arXiv:2303.15744v1 [math.RA] 28 Mar 2023

Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的上同调与变形

JIA ZHAO、YU QIAO 和 SENRONG XU*

摘要。本文引入 Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的概念，并通过 Yamaguti 上同调建立交叉同态的上同调理论。因此，我们利用这一上同调理论刻画 Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的线性变形。我们证明，若一个交叉同态的两个线性变形或形式变形等价，则它们的无穷小在第一上同调群中属于同一个上同调类。此外，我们证明，一个交叉同态的 n 阶变形能够扩张为 n 阶 + 1 变形，当且仅当其在第二上同调群中的障碍类是平凡的。

关键词：Lie-Yamaguti 代数、交叉同态、上同调、变形 数学主题分类（2020）：17A36、17B55、17B60

目录

1. 引言 11.1. Lie-Yamaguti 代数 21.2. 交叉同态 21.3. 论文概要 32. 预备知识：Lie-Yamaguti 代数、表示与上同调 33. Lie-Yamaguti 代数之间的交叉同态 64. Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的上同调 105. Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的变形 145.1. Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的线性变形 145.2. Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的形式变形 165.3. 阶数 n Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的变形 18参考文献 20

1. 引言

数学物理是数学中的一个重要分支，可应用于李理论和表示论 [15, 19]。变形理论在数学和数学物理中发挥着重要作用。粗略地说，数学对象的变形是指在参数扰动后仍保留其原有结构。在物理学中，变形理论源于经典力学量子化，而这一思想推动了数学中关于量子群的一些研究 [6, 13]。近年来，在数学物理领域，变形量子化催生了许多优美的成果。基于 Kodaira 和 Spencer 在复分析方面的工作 [17], , 变形理论被推广到代数领域 [13]。代数的变形可以

日期：2023年3月29日。

追溯到 Gerstenhaber 关于结合代数的研究 [8, 9, 10, 11, 12]。后来，Nijenhuis 和 Richadson 研究了李代数的变形 [23]。Balavoine 将变形理论推广到了预运算子 [1]。

在代数的研究背景下，变形与上同调有着密切联系。例如，适当的上同调可以用来刻画变形。特别地，李代数的线性变形由第二上同调群控制；n 阶变形可以扩展为 n + 1 阶变形，当且仅当其障碍类是平凡的；平凡变形会产生一个 Nijenhuis 算子 [7], ，该算子是变形理论的关键，并可应用于构造双哈密顿系统的可积性研究[7]。Sheng 及其合作者在（3-）李代数的变形理论方面开展了一系列工作。例如，他们研究了 3-李代数乃至 n-Lie 代数的变形 [20] ，并利用 Nijenhuis 算子研究了 3-李代数上的乘积结构和复结构 [26]。此外，他们构造了一个控制代数，用于刻画李代数、3-李代数以及 Leibniz代数上的相对 Rota-Baxter 算子（也称为 $\mathcal{O}$-算子）的变形[29, 30, 31]。最近，Pei 及其同事运用相同的方法在李代数上建立了交叉同态，并利用双函子推广了多种李代数的构造[25]。此外，前两位作者研究了LieYRep 对的上同调与线性变形，并探讨了LieYRep 对上相对 Rota-Baxter-Nijenhuis结构的若干性质 [37], ，以及 Lie-Yamaguti 代数上相对 Rota-Baxter 算子的上同调与变形[38]。

1.1. Lie-Yamaguti 代数。Lie-Yamaguti 代数是李代数和李三系的一种推广，其历史可以追溯到 Nomizu 在20世纪50年代关于齐性空间上的仿射不变联络的研究 [24]。后来，在20世纪60年代，Yamaguti 引入了一种代数结构，并将其称为一般李三系或李三代数 [32, 33, 34]。Kinyon 和 Weinstein 在21世纪初研究 Courant代数丛时，首次将这一对象称为 Lie-Yamaguti 代数 [16]。此后，这一系统便被称为 Lie-Yamaguti 代数，近年来受到了广泛关注并得到深入研究。例如，Benito 及其合作者深入研究了不可约Lie-Yamaguti代数及其与正交李代数之间的关系 [2, 3, 4, 5]。文献 [18, 22, 35, 36] 研究了 Lie-Yamaguti 代数的变形与扩张。Sheng、第一作者和 Zhou 在 [27] 中借助 Nijenhuis 算子分析了 Lie-Yamaguti 代数上的乘积结构和复结构。Takahashi 在 [28] 中利用 Lie-Yamaguti代数的表示研究了拟群上的模。

1.2. 交叉同态。研究李代数的非阿贝尔扩张时，人们引入了李代数上的交叉同态这一概念 [21]。权 1 的微分算子是交叉同态的一个例子，而平凡主丛的平坦联络1-形式也是交叉同态。在 [25], 中，作者利用交叉同态证明，李-莱因哈特代数的弱表示（分别是莱布尼茨对的可容许表示）范畴是李代数表示幺半范畴上的左模范畴。后来，文献 [14] 也研究了 3-李代数上交叉同态的上同调与变形。因此，研究 Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的上同调与变形是很自然的。

更确切地说，对于一个从 Lie-Yamaguti 代数 g 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 h、相对于作用 (ρ, μ) 的交叉同态 $H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$，最重要的一步是建立 H 的上同调理论。我们的策略如下：首先，通过 H 引入线性映射 $\rho_H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 和 $\mu_H : \otimes^2\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$，并证明 $(\mathfrak{h}; \rho_H, \mu_H)$ 是 g 在向量空间 h 上的一个表示

。由此，我们得到 Lie-Yamaguti 代数 g 关于表示 $(\mathfrak{h}; \rho_H, \mu_H)$ 的相应 Yamaguti 上同调。注意，Yamaguti 上同调从 1-上链开始。因此，第二步是构造 0-余链及相应的余边界映射，这是一项有待克服的难题。建立上同调理论后，我们便能够探究交叉同态的上同调与变形之间的关系。为此，我们打算研究三种变形：线性变形、形式变形和高阶变形。

请注意，当三元括号为平凡时，Lie-Yamaguti 代数可约化为李三系，因此，本文可直接得出李三系之间交叉同态的概念，以及这些交叉同态的上同调与变形理论。

1.3. 论文结构。本文结构如下。第2节回顾一些基本概念，如 Lie-Yamaguti 代数、表示和上同调。第3节介绍 Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的概念，并证明交叉同态与 Lie-Yamaguti 代数同态之间存在一一对应关系。第 4 节建立 Lie-Yamaguti 代数上交叉同态的上同调，并考察上同调理论的一种函子性质。最后，第5节探讨三种变形，并证明线性变形和形式变形的无穷小可由上同调控制，而高阶变形的扩张则由一个特殊的上同调类刻画。因此，我们将这个上同调类称为障碍类。

本文中，所有向量空间均假设定义在 $\mathbb{K}$ 特征0的域上，且为有限维。

2. 预备知识：Lie-Yamaguti 代数、表示与上同调

本节将回顾一些基本概念，例如 Lie-Yamaguti 代数、表示及其上同调理论。Lie-Yamaguti 代数的概念由 Yamaguti 在[32]中引入。

定义 2.1。[16] Lie-Yamaguti 代数是一个向量空间 g，其配备了一个双线性括号$[\cdot,\cdot]: \wedge^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 和一个三线性括号 $[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]: \wedge^2\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$，并满足以下条件：对所有 $x,y,z,w,t \in \mathfrak{g}$,

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad [[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]+[\![x,y,z]\!]+[\![y,z,x]\!]+[\![z,x,y]\!]=0,\\
&(2) \quad [\![[x,y],z,w]\!]+[\![[y,z],x,w]\!]+[\![[z,x],y,w]\!]=0,\\
&(3) \quad [\![x,y,[z,w]]\!]=[[\![x,y,z]\!],w]+[z,[\![x,y,w]\!]],\\
&(4) \quad [\![x,y,[\![z,w,t]\!]]\!]=[\![[\![x,y,z]\!],w,t]\!]+[\![z,[\![x,y,w]\!],t]\!]+[\![z,w,[\![x,y,t]\!]]\!].
\end{aligned}
$$

下文中，我们用 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 表示一个 Lie-Yamaguti 代数。

例 2.2. 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ 是一个李代数。定义一个三线性括号

$$[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]: \wedge^2\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

by

$$[\![x,y,z]\!] := [[x,y],z], \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}.$$

则通过 直接计算可知，$(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 构成一个 Lie-Yamaguti 代数 .

下面的例子更有意思。

例 2.3. 设 M 是一个带有仿射联络的闭流形，并用 X(M) 表示 M 上的向量场集合。对于所有 x, y, z $\in$ X(M)，定义

$$\begin{aligned}[x,y] &:= -T(x,y),\\ [\![x,y,z]\!] &:= -R(x,y)z,\end{aligned}$$

其中，T 和 R 分别为挠率张量和曲率张量。事实证明，三元组$(\mathfrak{X}(M),[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 构成一个 Lie-Yamaguti 代数。更多详情请参见 [24] 。

接下来，我们回顾 Lie-Yamaguti 代数的表示这一概念。

定义 2.4. [33] 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 是一个 Lie-Yamaguti 代数。g 的一个表示是一个向量空间 V，配备一个线性映射 $\rho:\mathfrak{g}\to \mathfrak{gl}(V)$ 和一个双线性映射 $\mu:\otimes^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$，并满足以下条件：对所有 x, y, z, w $\in$ g,

$$\mu([x,y],z)-\mu(x,z)\rho(y)+\mu(y,z)\rho(x)=0, \tag{5}$$

$$\mu(x,[y,z])-\rho(y)\mu(x,z)+\rho(z)\mu(x,y)=0, \tag{6}$$

$$\rho([\![x,y,z]\!])=[D_{\rho,\mu}(x,y),\rho(z)], \tag{7}$$

$$\mu(z,w)\mu(x,y)-\mu(y,w)\mu(x,z)-\mu(x,[\![y,z,w]\!])+D_{\rho,\mu}(y,z)\mu(x,w)=0, \tag{8}$$

$$\mu([\![x,y,z]\!],w)+\mu(z,[\![x,y,w]\!])=[D_{\rho,\mu}(x,y),\mu(z,w)], \tag{9}$$

其中，双线性映射 $D_{\rho,\mu}:\otimes^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ 定义为

$$D_{\rho,\mu}(x,y):=\mu(y,x)-\mu(x,y)+[\rho(x),\rho(y)]-\rho([x,y]),\quad \forall x,y\in\mathfrak{g}. \tag{10}$$

显然，$D_{\rho,\mu}$ 是反对称的，后文中我们将不加歧义地记作 D。我们用 (V; ρ,μ) 表示 g 的一个表示。

注 2.5. 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 是一个 Lie-Yamaguti 代数，(V; ρ, μ) 是 g 的一个表示。若 $\rho=0$ 且 Lie-Yamaguti 代数 g 退化为一个李三系 $(\mathfrak{g},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$，则该表示退化为李三系 $(\mathfrak{g},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 的表示：(V; μ)。若 $\mu=0$，$D=0$ 且 Lie-Yamaguti 代数 g 退化为一个李代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$，则该表示退化为李代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ 的表示：(V; ρ)。因此，Lie-Yamaguti 代数的表示是李代数或李三系表示的一种自然推广。

通过直接计算，我们得到以下引理。

引理 2.6. 设 (V; ρ, μ) 是 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 的一个表示。则满足以下等式：

$$\begin{aligned}&D([x,y],z)+D([y,z],x)+D([z,x],y)=0;\\ &D([\![x,y,z]\!],w)+D(z,[\![x,y,w]\!])=[D(x,y),D_{\rho,\mu}(z,w)];\\ &\mu([\![x,y,z]\!],w)=\mu(x,w)\mu(z,y)-\mu(y,w)\mu(z,x)-\mu(z,w)D(x,y).\end{aligned}$$

例 2.7. 设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot],[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 是一个 Lie-Yamaguti 代数。我们定义线性映射 $\mathrm{ad}:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 和 $R:\otimes^2\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$，使得对所有 $z\in\mathfrak{g}$，分别有 $x\mapsto \mathrm{ad}_x$ 和 $(x,y)\mapsto R_{x,y}$，其中 $\mathrm{ad}_x z=[x,z]$，且 $R_{x,y}z=[\![z,x,y]\!]$。那么 (ad, R) 构成 g 在自身上的一个表示，其中 $L:=D_{\mathrm{ad},\mathfrak{R}}$ 定义为

$$\mathfrak{L}_{x,y}=\mathfrak{R}_{y,x}-\mathfrak{R}_{x,y}+[\mathrm{ad}_x,\mathrm{ad}_y]-\mathrm{ad}_{[x,y]},\quad \forall x,y\in\mathfrak{g}.$$

由(1)，可得

$$\mathfrak{L}_{x,y}z=[\![x,y,z]\!],\quad \forall z\in\mathfrak{g}.$$

在这种情况下，(g; ad, R) 称为 g 的伴随表示。

让我们回顾一下 [33] 中给出的 Lie-Yamaguti 代数上的上同调理论。设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 是一个 Lie-Yamaguti 代数，$(V; \rho, \mu)$ 是 g 的一个表示。我们将 p-上链的集合记为 $C^p{}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V)$ $(p \geqslant 1)$，其中

$$C^{n+1}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V) \triangleq \begin{cases} \mathrm{Hom}(\underbrace{\wedge^2\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \wedge^2\mathfrak{g}}_{n}, V) \times \mathrm{Hom}(\underbrace{\wedge^2\mathfrak{g} \otimes \cdots \otimes \wedge^2\mathfrak{g}}_{n} \otimes \mathfrak{g}, V), & \forall n \geqslant 1, \\ \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, V), & n = 0. \end{cases}$$

接下来，我们回顾 p-上链的余边界映射：

- 若 $n \geqslant 1$，对于任意 $(f, g) \in C_{n+1\,\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V)$，余边界映射

$$\begin{aligned} \delta = (\delta_{\mathrm{I}}, \delta_{\mathrm{II}}) : C^{n+1}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V) &\to C^{n+2}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V), \\ (f, g) &\mapsto (\delta_{\mathrm{I}}(f, g), \delta_{\mathrm{II}}(f, g)) \end{aligned}$$

定义如下：

$$\begin{aligned} &\Big(\delta_{\mathrm{I}}(f, g)\Big)(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_{n+1}) \\ = \ & (-1)^n \Big(\rho(x_{n+1}) g(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_n, y_{n+1}) - \rho(y_{n+1}) g(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_n, x_{n+1}) \\ & \quad - g(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_n, [x_{n+1}, y_{n+1}])\Big) \\ & + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} D(\mathfrak{x}_k) f(\mathfrak{x}_1, \cdots, \widehat{\mathfrak{x}_k}, \cdots, \mathfrak{x}_{n+1}) \\ & + \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n+1} (-1)^k f(\mathfrak{x}_1, \cdots, \widehat{\mathfrak{x}_k}, \cdots, \mathfrak{x}_k \circ \mathfrak{x}_l, \cdots, \mathfrak{x}_{n+1}), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\Big(\delta_{\mathrm{II}}(f, g)\Big)(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_{n+1}, z) \\ = \ & (-1)^n \Big(\mu(y_{n+1}, z) g(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_n, x_{n+1}) - \mu(x_{n+1}, z) g(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_n, y_{n+1})\Big) \\ & + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} D(\mathfrak{x}_k) g(\mathfrak{x}_1, \cdots, \widehat{\mathfrak{x}_k}, \cdots, \mathfrak{x}_{n+1}, z) \\ & + \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n+1} (-1)^k g(\mathfrak{x}_1, \cdots, \widehat{\mathfrak{x}_k}, \cdots, \mathfrak{x}_k \circ \mathfrak{x}_l, \cdots, \mathfrak{x}_{n+1}, z) \\ & + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k g(\mathfrak{x}_1, \cdots, \widehat{\mathfrak{x}_k}, \cdots, \mathfrak{x}_{n+1}, [\![x_k, y_k, z]\!]), \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\mathfrak{X}_i = \mathfrak{x}_i \wedge \mathfrak{y}_i \in \wedge^2\mathfrak{g}$ $(i = 1, \cdots, n+1)$，$z \in \mathfrak{g}$，且 $\mathfrak{X}_k \circ \mathfrak{X}_l := [\![\mathfrak{x}_k, \mathfrak{y}_k, \mathfrak{x}_l]\!] \wedge \mathfrak{y}_l + \mathfrak{x}_l \wedge [\![\mathfrak{x}_k, \mathfrak{y}_k, \mathfrak{y}_l]\!]$。

- 若 $n = 0$，对于任意 $f \in C^1{}_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V)$，余边界映射

$$\begin{aligned} \delta : C^1_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V) &\to C^2_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V), \\ f &\mapsto (\delta_{\mathrm{I}}(f), \delta_{\mathrm{II}}(f)) \end{aligned}$$

定义为

$$\Big(\delta_{\mathrm{I}}(f)\Big)(x, y) = \rho(x) f(y) - \rho(y) f(x) - f([x, y]), \tag{13}$$

(14) $\big(\delta_{\mathrm{II}}(f)\big)(x,y,z) = D(x,y)f(z)+\mu(y,z)f(x)-\mu(x,z)f(y)-f(\llbracket x,y,z\rrbracket), \quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}.$

Yamaguti证明了以下事实。

命题 2.8. [33] 采用上述记号，对于任意 $f \in C^1{}_{\mathrm{LieY}}(g, V)$，有 e

$$\delta_{\mathrm{I}}\big(\delta_{\mathrm{I}}(f)\big),\delta_{\mathrm{II}}(f)\big)=0 \quad \text{and} \quad \delta_{\mathrm{II}}\big(\delta_{\mathrm{I}}(f)\big),\delta_{\mathrm{II}}(f)\big)=0.$$

此外，对于所有 $(f, g) \in C^p{}_{\mathrm{LieY}}(g, V)$，$(p \geqslant 2)$，有

$$\delta_{\mathrm{I}}\big(\delta_{\mathrm{I}}(f,g)),\delta_{\mathrm{II}}(f,g)\big)=0 \quad \text{and} \quad \delta_{\mathrm{II}}\big(\delta_{\mathrm{I}}(f,g)),\delta_{\mathrm{II}}(f,g)\big)=0.$$

$_{\infty}$因此，上链复形 $(C^{\bullet}{}_{\mathrm{LieY}}(g, V) = \mathrm{L}\, C^p{}_{\mathrm{LieY}}(g, V), \delta)$ 是定义良好的。为方便起见，本文$_{p=1}$将此上同调称为 Yamaguti 上同调。

定义 2.9. 采用上述记号，设 (f, g) 属于 $C^p{}_{\mathrm{LieY}}(g, V))$（当 p 时，$f \in C^1{}_{\mathrm{LieY}}(g, V)$）是一个 p-上链。若它满足 $\delta(f, g) = 0$（当 p 时，$\delta(f) = 0$），则称其为 p-余循环。若存在 $(h, s) \in C^{p-1}{}_{\mathrm{LieY}}(g, V)$（当 p 时，$t \in C^1(g, V)$），使得 $(f, g) = \delta(h, s)$（当 p 时，$(f, g) = \delta(t)$），则称其为 p- 余边界（$p \geqslant 2$）。p- 余循环和 p- 余边界的集合分别记为 $Z^p{}_{\mathrm{LieY}}(g, V)$ 和 $B^p{}_{\mathrm{LieY}}(g, V)$。所得的 p-上同调群定义为商空间

$$H^p_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V) = Z^p_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V)/B^p_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V).$$

特别地，我们有

$$H^1_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V) = \{f \in C^1_{\mathrm{LieY}}(\mathfrak{g}, V) : \delta(f) = 0\}.$$

3. Lie-Yamaguti 代数之间的交叉同态

本节中，我们引入 Lie-Yamaguti 代数之间的交叉同态的概念，并说明交叉同态可以看作 Lie-Yamaguti 代数的同态。此外，交叉同态对应于权 1 的相对 Rota-Baxter 算子。在此之前，我们先介绍 Lie-Yamaguti 代数中心的概念。

设 $(g, [\cdot,\cdot]_g, \llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket_g)$ 是一个 Lie-Yamaguti 代数。将 g 的中心记为

$$C(\mathfrak{g}) := \{x\in\mathfrak{g} | [x,y]=0, \forall y\in\mathfrak{g}\}\cap\Big(\{x\in\mathfrak{g}|\llbracket x,y,z\rrbracket=0,\forall y,z\in\mathfrak{g}\}\cup\{x\in\mathfrak{g}|\llbracket y,x,z\rrbracket=0,\forall y,z\in\mathfrak{g}\}\Big).$$

定义 3.1. 设 $(g, [\cdot,\cdot]_g, \llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket_g)$ 和 $(h, [\cdot,\cdot]_h, \llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket_h)$ 是两个 Lie-Yamaguti 代数。设 $(h; \rho, \mu)$ 是 g 在向量空间 h 上的一个表示，即线性映射 $\rho : g \to gl(h)$、$\mu : \otimes^2 g \to gl(h)$ 和 $D : \wedge^2 g \to gl(g)$ 由方程式 (5)-(10) 给出。若对所有 $x, y \in g$ 以及 $u, v, w \in h$，以下条件均成立

$$\begin{aligned}\rho(x)u,\mu(x,y)u &\in C(\mathfrak{h}),\\ \rho(x)[u,v]_{\mathfrak{h}} &= \mu(x,y)[u,v]_{\mathfrak{h}} = 0,\\ \rho(x)\llbracket u,v,w\rrbracket_{\mathfrak{h}} &= \mu(x,y)\llbracket u,v,w\rrbracket_{\mathfrak{h}} = 0.\end{aligned}$$

那么，我们称（ρ，μ）是 g 在 h 上的作用。

设（ρ，μ）是 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{h}$上的作用。由（10），我们推得

$$D(x,y)u\in C(\mathfrak{g}),\ D(x,y)[u,v]_{\mathfrak{h}} = D(x,y)\llbracket u,v,w\rrbracket_{\mathfrak{h}} = 0, \quad \forall x,y\in\mathfrak{g}, u,v,w\in\mathfrak{h}.$$

下面的命题表明，Lie-Yamaguti 代数的作用可用于刻画半直积 Lie-Yamaguti 代数。

命题 3.2. 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 和 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 是两个 Lie-Yamaguti 代数。设 (ρ, μ) 是 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{h}$ 上的一个作用，则直和 $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{h}$ 上存在如下定义的 Lie-Yamaguti 代数结构：

$$\begin{aligned} [x+u, y+v]_{\rho,\mu} &= [x,y]_\mathfrak{g} + \rho(x)v - \rho(y)u + [u,v]_\mathfrak{h}, \\ [\![x+u, y+v, z+w]\!]_{\rho,\mu} &= [\![x,y,z]\!]_\mathfrak{g} + D(x,y)w + \mu(y,z)u - \mu(x,z)v + [\![u,v,w]\!]_\mathfrak{h}, \end{aligned}$$

对所有 $x,y,z \in \mathfrak{g}$ 以及 $u,v,w \in \mathfrak{h}$。这个 Lie-Yamaguti 代数称为关于作用 (ρ, μ) 的半直积 Lie-Yamaguti 代数，记作 $\mathfrak{g} \ltimes_{\rho,\mu} \mathfrak{h}$。

证明。直接计算即可，细节从略。 □

以下定义是标准的。

定义 3.3。 [27, 28] 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 和 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 是两个 Lie-Yamaguti 代数。从 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 到 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 的同态是一个线性映射 $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$，它保持 Lie-Yamaguti 代数结构，也就是说，对所有 $x, y, z \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned} \phi([x,y]_\mathfrak{g}) &= [\phi(x), \phi(y)]_\mathfrak{h}, \\ \phi([\![x,y,z]\!]_\mathfrak{g}) &= [\![\phi(x), \phi(y), \phi(z)]\!]_\mathfrak{h}. \end{aligned}$$

此外，如果 ϕ 是双射，则称其为同构。

现在我们准备介绍 Lie-Yamaguti 代数之间的交叉同态概念。

定义 3.4. 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 和 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 是两个 Lie-Yamaguti 代数。设 (ρ, μ) 是 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的一个作用。若线性映射 $H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 满足以下条件，则称其为关于 (ρ, μ) 的从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{h}$ 的交叉同态：

$$H[x,y]_\mathfrak{g} = \rho(x)H(y) - \rho(y)H(x) + [Hx, Hy]_\mathfrak{h}, \quad (15)$$

$$H[\![x,y,z]\!]_\mathfrak{g} = D(x,y)H(z) + \mu(y,z)H(x) - \mu(x,z)H(y) + [\![Hx, Hy, Hz]\!]_\mathfrak{h}, \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}。 \quad (16)$$

注 3.5. 如果 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的作用是平凡的，那么从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{h}$ 的任意交叉同态都是定义 3.3中的 Lie-Yamaguti 代数同态；如果 $\mathfrak{h}$ 是交换的，那么任意交叉同态都是关于表示（$\mathfrak{h}$；ρ，μ）从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{h}$ 的导子。

例 3.6. 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 是一个 4 维 Lie-Yamaguti 代数，且 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 是一组基。非零括号定义如下：

$$[e_1, e_2] = 2e_4, \qquad [\![e_1, e_2, e_1]\!] = e_4.$$

显然，$\mathfrak{g}$ 的中心由 $\{e_3,e_4\}$ 张成，且伴随表示 $(\mathfrak{g}; \mathrm{ad}, R)$ 是 $\mathfrak{g}$ 在自身上的一个作用。于是

$$H = \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}$$

是从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}$ 的一个交叉同态，其中 A 和 C 具有如下形式：

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

以下定理表明，交叉同态可以视为 Lie-Yamaguti 代数之间的同态。

定理 3.7. 设 (ρ, μ) 是 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 在另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 上的作用。那么，线性映射 $H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 是从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{h}$ 的交叉同态，当且仅当线性映射 $\phi_H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \ltimes_{\rho,\,\mu} \mathfrak{h}$ 是 Lie-Yamaguti 代数同态，其中

$$\phi_H(x) := (x, Hx), \quad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

证明。对所有 $x, y, z \in \mathfrak{g}$，均有

$$\begin{aligned} \phi_H\Big([x,y]_\mathfrak{g}\Big) &= \Big([x,y]_\mathfrak{g}, H[x,y]_\mathfrak{g}\Big), \\ [\phi_H(x), \phi_H(y)]_{\rho,\mu} &= [(x,Hx),(y,Hy)]_{\rho,\mu} = \Big([x,y]_\mathfrak{g}, \rho(x)Hy - \rho(y)Hx + [Hx,Hy]_\mathfrak{h}\Big). \end{aligned}$$

同理，我们还有

$$\begin{aligned} \phi_H\Big([\![x,y,z]\!]_\mathfrak{g}\Big) &= \Big([\![x,y,z]\!]_\mathfrak{g}, H[\![x,y,z]\!]_\mathfrak{g}\Big), \\ [\![\phi_H(x), \phi_H(y), \phi_H(z)]\!]_{\rho,\mu} &= \Big([\![x,y,z]\!]_\mathfrak{g}, D(x,y)H(z) + \mu(y,z)H(x) - \mu(x,z)H(y) + [\![Hx,Hy,Hz]\!]_\mathfrak{h}\Big). \end{aligned}$$

因此，线性映射 $\phi_H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \ltimes_{\rho,\mu} \mathfrak{h}$ 是 Lie-Yamaguti代数同态，当且仅当以下两个等式成立：

$$\begin{aligned} H[x,y]_\mathfrak{g} &= \rho(x)Hy - \rho(y)Hx + [Hx,Hy]_\mathfrak{h}, \\ H[\![x,y,z]\!]_\mathfrak{g} &= D(x,y)H(z) + \mu(y,z)H(x) - \mu(x,z)H(y) + [\![Hx,Hy,Hz]\!]_\mathfrak{h}, \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}, \end{aligned}$$

这意味着线性映射 $H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 是从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{h}$ 的交叉同态。证明完毕。□

注 3.8. 事实上，交叉同态对应于 Lie-Yamaguti 代数的分裂非阿贝尔扩张。更准确地说，考虑如下 Lie-Yamaguti 代数的非阿贝尔扩张：

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0.$$

一个截面 $s : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ 定义为 $s(x) = (x, Hx)$，$x \in \mathfrak{g}$。定理 3.7 指出，s 是 Lie-Yamaguti 代数同态，当且仅当 H 是交叉同态。这样的扩张称为分裂非阿贝尔扩张。有关 Lie-Yamaguti 代数扩张的更多细节，请参见 [35] 。

接下来，我们引入交叉同态的同态这一概念。

定义 3.9. 设 H 和 H′ 是从一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 的两个交叉同态，它们对应于作用 (ρ, μ)。从 H′ 到 H 的同态是一对 $(\psi_\mathfrak{g}, \psi_\mathfrak{h})$，其中 $\psi_\mathfrak{g} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ 和 $\psi_\mathfrak{h} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 是两个 Lie-Yamaguti 代数同态，使得

$$\psi_\mathfrak{h} \circ H' = H \circ \psi_\mathfrak{g}, \tag{17}$$

$$\psi_\mathfrak{h}\Big(\rho(x)u\Big) = \rho\Big(\psi_\mathfrak{g}(x)\Big)\psi_\mathfrak{h}(u), \tag{18}$$

$$\psi_\mathfrak{h}\Big(\mu(x,y)u\Big) = \mu\Big(\psi_\mathfrak{g}(x), \psi_\mathfrak{g}(y)\Big)\psi_\mathfrak{h}(u), \quad \forall x,y \in \mathfrak{g}, u \in \mathfrak{h}. \tag{19}$$

特别地，如果 $\psi_\mathfrak{g}$ 和 $\psi_\mathfrak{h}$ 都是可逆的，那么 $(\psi_\mathfrak{g}, \psi_h)$ 就称为从 H′ 到 H 的同构。

By E式（18）和（19），经过直接计算，我们得到以下命题。

命题 3.10. 设 H 和 H′ 是从 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}})$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{h}})$ 的两个交叉同态，它们关于作用 (ρ, μ)。假设 $(\psi_{\mathfrak{g}}, \psi_{\mathfrak{h}})$ 是从 H′ 到 H 的同态，则有

$$\psi_{\mathfrak{h}}\big(D(x,y)u\big) = D\big(\psi_{\mathfrak{g}}(x), \psi_{\mathfrak{g}}(y)\big)\psi_{\mathfrak{h}}(u), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}, u \in \mathfrak{h}. \tag{20}$$

在本节末，我们揭示 Lie-Yamaguti 代数之间的交叉同态与 Lie-Yamaguti 代数上权 1 的相对 Rota-Baxter 算子之间的关系。首先，我们给出 Lie-Yamaguti 代数上权 λ 的相对 Rota-Baxter 算子的概念。

定义 3.11. 设 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot], [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!])$ 是一个 Lie-Yamaguti 代数，且 $(V; \rho, \mu)$ 是其表示。若以下等式成立，则称线性映射 $T : V \longrightarrow \mathfrak{g}$ 为权 λ 的相对 Rota-Baxter 算子

$$[Tu, Tv] = T\big(\rho(Tu)v - \rho(Tv)u + \lambda[u, v]\big),$$
$$[\![Tu, Tv, Tw]\!] = T\big(D(Tu, Tv)w + \mu(Tv, Tw)u - \mu(Tu, Tw)v + \lambda[\![u, v, w]\!]\big), \quad \forall u, v, w \in V.$$

李代数上的非零权重相对 Rota-Baxter 算子源于经典 Yang-Baxter 方程，并在数学物理中有诸多应用。本文介绍 Lie-Yamaguti 代数上的非零权重相对 Rota-Baxter 算子的概念，并探讨其与交叉同态的关系。

命题 3.12. 设 (ρ, μ) 是 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}})$ 在另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{h}})$ 上的作用。可逆线性映射 $H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 是关于 (ρ,μ) 从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{h}$ 的交叉同态，当且仅当 $H^{-1} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{g}$ 是关于表示 $(\mathfrak{h}; \rho,\mu)$ 的 $\mathfrak{g}$ 上权 1 的相对 Rota-Baxter 算子。

证明。 设可逆线性映射 $H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 是一个交叉同态，则对所有 $u、v、w \in \mathfrak{h}$，由（15）可得

$$\begin{aligned}[H^{-1}(u), H^{-1}(v)]_{\mathfrak{g}} &= H^{-1}\big(H[H^{-1}(u), H^{-1}(v)]_{\mathfrak{g}}\big)\\ &= H^{-1}\big(\rho(H^{-1}(u))v - \rho(H^{-1}(v))w + [u, v]_{\mathfrak{h}}\big).\end{aligned}$$

类似地，由（16）可得

$$\begin{aligned}&[\![H^{-1}(u), H^{-1}(v), H^{-1}(w)]\!]_{\mathfrak{g}}\\ =\ & H^{-1}\big(H\,[\![H^{-1}(u), H^{-1}(v), H^{-1}(w)]\!]_{\mathfrak{g}}\big)\\ =\ & H^{-1}\big(D(H^{-1}(u), H^{-1}(v))w + \mu(H^{-1}(v), H^{-1}(w))u - \mu(H^{-1}(u), H^{-1}(w))v + [\![u, v, w]\!]_{\mathfrak{h}}\big).\end{aligned}$$

因此，H^{-1} 是一个权 1 的相对 Rota-Baxter 算子。

反过来，设 H^{-1} 是权 1 的相对 Rota-Baxter 算子。对于所有 $x、y、z \in \mathfrak{g}$，都存在 $u、v、w \in \mathfrak{h}$，使得 $x = H^{-1}(u)$、$y = H^{-1}(v)$，且 $z = H^{-1}(w)$。于是我们有

$$\begin{aligned}H[x, y]_{\mathfrak{g}} &= H[H^{-1}(u), H^{-1}(v)]_{\mathfrak{g}}\\ &= H \circ H^{-1}\big(\rho(H^{-1}(u))v - \rho(H^{-1}(v))u + [u, v]_{\mathfrak{h}}\big)\\ &= \rho(x)H(y) - \rho(y)H(x) + [Hx, Hy]_{\mathfrak{h}},\end{aligned}$$

and

$$H\,[\![x, y, z]\!]_{\mathfrak{g}} = H[H^{-1}(u), H^{-1}(v), H^{-1}(w)]_{\mathfrak{g}}$$

$$
\begin{aligned}
&= H\circ H^{-1}\Big(D(H^{-1}(u),H^{-1}(v))w+\mu(H^{-1}(v),H^{-1}(w))u-\mu(H^{-1}(u),H^{-1}(w))v+[\![u,v,w]\!]_{\mathfrak{h}}\Big)\\
&= D(x,y)H(z)+\mu(y,z)H(x)-\mu(x,z)H(y)+[\![Hx,Hy,Hz]\!]_{\mathfrak{h}},
\end{aligned}
$$

这意味着 H 是一个交叉同态。 □

4. Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的上同调

本节中，我们构建 Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的上同调。首先，我们通过给定的作用构造一个 Lie-Yamaguti 代数的表示。

设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}},[\![\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}})$ 和 $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}},[\![\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{h}})$ 是两个 Lie-Yamaguti 代数，且 $H:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{h}$ 是关于作用 (ρ,μ) 的交叉同态。定义 $\rho_H:\mathfrak{g}\longrightarrow gl(\mathfrak{h})$，$\mu_H:\otimes^2\mathfrak{g}\longrightarrow gl(\mathfrak{h})$ 为

$$\rho_H(x)u := [Hx,u]_{\mathfrak{h}}+\rho(x)u, \tag{21}$$

$$\mu_H(x,y)u := [\![u,Hx,Hy]\!]_{\mathfrak{h}}+\mu(x,y)u,\quad \forall x,y\in\mathfrak{g},\ u\in\mathfrak{h}. \tag{22}$$

引理4.1. 在上述假设下，定义 $D_H:\wedge^2\mathfrak{g}\longrightarrow gl(\mathfrak{h})$ 为

$$D_H(x,y)u := [\![Hx,Hy,u]\!]_{\mathfrak{h}}+D(x,y)u,\quad \forall x,y\in\mathfrak{g},\ u\in\mathfrak{h}. \tag{23}$$

那么 $D_H=D_{\rho_H,\mu_H}$。

证明。对于所有的 $x、y\in\mathfrak{g}、u\in\mathfrak{h}$，我们有

$$
\begin{aligned}
&D_{\rho_H,\mu_H}(x,y)u\\
=\ &\mu_H(y,x)u-\mu_H(x,y)u+[\rho_H(x),\rho_H(y)](u)-\rho_H([x,y]_{\mathfrak{g}})u\\
=\ &[\![u,Hy,Hx]\!]_{\mathfrak{h}}+\mu(y,x)u-[\![u,Hx,Hy]\!]_{\mathfrak{h}}-\mu(x,y)u\\
&+[Hx,[Hy,u]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}}+\rho(x)[Hy,u]_{\mathfrak{h}}+[Hx,\rho(y)u]_{\mathfrak{h}}+\rho(x)\rho(y)u\\
&-[Hy,[Hx,u]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}}-\rho(y)[Hx,u]_{\mathfrak{h}}-[Hy,\rho(x)u]_{\mathfrak{h}}-\rho(y)\rho(x)u\\
&-[H[x,y]_{\mathfrak{g}},u]_{\mathfrak{h}}-\rho([x,y]_{\mathfrak{g}})u\\
=\ &[\![u,Hy,Hx]\!]_{\mathfrak{h}}-[\![u,Hx,Hy]\!]_{\mathfrak{h}}+[Hx,[Hy,u]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}}\\
&-[Hy,[Hx,u]_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}}-[[Hx,Hy]_{\mathfrak{h}},u]_{\mathfrak{h}}+D(x,y)u\\
\overset{(1),(10)}{=}\ &[\![Hx,Hy,u]\!]_{\mathfrak{h}}+D(x,y)u\\
=\ &D_H(x,y)u.
\end{aligned}
$$

证明完毕。 □

命题4.2。 在上述假设下，$(\mathfrak{h};\ \rho_H,\ \mu_H)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示，其中ρ_H，μ_H以及 D_H 分别由（21）-（23）给出。

证明。对于所有 $x、y、z\in\mathfrak{g}、u\in\mathfrak{h}$，我们有

$$
\begin{aligned}
&\mu_H([x,y]_{\mathfrak{g}},z)u-\mu_H(x,z)\rho_H(y)u+\mu_H(y,z)\rho_H(x)u\\
=\ &[\![u,H[x,y]_{\mathfrak{g}},Hz]\!]_{\mathfrak{h}}+\mu([x,y],z)u-[\![[Hy,u]_{\mathfrak{h}},Hx,Hz]\!]_{\mathfrak{h}}\\
&-\mu(x,z)[Hy,u]_{\mathfrak{h}}-[\![\rho(y)u,Hx,Hz]\!]_{\mathfrak{h}}-\mu(x,z)\rho(y)u\\
&+[\![[Hx,u]_{\mathfrak{h}},Hy,Hz]\!]_{\mathfrak{h}}+\mu(y,z)[Hx,u]_{\mathfrak{h}}+[\![\rho(x)u,Hy,Hz]\!]_{\mathfrak{h}}\\
&+\mu(y,z)\rho(x)u\\
\overset{(6)}{=}\ &[\![u,[Hx,Hy]_{\mathfrak{h}},Hz]\!]_{\mathfrak{h}}-[\![[Hy,u]_{\mathfrak{h}},Hx,Hz]\!]_{\mathfrak{h}}+[\![[Hx,u]_{\mathfrak{h}},Hy,Hz]\!]_{\mathfrak{h}}
\end{aligned}
$$

$$\overset{(2)}{=} 0,$$

and

$$\begin{aligned}
&\rho_H(\llbracket x,y,z\rrbracket_{\mathfrak{g}})u-[D_H(x,y),\rho_H(z)]u\\
=\;&[H\llbracket x,y,z\rrbracket_{\mathfrak{g}},u]_{\mathfrak{h}}+\rho(\llbracket x,y,z\rrbracket_{\mathfrak{g}})u-\llbracket Hx,Hy,[Hz,u]_{\mathfrak{h}}\rrbracket_{\mathfrak{h}}\\
&-D(x,y)[Hz,u]_{\mathfrak{h}}-\llbracket Hx,Hy,\rho(z)u\rrbracket_{\mathfrak{h}}-D(x,y)\rho(z)u\\
&+[Hz,\llbracket Hx,Hy,u\rrbracket_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}}+\rho(z)\llbracket Hx,Hy,u\rrbracket_{\mathfrak{h}}+[Hz,D(x,y)u]_{\mathfrak{h}}\\
&+\rho(z)D(x,y)u\\
\overset{(7)}{=}\;&[\llbracket Hx,Hy,Hz\rrbracket_{\mathfrak{h}},u]_{\mathfrak{h}}-\llbracket Hx,Hy,[Hz,u]_{\mathfrak{h}}\rrbracket_{\mathfrak{h}}+[Hz,\llbracket Hx,Hy,u\rrbracket_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}}\\
\overset{(3)}{=}\;&0.
\end{aligned}$$

其他等式可类似地得到。细节从略。 □

设 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}},\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket_{\mathfrak{g}})$ 和 $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}},\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket_{\mathfrak{h}})$ 是两个 Lie-Yamaguti 代数。设 (ρ,μ) 是 $\mathfrak{g}$ 在 $\mathfrak{h}$ 上的一个作用。定义 $\delta:\wedge^2\mathfrak{g}\longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ 为

$$\Big(\delta(x,y)\Big)z:=\mu(y,z)(Hx)-\mu(x,z)(Hy)+\llbracket Hx,Hy,Hz\rrbracket_{\mathfrak{h}},\quad \forall x,y,z\in\mathfrak{g}. \tag{24}$$

命题 4.3。采用上述记号，δ（x，y）由（24）定义，是 Lie-Yamaguti 代数1-上循环（$\mathfrak{g}$，$[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$，$\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket_{\mathfrak{g}}$）的上同调，其系数取自表示（$\mathfrak{h}$；$\rho_H$，$\mu_H$）。

证明。对于所有 $x_1,x_2,x_3\in\mathfrak{g}$，我们有

$$\begin{aligned}
&\delta_{\mathrm{I}}(\delta(x,y))(x_1,x_2)\\
=\;&\rho_H(x_1)\delta(x,y)x_2-\rho_H(x_2)\delta(x,y)x_1-\delta(x,y)([x_1,x_2]_{\mathfrak{g}})\\
=\;&\rho_H(x_1)\Big(\mu(y,x_2)(Hx)-\mu(x,x_2)(Hy)+\llbracket Hx,Hy,Hx_2\rrbracket_{\mathfrak{h}}\Big)\\
&-\rho_H(x_2)\Big(\mu(y,x_1)(Hx)-\mu(x,x_1)(Hy)+\llbracket Hx,Hy,Hx_1\rrbracket_{\mathfrak{h}}\Big)\\
&-\mu(y,[x_1,x_2]_{\mathfrak{g}})(Hx)+\mu(x,[x_1,x_2]_{\mathfrak{g}})(Hy)+\llbracket Hx,Hy,H[x_1,x_2]_{\mathfrak{g}}\rrbracket_{\mathfrak{h}}\\
=\;&[Hx_1,\mu(y,x_2)(Hx)]_{\mathfrak{h}}+\rho(x_1)\mu(y,x_2)(Hx)-[Hx_1,\mu(x,x_2)(Hy)]_{\mathfrak{h}}\\
&-\rho(x_1)\mu(x,x_2)(Hy)+[Hx_1,\llbracket Hx,Hy,Hx_2\rrbracket_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}}+\rho(x_1)\llbracket Hx,Hy,Hx_2\rrbracket_{\mathfrak{h}}\\
&-[Hx_2,\mu(y,x_1)(Hx)]_{\mathfrak{h}}-\rho(x_2)\mu(y,x_1)(Hx)+[Hx_2,\mu(x,x_1)(Hy)]_{\mathfrak{h}}\\
&+\rho(x_2)\mu(x,x_1)(Hy)-[Hx_2,\llbracket Hx,Hy,Hx_1\rrbracket_{\mathfrak{h}}]_{\mathfrak{h}}-\rho(x_2)\llbracket Hx,Hy,Hx_1\rrbracket_{\mathfrak{h}}\\
&-\mu(y,[x_1,x_2]_{\mathfrak{g}})(Hx)+\mu(x,[x_1,x_2]_{\mathfrak{g}})(Hy)+\llbracket Hx,Hy,[Hx_1,Hx_2]_{\mathfrak{h}}\rrbracket_{\mathfrak{h}}\\
=\;&0,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\delta_{\mathrm{II}}(\delta(x,y))(x_1,x_2,x_3)\\
=\;&D_H(x_1,x_2)\delta(x,y)x_3+\mu_H(x_2,x_3)\delta(x,y)x_1-\mu_H(x_1,x_3)\delta(x,y)x_2-\delta(x,y)\llbracket x_1,x_2,x_3\rrbracket_{\mathfrak{g}}\\
=\;&D_H(x_1,x_2)\Big(\mu(y,x_3)(Hx)-\mu(x,x_3)(Hy)+\llbracket Hx,Hy,Hx_3\rrbracket_{\mathfrak{h}}\Big)\\
&+\mu_H(x_2,x_3)\Big(\mu(y,x_1)(Hx)-\mu(x,x_1)(Hy)+\llbracket Hx,Hy,Hx_1\rrbracket_{\mathfrak{h}}\Big)\\
&-\mu_H(x_1,x_3)\Big(\mu(y,x_2)(Hx)-\mu(x,x_2)(Hy)+\llbracket Hx,Hy,Hx_2\rrbracket_{\mathfrak{h}}\Big)\\
&-\mu(y,\llbracket x_1,x_2,x_3\rrbracket_{\mathfrak{g}})(Hx)+\mu(x,\llbracket x_1,x_2,x_3\rrbracket_{\mathfrak{g}})(Hy)-\Big\llbracket Hx,Hy,H\llbracket x_1,x_2,x_3\rrbracket_{\mathfrak{g}}\Big\rrbracket_{\mathfrak{h}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \;& [\![Hx_1, Hx_2, \mu(y, x_3)(Hx)]\!]_{\mathfrak{h}} + D(x_1, x_2)\mu(y, x_3)(Hx) - [\![Hx_1, Hx_2, \mu(x, x_3)(Hy)]\!]_{\mathfrak{h}} \\
& - D(x_1, x_2)\mu(x, x_3)(Hy) + \Big[\!\Big[Hx_1, Hx_2, [\![Hx, Hy, Hx_3]\!]_{\mathfrak{h}}\Big]\!\Big]_{\mathfrak{h}} + D(x_1, x_2)\,[\![Hx, Hy, Hx_3]\!]_{\mathfrak{h}} \\
& + [\![\mu(y, x_1)(Hx), Hx_2, Hx_3]\!]_{\mathfrak{h}} + \mu(x_2, x_3)\mu(y, x_1)(Hx) - [\![\mu(x, x_1)(Hy), Hx_2, Hx_3]\!]_{\mathfrak{h}} \\
& - \mu(x_2, x_3)\mu(x, x_1)(Hy) + \Big[\!\Big[[\![Hx, Hy, Hx_1]\!]_{\mathfrak{h}}, Hx_2, Hx_3\Big]\!\Big]_{\mathfrak{h}} + \mu(x_2, x_3)\,[\![Hx, Hy, Hx_1]\!]_{\mathfrak{h}} \\
& - [\![\mu(y, x_2)(Hx), Hx_1, Hx_3]\!]_{\mathfrak{h}} - \mu(x_1, x_3)\mu(y, x_2)(Hx) + [\![\mu(x, x_2)(Hy), Hx_1, Hx_3]\!]_{\mathfrak{h}} \\
& + \mu(x_1, x_3)\mu(x, x_2)(Hy) - \Big[\!\Big[[\![Hx, Hy, Hx_2]\!]_{\mathfrak{h}}, Hx_1, Hx_3\Big]\!\Big]_{\mathfrak{h}} - \mu(x_1, x_3)\,[\![Hx, Hy, Hx_2]\!]_{\mathfrak{h}} \\
& - \mu(y, [\![x_1, x_2, x_3]\!]_{\mathfrak{g}})(Hx) + \mu(x, [\![x_1, x_2, x_3]\!]_{\mathfrak{g}})(Hy) - \Big[\!\Big[Hx, Hy, [\![Hx_1, Hx_2, Hx_3]\!]_{\mathfrak{h}}\Big]\!\Big]_{\mathfrak{h}} \\
= \;& 0,
\end{aligned}
$$

这意味着 δ(x, y) 是一个 1-余循环。证明至此完成。 □

至此，我们可以建立如下 Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的上同调。设 H : g $\longrightarrow$ h 是从 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}})$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{h}})$ 的交叉同态，其对应于作用 (ρ, μ)。定义 n- 上链的集合为

$$
\mathfrak{C}^p_H(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) = \begin{cases} C^p_{LieY}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), & p \geq 1, \\ \wedge^2\mathfrak{g}, & p = 0. \end{cases}
$$

定义 $\partial : C^p{}_H(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \longrightarrow C^{p+1}{}_H(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 为

$$
\partial = \begin{cases} \delta^H, & p \geq 1, \\ \delta, & p = 0, \end{cases}
$$

其中，映射 δ^H 是由表示 (h; , μ) 中的系数，根据式（11）-（14）给出的相应余边界映射。然后结合命题 4.3，我们得到 $\left(\mathrm{L}_{\infty\, n=0}\, C^n_H(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}),\ \partial\right)$是一个复形。将 n-上链的集合记为 $\mathcal{Z}^n_H(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$，将 n-余边界的集合记为$\mathcal{B}^n_H(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$。所得的第 n 个上同调群为

$$
\mathcal{H}^n_H(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) := \mathcal{Z}^n_H(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})/\mathcal{B}^n_H(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), n \geq 0.
$$

定义4.4. 复形 $\left(\mathrm{L}_{\infty\, n=0}\, C^n_H(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$的上同调$\partial\right)$ 称为交叉同态H的上同调。

在本节末尾，我们证明，两个交叉同态之间的某个同态会诱导相应上同调群之间的一个同态。设 H 和 H′ 是从一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}})$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{h}})$ 的两个交叉同态，它们对应于作用 (ρ, μ)。设 $(\psi_{\mathfrak{g}}, \psi_{\mathfrak{h}})$ 是从 H′ 到 H 的一个同态，其中 $\psi_{\mathfrak{g}}$ 可逆。对于 n $\geqslant$ 2，定义线性映射 $\mathfrak{p} : C^n_{H'}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \longrightarrow C^n_H(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 为

$$
\begin{aligned}
p_{\mathrm{I}}(f)(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_n) &= \psi_{\mathfrak{h}}\Big(f(\psi^{-1}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{x}_1), \cdots, \psi^{-1}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{x}_n))\Big), \\
p_{\mathrm{II}}(g)(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_n, x) &= \psi_{\mathfrak{h}}\Big(g(\psi^{-1}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{x}_1), \cdots, \psi^{-1}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{x}_n), \psi^{-1}_{\mathfrak{g}}(x))\Big), \quad \forall (f, g) \in \mathfrak{C}^n_{H'}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}).
\end{aligned}
$$

这里 $\mathrm{X}_k = \mathrm{x}_k \wedge \mathrm{y}_k \in \wedge^2\mathfrak{g},\ \mathrm{k} = 1,\ 2,\ \cdots,\ \mathrm{n},\ \mathrm{x} \in \mathfrak{g}$, 并且我们采用如下记号 $\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathrm{X}_k) = \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathrm{x}_k) \wedge \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathrm{y}_k),\ \mathrm{k} = 1,\ 2,\ \cdots,\ \mathrm{n}$。特别地, 当 $\mathrm{n} = 1$时, $\mathrm{p} : \mathrm{C}^1_{H'}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \longrightarrow \mathrm{C}^1_H(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 定义为

$$p(f)(x) = \psi_{\mathfrak{h}}\Big(f(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x))\Big), \quad \forall x \in \mathfrak{g},\ f \in \mathfrak{C}^1_{H'}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}).$$

定理 4.5. 根据上述记号, p 是从上链复形 $(\oplus^{\infty}{}_{n=1}\mathrm{C}^n{}_{H'}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}),\ \delta^{H'})$ 到 $(\oplus^{\infty}{}_{n=1}\mathrm{C}^n{}_H(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}),\ \delta^H)$ 的上链映射。因此, p 诱导出上同调群之间的同态 p_*: $\mathcal{H}_{nH'}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \longrightarrow \mathcal{H}_{nH}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$。

证明。对于所有 $(\mathrm{f}, \mathrm{g}) \in \mathrm{C}^n{}_{H'}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})\ (\mathrm{n} \geq 2)$,, 以及所有 $\mathrm{X}_k = \mathrm{x}_k \wedge \mathrm{y}_k \in \wedge^2\mathfrak{g}, \mathrm{k} = 1, 2, \cdots, \mathrm{n}, \mathrm{x} \in \mathfrak{g}$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\delta^H_{\mathrm{II}}\Big(p_{\mathrm{I}}(f), p_{\mathrm{II}}(g)\Big)(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_n, x)\\
=\ & (-1)^{n-1}\Big(\mu_H(y_n, x)p_{\mathrm{II}}(g)(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_{n-1}, x_n) - \mu_H(x_n, x)p_{\mathrm{II}}(g)(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_{n-1}, y_n)\Big)\\
&+ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}D_H(\mathfrak{x}_k)p_{\mathrm{II}}(g)(\mathfrak{x}_1, \cdots, \widehat{\mathfrak{x}_k}, \cdots, \mathfrak{x}_n, x)\\
&+ \sum_{k<l}^{n}(-1)^{k}p_{\mathrm{II}}(g)(\mathfrak{x}_1, \cdots, \widehat{\mathfrak{x}_k}, \cdots, \mathfrak{x}_k \circ \mathfrak{x}_l, \cdots, \mathfrak{x}_n, x)\\
&+ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}p_{\mathrm{II}}(g)(\mathfrak{x}_1, \cdots, \widehat{\mathfrak{x}_k}, \cdots, \mathfrak{x}_n, [\![\mathfrak{x}, x]\!]_{\mathfrak{g}})\\
=\ & (-1)^{n-1}\Big(\mu_H(y_n, x)\psi_{\mathfrak{h}}(g(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_1), \cdots, \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_{n-1}), \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x_n))\\
&\qquad -\mu_H(x_n, x)\psi_{\mathfrak{h}}(g(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_1), \cdots, \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_{n-1}), \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(y_n))\Big)\\
&+ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}D_H(\mathfrak{x}_k)\psi_{\mathfrak{h}}(g(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_1), \cdots, \widehat{\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_k)}, \cdots, \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_n), \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x))\\
&+ \sum_{k<l}^{n}(-1)^{k}\psi_{\mathfrak{h}}(g(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_1), \cdots, \widehat{\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_k)}, \cdots, \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_k) \circ \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_l), \cdots, \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_n), \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x))\\
&+ \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\psi_{\mathfrak{h}}(g(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_1), \cdots, \widehat{\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_k)}, \cdots, \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_n), \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}[\![\mathfrak{x}, x]\!]_{\mathfrak{g}}))\\
=\ & \psi_{\mathfrak{h}}\Big((-1)^{n-1}\Big(\mu_{H'}(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(y_n), \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x))g(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_1), \cdots, \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_{n-1}), \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x_n))\\
&\qquad -\mu_{H'}(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x_n), \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x))g(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_1), \cdots, \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_{n-1}), \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(y_n))\Big)\Big)\\
&+\psi_{\mathfrak{h}}\Big(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}D_{H'}(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_k))g(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_1), \cdots, \widehat{\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_k)}, \cdots, \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_n), \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x))\Big)\\
&+\psi_{\mathfrak{h}}\Big(\sum_{k<l}(-1)^{k}g(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_1), \cdots, \widehat{\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_k)}, \cdots, \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_k) \circ \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_l), \cdots, \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_n), \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x))\Big)\\
&+\psi_{\mathfrak{h}}\Big(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}g(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_1), \cdots, \widehat{\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_k)}, \cdots, \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_n), \Big[\!\Big[\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}), \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x)\Big]\!\Big]_{\mathfrak{g}}))\Big)\\
=\ & \psi_{\mathfrak{h}}\Big(\delta^{H'}_{\mathrm{II}}(f, g)(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_1), \cdots, \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(\mathfrak{x}_n), \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x))\Big)\\
=\ & p_{\mathrm{II}}\Big(\delta^{H'}_{\mathrm{II}}(f, g)\Big)(\mathfrak{x}_1, \cdots, \mathfrak{x}_n, x).
\end{aligned}$$

注意，第三个等式成立，因为对于所有 $x, y_n \in \mathfrak{g}, u \in \mathfrak{h}$，由于 $(\psi_{\mathfrak{g}}, \psi_{\mathfrak{h}})$ 是从交叉同态 H' 到交叉同态 H 的同态，我们有

$$\begin{aligned}
\mu_H(y_n, x)\psi_{\mathfrak{h}}(u) &= [\![\psi_{\mathfrak{h}}(u), Hy_n, Hx]\!]_{\mathfrak{h}} + \mu(y_n, x)\psi_{\mathfrak{h}}(u) \\
&= \left[\!\!\left[\psi_{\mathfrak{h}}(u), \psi_{\mathfrak{h}} \circ H' \circ \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(y_n), \psi_{\mathfrak{h}} \circ H' \circ \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x)\right]\!\!\right]_{\mathfrak{h}} + \psi_{\mathfrak{h}}\mu(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(y_n), \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x))u \\
&= \psi_{\mathfrak{h}}\Big(\left[\!\!\left[u, H' \circ \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(y_n), H' \circ \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x)\right]\!\!\right]_{\mathfrak{h}} + \mu(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(y_n), \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x))u\Big) \\
&= \psi_{\mathfrak{h}}\big(\mu_{H'}(\psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(y_n), \psi_{\mathfrak{g}}^{-1}(x))\big).
\end{aligned}$$

因此我们得到，对于所有 $(f, g) \in \mathcal{C}^n_{H'}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ $(n \geq 2)$，$\mathrm{p_{II}}\big(\delta^{H'}{}_{\mathrm{II}}(f, g)\big) = \delta^{H}{}_{\mathrm{II}}\big(\mathrm{p_I}(f), \mathrm{p_{II}}(g)\big)$。类似地，我们可以证明，对于所有 $(f, g) \in \mathcal{C}^n_{H'}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ $(n \geq 2)$，$\mathrm{p_I}\big(\delta^{H'}{}_{\mathrm{I}}(f, g)\big) = \delta^{H}{}_{\mathrm{I}}\big(\mathrm{p_I}(f), \mathrm{p_{II}}(g)\big)$。此外，容易看出 $n = 1$ 的情形仍然成立。至此证明完毕。□

5. Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的变形

在本节中，我们使用前一节建立的上同调理论来刻画 Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的变形。

5.1. Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的线性变形。

本小节中，我们使用前一节构造的上同调来刻画 Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的线性变形。

定义 5.1. 设 $H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 是从一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}})$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{h}})$ 的交叉同态，其对应于作用 $(\mathfrak{h}; \rho, \mu)$。设 $H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 是一个线性映射。若对所有 t，$H_t := H + tH$ 仍是交叉同态，则称 H 生成了交叉同态 H 的线性变形。

容易看出，H 生成了交叉同态 H 的线性变形，因此对所有 $x,y,z \in \mathfrak{g}$，有

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H}[x, y]_{\mathfrak{g}} &= \rho(x)(\mathfrak{H}y) - \rho(y)(\mathfrak{H}x) + [Hx, \mathfrak{H}y]_{\mathfrak{h}} + [\mathfrak{H}x, Hy]_{\mathfrak{h}}, \\
\mathfrak{H}[\![x, y, z]\!]_{\mathfrak{g}} &= D(x, y)(\mathfrak{H}z) + \mu(y, z)(\mathfrak{H}x) - \mu(x, z)(\mathfrak{H}y) + [\![\mathfrak{H}x, Hy, Hz]\!]_{\mathfrak{h}} \\
&\quad + [\![Hx, \mathfrak{H}y, Hz]\!]_{\mathfrak{h}} + [\![Hx, Hy, \mathfrak{H}z]\!]_{\mathfrak{h}},
\end{aligned}$$

这意味着 H 是交叉同态 H 的 2-余循环。

定义 5.2. 设 $H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 是从一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}})$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{h}})$ 的交叉同态，该同态对应于作用 (ρ, μ)。

(i) 若存在元素 $X \in \wedge^2\mathfrak{g}$，使得 $(\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} + tL(X), \mathrm{Id}_{\mathfrak{h}} + tD(X))$ 是从 H^2_t 到 H^1_t 的同态，则称两个线性变形 $H^1_t = H + tH_1$ 和 $H^2_t = H + tH_2$ 等价。(ii) 若交叉同态 H 的线性变形 $H_t = H + tH$ 与 H 等价，则称该变形是平凡的。

如果两个线性变形 H^2_t 和 H^1_t 等价，那么 $\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} + tL(X)$ 是 Lie-Yamaguti 代数 $\mathfrak{g}$ 上的同态，这意味着

$$[[\![X, y]\!]_{\mathfrak{g}}, [\![X, z]\!]_{\mathfrak{g}}]_{\mathfrak{g}} = 0, \tag{25}$$

$$\Big[\!\!\Big[[\![\mathfrak{x}, y]\!]_{\mathfrak{g}}, [\![\mathfrak{x}, z]\!]_{\mathfrak{g}}, t\Big]\!\!\Big]_{\mathfrak{g}} + \Big[\!\!\Big[[\![\mathfrak{x}, y]\!]_{\mathfrak{g}}, z, [\![\mathfrak{x}, t]\!]_{\mathfrak{g}}\Big]\!\!\Big]_{\mathfrak{g}} + \Big[\!\!\Big[y, [\![\mathfrak{x}, z]\!]_{\mathfrak{g}}, [\![\mathfrak{x}, t]\!]_{\mathfrak{g}}\Big]\!\!\Big]_{\mathfrak{g}} = 0, \tag{26}$$

$$\Big[\big[[\mathfrak{X},y]_{\mathfrak{g}},[\mathfrak{X},z]_{\mathfrak{g}},[\mathfrak{X},t]_{\mathfrak{g}}\big]\Big]_{\mathfrak{g}} = 0 \tag{27}$$

对于所有 y、z、t ∈ g。

注意，由方程式 (18) 和 (19)，我们得到，对于所有 $y,\ z \in \mathfrak{g}$,

$$\rho([[\mathfrak{X},y]]_{\mathfrak{g}})D(\mathfrak{X}) = 0, \tag{28}$$

$$\mu([[\mathfrak{X},y]]_{\mathfrak{g}},z)D(\mathfrak{X}) + \mu(y,[[\mathfrak{X},z]]_{\mathfrak{g}})D(\mathfrak{X}) + \mu([[\mathfrak{X},y]]_{\mathfrak{g}},[[\mathfrak{X},z]]_{\mathfrak{g}}) = 0, \tag{29}$$

$$\mu([[\mathfrak{X},y]]_{\mathfrak{g}},[[\mathfrak{X},z]]_{\mathfrak{g}})D(\mathfrak{X}) = 0. \tag{30}$$

此外，方程式 (17) 推出，对于所有 $x,\ y,\ z \in \mathfrak{g}$,

$$\Big(\mathrm{Id}_{\mathfrak{h}} + tD(x,y)\Big)\Big(H + t\mathfrak{H}_2\Big)z = \Big(H + t\mathfrak{H}_1\Big)\Big(\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}} + t\mathfrak{Q}(x,y)\Big)z,$$

这意味着

$$\mathfrak{H}_2 z - \mathfrak{H}_1 z = \mu(y,z)(Hx) - \mu(x,z)(Hy) + [[Hx,Hy,Hz]]_{\mathfrak{h}} = \partial(\mathfrak{X})z. \tag{31}$$

因此，由 (31)，我们得到以下定理。

定理 5.3. 设 H : g ⟶ h 是一个交叉同态，它从 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}},[[\cdot,\cdot,\cdot]]_{\mathfrak{g}})$ 映到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}},[[\cdot,\cdot,\cdot]]_{\mathfrak{h}})$，并且相对于作用 $(\mathfrak{h};\ \rho,\ \mu)$。若两个线性变形 $H_t^1 = H + tH_1$ 和 $H_t^2 = H + tH_2$ 等价，则 H_1 和 H_2 属于 $\mathcal{H}_H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ 中同一个上同调类。

定义 5.4。设 $H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 是从一个 Lie-Yamaguti 代数（$\mathfrak{g}$, $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}}$, $[[\cdot,\cdot,\cdot]]_{\mathfrak{g}}$）到另一个 Lie-Yamaguti 代数（$\mathfrak{h}$, $[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}}$, $[[\cdot,\cdot,\cdot]]_{\mathfrak{h}}$）关于作用（$\rho$, μ）的交叉同态。如果元素 $\mathfrak{X} \in \wedge^2\mathfrak{g}$ 满足方程式（25）-（30）以及下列等式

$$D(\mathfrak{X})\Big(D(\mathfrak{X})(Hy) - H[\mathfrak{X},y]_{\mathfrak{g}}\Big) = 0, \quad \forall y \in \mathfrak{g},$$

则称 X 为与 H 相关联的 Nijenhuis 元。以Nij(H) 表示与 H 相关联的 Nijenhuis 元的集合。

容易看出，Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的平凡变形会产生一个 Nijenhuis 元。然而，反之亦然。

定理 5.5。设 H : g ⟶ h 是从一个 Lie-Yamaguti 代数（$\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}},[[\cdot,\cdot,\cdot]]_{\mathfrak{g}}$）到另一个 Lie-Yamaguti 代数（$\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}},[[\cdot,\cdot,\cdot]]_{\mathfrak{h}}$）关于作用（$\rho$, μ）的交叉同态。那么，对于任意 X ∈ Nij(H)，$H_t := H + tH$，其中 $H = \delta^H(X)$ 是 H 的线性变形。此外，该变形是平凡变形。

我们需要以下引理来证明上述定理。

引理 5.6. 设 H : g ⟶ h 是从 g 到 h、关于作用 (ρ,μ) 的交叉同态。设 $\psi_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ 和 $\psi_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 是两个满足条件 (18) 和 (19) 的 Lie-Yamaguti 代数同态。则线性映射 $\psi^{-1}{}_{\mathfrak{h}} \circ H \circ \psi_{\mathfrak{g}}$ 是从 g 到 h、关于作用 (ρ,μ) 的交叉同态。

证明。对于所有 x、y、z ∈ g，我们有

$$\begin{aligned}
&(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}\circ H\circ\psi_{\mathfrak{g}})\Big([x,y]_{\mathfrak{g}}\Big)\\
=\ &\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}\Big(\rho(\psi_{\mathfrak{g}}(x))H(\psi_{\mathfrak{g}}(y)) - \rho(\psi_{\mathfrak{g}}(y))H(\psi_{\mathfrak{g}}(x)) + [H\circ\psi_{\mathfrak{g}}(x),H\circ\psi_{\mathfrak{g}}(y)]_{\mathfrak{h}}\Big)\\
=\ &\rho(x)\Big(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}\circ H\circ\psi_{\mathfrak{g}}(y)\Big) - \rho(y)\Big(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}\circ H\circ\psi_{\mathfrak{g}}(x)\Big) + [\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}\circ H\circ\psi_{\mathfrak{g}}(x),\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}\circ H\circ\psi_{\mathfrak{g}}(y)]_{\mathfrak{h}},
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}\circ H\circ\psi_{\mathfrak{g}})\Big(\llbracket x,y,z\rrbracket_{\mathfrak{g}}\Big)\\
=\;&\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}\Big(D(\psi_{\mathfrak{g}}(x),\psi_{\mathfrak{g}}()y)H(\psi_{\mathfrak{g}}(z))+\mu(\psi_{\mathfrak{g}}(y),\psi_{\mathfrak{g}}(z))H(\psi_{\mathfrak{g}}(x))-\mu(\psi_{\mathfrak{g}}(x),\psi_{\mathfrak{g}}(z))H(\psi_{\mathfrak{g}}(y))\\
&+\llbracket H\circ\psi_{\mathfrak{g}}(x),H\circ\psi_{\mathfrak{g}}(y),H\circ\psi_{\mathfrak{g}}(z)\rrbracket_{\mathfrak{h}}\Big)\\
=\;&D(x,y)\Big(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}\circ H\circ\psi_{\mathfrak{g}}(z)\Big)+\mu(y,z)\Big(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}\circ H\circ\psi_{\mathfrak{g}}(x)\Big)-\mu(x,z)\Big(\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}\circ H\circ\psi_{\mathfrak{g}}(y)\Big)\\
&+\Big\llbracket\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}\circ H\circ\psi_{\mathfrak{g}}(x),\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}\circ H\circ\psi_{\mathfrak{g}}(y),\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}\circ H\circ\psi_{\mathfrak{g}}(y)\Big\rrbracket_{\mathfrak{h}},
\end{aligned}$$

这意味着线性映射 $\psi_{\mathfrak{h}}^{-1}\circ$H $\circ\psi_{\mathfrak{g}}$是从 g 到 h 的交叉同态，其对应的作用为（ρ，μ）。□

定理 5.5 的证明：对于任意 Nijenhuis 元 X $\in$ Nij(H)，我们定义

$$\mathfrak{H}:=\delta(\mathfrak{X}).$$

根据定义 5.4，对于任意 t，$H_t=H$ $+t\mathfrak{H}$ 满足

$$\begin{aligned}
H\circ\Big(\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}+t\mathfrak{L}(\mathfrak{X})\Big)&=\Big(\mathrm{Id}_{\mathfrak{h}}+tD(\mathfrak{X})\Big)\circ H_t,\\
\Big(\mathrm{Id}_{\mathfrak{h}}+tD(\mathfrak{X})\Big)\circ\rho(x)&=\rho\Big(\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}+t\mathfrak{L}(\mathfrak{X})(y)\Big)\circ\Big(\mathrm{Id}_{\mathfrak{h}}+tD(\mathfrak{X})\Big),\\
\Big(\mathrm{Id}_{\mathfrak{h}}+tD(\mathfrak{X})\Big)\circ\mu(y,z)&=\rho\Big(\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}+t\mathfrak{L}(\mathfrak{X})(y),\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}+t\mathfrak{L}(\mathfrak{X})(z)\Big)\circ\Big(\mathrm{Id}_{\mathfrak{h}}+tD(\mathfrak{X})\Big),\quad\forall y,z\in\mathfrak{g}.
\end{aligned}$$

当 t 充分小时，我们可知 $\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$ + tL(X) 和 $\mathrm{Id}_{\mathfrak{h}}$ +tD(X) 是 Lie-Yamaguti 代数同态。因此，我们有

$$H_t=\Big(\mathrm{Id}_{\mathfrak{h}}+tD(\mathfrak{X})\Big)^{-1}\circ H\circ\Big(\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}+t\mathfrak{L}(\mathfrak{X})\Big).$$

根据引理 5.6，我们推得 H_t 是从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{h}$ 的交叉同态，其中 t 足够小。因此 $\mathfrak{H}$ $=\delta(\mathfrak{X})$ 生成了 H的线性变形。容易看出，这个变形是平凡的。证毕。□

5.2. Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的形式变形。本小节中，我们研究 Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的形式变形。令 $\mathbb{K}[[t]]$ 为一个变量 t 的幂级数环。若 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}},\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket_{\mathfrak{g}})$ 是一个 Lie-Yamaguti 代数，则在 g[[t]] 上存在一个定义在环 $\mathbb{K}[[t]]$ 上的 Lie-Yamaguti 代数结构，其定义为

$$\begin{aligned}
\Big[\sum_{i=0}^{\infty}x_it^i,\sum_{j=0}^{\infty}y_jt^j\Big]&=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i+j=s}\big[x_i,y_j\big]t^s,\\
\Big\llbracket\sum_{i=0}^{\infty}x_it^i,\sum_{j=0}^{\infty}y_jt^j,\sum_{k=0}^{\infty}z_kt^k\Big\rrbracket&=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i+j+k=s}\big\llbracket x_i,y_j,z_k\big\rrbracket t^s,\quad\forall x_i,y_j,z_k\in\mathfrak{g}.
\end{aligned}$$

对于 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}},\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket_{\mathfrak{g}})$ 在另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}},\llbracket\cdot,\cdot,\cdot\rrbracket_{\mathfrak{h}})$ 上的任意作用 (ρ,μ)，Lie-Yamaguti 代数 g[[t]] 在 $\mathbb{K}[[t]]$- Lie-Yamaguti 代数 h[[t]] 上有一个自然的作用，定义如下

$$\rho\Big(\sum_{i=0}^{\infty}x_it^i\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty}v_kt^k\Big)=\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i+k=s}\rho(x_i)v_kt^s,$$

$$\mu\Big(\sum_{i=0}^{\infty} x_i t^i, \sum_{j=0}^{\infty} y_j t^j\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} v_k t^k\Big) = \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{i+j+k=s} \mu(x_i, x_j)v_k t^s, \quad \forall x_i, y_j \in \mathfrak{g},\ v_k \in V.$$

设 $H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 是关于作用 (ρ, μ) 从 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 的交叉同态。考虑幂级数

$$H_t = \sum_{i=0}^{\infty} \mathfrak{H}_i t^i, \quad \mathfrak{H}_i \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}), \tag{32}$$

即，$H_t \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})[[t]] = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}[[t]])$。

定义 5.7. 设 $H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 是从 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 的交叉同态，且对应于一个作用 (ρ, μ)。假设 H_t 由 (32) 给出，其中 $H_0 = H$，并且 H_t 还满足

$$H_t[x, y]_\mathfrak{g} = \rho(x)(H_t y) - \rho(y)(H_t x) + [H_t x, H_t y]_\mathfrak{h}, \tag{33}$$

$$H_t [\![x, y, z]\!]_\mathfrak{g} = D(x, y)(H_t z) + \mu(y, z)(H_t x) - \mu(x, z)(H_t y) + [\![H_t x, H_t y, H_t z]\!]_\mathfrak{h}, \tag{34}$$

对所有 $x, y, z \in \mathfrak{g}$。我们称 H_t 是 H 的形式变形。

将方程式 (32) 代入方程式 (33) 和 (34) 中，并比较 t 的 t^s $(\forall s \geqslant 0)$ 的系数，对于所有 $x,y,z \in \mathfrak{g}$,

$$\sum_{\substack{i+j=s,\\ i,j\geqslant 0}} \Big(\rho(x)(\mathfrak{H}_s y) - \rho(y)(\mathfrak{H}_s x) + [\mathfrak{H}_i x, \mathfrak{H}_j y]_\mathfrak{h} - \mathfrak{H}_s[x, y]_\mathfrak{g}\Big)t^s = 0, \tag{35}$$

$$\sum_{\substack{i+j+k=s,\\ i,j,k\geqslant 0}} \Big(D(x, y)(\mathfrak{H}_s z) + \mu(y, z)(\mathfrak{H}_s x) - \mu(x, z)(\mathfrak{H}_s y) + [\![\mathfrak{H}_i x, \mathfrak{H}_j y, \mathfrak{H}_k z]\!]_\mathfrak{h} - \mathfrak{H}_s [\![x, y, z]\!]_\mathfrak{g}\Big)t^s = 0. \tag{36}$$

命题 5.8. 设 $H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 是从 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 的交叉同态，其对应的作用为 $(\mathfrak{h}; \rho, \mu)$。若 $H_t = \sum_{i=0}^{\infty} H_i t^i$ 是 H 的形式变形，则 $\delta^H H_1 = 0$，即 $H_1 \in C^1_H(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ 是 H 的一个 1-余循环。

证明。 当 $s = 1$ 时，方程式 (35) 和 (36) 等价于

$$\begin{aligned}
\mathfrak{H}_1[x, y]_\mathfrak{g} &= \rho(x)(\mathfrak{H}_1 y) - \rho(y)(\mathfrak{H}_1 x) + [Hx, \mathfrak{H}_1 y]_\mathfrak{h} + [\mathfrak{H}_1 x, Hy]_\mathfrak{h},\\
\mathfrak{H}_1 [\![x, y, z]\!]_\mathfrak{g} &= D(x, y)(\mathfrak{H}_1 z) + \mu(y, z)(\mathfrak{H}_1 x) - \mu(x, z)(\mathfrak{H}_1 y)\\
&\quad + [\![\mathfrak{H}_1 x, Hy, Hz]\!]_\mathfrak{h} + [\![Hx, \mathfrak{H}_1 y, Hz]\!]_\mathfrak{h} + [\![Hx, Hy, \mathfrak{H}_1 z]\!]_\mathfrak{h}, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.
\end{aligned}$$

这意味着 $\delta^H(H_1) = 0$，即 H_1 是 δ^H 的一个 1-余循环。 □

定义 5.9. 设 $H : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ 是从 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{g}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{g})$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h}, [\cdot,\cdot]_\mathfrak{h}, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_\mathfrak{h})$ 的交叉同态，其对应的作用为 $(\mathfrak{h}; \rho, \mu)$。$H_1$ 这一 1-余循环称为 H 的形式变形 $H_t = \sum_{i=0}^{\infty} H_i t^i$ 的无穷小。

接下来，我们给出 Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的等价形式变形的概念。

定义 5.10. 设 $H : g \longrightarrow h$ 是从 Lie-Yamaguti 代数 $(g, [\cdot,\cdot]_g, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_g)$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(h, [\cdot,\cdot]_h, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_h)$ 的交叉同态，且该同态关于作用 (ρ, μ) 定义。两个形式变形 $\bar{H}_t = P_{\infty\, i=0}\ \bar{H}_i t^i$ 和 $H_t = P_{\infty\, i=0} H_i t^i$，其中 $\bar{H}_0 = H_0 = H$，称为等价的，若存在 $X \in \wedge^2 g$、$\phi_i \in gl(g)$ 和 $\varphi_i \in gl(h)$，$i \geqslant 2$，使得对于

$$\phi_t = \mathrm{Id}_g + t\mathfrak{Q}(\mathfrak{X}) + \sum_{i=2}^{\infty} \phi_i t^i, \qquad \varphi_t = \mathrm{Id}_h + tD(\mathfrak{X}) + \sum_{i=2}^{\infty} \varphi_i t^i, \tag{37}$$

满足以下条件:

$$[\phi_t(x), \phi_t(y)]_g = \phi_t[x, y]_g, \quad [\![\phi_t(x), \phi_t(y), \phi_t(z)]\!]_g = \phi_t [\![x, y, z]\!]_g, \quad \forall x, y, z \in g, \tag{38}$$

$$[\varphi_t(u), \varphi_t(v)]_h = \varphi_t[u, v]_h, \quad [\![\varphi_t(u), \varphi_t(v), \varphi_t(w)]\!]_h = \varphi_t [\![u, v, w]\!]_h, \quad \forall u, v, w \in h, \tag{39}$$

$\varphi_t\rho(x)u = \rho(\phi_t(x))(\varphi_t(u)), \varphi_t\mu(x,y)u = \mu(\phi_t(x), \phi_t(y))(\varphi_t(u)), \forall x,y \in g, u \in h$，且 (40)

$$H_t \circ \varphi_t = \phi_t \circ \bar{H}_t \tag{41}$$

作为 $\mathbb{K}[[t]]$-模映射。

以下定理是本节的第二个关键结论。

定理 5.11. 设 $H : g \longrightarrow h$ 是从 Lie-Yamaguti 代数 $(g, [\cdot,\cdot]_g, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_g)$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(h, [\cdot,\cdot]_h, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_h)$ 的交叉同态，其对应的作用为 $(h; \rho, \mu)$。若两个形式变形 $\bar{H}_t = P_{\infty\, i=0}\ \bar{H}_i t^i$ 和 $H_t = P_{\infty\, i=0} H_i t^i$ 等价，则它们的无穷小属于同一个上同调类。

证明。 设（ϕ_t，φ_t）为由（37）定义的映射，它使得两个变形 $\bar{H}_t = \sum^{\infty\, i=0}\ \bar{\mathfrak{H}}_i t^i$ 和 $H_t = \sum^{\infty\, i=0} \mathfrak{H}_i t^i$ 等价。由（41），我们有

$$\bar{\mathfrak{H}}_1 z = \mathfrak{H}_1 z + \mu(y, z)(Hx) - \mu(x, z)(Hy) + [\![Hx, Hy, Hz]\!]_h = \mathfrak{H}_1 z + \partial(\mathfrak{X})(z), \quad \forall z \in h,$$

这表明 $\bar{H}_1$ 和 H_1 属于同一个上同调类。 □

5.3. Lie-Yamaguti 代数之间交叉同态的 n 阶变形。在本小节中，我们引入一个与交叉同态的 n 阶变形相关的特殊上同调类，并证明交叉同态的 n 阶变形可延拓，当且仅当第二上同调群中的该上同调类是平凡的。这就是我们将这一特殊上同调类称为 n 阶变形可延拓性的障碍类的原因。

定义 5.12. 设 $H : g \longrightarrow h$ 是关于一个作用 $(h; \rho, \mu)$，从 Lie-Yamaguti 代数 $(g, [\cdot,\cdot]_g, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_g)$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(h, [\cdot,\cdot]_h, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_h)$ 的一个交叉同态。若 $H_t = P_{n\, i=0} H_i t^i$，其中 $H_0 = H$，$H_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(g, h)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，定义了一个从 $g[t]/(t^{n+1})$ 到 Lie-Yamaguti 代数 $h[t]/(t^{n+1})$ 的 $\mathbb{K}[t]/(t^{n+1})$-模，并满足

$$H_t[x, y]_g = \rho(x)(H_t y) - \rho(y)(H_t x) + [H_t x, H_t y]_h, \tag{42}$$

$$H_t [\![x, y, z]\!]_g = D(x, y)(H_t z) + \mu(y, z)(H_t x) - \mu(x, z)(H_t y) + [\![H_t x, H_t y, H_t z]\!]_h, \tag{43}$$

对于所有 $x、y、z \in g$. 我们称 H_t 是 H 的 n 阶变形。

注 5.13。 方程式（42）和（43）的左端在 Lie-Yamaguti 代数$g[t]/(t^{n+1})$中成立，而方程式（42）和（43）的右端有意义，因为 H_t 是一个 $\mathbb{K}[t]/(t^{n+1})$-模映射。

定义 5.14。设 $H : g \longrightarrow h$ 是从 Lie-Yamaguti 代数（$g, [\cdot,\cdot]_g, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_g$）到另一个 Lie-Yamaguti 代数（$h, [\cdot,\cdot]_h, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_h$）的交叉同态，其对应的作用为（$\rho, \mu$）。设 $H_t = \sum_{i=0} H_i t^i$ 是 H 的 n 阶变形。若存在一个 1-上链 $H_{n+1} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(g, h)$，使得 $eH_t = T_t + H_{n+1}t^{n+1}$ 是 H 的 n 阶 + 1 变形，则称 H_t 是可延拓的。

以下定理是本节的第三个关键结论。

定理5.15. 设 $H : g \longrightarrow h$ 是从 Lie-Yamaguti 代数 $(g, [\cdot,\cdot]_g, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_g)$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(h, [\cdot,\cdot]_h, [\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_h)$ 的交叉同态，其对应的作用为 $(h; \rho, \mu)$。设 $H_t = \sum_{i=0} H_i t^i$ 是 H 的一个 n 阶变形。那么，H_t 可延拓当且仅当上同调类 $[Ob^H] \in \mathcal{H}^2_H(g, h)$ 是平凡的，其中 $Ob^H = (Ob^H_I, Ob^H_{II}) \in C^2_H(g, h)$ 定义为

$$\begin{aligned} Ob^H_I(x_1, x_2) &= \sum_{\substack{i+j=n+1,\\ 0<i,j<n+1}} [\mathfrak{H}_i x, \mathfrak{H}_j y]_h, \\ Ob^H_{II}(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{\substack{i+j+k=n+1,\\ 0<i.j.k<n+1}} [\![\mathfrak{H}_i x_1, \mathfrak{H}_j x_2, \mathfrak{H}_k x_3]\!], \quad \forall x_1, x_2, x_3 \in g. \end{aligned}$$

证明。设 $eH_t = \sum_{i=0}^{n+1} H_i t^i$ 是 H_t的一个扩张，则对所有 $x, y, z \in g$,

$$\widetilde{H}_t[x, y]_g = \rho(x)(\widetilde{H}_t y) - \rho(y)(\widetilde{H}_t x) + [\widetilde{H}_t x, \widetilde{H}_t y]_h, \tag{44}$$

$$\widetilde{H}_t [\![x, y, z]\!]_g = D(x, y)(\widetilde{H}_t z) + \mu(y, z)(\widetilde{H}_t x) - \mu(x, z)(\widetilde{H}_t y) + [\![\widetilde{H}_t x, \widetilde{H}_t y, \widetilde{H}_t z]\!]_h . \tag{45}$$

展开式(44)并比较系数 t^n 可得

$$\mathfrak{H}_{n+1}[x, y]_g = \rho(x)(\mathfrak{H}_{n+1} y) - \rho(y)(\mathfrak{H}_{n+1} x) + \sum_{i+j=n+1} [\mathfrak{H}_i x, \mathfrak{H}_j y]_h,$$

这等价于

$$\begin{aligned} &\rho(x)(\mathfrak{H}_{n+1} y) - \rho(y)(\mathfrak{H}_{n+1} x) + [\mathfrak{H}_{n+1} x, Hy]_h + [x, \mathfrak{H}_{n+1} y]_h \\ &-\mathfrak{H}_{n+1}[x, y]_g + \sum_{\substack{i+j=n+1\\ 0<i,j<n+1}} [\mathfrak{H}_i x, \mathfrak{H}_j y]_h = 0. \end{aligned}$$

即,

$$Ob^H_I + \delta^T_I(\mathfrak{H}_{n+1}) = 0. \tag{46}$$

类似地，展开式(45)并比较系数 t^n 可得 t

$$Ob^H_{II} + \delta^T_{II}(\mathfrak{H}_{n+1}) = 0. \tag{47}$$

由(46)和(47)，可得

$$Ob^H = \delta^H(-\mathfrak{H}_{n+1}).$$

因此，上同调类 $[Ob^H]$ 是平凡的。

反之，假设上同调类 $[Ob^H]$ 是平凡的，则存在 $H_{n+1} \in C^1_H(g, h)$，使得 $Ob^H = -\delta^H(H_{n+1})$。令 $eH_t = H_t + H_{n+1}t^{n+1}$。那么对于所有 0 6 s 6 n + 1，e；并且对于所有 $x, y, z \in g$，H_t 满足

$$\sum_{i+j=s} \Big(\mathfrak{H}_s[x, y]_g - \big(\rho(x)(\mathfrak{H}_s y) - \rho(y)(\mathfrak{H}_s x) + [\mathfrak{H}_i x, \mathfrak{H}_j y]_h\big)\Big) = 0,$$

$$\sum_{i+j+k=s}\left(\mathfrak{H}_s[\![x,y,z]\!]_{\mathfrak{g}}-(D(x,y)(\mathfrak{H}_s z)+\mu(y,z)(\mathfrak{H}_s x)-\mu(x,z)(\mathfrak{H}_s y)+[\![\mathfrak{H}_i x,\mathfrak{H}_j y,\mathfrak{H}_k z]\!]_{\mathfrak{h}})\right)=0,$$

这意味着 H_t 是 H 的一个 n 阶 + 1 变形。因此，它是 H_t的一个扩张。 □

定义 5.16. 设 $H:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{h}$ 是从 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}})$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{h}})$ 的交叉同态，其对应的作用为 $(\mathfrak{h};\rho,\mu)$，且 $H_t=\sum_{i=0}^{n}H_i t^i$ 是 H 的一个 n 阶变形。那么，定理 5.15 中定义的上同调类$[\mathrm{Ob}^H]\in\mathcal{H}^2_H(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ 称为 H_t 可延拓的障碍类。

推论5.17. 设 $H:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{h}$ 是从 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{g}},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{g}})$ 到另一个 Lie-Yamaguti 代数 $(\mathfrak{h},[\cdot,\cdot]_{\mathfrak{h}},[\![\cdot,\cdot,\cdot]\!]_{\mathfrak{h}})$ 的交叉同态，其对应的作用为 $(\mathfrak{h};\rho,\mu)$。若 $\mathcal{H}^2_H(\mathfrak{g},\mathfrak{h})=0$，则 $\mathcal{Z}^1_H(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ 中的每个 1-余循环都是 H 的某个形式变形的无穷小。

致谢：Qiao 部分得到了国家自然科学基金项目11971282的资助。Xu 部分得到了国家自然科学基金项目12201253和江苏省自然科学基金BK20220510的资助。

参考文献

[1] D. Balavoine。二次歌剧上的代数变形。歌剧：文艺复兴会议论文集（哈特福德，康涅狄格州/吕米尼，1995），当代数学，美国数学学会，普罗维登斯，第202卷，（1997）207-234。2[2] P. Benito、M. Bremner 和 S. Madariaga。对称矩阵、正交李代数与Lie-Yamaguti代数，《线性与多重线性代数》63（2015）1257-1287。2[3] P. Benito、C. Draper 和 A. Elduque。与 $\mathfrak{g}_2$, 相关的Lie-Yamaguti代数，《纯粹与应用代数杂志》202（2005）22-54。2[4] P. Benito、A. Elduque 和 F. Mart´in-Herce。不可约Lie-Yamaguti代数，《纯粹与应用代数杂志》213（2009）795-808。2[5] P. Benito、A. Elduque 和 F. Mart´in-Herce。一般型不可约Lie-Yamaguti代数，《纯粹与应用代数杂志》215（2011）108-130。2[6] V. Chari 和 A. Pressley。《量子群指南》，剑桥大学出版社，1994。1[7] I. Dorfman。Dirac结构与非线性演化方程的可积性，Wiley Chichester，1993。2[8] M. Gerstenhaber。结合环的上同调结构，《数学年刊》78（1963）267-288。2[9] M. Gerstenhaber。论环与代数的变形，《数学年刊》（第2辑）79（1964）59-103。2[10] M. Gerstenhaber。论环与代数的变形II，《数学年刊》84（1966）1-19。2[11] M. Gerstenhaber。论环与代数的变形III，《数学年刊》88（1968）1-34。2[12] M. Gerstenhaber。论环与代数的变形IV，《数学年刊》99（1974）257-276。2[13] R. Hartshore。变形理论，《数学研究生教材》257（2010），施普林格，柏林。1[14] S. Hou、M. Hu、L. Song 和 Y. Zhou。3-李代数上交叉同态的上同调与控制代数，arXiv:2212.02729 2[15] K. Iohara、Y. Koga。Virasoro代数的表示论，Springer数学专著。施普林格-维尔拉格伦敦有限公司，伦敦（2011）。1[16] M. K. Kinyon 和 A. Weinstein。Leibniz代数、Courant代数丛与约化齐性空间上的乘法，《美国数学杂志》123（2001）525-550。2, 3[17] K. Kodaira 和 D. Spencer。论复解析结构的变形I和II，《数学年刊》67（1958）328-466。1[18] J. Lin、L. Chen 和 Y. Ma。论Lie-Yamaguti代数的变形，《数学学报》（英文版）31（2015）938-946。2[19] D. Liu、Y. Pei 和 L. Xia。Ovisenko-Roger代数的受限模范畴，《代数与表示理论》25（2022），第3期，777-791。1

[20] J. Liu、Y. Sheng、Y. Zhou 和 C. Bai。n-Lie 代数上的Nijenhuis 算子，《理论物理通讯》（北京）65（2016）第6期，659-670。2[21] A. Lue。李代数的交叉同态，《剑桥哲学学会学报》62（1966），577-581。2[22] Y. Ma、L. Chen 和 J. Lin。Hom-Lie-Yamaguti 代数的单参数形式变形，《数学物理学杂志》56（2015）011701，12页。2[23] A. Nijenhuis 和 R. Richardson。分次李代数中的上同调与变形，《美国数学学会通报》72（1966）1-29。2[24] K. Nomizu。齐性空间上的不变仿射联络，《美国数学杂志》76（1954）33-65。2, 4[25] Y. Pei、Y. Sheng、R. Tang 和 K. Zhao。幺半范畴的作用与Cartan 型李代数的表示，《Jussieu数学研究所学报》（2022）Doi:10.1017/S147474802200007X。2[26] Y. Sheng 和 R. Tang。3-李代数上的辛结构、乘积结构与复结构。《代数杂志》508（2018）256-300。2[27] Y. Sheng、J. Zhao 和 Y. Zhou。Lie-Yamaguti代数上的Nijnhuis 算子、乘积结构与复结构，《代数与应用杂志》第20卷第8期（2021）2150146，22页。2, 7[28] N. Takahashi。二次空间上的模与Lie-Yamaguti代数的表示，《李理论杂志》31（2021）第4期，897-932。2, 7[29] R. Tang、C. Bai、L. Guo 和 Y. Sheng。*O*-算子的变形及其控制上同调，《数学物理通讯》368（2019）655-700。2[30] R. Tang、S. Hou 和 Y. Sheng。3-李代数与3-李代数上相对 Rota-Baxter 算子的变形，《代数杂志》567（2021）37-62。2[31] R. Tang、Y. Sheng 和 Y. Zhou。Leibniz 代数上相对 Rota-Baxter 算子的变形，《现代物理国际几何方法杂志》第17卷第12期（2020）21页。2[32] K. Yamaguti。论李三系及其推广，《广岛大学理学杂志》A辑21（1957/1958）155-160。2, 3[33] K. Yamaguti。论一般李三系的上同调群，《熊本大学理学杂志》A辑8（1967/1969）135-146。2, 4, 5, 6[34] K. Yamaguti。论李三系的上同调空间，《熊本大学理学杂志》A辑5(1)（1960）44-52。2[35] T. Zhang 和 J. Li。Lie-Yamaguti代数的变形与扩张，《线性与多重线性代数》63（2015）2212-2231。2, 8[36] T. Zhang 和 J. Li。Lie-Yamaguti代数的表示与上同调及其应用，《数学汇刊》148（2017）131-155。2[37] J. Zhao 和 Y. Qiao。LieYRep 对的上同调与相对 Rota-Baxter-Nijenhuis 结构，《几何与物理学杂志》186（2023）第104749号，24页。2[38] J. Zhao 和 Y. Qiao。Lie-Yamaguti代数上相对 Rota-Baxter 算子的上同调与变形，arXiv:2204.04872。2 Jia Zhao，理学院，南通大学，南通，226019，江苏，中国 电子邮箱：zhaojia@ntu.edu.cn Yu Qiao，数学与统计学院，陕西师范大学，西安，710119，陕西，中国 电子邮箱：yqiao@snnu.edu.cn Senrong Xu（通讯作者），数学科学学院，江苏大学，镇江，212013，江苏，中国 电子邮箱：senrongxu@ujs.edu.cn