偶对》，《数学杂志》241（2002），397–423。[14] I. B. Frenkel、J. Lepowsky 和 A. Meurman，《顶点算子代数与 Monster》，《纯粹与应用数学》134，学术出版社，1988。[15] A. Hanaki、M. Miyamoto 和 D. Tambara，《有限群的量子伽罗瓦理论》，《杜克数学杂志》97（1999），541–544。[16] J. Lepowsky，《扭顶点算子演算》，《美国国家科学院院刊》82（1985），第24号，8295–8299。

[17] J. Lepowsky 和 H. S. Li，《顶点算子代数及其表示导论》，数学进展227，Birkhauser Boston 公司，马萨诸塞州波士顿，2004。[18] H. S. Li，《扭曲顶点算子的局部系统、顶点算子超代数与扭曲模》，《Moonshine、Monster 及相关主题》（马萨诸塞州南哈德利，1994），《当代数学》，第193卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1996，第203–236页。[19] H. S. Li，《顶点算子的局部系统、顶点超代数与模》，《纯粹与应用代数杂志》109（1996），143–195。[20] M. Miyamoto 和 K. Tanabe，《$A_{g,\,n}(V)$ 的统一乘积：轨道模型及 G-扭曲 Zhu 代数》，《代数杂志》274（2004），80–96。[21] K. Tanabe，《顶点代数上扭曲模的一个推广》，《日本数学会杂志》67（2015），第3号，1109–1146。[22] K. Tanabe，《自同构阶为2的秩1 Heisenberg 顶点算子代数不动点子代数的简单弱模与 Whittaker 向量》，《美国数学会会刊》145（2017），4127–4140。[23] K. Tanabe，《由自同构阶为2的非退化偶格所关联的顶点代数不动点子代数的不可约弱模（第一部分）》，《代数杂志》575（2021），31–66。[24] G. Yamskulna，《顶点算子代数与对偶对》，博士论文，加利福尼亚大学圣克鲁兹分校，2001。[25] Y. Zhu，《顶点算子代数特征标的模不变性》，《美国数学会杂志》9（1996），237–302。