婴儿斯格明子　　模型与各向异性 DM 相互作用：重新审视紧致Skyrmion　　d

Funa Hanada[1], * 和 Nobuyuki Sawado[1], †[1] *Department of Physics and Astronomy, Tokyo University of Science, Noda, Chiba 278-8510, Japan*

我们研究了一个包含 Dzyaloshinskii–Moriya 相互作用（DMI）和两类势项的婴儿斯格明子模型。该模型与费米子同 $O(3)$ 非线性 $\boldsymbol{n}$-场以及恒定 $SU(2)$ 规范背景耦合的真空泛函密切相关。能量泛函由费米子行列式的热核展开导出。该模型具有拓扑荷为 $Q=1$ 的普通斯格明子。模型的受限版本还包括弱紧致子情形（在边界处不可连续微分）和真正的紧致子情形（连续可微）。该模型仅由Skyrme项构成，而 DMI 提供了被称为 *skyrmions without any potential* 的孤子解。超对称孤子模型中的 BPS方程表明，杂质耦合与 DMI 密切相关。因此，本文还研究了指数局域化 DMI 在该模型中的影响。

arXiv:2303.15751v4 [hep-th] 18 Oct 2023

I. 引言

Skyrme 模型是一种关于π介子的（3+1）维非线性场论，是强子的一个模型，并被认为是量子色动力学（QCD）低能领域中最具前景且寿命最长的有效模型。斯格明子是 Skyrme 模型中的拓扑孤子，不仅能够恰当地描述标准强子和原子核，还能描述致密核物质 [1–4] 以及中子星 [5, 6]的结构。

（2+1）维 Skyrme 模型近年来受到广泛关注。特别是，磁性斯格明子在拓扑物质的理论研究以及自旋电子学、量子计算和致密磁性纳米器件等诸多应用中，日益受到重视。磁性斯格明子源自一个包含 Dzyaloshinskii–Moriya 相互作用（DMI）的模型 [7, 8]。DMI 以及模型中尺度不变性的破缺势，成功规避了 Derrick 定理。Skyrme 场 $\boldsymbol{n}=(n_1,n_2,n_3)$ with $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}=1$，实现映射： $S^2\to S^2$，并由同伦群 $\Pi_2(S^2)=\mathbb{Z}$刻画。能量密度定义为 [9–12]

$$\mathcal{E}_{\rm DM}=\kappa_2(\partial_i\boldsymbol{n})^2+\kappa_1\boldsymbol{n}\cdot\nabla\times\boldsymbol{n}+V[\boldsymbol{n}]\,,\quad i=1,2,\quad (1)$$

其中， κ_2， κ_1 均为正值常数。第二个微分项（动能项）具有尺度不变性，而 DMI 对能量有负贡献；因此，根据 Derrick 定理，解可能存在。

婴儿斯格明子模型是（3+1）–Skyrme模型的直接复制，由一个 $O(3)$非线性σ模型（动能项）、一个四阶微分项（Skyrme项）以及塞曼势或其他类型的势项组成。众所周知，Skyrme项和势项是Derrick定理所涉及的关键因素，婴儿斯格明子模型的能量密度模型由 [13]定义

$$\mathcal{E}_{\rm bS}=\kappa_2(\partial_i\boldsymbol{n})^2+\kappa_4\left(\partial_i\boldsymbol{n}\times\partial_j\boldsymbol{n}\right)^2+V[\boldsymbol{n}]\,,\quad i,j=1,2,\quad (2)$$

其中 κ_4 是一个正数。婴儿斯格明子在量子霍尔效应 [14–18], 、向列晶体 [19–24], 、超导材料 [25], 以及膜世界情景 [26–29], 等方面有着广泛应用。不含动能项的婴儿斯格明子模型称为受限婴儿斯格明子模型 [30–32], ，它具有一个显著特点：存在解析的Bogomol'nyi–Prasad–Sommerfield（BPS）解。婴儿斯格明子模型和受限模型都能给出与紧致子相关的解。与标准场论模型的其他解相比，紧致子具有独特性质：场在该支撑区域之外取真空值，能量和荷始终集中在紧支撑上 [33, 34]。已有多项研究探讨婴儿斯格明子模型中的紧致Skyrmion [30, 31, 35–38]。要确定紧致子，婴儿斯格明子模型需要一种称为V形势的非解析势。而在受限模型中，势还可以有其他选择，但模型的修改仍面临一项突出挑战。含有动能项分数幂且不含势能项的婴儿斯格明子模型成功规避了Derrick定理，并具有紧致和非紧致 Skyrmion解 [37]。

由此产生一个自然的问题：这两种模型能否结合起来描述相关现象？目前，我们没有明确证据表明这两种相互作用应当共存。然而，从理论角度来看，考虑一个组合模型并寻找新颖的解或许是有效的。在本研究中，我们考察了此类模型，并发现了包括紧致子在内的几种解。为简单起见，我们聚焦于旋转对称解；不过，若解除约束，则会出现各种结构。

在 [39], 中，作者研究了平方塞曼势受限婴儿斯格明子模型的超对称扩展，并考虑了"杂质耦合"。具体而言，他们找到了 BPS方程的解析解

* funa87@gmail.com
† sawadoph@rs.tus.ac.jp

适用于指数局域杂质 $\sim e^{-\beta r}$。因此，值得研究当前模型中指数局域杂质的 DMI。

本文组织如下。第二节介绍一个费米子模型，以及由作用量的虚部得到的拓扑信息。本节还将简要说明我们的模型，包括能量泛函和欧拉方程。第三节给出该模型的若干解析解和数值解。第四节介绍一种新颖的组合模型，该模型不含势能项，并给出相应的解。第五节讨论杂质模型，其中考虑模型中呈指数局域化的 DMI 耦合。最后一节给出结论与讨论。

II. 模型

本文分析了一个带有 DMI 的 Skyrme型模型。能量定义为

$$\begin{aligned} E = \int d^2x \Big\{ & \kappa_2 \left(\partial_i \boldsymbol{n}\right)^2 \\ & + \kappa_1 \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n}) - \kappa_1 (\partial_1 n_2 - \partial_2 n_1) \\ & + \kappa_{4a} \left(\partial_i \boldsymbol{n} \times \partial_j \boldsymbol{n}\right)^2 + \kappa_{4b} \left(\partial_i \boldsymbol{n}\right)^2 \left(\partial_j \boldsymbol{n}\right)^2 \\ & + \kappa_{0a} \left(1 - n_3\right) + \kappa_{0b} \left(1 - n_3\right)^2 \Big\}, \end{aligned} \tag{3}$$

其中每一项分别对应于

$$\begin{aligned} &\text{(i) the kinetic}: \ E_2 := \kappa_2 \int d^2x \left(\partial_i \boldsymbol{n}\right)^2 , \\ &\text{(ii) the DMI}: \ E_1 := \kappa_1 \int d^2x \boldsymbol{n} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{n}) , \\ &\text{(iii) the Skyrme}: \ E_{4a} := \kappa_{4a} \int d^2x \left(\partial_i \boldsymbol{n} \times \partial_j \boldsymbol{n}\right)^2 , \end{aligned}$$

（iv）扩展的第四项:

$$E_{4b} := \kappa_{4b} \int d^2x \left(\partial_i \boldsymbol{n}\right)^2 \left(\partial_j \boldsymbol{n}\right)^2 ,$$

$$\begin{aligned} &\text{(v) the Zeeman}: \ E_{0a} := \kappa_{0a} \int d^2x \left(1 - n_3\right) , \\ &\text{(vi) a squared Zeeman}: \ E_{0b} := \kappa_{0b} \int d^2x \left(1 - n_3\right)^2 . \end{aligned} \tag{4}$$

注意，涡旋强度的积分为零。

尽管该模型可能会被视为上述磁性Skyrme模型（1）与婴儿斯格明子模型（2）的简单混合，但它实际上有系统的起源。在 [40–43], 中，作者研究了 O（3）非线性 σ 模型的拉格朗日量，以及基于费米子拉格朗日量导数展开的拓扑项；费米子通过 $\partial_\mu \boldsymbol{n}$与 Skyrme 场耦合。近期还有一些理论研究探讨了费米子与婴儿斯格明子 [44]以及磁性斯格明子 [45], ，并考虑了费米场的反作用。我们从以下真空泛函开始:

$$\mathcal{Z} = \int \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\bar{\psi} e^{S_{\mathrm{E}}} \tag{5}$$

欧几里得作用量为

$$S_{\mathrm{E}} = \int d\tau \int d^2x \left[\bar{\psi} \Big(i\gamma_\mu (\partial_\mu - i\boldsymbol{A}_\mu) - m\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n} \Big) \psi \right] . \tag{6}$$

欧几里得时间分量 τ 由 Wick 旋转 $t = x_0 = -i\tau$定义。伽马矩阵定义为 $\gamma_\mu := -i\sigma_\mu$， $\mu = 1$，2，3，并满足克利福德代数$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = -2\delta_{\mu\nu}$。尽管 Yukawa 耦合常数 m 在理论上可以自由选择，但费米子零模的存在要求其高于临界值 $m \geqq m_0$ [43]。在下文中，不失一般性地，我们将m 视为 $m \geqq 1$ 。

通过引入定义为 $\boldsymbol{A}_\mu = A^a_\mu \tau_a/2$ [12, 46] 的常数背景规范场，产生了 DMI项

$$\begin{aligned} A^a_1 = (-D, 0, 0), \quad A^a_2 = (0, -D, 0), \\ \text{all the others are zero} . \end{aligned} \tag{7}$$

执行积分 (5) 后，我们得到有效作用量 $\omega(\boldsymbol{n})$

$$\mathcal{Z} = \det i\mathcal{D} \equiv \exp[\omega(\boldsymbol{n})], \quad \omega(\boldsymbol{n}) := \mathrm{Tr} \log(i\mathcal{D}) , \tag{8}$$

其中，狄拉克算子表示为

$$i\mathcal{D} := i\gamma_\mu (\partial_\mu - i\boldsymbol{A}_\mu) - m\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n} . \tag{9}$$

在欧几里得空间中，有效作用量通常是一个复量 $\omega(\boldsymbol{n})$:
$= \omega_R(\boldsymbol{n}) + i\omega_I(\boldsymbol{n})$，其中

$$\omega_R(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{2} \mathrm{Tr} \log \mathcal{D}^\dagger \mathcal{D} , \tag{10}$$

$$\omega_I(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{2i} \mathrm{Tr} \log (\mathcal{D}^\dagger)^{-1} \mathcal{D} . \tag{11}$$

这里需要处理实部，因为它会产生一个有效的 Skyrme 型模型。我们采用热核方法进行展开 [47, 48] ，该方法直接考察模型的静态能量。将能量展开至四阶微分阶数项的计算几乎是直接的；然而，结果相当繁杂。因此，对于所有三阶和四阶微分阶数项，我们令 $D = 0$, 以简化模型。详细分析见附录 A。

作用量(8)的虚部体现了模型的统计性质。因此，我们考虑U(1)规范模型(9)

$$i\mathcal{D} := i\gamma_\mu (\partial_\mu - i\boldsymbol{A}_\mu - ia_\mu) - m\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{n} \tag{12}$$

其中a_μ 是外部电磁势。尝试展开a_μ后，它对有效作用量的贡献如下 [41, 42]

$$\omega_I(\boldsymbol{n}) = -\int d^3x a_\mu J_\mu \tag{13}$$

其中拓扑流为

$$J_\mu = \frac{1}{16\pi i}\epsilon_{\mu\nu\delta}\mathrm{tr}(uD_\nu uD_\delta u)\,, \tag{14}$$
$$D_\mu u := \partial_\mu u - i[A_\mu, u], \quad u := \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}\,, \tag{15}$$

第三个分量变为

$$J_3 = \frac{1}{4\pi}\left(\epsilon_{abc}n_a\partial_1 n_b\partial_2 n_c + D(\partial_1 n_2 - \partial_2 n_1) + D^2 n_3\right). \tag{16}$$

第一项定义了众所周知的拓扑荷

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{4\pi}\int d^2x q(\boldsymbol{x}) \\ &= \frac{1}{4\pi}\int d^2x \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\cdot\{\partial_1\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\times\partial_2\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x})\}\,. \end{aligned} \tag{17}$$

该模型的构型空间由从平面 $\mathbb{R}^2$ 到目标空间 S^2的映射构成。考虑目标球面上的坐标 Θ, Φ （对应于通常的球极坐标），最为人熟知的解是旋转对称解，表示为

$$\Theta = f(r), \quad \Phi = \varphi\,, \tag{18}$$

其中 r, φ 是平面上的通常极坐标。因此，产生拓扑荷为 n 的婴儿斯格明子的构型定义为

$$\boldsymbol{n} = \left(\sin f(r)\cos\left(n\varphi+\gamma\right), \sin f(r)\sin\left(n\varphi+\gamma\right), \cos f(r)\right)\,, \tag{19}$$

其中 $n\in\mathbb{N}$，相位 γ 描述了解的内部取向。施加边界条件

$$f(0) = \pi, \quad f(\infty) = 0\,, \tag{20}$$

$Q = n$很容易验证。值得注意的是，磁性斯格明子的能量取决于 γ，并在 $\gamma = \pi/2$时取最小值。此外，旋转不变构型 (19) 仅在 $n = 1$时存在。相反，对于某种特殊的势，即使在 $n = 1$时也存在非旋转对称解。文献 [49] 的作者基于能量最小化分析，发现了势为 $V = (1-n_3)^2$ 时$n = 1$ 的旋转对称性破缺解。在我们的模型中，塞曼 $V = (1-n_3)$与二次势 $V = (1-n_3)^2$ 似乎相互竞争，这表明可能出现此类形变。这似乎稍微偏离了当前研究的重点，因此我们保留对称性，以简化分析并更容易找到紧致子解。

将（19）代入（3）后，我们定义能量密度 $\varepsilon[f]$

$$\begin{aligned} \varepsilon[f] &= \kappa_2\left(f'^2 + \frac{\sin^2 f}{r^2}\right) \\ &+ \kappa_1\left(f' + \frac{\sin 2f}{2r}\right)\sin\gamma - \kappa_1\left(\cos f f' + \frac{\sin f}{r}\right)\sin\gamma \\ &+ \kappa_{4a}\frac{2\sin^2 f f'^2}{r^2} + \kappa_{4b}\left(f'^4 + \frac{2\sin^2 f f'^2}{r^2} + \frac{\sin^4 f}{r^4}\right) \\ &+ \kappa_{0a}\left(1-\cos f\right) + \kappa_{0b}\left(1-\cos f\right)^2\,, \end{aligned} \tag{21}$$

其中 $f' := \frac{df}{dr}(r)$。函数 $f(r)$ 满足欧拉方程，即一个非线性二阶常微分方程。

$$\begin{aligned} &\kappa_2\left(rf'' + f' - \frac{\sin 2f}{2r}\right) + \kappa_1\sin^2 f\sin\gamma \\ &+ \kappa_{4a}\left(\frac{2\sin^2 f}{r}f'' + \frac{\sin 2f}{r}f'^2 - \frac{2\sin^2 f}{r^2}f'\right) \\ &+ \kappa_{4b}\left\{\left(6rf'^2 + \frac{2\sin^2 f}{r}\right)f'' \right. \\ &\left. + \left(2f'^2 + \frac{\sin 2f}{r}f' - \frac{2\sin^2 f}{r^2}\right)f' - \frac{\sin 2f}{2r^2} + \frac{\sin 4f}{4r^2}\right\} \\ &- \frac{\kappa_{0a}}{2}r\sin f - \frac{\kappa_{0b}}{2}r\left(2\sin f - \sin 2f\right) = 0\,. \end{aligned} \tag{22}$$

在下文中，我们根据其参数设置来指代该模型: $[\kappa_2, \kappa_1, \kappa_{4a}, \kappa_{4b}, \kappa_{0a}, \kappa_{0b}]$。

III. 解：从 DMI项和四阶项中产生的紧致子

A. 具有 Skyrme项和扩展四阶项的模型

模型 $[0, 0, \kappa_{4a}, 0, \kappa_{0a}, 0]$ 被称为受限婴儿斯格明子模型，可提供紧致子解。紧致子是达到其真空值$f\sim 0, (f'\sim 0)$且具有有限半径 $r = R$ 的解。由于能够与相邻者平滑连接，紧致子是 Skyrmion晶格的一种优势形式 [50]。

我们根据函数在边界处是否连续可微，对紧致子进行分类:

- *Genuine*-compactons: $f(R) = 0,\ \left.\frac{df(r)}{dr}\right|_{r=R} = 0\,.$
- *Weak*-compactons: $f(R) = 0,\ \left.\frac{df(r)}{dr}\right|_{r=R} \neq 0\,.$

对于弱紧致子情形，即使剖面函数不可微，能量密度仍然是连续的，这是因为其中包含正弦^2 f项。此外，Speight [36] 也

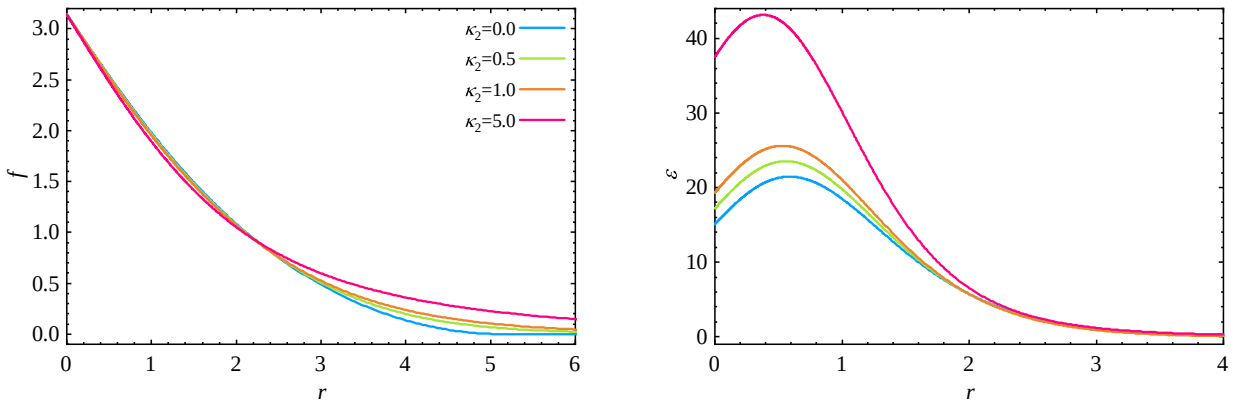


图 1. 具有 $[\kappa_2, 0.0, 0.0, 1.0, 1.0, 1.0]$ 的斯格明子。剖面函数 $f(r)$（左）和能量密度 $\varepsilon(r)$（右）。当 $\kappa_2 = 0.0$ 时，该模型具有真正紧致子解。

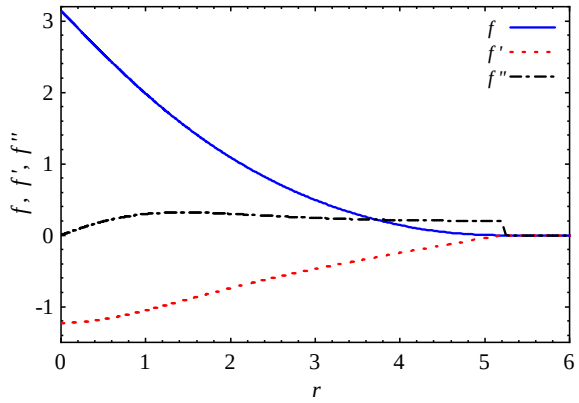


图 2. 我们绘出了图 1 所示的紧致子：剖面函数及其导数 $f(r)$ $f'(r)$ $f''(r)$（蓝色、红色和黑色曲线），清楚地表明一阶导数在边界 $r = R = 5.231$ 处连续。

在其论文中针对略有不同的目的提出了一种分类方法。

我们考虑一个略作推广的受限模型，例如 $[0, 0, \kappa_{4a}, \kappa_{4b}, \kappa_{0a}, \kappa_{0b}]$。

1. $[0, 0, \kappa_{4a}, 0, \kappa_{0a}, \kappa_{0b}]$

该模型是受限婴儿斯格明子模型。Gisiger和Paranjape [30] 通过求解欧拉方程，找到了基于塞曼势（$\kappa_{0b} = 0$）的模型中的紧致子。此外，Adam等人 [31] 通过求解BPS方程，在具有不同势项的模型中找到了紧致子解和非紧致子解。这些势项 [31] 例如包括塞曼势 $V = (1 - n_3)$ 、新婴儿势 $V = (1 - n_3^2)$ 以及平方塞曼势$V = (1 - n_3)^2$。在这里，我们求解该基于两种势项的模型：塞曼势和平方塞曼势。我们考察真空结构中的混合势。根据边界条件（20），势在 $n_3 = 1$处取最小值。我们将势改写如下：

$$V[n_3] = \kappa_{0a}(1 - n_3) + \kappa_{0b}(1 - n_3)^2$$
$$= (\kappa_{0a} + \kappa_{0b})(1 - n_3)\left(1 - \frac{\kappa_{0b}}{\kappa_{0a} + \kappa_{0b}} n_3\right) \quad (23)$$
$$= \kappa_{0b}\left(n_3 - \frac{\kappa_{0a} + 2\kappa_{0b}}{2\kappa_{0b}}\right)^2 - \frac{\kappa_{0a}^2}{4\kappa_{0b}}, \quad (24)$$

其中参数设为 κ_{0a}， $\kappa_{0b} \neq 0$。对于 (23)，当参数为 $\kappa_{0b}/(\kappa_{0a} + \kappa_{0b}) = \pm 1$，即 $\kappa_{0a} = 0$ 或 $\kappa_{0b} = -\kappa_{0a}/2$ 时，这些势分别变为平方塞曼势项或新婴儿势项 $V = (1 - n_3^2)$。对于平方塞曼势，该模型没有紧致子解。对于新婴儿势，Adam等人求解了 Bogomol'nyi方程并得到了弱紧致子。这里，我们在 $\kappa_{0a} \neq 0$ 和 $\kappa_{0b} \neq -\kappa_{0a}/2$ 的情况下得到了新的紧致子。根据 (24)，对于 $\kappa_{0b} > 0$，当参数满足 $(\kappa_{0a} + 2\kappa_{0b})/(2\kappa_{0b}) \geq 1$（例如 $\kappa_{0a} \geq 0$）时，势始终为正，并在$n_3 = 1$处取最小值 $V = 0$。此外，对于 $\kappa_{0b} < 0$，当参数为 $(\kappa_{0a}+2\kappa_{0b})/(2\kappa_{0b}) \leq 0$（例如 $\kappa_{0a} \geq -2\kappa_{0b}$）时，势始终为正，并在 $n_3 = 1$ 处取最小值。因此，在这些条件下，该势适用于确定模型中的孤子解。

[30] 中找到的解显然属于弱紧致子情形。通过考察紧孤子边界 $r = R$ 处的解析行为可直接验证这一点，在该处剖面函数可以与真空平滑连接。我们假设在 $r = R$ 附近进行级数展开。

$$f(r) = \sum_{s=0}^{\infty} A_s (R - r)^s . \quad (25)$$

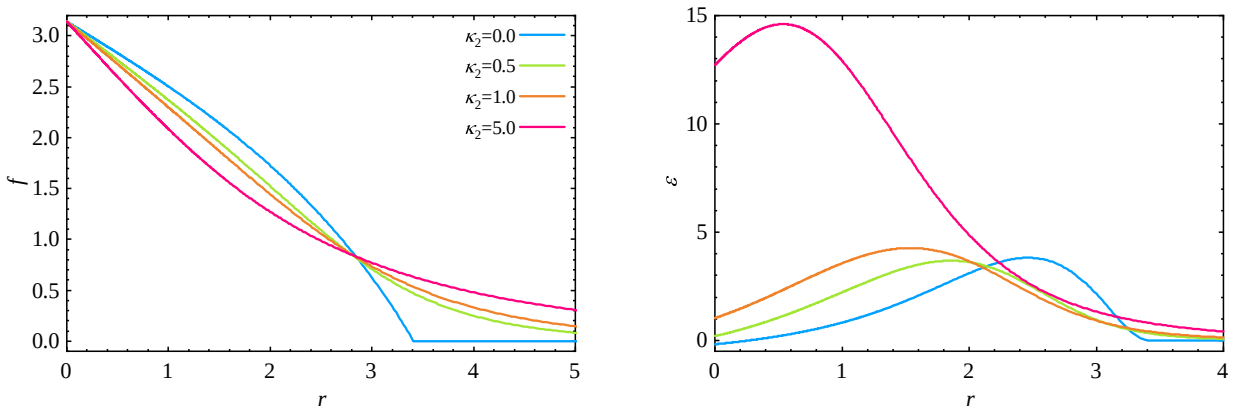


图 3. $[\kappa_2, 1.0, 1.0, 0.0, 1.0, 0.0]$ 为 $\kappa_2 = 0.0$，0。5，1。0，5。0 的斯格明子。剖面函数 $f(r)$（左）和能量密度 $\varepsilon(r)$（右）。受限模型 $\kappa_2 = 0.0$ 具有紧致子解（蓝线）。

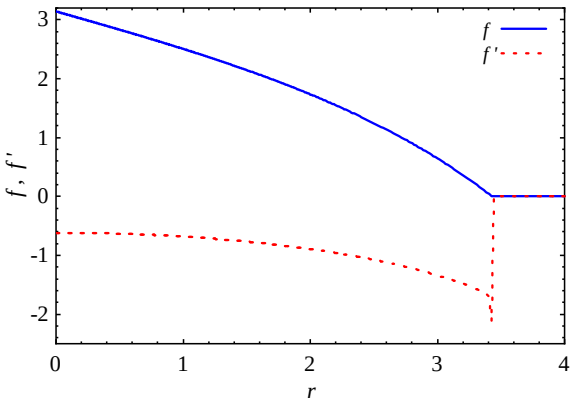


图 4. 我们绘出了图 3 所示的紧致子：剖面函数 $f(r)$（蓝线）及其导数 $f'(r)$（红线）；这清楚地表明，导数在边界 $r = R = 3.396$处不连续。

能量 $f(R) = 0$ 的平滑性表明，展开以 $s > 0$开始。这里仅需考虑最低阶项；因此，我们将$f(r) \sim A_s(R-r)^s$ 代入欧拉方程，得到最低阶贡献的关系。

$$\frac{2\kappa_{4a}}{r} A_s^3 s(2s-1)(R-r)^{3s-2} - \frac{\kappa_{0a}}{2} r A_s (R-r)^s = 0\,. \tag{26}$$

显然，它有一个解 $s = 1$。这意味着存在趋近真空的标准线性方式，这是受限婴儿斯格明子模型中紧致子的典型特征。

对于两种势共存的情况，即塞曼势与平方塞曼势共存的情况，我们可以用类似的方法得到解析解。根据 to [30], 我们将方程（22）分解为

$$\begin{cases} \kappa_{4a}\left(2f'' - \dfrac{2}{r}f' + 2\cot f f'^2\right) - \dfrac{\kappa_{0a}}{2} r^2 \csc f \\ \qquad -\kappa_{0b} r^2(\csc f - \cot f) = 0, & r \le R, \quad (27a) \\ \sin f = 0, & r > R. \quad (27b) \end{cases}$$

为简化起见，我们将参数按如下方式重新缩放：$\kappa_{0a}/\kappa_{4a} \to \kappa_{0a}$，$\kappa_{0b}/\kappa_{4a} \to \kappa_{0b}$。我们定义一个新场：

$$\mathcal{F}(r) := \cos f(r) - \frac{\kappa_{0a} + 2\kappa_{0b}}{2\kappa_{0b}} \tag{28}$$

方程 (27a) 可化为非常简单的形式

$$\frac{d^2\mathcal{F}}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d\mathcal{F}}{dr} - \frac{\kappa_{0b}}{2} r^2 \mathcal{F} = 0\,. \tag{29}$$

由边界条件 (20)，我们有

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(r=0) &= -1 - \frac{\kappa_{0a} + 2\kappa_{0b}}{2\kappa_{0b}}, \\ \mathcal{F}(r=R) &= 1 - \frac{\kappa_{0a} + 2\kappa_{0b}}{2\kappa_{0b}}\,. \end{aligned} \tag{30}$$

$\kappa_{0b} > 0$ 中的方程 (29) 可以解析求解。解为

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(r) = &-\frac{\kappa_{0a} + 4\kappa_{0b}}{2\kappa_{0b}} \cosh\left(\frac{\sqrt{\kappa_{0b}} r^2}{2\sqrt{2}}\right) \\ &+ \sqrt{\frac{2(\kappa_{0a} + 2\kappa_{0b})}{\kappa_{0b}}} \sinh\left(\frac{\sqrt{\kappa_{0b}} r^2}{2\sqrt{2}}\right), \\ r \in &\left[0, R = \frac{2^{3/4}}{\kappa_{0b}^{1/4}} \sqrt{\operatorname{arccosh}\left(\frac{\kappa_{0a} + 4\kappa_{0b}}{\kappa_{0a}}\right)}\right]. \end{aligned} \tag{31}$$

在 $\kappa_{0b}<0$ 和 $\kappa_{0a}\geq 2|\kappa_{0b}|$ 中，解为

$$\mathcal{F}(r)=\frac{\kappa_{0a}-4\kappa_{0b}}{2\kappa_{0b}}\cos\left(\frac{\sqrt{\kappa_{0b}}r^2}{2\sqrt{2}}\right)+\sqrt{\frac{2(\kappa_{0a}-2\kappa_{0b})}{\kappa_{0b}}}\sin\left(\frac{\sqrt{\kappa_{0b}}r^2}{2\sqrt{2}}\right),$$
$$r\in\left[0,R=\frac{2^{3/4}}{\kappa_{0b}^{1/4}}\sqrt{\arccos\left(\frac{\kappa_{0a}-4\kappa_{0b}}{\kappa_{0a}}\right)}\right]. \qquad (32)$$

2. $[0,0,0,\kappa_{4b},\kappa_{0a},\kappa_{0b}]$

有趣的是，如果我们用扩展四阶项替代 Skyrme项，就能得到真正紧致子。首先，我们说明，如果方程中存在紧致子，那么我们实际上讨论的就是真正的紧致子情形。以下讨论适用于这些势：塞曼势，以及塞曼势与平方塞曼势的混合势。我们假设在边界 $f(R)=0$处，边界处的欧拉方程 $r=R$ 变为

$$2f'(R)^2\left\{3Rf''(R)+f'(R)\right\}=0\,, \qquad (33)$$

其解为

$$\text{(i) } f'(R)=0,\quad \text{(ii) } f''(R)=-\frac{f'(R)}{3R}. \qquad (34)$$

首先，我们考察情形 (ii)。如果 $f''(R)=-f'(R)/(3R)\neq 0$，则能量密度在 $r=R$处不连续；这并非我们所希望的。如果 $f'(R)=0$，能量便变得连续，随后变为 $f(R)=f'(R)=f''(R)=0$。它与平凡真空解$f(r)=0$, $r\in[0,R]$相接。因此，在真正的紧致子情形下，应采用情形 (i) $f'(R)=0$来求非平凡解。因此，二阶导数 $f''(r)$ 在 $r=R$处不连续。

再次可以通过展开（25）轻松确认这一情况。对于最低阶，我们得到

$$6\kappa_{4b}rA_s^3s^3(s-1)r(R-r)^{3s-4}-\frac{\kappa_{0a}}{2}rA_s(R-r)^s=0\,. \qquad (35)$$

这里，我们得到了（35）的一个解 $s=2$。这意味着解以标准的抛物线趋近真空? 这是真正紧致子情形的典型特征。

在这种情况下，尚未找到解析解；因此，我们对欧拉方程进行数值求解。我们使用包含 $N=1000$ 个网格点的牛顿-拉夫森方法。我们对坐标采用标准重标度方案

$$x=\frac{r}{1+r},\quad x\in[0,1)\,. \qquad (36)$$

相对数值误差为 10^{-7}量级。请注意，即使对于紧致子，我们也始终在整个径向坐标 x （而非紧子集）上求解欧拉方程，这意味着紧致子会自然地出现在我们的数值计算中。我们在图1中给出了塞曼势下的结果。随着 κ_2增大，剖面函数的尾部延伸得更长，并且能量密度的最大值更高。这是因为能量密度中存在动能项 $\kappa_2(\partial_i\boldsymbol{n})^2>0$。图2展示了紧致子解以及导数$f'(r)$ $f''r$。这很容易被识别为真正的紧致子情形，并且 $f''(r)$显示出$r=R$附近的不连续性。

必须指出，上述讨论并不能直接证明该模型中紧致子的存在。如果采用平方塞曼势，所得解将是普通斯格明子。这对应于 [35], 中找到的解，其中模型由Skyrme项和平方塞曼势组成。

B. DMI模型

这里，我们旨在寻找模型中由 DMI 介导的紧致子。首先，参照婴儿斯格明子的情形，我们设定 $\kappa_2=0$, 即受限模型。在这种情况下，我们省略塞曼能以求得解。参数集为 $[0,\kappa_1,0,0,0,\kappa_{0b}]$。由（22）可得方程

$$\kappa_1\sin^2 f-\kappa_{0b}r\sin f(1-\cos f)=0\,. \qquad (37)$$

对于非平凡解，正弦$f\neq 0$，除边界处外，

$$\kappa_1\sin f=\kappa_{0b}r(1-\cos f)\,. \qquad (38)$$

两边平方后，我们得到

$$(\kappa_{0b}^2r^2+\kappa_1^2)\cos^2 f-2\kappa_{0b}^2r^2\cos f+\kappa_{0b}^2r^2+\kappa_1^2=0\,. \qquad (39)$$

我们得到如下形式的非平凡解

$$\cos f=\frac{\kappa_{0b}^2r^2-\kappa_1^2}{\kappa_{0b}^2r^2+\kappa_1^2}\,. \qquad (40)$$

这恰好是Schroer在运动方程以及一阶Bogomol'nyi方程 [11]中找到的解。显然，这个解并非紧致子。

通过分析边界处的展开（25）可以确认这一点。在最低阶，我们得到

$$\kappa_1A_s^2(R-r)^{2s}-\frac{\kappa_{0a}}{2}rA_s(R-r)^s=0 \qquad (41)$$

其中解为 $s=0$。这意味着剖面函数在 $r=R$ 处为常数，对应于普通斯格明子解。

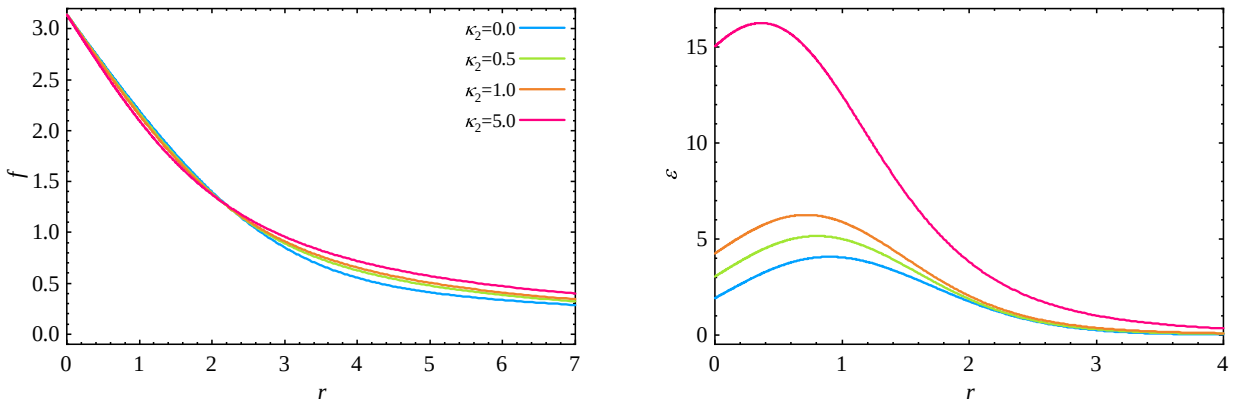


图 5。具有 $[\kappa_2, 1.0, 1.0, 0.0, 0.0, 1.0]$的斯格明子。剖面函数 $f(r)$（左）和能量密度 $\varepsilon(r)$（右）。其受限模型 $\kappa_2 = 0.0$（蓝线）没有紧致子。

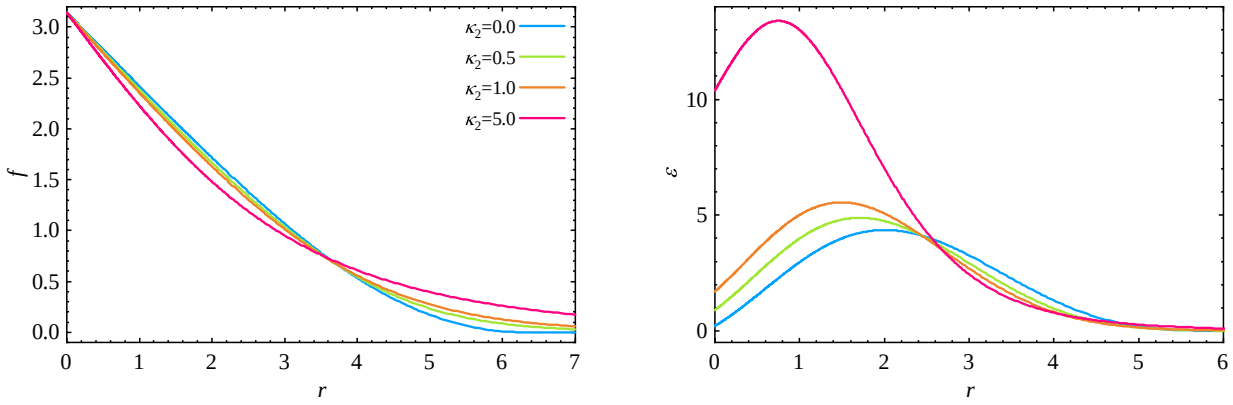


图 6。具有 $[\kappa_2, 1.0, 0.0, 1.0, 1.0, 0.0]$的斯格明子。剖面函数（左）和能量密度（右）。受限模型：$\kappa_2 = 0.0$ 是紧致子解（蓝线）。

C. 引入DMI项和四阶项

接下来，为了得到紧致子解，我们加入四阶项。该模型基于受限婴儿斯格明子模型中的项构建。当同时纳入 DMI 和四阶项时，不存在解析解，因此必须数值求解方程。我们采用参数集$[0, \kappa_1, \kappa_{4a}, 0, \kappa_{0a}, \kappa_{0b}]$研究该模型。模型包含两类导数项：DMI 和 Skyrme项，它们会破坏尺度不变性。磁性Skyrme模型和婴儿斯格明子模型都具有这些项对应的孤子解，通常无需将它们组合起来以实现稳定性。下面我们来考察该模型的 Derrick论证。经过空间重标度 $x \mapsto \mu x$后，能量可写为

$$e(\mu) = E_2 + \mu^{-1}E_1 + \mu^2 E_{4a} + \mu^{-2}(E_{0a} + E_{0b})\,. \quad (42)$$

对 μ 求导，我们得到

$$\left.\frac{de(\mu)}{d\mu}\right|_{\mu=1} = -E_1 + 2E_{4a} - 2(E_{0a} + E_{0b}) = 0\,. \quad (43)$$

为了规避Derrick论证，势能应满足 $E_{0a} + E_{0b} > 0$。对于参数 κ_{0a} >0，$\kappa_{0b} > 0$，或 $\kappa_{0a} \geq -2\kappa_{0b}$，$\kappa_{0b} < 0$（III A1）。我们将（43）两边除以 $E_{0a} + E_{0b}$，得到

$$\frac{-E_1}{2(E_{0a} + E_{0b})} + \frac{E_4}{E_{0a} + E_{0b}} = 1\,. \quad (44)$$

由于 $-E_1$，$E_{4a} \geq 0$

$$0 \leq \frac{-E_1}{2(E_{0a} + E_{0b})}\,, \quad \frac{E_4}{E_{0a} + E_{0b}} \leq 1\,. \quad (45)$$

在磁性Skyrme模型中，Derrick定理支持 $-E_1/(2(E_{0a}+E_{0b}))$ $= 1$；而在婴儿斯格明子模型中，$E_{4a}/(E_{0a} + E_{0b}) = 1$。因此，该比值反映了在孤子的稳定性中起主导作用的各项

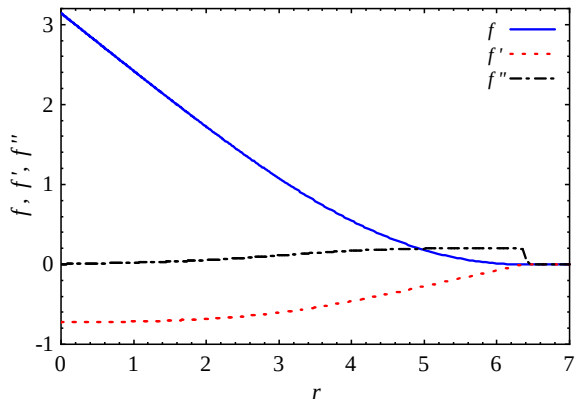


图 7. 我们绘出了图 6 所示的紧致子：剖面函数及其导数 $f(r)$ $f'(r)$（蓝线和红线），清楚地显示出导数在边界 $r = R = 5.969$ 处连续。

。我们将在下一小节讨论这一点。

对于 Skyrme 项和塞曼势，$[0, \kappa_1, \kappa_{4a}, 0, \kappa_{0a}, 0]$，图 3 中绘出了相应解以及非紧致子解 $\kappa_2 \neq 0$。随着 κ_2 增大，剖面函数的尾部延伸，凸形也由向上转为向下。最大能量密度趋近原点。这是因为凸形向下时，$\pi/2 < f \leq \pi$ 的范围会缩小。此时，动能项和 Skyrme 项的能量密度增加，而 DMI 项的贡献为负。因此，原点附近的能量密度升高。图 4 中，我们着重考察了该解的特征行为；它在边界 $r = R$ 处呈现出 $f'(R) \neq 0$，与 Gisiger 和 Paranjape [30] 发现的紧致子相似。如下所述，不难验证这一特征是如何实现的。若将边界条件 $f(R) = 0$ 代入欧拉方程 (22),

$$\left.\frac{df(r)}{dr}\right|_{r=R} = \sqrt{\frac{\kappa_{0a}}{4\kappa_{4a}}}R\,. \tag{46}$$

在边界处。当边界远离原点 $R \to \infty$, $df/dr \to \infty$ 时，能量密度 (21) 会发散。因此，为避免能量出现这种奇异性，模型必须选择具有确定有限半径的解，即紧致子。

当选取不同的势能项（例如平方塞曼势项 $[0, \kappa_1, \kappa_{4a}, 0, 0, \kappa_{0b}]$）时，解不再是紧致子（见图 5）。随着 κ_2 增大，剖面函数的尾部延伸，能量密度的最大值也变得更高，并且更靠近原点。与图 3 相比，这种变化较为温和。若假设 $f(R) = 0$，则边界处的欧拉方程变为

$$\left.\frac{df(r)}{dr}\right|_{r=R} = 0\,, \tag{47}$$

尽管如此，这并未揭示任何有关紧致性的信息。在下一小节中，我们将给出一个满足该条件的新紧致子解。

D. 真正的 DMI 紧致子情形：$[0, \kappa_1, 0, \kappa_{4b}, \kappa_{0a}, 0]$

到目前为止，紧致子仅出现在受限情形 $\kappa_2 = 0$ 中，而在 $\kappa_2 \neq 0$ 情形下，解则变成了普通斯格明子。因此，动能项只是延长了解的尾部。对于四阶项，包含 $\kappa_{4a} \neq 0$ 和 $\kappa_{4b} = 0$ 的模型属于弱紧致子情形，而包含 $\kappa_{4a} = 0$ 和 $\kappa_{4b} \neq 0$ 的模型则属于真正的紧致子情形（见图 6 和图 7）。因此，扩展的四阶项在构造真正的紧致子情形中发挥作用。对于我们的势，在平方塞曼势情形（$\kappa_{0a} = 0$ 和 $\kappa_{0b} \neq 0$）下，解为婴儿斯格明子；而在塞曼势情形（$\kappa_{0a} \neq 0$ $\kappa_{0b} = 0$）下，解则变为紧致子。

我们观察到，DMI 在构造紧致子方面的作用较弱。原因如下：DMI 项和势项在欧拉方程中不含导数，而 DMI 项与势项之间的主要差异在于量纲；势乘以 r。紧致子半径 R 由解在大 r处的行为决定，显然，势而非 DMI 占主导地位。这也正是紧致子通过势而不是 DMI 得到支持的原因。从另一个角度来看，我们可以根据级数展开（25）轻易确认这一点。最低阶的条件如下：

$$\kappa_1 A_s^2 (R-r)^{2s} + 6\kappa_{4b} r A_s^3 s^3 (s-1)(R-r)^{3s-4} - \frac{\kappa_{0a}}{2} r A_s (R-r)^s = 0\,. \tag{48}$$

因此，DMI 项不会对最低阶项作出贡献，随后，该条件与不含 DMI 项时的条件（35）一致。

在下一节中，我们将考察一种新模型，其中 DMI 在紧致子中发挥重要作用。

我们从 Derrick 论证的角度考察 DMI 和 Skyrme 项对解的稳定性（存在性）的影响。我们检验了与模型中若干参数强度相对应的数值 $-E_1/(2E_0)$: $[0, \kappa_1, \kappa_{4a}, 0, \kappa_{0a}, 0]$和 $[0, \kappa_1, \kappa_{4a}, 0, 0, \kappa_{0b}]$。若解由 DMI 产生，该数值趋近于 1；若解由 Skyrme 项产生，则趋近于 0。图 8 分别展示了塞曼势和平方式塞曼势的结果。这些结果是合理的：对于 $\kappa_{4a} \to 0$, $-E_1/(2E_0)$

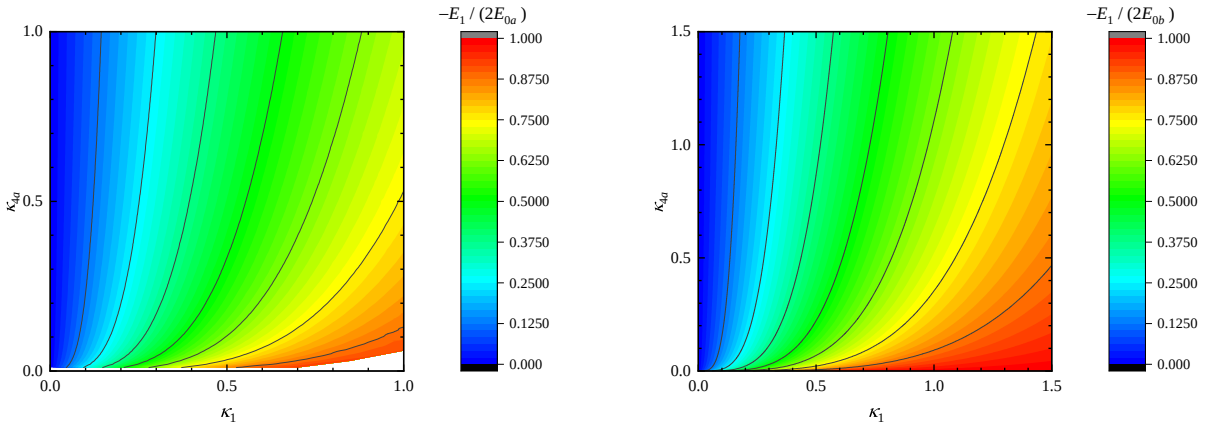


图8. 对于Derrick定理，我们计算了Skyrme - DMI - 塞曼模型的比值 $-E_1/(2E_{0a})$：$[0.0, \kappa_1, \kappa_{4a}, 0.0, 1.0, 0.0]$（左），以及Skyrme - DMI - 平方塞曼模型在不同（κ_1, κ_{4a}）取值下的比值 $-E_1/(2E_{0b})$：$[0.0, \kappa_1, \kappa_{4a}, 0.0, 0.0, 1.0]$（右）。

趋近于 1，而对于 $\kappa_1 \to 0$, $-E_1/(2E_0)$ 则趋近于 0。图 8 显示，在两个区域内不存在解：

(i) at $\kappa_{4a} \to 0$ for all κ_1,

(ii) the lower right: $\kappa_1 \to 1$ with the small κ_4.

(i) 没有Skyrme项时，仅含塞曼势的受限模型只有半Skyrmion，而没有孤子解。(ii) 随着 κ_1 增大，该模型显著趋向情形(i)。因此，空白区域会随着 κ_1 增大。

在图8（右）中，解没有表现出这种极限行为。

IV. 不含势项的模型解

在本文中，我们研究了始终包含势项的通常模型。动能项在Derrick定理中不起作用。事实上，婴儿斯格明子模型的四阶项和磁性Skyrme模型的DMI项与势项共同促成了孤子解的存在。

根据 [37], ，存在一种不含任何势项的新型婴儿斯格明子模型。该模型由动能项和Skyrme项组成，其幂为整数幂或分数幂，表示为 α，β。我们考察了这些参数的取值范围，以确保其相对于重标度具有稳定性。

我们提出了一种不含势的Skyrme和DMI模型。施加空间重标度 $x \mapsto \mu x$ 后，能量可写为

$$e(\mu) = E_2 + \mu^{-1} E_1 + \mu^2 E_{4a} \,. \tag{49}$$

不存在满足 $e(\mu)$ 的驻点，因为 $E_{4a} > 0$，$E_1 < 0$ 对于 $\gamma = \pi/2$。然而，当我们令 $\gamma = -\pi/2$ 时，它可以在以下位置取得极值

$$\mu = \sqrt[3]{\frac{E_1}{2E_{4a}}}, \quad E_1, E_{4a} > 0 \,, \tag{50}$$

因此，我们可能得到该模型的孤子解。

我们考虑具有 $[\kappa_2, \kappa_1, \kappa_{4a}, 0, 0, 0]$ 的模型。结果如图9所示。随着 κ_2 增大，解的尾部延伸，且原点处的能量密度最大值增大，这是因为解的梯度增大。在 $\kappa_2 = 0$ 的情形下，解变为紧致子。对于受限模型（$\kappa_2 = 0$），欧拉方程是如下这个简单的单参数方程。

$$2rf'' - 2f' + 2r\cot f f'^2 - \bar{\kappa} r^2 = 0 \tag{51}$$

其中 $\bar{\kappa} := \kappa_1/\kappa_{4a}$。图10绘出了若干 $\bar{\kappa}$ 下的 $f(r)$ $f'(r)$ $f''(r)$。f，f' 在 $r = R$ 处同时变为零，而此时 $f''(R)$ 仍为有限值，这很可能是真正紧致子。通过将 $f(R) = 0$ 代入（22），我们可以从解析上检验这一点，得到 $f'(R) = 0$。事实上，这并不意味着该模型中存在紧致子解。不过，我们指出，如果存在紧致子解，它应属于真正的紧致子情形。随着 $\bar{\kappa}$ 增大，紧致子半径 R 向原点移动。

在该模型中，关于系数反演存在一种对称性。我们的模型为 (a) $\gamma = -\pi/2$，$\kappa_{4a} > 0$。模型 (b) $\gamma = \pi/2$，$\kappa_{4a} < 0$，得到相同的方程，但其能量密度符号相反。这里，我们推测这种对称性是否真实存在。为证实这一点，我们在模型中加入动能项，结果(a)给出了解，而(b)没有。热核展开(3)的结果表明，动能项、DMI 和 Skyrme 项具有相同的符号。此外，很容易验证，具有 $\kappa_2 > 0$，$\kappa_4 < 0$ 的模型在量子

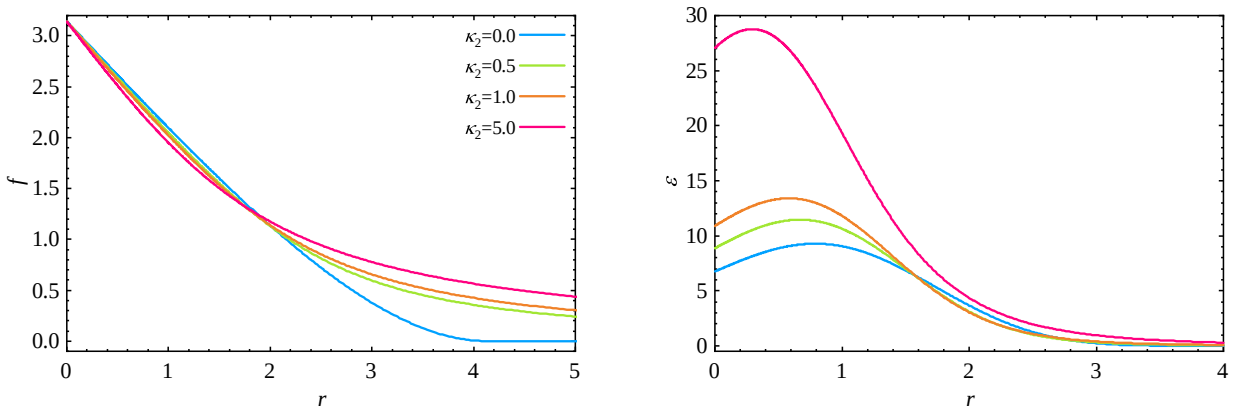


图 9. 无势斯格明子 $[\kappa_2, 1.0, 1.0, 0, 0, 0]$。剖面函数 $f(r)$（左）和能量密度 $\varepsilon(r)$（右）。受限模型： $\kappa_2 = 0.0$ 是紧致子解（蓝线）。

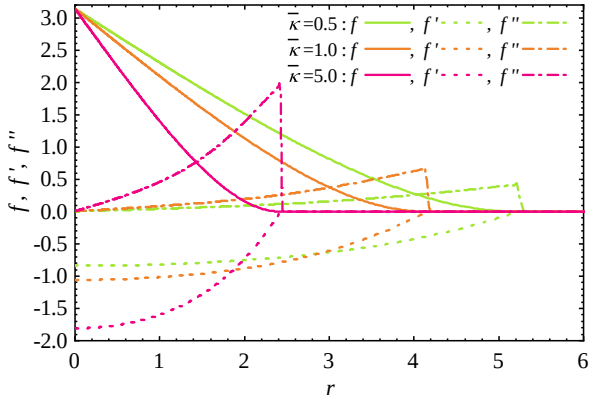


图 10. 我们绘出了式 (51) 的紧致子：剖面函数及其导数 $f(r)$ $f'(r)$（分别为蓝线和红线），这清楚地表明导数在边界 $r = R = 5.231, 4.168, 2.431$ ($\bar{\kappa} = 0.5, 1.0, 5.0$) 处连续。

稳定性分析中始终不稳定。因此，上述对称性并不存在，而只是受限模型中的一种伪象。

根据紧孤子边界处的级数展开 (25)，我们得到最低阶的条件

$$\frac{2}{r}A_s^3 s(2s-1)(R-r)^{3s-2} - \bar{\kappa}A_s^2(R-r)^{2s} = 0\,, \quad (52)$$

其解为 $s = 2$。这意味着在真正的紧致子情形下，存在标准的趋向真空的抛物线型行为。

V. 杂质模型

本文使用了“常数”规范场，或称常数 D。在 [39], , 作者研究了受限婴儿斯格明子模型的超对称扩展，其中包含平方塞曼势以及“杂质耦合”。特别是，他们针对指数局域杂质求得了 BPS方程的解析解。此外，他们声称，含杂质的婴儿斯格明子模型的 Bogomol’nyi方程与具有 Dzyaloshinskii–Moriya 相互作用的磁性斯格明子的方程相同。这表明杂质与 DMI 之间存在某种联系。因此，研究具有指数局域杂质 DMI 的当前模型是值得的。为了能够直接观察其影响，我们将重点研究不含四阶项的模型。

我们研究该模型

$$[1.0, \kappa_1(r), 0, 0, 0, 1.0], \quad \kappa_1(r) := \kappa_{1,\mathrm{c}} \exp(\kappa_{1,\mathrm{e}} r). \quad (53)$$

这里我们采用平方塞曼势，如 [39]中所示。请注意，我们无法找到标准塞曼势对应的任何解。图11展示了若干含杂质的磁性斯格明子解。随着$|\kappa_{1,\ \mathrm{e}}|$增大，解的尺寸缩小，能量密度则增大。杂质还带来了另一个显著效应：当 DMI耦合常数$\kappa_{1,\ \mathrm{c}}$ 较大时，解依然存在。这使得解的能量为负值。

更具挑战性的分析是塞曼势也具有局域化作用的情形。如果模型 (3) 是通过对费米子真空泛函 (5) 作热核展开得到的，那么塞曼势也会受到杂质的影响。我们研究这两个模型

$$\text{the Zeeman: } [1.0, \kappa_1(r), 0, \kappa_{0\mathrm{a}}(r), 0],$$
$$\kappa_1(r) = 1.0 \times \exp(\kappa_{\mathrm{e}} r^2),\ \ \kappa_{0\mathrm{a}}(r) = \kappa_{0\mathrm{a,c}} \exp(2\kappa_{\mathrm{e}} r^2), \quad (54)$$

$$\text{the squared Zeeman: } [1.0, \kappa_1(r), 0, 0, \kappa_{0\mathrm{b}}(r)],$$
$$\kappa_1(r) = 1.0 \times \exp(\kappa_{\mathrm{e}} r),\ \ \kappa_{0\mathrm{b}}(r) = \kappa_{0\mathrm{b,c}} \exp(2\kappa_{\mathrm{e}} r). \quad (55)$$

图 12 展示了我们的一些数值结果。平方塞曼势和指数型杂质

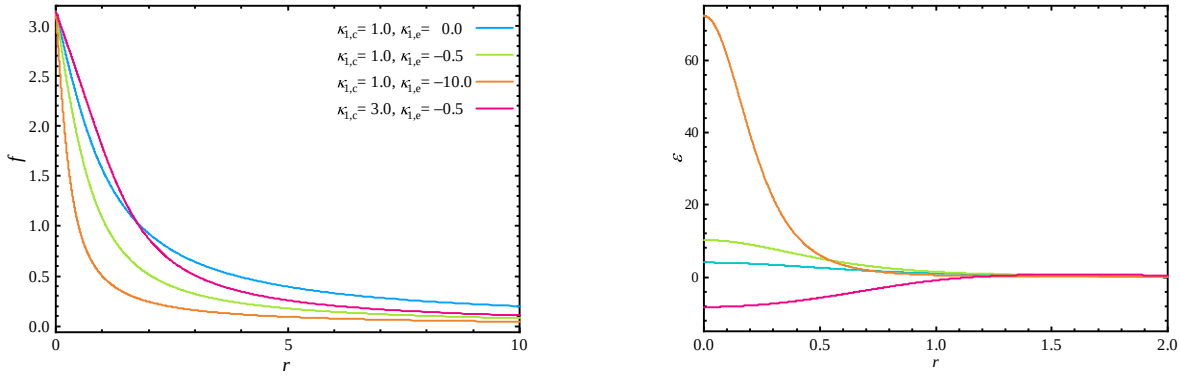


图 11. 我们绘出了模型的磁性斯格明子：$[1.0, \kappa_1(r)\,0,\ 0,\ 0,\ 1.0]$，其中包含局域杂质 $\kappa_1(r)$：$= \kappa_{1,\,c}\exp(\kappa_{1,\,e}r)$。剖面函数 $f(r)$（左）和能量密度 $\varepsilon(r)$（右）。

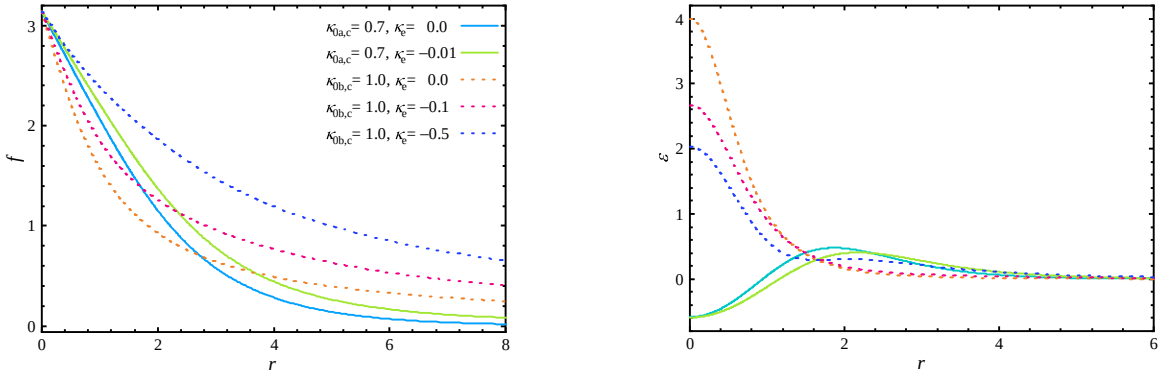


图 12. 我们绘出了包含杂质的 DMI 解，以及塞曼势的解。实线表示带有高斯型杂质的塞曼势结果：$[1.0, \kappa_1(r)\,0,\ 0,\ \kappa_{0a}(r)\ 0]$. $\kappa_1(r) = 1.0 \times \exp[\kappa_e r^2]$, $\kappa_{0a}(r) = \kappa_{0a,\,c}\exp[2\kappa_e r^2]$。虚线表示带有指数型杂质的平方塞曼势：$[1.0, \kappa_1(r)\,0,\ 0,\ 0,\ \kappa_{0b}(r)]$. $\kappa_1(r) = 1.0 \times \exp[\kappa_e r]$, $\kappa_{0b}(r) = \kappa_{0b,\,c}\exp[2\kappa_e r]$。剖面函数 $f(r)$（左）和能量密度 $\varepsilon(r)$（右）。

支持这些解的存在，但对于塞曼势，则需要高斯型杂质。塞曼势允许较弱的杂质，而平方塞曼势允许更宽的参数范围。随着 $|\kappa_{1,e}|$ 增大，这两种情况下的解都趋于消散。这是合理的，因为杂质越局域，势就会越快地在远离原点处趋于零。因此，$|\kappa_{1,e}|$ 存在一个临界上限。要确定这一临界点的确切值，似乎需要进行更深入、更全面的分析。

VI. 总结

在本研究中，我们研究了纳入 Dzyaloshinskii–Moriya 相互作用（DMI）的婴儿斯格明子模型的一种推广。该模型是从与 $O(3)$ 非线性 $\boldsymbol{n}$-场以及恒定$SU(2)$规范背景耦合的费米子的真空泛函推导而来。通过对费米场积分，我们得到了由费米子行列式定义的有效作用量。基于行列式的热核展开

，我们得到了含 DMI 和两个势项的婴儿斯格明子型模型。

对于 $\boldsymbol{n}$-场的旋转对称拟设，我们得到了若干正则孤子解。在省略动能项的受限模型中，可以得到紧致 Skyrmion。紧致子是具有有限半径的解，分为弱紧致子和真正紧致子两种情形。这些紧致子根据其在边界处的可微性阶数来定义。弱紧致子情形不连续可微，而真正的紧致子情形具有一阶可微性。通过选择四阶项，成功得到了这些解。在该受限模型中，DMI 对构造紧致子的影响较小，因为在紧致子半径附近，势项往往占主导地位。我们提出了一种不含势项的新型紧致子模型，该模型仅由手性相反的 Skyrme项和 DMI项组成。其解为真正的紧致子。

在超对称孤子模型中，杂质耦合与 DMI 密切相关。因此，我们采用 DMI 耦合的指数函数和高斯函数，研究了局域化杂质的影响。

本研究为构建这一新模型的孤子解迈出了第一步。以下问题仍有待依次解决：

- 我们的所有结果均基于旋转对称拟设，打破这一对称性将很有意义。特别是，对于较高的拓扑荷，非旋转对称解必然存在。此外，即使在 $Q=1$ 时，二次塞曼势也会引起这种形变。

- 由于磁性斯格明子常形成各种柏拉图式晶格结构，基于 DM 项与四阶项之间的结合或竞争所产生的新颖结构，或许也会在该模型中显现。

- 对于能量密度由价费米子与狄拉克海费米子的无穷和构成的模型，费米子真空泛函本身也存在孤子解。著名的 Atiyah–Patodi–Singer 指标定理意味着此类孤子解的存在。分析略显复杂，但结果无疑颇有意义。

我们将在未来的研究中报告这些问题 ies.

致谢

作者谨此感谢 Pawe-l Klimas 仔细审阅本手稿并提出建设性反馈。我们也感谢 Yuki Amari 就常规范场（7）提出的宝贵建议。我们还感谢 Atsushi Nakamula、Yakov Shnir、Kouichi Toda 和 Shota Yanai 富有成效的讨论与评论。我们还衷心感谢匿名审稿人提出的周到且有益的意见。N.S. 部分受到 JSPS KAKENHI Grant Number JP20K03278 的资助。

附录 A：热核展开与有效的类 Skyrme 模型

由狄拉克算子 (9)，我们定义哈密顿量 h

$$i\mathcal{D}=\sigma_3(-\partial_\tau-h), \tag{A1}$$

$$h:=-\sigma_3\sigma_k\Big(\partial_k+iD\frac{\tau^k}{2}\Big)+\sigma_3 m\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n},\quad k=1,2\,. \tag{A2}$$

从经规范化的 (7) 真空态中减去后，便得到含 DMI 的婴儿斯格明子模型。我们将真空哈密顿量定义为 $\boldsymbol{n}_0=(0,\,0,\,1)$,

$$h_0=-\sigma_3\sigma_k\Big(\partial_k+iD\frac{\tau^k}{2}\Big)+\sigma_3 m\tau_3\,. \tag{A3}$$

规范场 (7) 和真空哈密顿量 (A3) 的选择违反了该理论的 $SU(2)$ 对称性。

这里，对（3+1）-QCD 有效模型 [47, 48, 51, 52]也进行了类似分析，因为作用量通常发散，所以必须引入正则化作用量。根据 [47, 48], ，我们定义如下所示的适时正则化作用量：

$$\omega_R(\boldsymbol{n})\to-\frac{1}{2}\int_{1/\Lambda^2}ds s^{-1}\mathrm{Tr}\exp(-s\mathcal{D}^\dagger\mathcal{D})\,. \tag{A4}$$

注意到（2+1）-模型与（3+1）-模型之间存在显著差异。因为在（2+1）-模型中，适当地减去真空贡献后，(10) 变为有限值，因此无需引入紫外截止。当我们考虑总能量中的狄拉克海贡献时，截止能够显著改善数值收敛性；因此，我们在公式中保留该截止。在本研究中，我们考察通过这一展开得到的 Skyrme 模型；相应地，我们设定 $\Lambda\to\infty$。能量表示如下：$\omega_R(\boldsymbol{n})=-\int_0^\infty d\tau E_0$, 并且

$$E_0=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{1/\Lambda^2}^{\infty}ds s^{-3/2}\mathrm{Tr}K(s),\quad K(s):=\exp(-sh^2)\,. \tag{A5}$$

对于热核展开，固有时间核表示为

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_0+\mathcal{V},\quad \mathcal{H}:=h^2\,,\quad \mathcal{H}_0:=h_0^2\,, \tag{A6}$$

and

$$K(s):=K_0(s)K_1(s), \tag{A7}$$

表 I。关于迹(b_n) $n \leqq 4$ 在 $O(D^k)$ $k \leqq 4$ 下非零分量的结果。

b_2: 迹$(\mathcal{V}^2)$	(i) O(D^0):	$\frac{4m^2}{r_2}$ (正弦^2 $f + r^2 f'^2$)
	(ii) O(D^1):	$-\frac{16m^2}{r}$ 正弦 γ正弦$^2\frac{f}{-2}$ (正弦 $f - rf'$)
	(iii) O(D^2):	$4m^2$ 正弦$^2\frac{f}{-2}(3 -$ 余弦 $f)$
b_3: 迹$\big(\mathcal{V}[\mathcal{H}_0,\mathcal{V}] + 2[\mathcal{H}_0,\mathcal{V}]\mathcal{V}\big)$	(iv) O(D^2):	$-\frac{8m^2}{r}(1 -$ 余弦$\, 2f + 3r^2 f'^2 - r^2$ 余弦$\, 2ff'^2)$
	(v) O(D^3):	$\frac{8m^2}{r}$ 正弦 γ正弦$^2_{-2}$(正弦 $f - rf'$)
迹$\big([\mathcal{H}_0,[\mathcal{H}_0,\mathcal{V}]]\big)$	(vi) O(D^3):	$-\frac{8m^2}{r}$ 正弦γ(正弦 $f + r$余弦 ff')
b_4: 迹$(\mathcal{V}^4)$	(vii) O(D^0):	$\frac{4m^2}{r}$(正弦^4 $f + 6r^2$ 正弦^2 $ff'^2 + r^4 f'^4$)
	(viii) O(D^1):	$-\frac{32m^4}{r^3}$ 正弦 γ正弦$^2_{-2}$(正弦 $f - rf'$)^3
	(ix) O(D^2):	$\frac{16m^4}{r^2}$ 正弦$^2\frac{f}{2}\Big[(2 -$ 余弦 $2\gamma)(3 -$ 余弦 $f)$ 正弦$^2 f + rf'\Big\{-16(2 -$ 余弦 $2\gamma)$ 余弦 $\frac{f}{2}$正弦$^3\frac{f}{2}$ $+r\big(6 - 2$ 余弦 $f +$ 余弦 $2\gamma(-1 +$ 余弦 $f)f'\big)\Big\}\Big]$
	(x) O(D^3):	$\frac{32m^4}{r}$ 正弦 γ正弦$^4\frac{f}{2}\Big\{-14$ 正弦 $f +$ 正弦 $2f - 2r(-5 + 3$ 余弦 $f)f'\Big\}$
	(xi) O(D^4):	$8m^4(35 - 28$ 余弦 $f +$ 余弦 $2f)$ 正弦$^4\frac{f}{2}$
迹$(\mathcal{V}[\mathcal{H}_0,[\mathcal{H}_0,\mathcal{V}]]$ $+3[\mathcal{H}_0,[\mathcal{H}_0,\mathcal{V}]]\mathcal{V})$	(xii) O(D^2):	$\frac{64m^4}{r^2}\Big[2$余弦$^2\gamma$正弦$^2 f + rf'\Big\{2$余弦$^2\gamma$正弦$2f + r(1 +$余弦2γ余弦$^2 f)$ $f'\Big\}\Big]$
	(xiii) O(D^3):	$128m^4$ 正弦γ正弦$^2\, ff'$
	(xiv) O(D^4):	$\frac{16m^2}{r^2}\Big\{(4m^2r^2 +$余弦$^2\gamma)$ 正弦$^2 f - rf'$(正弦$^2\gamma$正弦 $2f - 4$余弦$^2\gamma$余弦$^2\, ff')\Big\}$
3迹$([\mathcal{H}_0,\mathcal{V}]^2)$	(xv) O(D^2):	$-\frac{48m^4}{r^2}\Big\{2$余弦$^2\gamma$正弦$^2 f + 2r$余弦$^2\gamma$正弦 $2ff' + r^2\big(1 +$余弦 2γ余弦$^2 f\big)f'^2\Big\}$
	(xvi) O(D^3) :	$-96m^4$ 正弦γ正弦$^2\, ff'$
	(xvii) O(D^4) :	$\frac{12m^2}{r^2}\Big\{(1 - 4m^2r^2)$ 正弦$^2 f + r^2 f'^2)\Big\}$

其中

$$K_0(s) = \exp(-s\mathcal{H}_0)\,, \tag{A8}$$

且相互作用部分为

$$K_1(s) = \mathrm{T}\exp\Big[-\int_0^s ds' K_0(-s')\mathcal{V}K_0(s')\Big]\,, \tag{A9}$$

其中，T 表示本征时排序。相互作用部分满足以下微分方程:

$$[\partial_s + K_0(-s)\mathcal{V}K_0(s)]K_1(s) = 0,\quad K_1(s=0) = 1\,. \tag{A10}$$

它具有热展开

$$K_1(s) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n b_n,\quad b_0 = 1\,. \tag{A11}$$

热系数 b_n 可通过代入以下公式轻松求得——

将（A11）代入（A10）；前几个项为

$$\begin{aligned}
&b_1 = -\mathcal{V},\\
&2b_2 = \mathcal{V}^2 - [\mathcal{H}_0,\mathcal{V}],\\
&6b_3 = -\mathcal{V}^3 + \big(\mathcal{V}[\mathcal{H}_0,\mathcal{V}] + 2[\mathcal{H}_0,\mathcal{V}]\mathcal{V}\big) - [\mathcal{H}_0,[\mathcal{H}_0,\mathcal{V}]],\\
&24b_4 = \mathcal{V}^4 - \big(\mathcal{V}^2[\mathcal{H}_0,\mathcal{V}] + 2\mathcal{V}[\mathcal{H}_0,\mathcal{V}]\mathcal{V} + 3[\mathcal{H}_0,\mathcal{V}]\mathcal{V}^2\big)\\
&\quad + \big(\mathcal{V}[\mathcal{H}_0,[\mathcal{H}_0,\mathcal{V}]] + 3[\mathcal{H}_0,[\mathcal{H}_0,\mathcal{V}]]\mathcal{V}\big) + 3[\mathcal{H}_0,\mathcal{V}]^2\\
&\quad - [\mathcal{H}_0,[\mathcal{H}_0,[\mathcal{H}_0,\mathcal{V}]]]\,.
\end{aligned} \tag{A12}$$

热核展开中的能量为

$$E_0 = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{1/\Lambda^2}^{\infty} ds s^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Tr}(K_0(s)b_n)\,. \tag{A13}$$

为计算迹 Tr，它考虑了洛伦兹、味（同位旋）以及平面波。

$$h_{\mathrm{plain}}|\phi_\nu^0\rangle = \epsilon_\nu^0|\phi_\nu^0\rangle\,,\quad h_{\mathrm{plain}} = -\sigma_3\sigma_k\partial_k + \sigma_3 m\,, \tag{A14}$$

能量 E_0 变为

$$E_0 = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\nu}|\epsilon_\nu^0|^{1-2n}\Gamma\left(n-\frac{1}{2},\left(\frac{\epsilon_\nu^0}{\Lambda}\right)^2\right)\langle\phi_\nu^0|b_n|\phi_\nu^0\rangle\,. \tag{A15}$$

$\mathcal{V}$ 的显式形式为

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= m\sigma_k\big(\boldsymbol{\tau}\cdot\partial_k\boldsymbol{n} - i[\boldsymbol{A}_k,\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}-\tau_3]\big)\\ &= m\sigma_k\big\{\boldsymbol{\tau}\cdot\partial_k\boldsymbol{n} + D\big((\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n})_k - \epsilon_{k\ell}\tau_\ell\big)\big\}\,,\quad k,\ell=1,2\end{aligned} \tag{A16}$$

其中 $\epsilon_{k\ell}$ 是反对称张量。能量的第一个非零贡献是二阶项： $n=2$

$$\begin{aligned}E_0^{(n=2)} &= \kappa_2\int d^2x\Big\{(\partial_i\boldsymbol{n})^2 + 2D\boldsymbol{n}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{n})\\ &\quad - 2D(\partial_1 n_2 - \partial_2 n_1)\\ &\quad + 2D^2(1-n_3) + D^2(1-n_3)^2\Big\}\,,\end{aligned} \tag{A17}$$

$$\kappa_2 := \frac{m}{8\pi^{3/2}}\Gamma\left(\frac{1}{2},\left(\frac{m}{\Lambda}\right)^2\right)\underset{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow}\frac{m}{8\pi}\,. \tag{A18}$$

如果我们对 $n\geq 3$ 设定 $D=0$，并将讨论范围限制在无 DMI 的情形，对于 Skyrme 项或高阶修正，后续阶数 $n=4$ 的结果相对容易得到

$$E_0^{(n=4)} = \kappa_4\int d^2x\Big\{2(\partial_i\boldsymbol{n}\times\partial_j\boldsymbol{n})^2 + (\partial_i\boldsymbol{n})^2(\partial_j\boldsymbol{n})^2\Big\}\,, \tag{A19}$$

$$\kappa_4 := \frac{1}{96\pi^{3/2}m}\Gamma\left(\frac{5}{2},\left(\frac{m}{\Lambda}\right)^2\right)\underset{\Lambda\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{128\pi m}\,. \tag{A20}$$

完整计算直到四阶贡献几乎是直截了当的，但结果较为繁琐。实际计算中，以下关系可能会有所帮助:

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}_0 := \mathcal{H}_0^{d^2} + \mathcal{H}_0^{d^1} + \mathcal{H}_0^{M}\,,\\ &\mathcal{H}_0^{d^2} := -\partial_k^2,\quad \mathcal{H}_0^{d} := iD(\tau_1\partial_1 + \tau_2\partial_2)\,,\\ &\mathcal{H}_0^{M} := \frac{D^2}{2}(1-\sigma_3\tau_3) + Dm(\sigma_1\tau_2 - \sigma_2\tau_1) + m^2\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&[\mathcal{H}_0^{d^2},\mathcal{V}] \equiv \sum_{i=1}^{2}\Phi_i\partial_i\,,\\ &\Phi_i := -2mD(\sigma_1\tau_2\partial_i n_3 - \sigma_1\tau_3\partial_i n_2 - \sigma_2\tau_1\partial_i n_3 + \sigma_2\tau_3\partial_i n_1)\,,\\ &[\mathcal{H}_0^{d^1},\mathcal{V}]_i \equiv \Psi_i^{(0)} + \Psi_i^{(1)}\partial_i\,,\\ &\Psi_1^{(0)} = mD^2(-\sigma_1\tau_2\partial_1 n_1 + \sigma_1\tau_2\partial_1 n_2 + \sigma_1\tau_3\partial_1 n_3 + i\sigma_2\partial_1 n_3)\,,\\ &\Psi_1^{(1)} = 2mD^2(-\sigma_2\tau_2 n_1 + \sigma_1\tau_2 n_2 + \sigma_1\tau_3(n_3-1))\,,\\ &\Psi_2^{(0)} = mD^2(\sigma_2\tau_1\partial_2 n_1 - \sigma_1\tau_1\partial_2 n_2 + \sigma_2\tau_3\partial_2 n_3 - i\sigma_1\partial_2 n_3)\,,\\ &\Psi_2^{(1)} = 2mD^2(\sigma_2\tau_1 n_1 - \sigma_1\tau_1 n_2 + \sigma_2\tau_3(n_3-1))\,,\end{aligned}$$

在表 I 中，我们汇总了旋转对称拟设 (42) 下的所有项 Tr(b_i)。

根据表 I，我们可以定义完整模型的能量密度。对于每个 n，我们给出

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(n=2)} &= \kappa_2\bigg[\frac{1}{r^2}(\sin^2 f + r^2 f'^2) - D\frac{4}{r}\sin^2\frac{f}{2}(\sin f - rf')\\ &\quad + D^2 2(3-\cos f)\sin^2\frac{f}{2}\bigg]\,,\end{aligned} \tag{A21}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(n=3)} &= \kappa_3\bigg[D^2\frac{4}{3mr^2}(-1+\cos 2f - 3r^2f'^2 + r^2\cos 2ff'^2)\\ &\quad + D^3\frac{4}{3mr}\bigg\{\sin^2\frac{f}{2}(\sin f - rf') + \sin f + r\cos ff'\bigg\}\bigg]\,,\end{aligned} \tag{A22}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(n=4)} &= \kappa_4\bigg[\frac{1}{r^4}(\sin^4 f + 6r^2\sin^2 ff'^2 + r^4 f'^4)\\ &\quad - D\frac{8}{r^3}(\sin f - rf')^3 - D^2\frac{12}{r^2}\bigg\{(-3+\cos f)\sin^2 f\\ &\quad + rf'(4\sin f - 2\sin 2f + r(-3+\cos f)f'\bigg\}\\ &\quad + D^3\frac{2}{r}\sin^2\frac{f}{2}\bigg\{29\sin f - 16\sin 2f + \sin 3f\\ &\quad - 2r\big(17 - 12\cos f + 3\cos 2f\big)f'\bigg\}\\ &\quad + D^4\bigg\{2(35 - 28\cos f + \cos 2f)\sin^4\frac{f}{2}\\ &\quad + \Big(\frac{3}{m^2r^2}+4\Big)\sin^2 f - \frac{4}{m^2r}\sin 2ff' + \frac{3}{m^2}f'^2\bigg\}\bigg]\,,\end{aligned} \tag{A23}$$

其中耦合常数

$$\kappa_2 = \frac{m}{8\pi},\quad \kappa_3 = \frac{1}{32\pi},\quad \kappa_4 = \frac{1}{128\pi m}. \tag{A24}$$

现在，我们讨论模型如何由 (A21)- (A23) 构建而成。在物理上，常数 D 应当是一个较小的值，因此我们省略 O(D^k) $k\geqq 2$ 阶的项，但塞曼势除外。另一种可能性是，直接将这些势作为外部项加入，并省略塞曼势（表 I 中的 (iii)，或 (A21) 的最后一项），以保持一致性。

由（A24）可知，对于 $m>1$，热核展开是合理的。在略有不同的背景下，[43]研究了与婴儿Skyrmion耦合的费米子的可归一化零模。这些模在某个临界值以上出现 m（在 [43], 中，我们展示了 $m=1$情况下狄拉克费米子能级交叉的图像。对于较小的 m，不会发生交叉。）因此，耦合常数显然满足 $\kappa_2>\kappa_3>\kappa_4$ 在 $m>1$中的关系。例如， $\kappa_2\sim 0.080$，$\kappa_4\sim 0.0012$ 在 $m=2$中。因此，在

本文中，我们决定省略 $\varepsilon^{(n=4)}$ 中的 DMI 介导项（表 I 中的 (viii)，或（A23）的第二项）。（这可能会对结果产生一些小影响，例如数值建模 $\kappa_4 \sim 1$。）因此，该模型可简化为其最简单的形式（21）。

我们可以确定式（21）中的耦合常数，例如

$$\kappa_1 := 2\kappa_2 D, \quad \kappa_{4a} = 2\kappa_4, \quad \kappa_{4b} := \kappa_4 ,$$
$$\kappa_{0a} := 2\kappa_2 D^2, \quad \kappa_{0b} := \kappa_2 D^2 . \tag{A25}$$

在本研究中，我们并不将分析限制于上述关系（A25）。事实上，我们自由选择这些参数，以确定势解的范围。

[1] C. Adam、J. Sanchez-Guillen 和 A. Wereszczynski, 《一种关于重子物质的Skyrme型方案》, Phys. Lett. B 691, 105–110（2010）, arXiv:1001.4544 [hep-th]。[2] C. Adam、C. Naya、J. Sanchez-Guillen 和 A. Wereszczynski, 《基于 Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield Skyrme模型的核结合能》, Phys. Rev. C 88，054313（2013）, arXiv:1309.0820 [hep-th]。[3]Christoph Adam、Mareike Haberichter 和 Andrzej Wereszczynski, 《Skyrme模型与核物质状态方程》, Phys. Rev. C 92，055807（2015）, arXiv:1509.04795 [hep-th]。[4] L. A. Ferreira 和 L. R. Livramento, 《用于核物质的假真空 Skyrme模型》, J. Phys. G 49，115102（2022）, arXiv:2106.13335 [hep-th]。[5] C. Adam、C. Naya、J. Sanchez-Guillen、R. Vazquez 和 A. Wereszczynski, 《作为中子星的BPS Skyrmion》, Phys. Lett. B 742，136–142（2015）, arXiv:1407.3799 [hep- th]。[6] C. Adam、C. Naya、J. Sanchez-Guillen、R. Vazquez 和 A. Wereszczynski, 《Bogomol'nyi-Prasad-Sommerfield Skyrme模型中的中子星：平均场极限与完整场论》, Phys. Rev. C 92，025802（2015）, arXiv:1503.03095 [nucl-th]。[7] I. Dzyaloshinsky, 《反铁磁体"弱"铁磁性的热力学理论》, Journal of Physics and Che mistry of Solids 4，241–255（1958）。[8] Tˆoru Moriya, 《各向异性交换作用与弱铁磁性》, Phys. Rev. 120，91–98（1960）。[9] A. N. Bogdanov 和 D. A. Yablonskii, 《磁有序晶体中的热力学稳定"涡旋"：磁体的混合态》, Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics 68，101（1989）。[10] A. Bogdanov 和 A. Hubert, 《磁性晶体中的热力学稳定磁涡旋态》, Journal of Magnetism and Magnetic Materials 138, 255–269（1994）。[11] Bruno Barton-Singer、Calum Ross 和 Bernd J. Schroers, 《临界耦合下的磁性斯格明子》, Commun. Math. Phys. 375，2259–2280（2020）, arXiv:1812.07268 [cond-mat.str-el]。[12] Bernd J. Schroers, 《规范化σ模型与磁性斯格明子》, SciPost Phys. 7，030（2019）, arXiv:1905.06285 [hep-th]。[13] B. M. A. G. Piette、B. J. Schroers 和 W. J. Zakrzewski, 《二维Skyrme模型中的多孤子》, Z. Phys. C 65，165–174（1995）, arXiv:hep-th/9406160。[14] S. L. Sondhi、A. Karlhede、S. A. Kivelson 和 E. H. Rezayi, 《小塞曼能下从整数到分数量子霍尔效应的交叉过程中的斯格明子》, Phys. Rev. B 47，16419–16426（1993）。[15] A. Neubauer、C. Pfleiderer、B. Binz、A. Rosch、R. Ritz, P. G. Niklowitz, 和 P. B¨oni, "MnSi a 相中的拓扑霍尔效应", 《物理评论快报》**102**, 186602 (2009). [16] A. Neubauer, C. Pfleiderer, B. Binz, A. Rosch, R. Ritz, P. G. Niklowitz, 和 P. B¨oni, "勘误：MnSi a [102, 相中 186602 2009], **110**, 209902 2013 的拓扑霍尔效应, 《物理评论快报》（）"《物理评论快报》（）。[17] Ajit C. Balram, U. Wurstbauer, A. Wojs, A. Pinczuk, 和 J.K. Jain, "分数量子霍尔效应中的分数电荷斯格明子", Nat. Commun, **6**, 8981 (2015).[18] Wanjun Jiang, Xichao Zhang, Guoqiang Yu, Wei Zhang, Xiao Wang, M. Benjamin Jungfleisch, J. E. Pearson, Xuemei Cheng, Olle Heinonen, Kang L. Wang, Yan Zhou, Axel Hoffmann, 和 S.G.E. te Velthuis, "斯格明子霍尔效应的直接观测", 《自然·物理》**13**, 162 2017( ). [19] An. Bogdanov, Uk. R¨ossler, 和 Aa. Shestakov, "向列液晶中的斯格明子。"《物理评论E》**67**, 016602 016602 2003 – ( ).[20]Jun-ichi Fukuda 和 Slobodan Zumer, "手性向列液晶中的准二维斯格明子晶格", Nat.Commun. **2**, 246 (2011). [21] A. O. Leonov, I. E. Dragunov, U. K. R¨ossler, 和 A. N. Bogdanov, "液晶中斯格明子态的理论", 《物理评论E》**90**, 042502 (2014). [22] Paul J Ackerman, Timothy Boyle, 和 Ivan I. Smalyukh, "向列流体中婴儿斯格明子的蠕动运动", Nat.Commun. **8**, 673 (2017). [23] G. De Matteis, L. Martina, 和 V Turco, "手性液晶中的斯格明子态", 《理论与数学物理》**196** (2018), 10.1134/S0040577918080044. [24] G. De Matteis, L. Martina, C. Naya, 和 V. Turco, "非手性向列液晶中的斯格明子管", 《物理评论E》**105**, 024701 (2022). [25] A. A. Zyuzin, Julien Garaud, 和 Egor Babaev, "奇宇称超导体中的向列斯格明子", 《物理评论快报》**119**, 167001 (2017).[26] Yuta Kodama, Kento Kokubu, 和 Nobuyuki Sawado, "六维中婴儿斯格明子膜上的有质量费米子局域化", 《物理评论D》**79**, 065024 (2009), arXiv:0812.2638 [hep-th].[27]Yves Brihaye, Terence Delsate, , Yuta Kodama, 和 Nobuyuki Sawado, "六维中的膨胀婴儿斯格明子膜", 《物理评论D》**82**, 106002 (2010), arXiv:1007.0736 [hep-th].[28]Terence Delsate 和 Nobuyuki Sawado, "膨胀婴儿斯格明子膜中有质量费米子及U(1)规范场模态的局域化", 《物理评论D》**85**, 065025 2012 1112 ( ), arXiv: .2714 [gr-qc].[29]Terence Delsate, Masahiro Hayasaka, 和 Nobuyuki

Sawado，“非轴对称婴儿斯格明子膜”，《物理评论D》86, 125009 (2012), arXiv:1208.6341 [hep- th]. [30] T. Gisiger 和 Manu B. Paranjape，“具有体积/面积保持微分同胚不变性的婴儿斯格米模型中的孤子”，《物理评论D》55, 7731–7738 (1997), arXiv:hep-ph/9606328. [31] C. Adam, T. Romanczukiewicz, J. Sanchez-Guillen, 和 A. Wereszczynski，“受限婴儿斯格米模型的研究”，《物理评论D》81, 085007 (2010), arXiv:1002.0851 [hep-th]. [32] J. Andrade, R. Casana, E. da Hora, 和 Andr´e C. San- tos，“磁性介质中受限婴儿斯格米-麦克斯韦理论里具有内部结构的BPS孤子”，(2022), arXiv:2211.09216 [hep-th]. [33] H. Arodz, P. Klimas, 和 T. Tyranowski，“具有V形势的场论模型”，Acta Phys. Polon. B 36, 3861–3876 (2005), arXiv:hep-th/0510204. [34] H. Arodz 和 J. Lis，“复符号戈登模型中的紧致Q球”，《物理评论D》77, 107702 (2008), arXiv:0803.1566 [hep-th]. [35] C. Adam, P. Klimas, J. Sanchez-Guillen, 和 A. Wereszczynski，“紧致婴儿斯格明子”，《物理评论D》80, 105013 (2009), arXiv:0909.2505 [hep-th]. [36] J. M. Speight，“极端婴儿斯格米模型中的紧致子和半紧致子”，J. Phys. A 43, 405201 (2010), arXiv:1006.3754 [hep-th]. [37] Jennifer Ashcroft, Mareike Haberichter, 和 Steffen Kr- usch，“不含势能项的婴儿斯格米模型”，《物理评论D》91, 105032 (2015), arXiv:1504.02459 [hep- th]. [38] Rodolfo Casana, Andr´e C. Santos, 和 C. A. I. Flori´an，“非线性介质中的自对偶紧致规范婴儿斯格明子”，(2022), arXiv:2209.06309 [hep-th]. [39] C. Adam, Jose M. Queiruga, 和 A. Wereszczyn- ski，“BPS孤子-杂质模型与超对称性”，JHEP 07, 164 (2019), arXiv:1901.04501 [hep-th]. [40] T. Jaroszewicz，“诱导拓扑项、自旋和(2+1) 维中的统计性质》，《物理快报B》**159**，299–302（1985）。[41] Alexander G. Abanov，《由费米子诱导的霍普夫项》，《物理快报B》**492**，321–323（2000），arXiv:hep-th/0005150。[42] A. G. Abanov 和 P. B. Wiegmann，《关于费米子数与孤子统计性质之间的对应关系》，JHEP **10**，030（2001），arXiv:hep-th/0105213。[43] Yuki Amari、Masaya Iida 和 Nobuyuki Sawado，《 2+1 维 Skyrme-Faddeev 模型的统计性质与可归一化费米子》，《理论与数学物理》**200**，1253–1268（2019），arXiv:1910.10431 [hep-th]。[44] I. Perapechka、Nobuyuki Sawado 和 Ya Shnir，《（2+1）维费米子-Skyrmion 系统的孤子解》，JHEP **10**，081（2018），arXiv:1808.07787 [hep- th]。[45] I. Perapechka 和 Ya. Shnir，《磁性斯格明子之间的费米子交换相互作用》，《物理评论D》**99**，125001（2019），arXiv:1901.06925 [hep-th]。[46] Yuki Amari，私人通信。[47] D. Ebert 和 H. Reinhardt，《由夸克味动力学导出的含反常和 Skyrme 项的有效手征强子拉格朗日量》，《核物理B》**271**，188–226（1986）。[48] H. Reinhardt，《本征时正规化方案中的手征孤子》，《核物理A》**503**，825–848（1989）。[49] Juha Jaykka 和 Martin Speight，《易平面婴儿Skyrmion》，《物理评论D》**82**，125030（2010），arXiv:1010.2217 [hep-th]。[50]Sven Bjarke Gudnason、Marco Barsanti 和 Stefano Bolognesi，《近 BPS Skyrmion》，JHEP **11**，092（2022），arXiv:2206.09559 [hep-th]。[51] Avinash Dhar、R. Shankar 和 Spenta R. Wadia，《Nambu-Jona-Lasinio 型有效拉格朗日量。2. 大 N QCD 低能理论的反常与非线性拉格朗日量》，《物理评论D》**31**，3256（1985）。[52] M. Wakamatsu 和 H. Yoshiki，《核子的手征夸克模型》，《核物理A》**524**，561–600（1991）。