arXiv:2303.15787v2 [math.OA] 5 Jan 2024

Wodzicki 留数的群胚方法

Nathan Couchet[1] 和 Robert Yuncken * [2]

[1]克莱蒙奥弗涅大学，法国国家科学研究中心，LMBP，F-63000克莱蒙费朗，法国，nathan.couchet@uca.fr[2]洛林埃利·嘉当研究所，洛林大学，法国国家科学研究中心，IECL，F-57000 梅斯，法国，robert.yuncken@univ-lorraine.fr

关键词：Wodzicki 留数、伪微分演算、经典符号、切群胚、滤过流形、非交换几何。

数学主题分类：主要：47G30；次要：22A22、35S05、58H05、58J40。

摘要

最初，Wodzicki 在其学位论文中于 80 年代研究了非交换留数 [33] ，Guillemin 也对其进行了研究 [18]。本文借助 r纤维分布这一语言， [24], [30], 在滤过流形的背景下给出 Wodzicki 留数的定义。我们证明，这种群胚留数在滤过流形上的伪微分算子代数中表现得像迹；当流形具有平凡滤过时，它与通常的 Wodzicki 留数一致。此外，我们证明，对于接触型和余维一叶状结构的 Heisenberg 流形，群胚留数与 Ponge 的定义 [25] 一致；对于一般的滤过流形，它与 Dave-Haller 的定义一致。

1 引言。

伪微分算子理论的一个显著特点是 Wodzicki 的非交换留数，他于 1984年 在其学位论文中定义了这一概念[34]。Guillemin 也在 1985年 的一篇文章中定义了非交换留数，[18, 定义 6，第 151], 页；他在文中提出为算子 P 关联一个 ζ 函数：

$$\zeta(P,s)=\sum_k \lambda_k^s, \tag{1.1}$$

其中 λ_k 是 P的特征值，随后说明它具有亚纯延拓。ζ 函数的留数与 P的特征值数量相关，记为 $N(\lambda) = card\{\lambda_k, \lambda_k \leq \lambda\}$，从而引出了 Guillemin 的 Weyl型公式，如 [32] 所示。

设 P 是流形 M 上的 $m \in \mathbb{Z}$ 阶经典伪微分算子，该流形的维数为 d。这意味着在任意坐标图中， P的符号具有如下渐近展开：

$$a(x,\xi) \sim \sum_k a_{m-k}(x,\xi). \tag{1.2}$$

在下面的讨论中，我们固定一个坐标图（U， ϕ），并将 U 与其在 $\mathbb{R}^d$中的像等同起来。

定义 1.1. [31, p 58] , [23, 1.8 局部公式], [33, § 7]

*本文/出版物基于 COST行动 CaLISTA CA21109 的研究成果，并得到 COST（欧洲科技与创新合作组织）的支持。www.cost.eu。

我们将 M 上阶为 m 的经典伪微分算子 P 在 x 处的留数定义为:

$$Res_x^W(P) = \frac{1}{(2\pi)^d}\Big(\int_{\mathbb{S}^{d-1}} a_{-d}(x,\xi)d\sigma(\xi)\Big)dx, \tag{1.3}$$

其中， $a_{-d}(x,\xi)$ 是变量 ξ 中 P 的渐近展开中阶为 $-d$ 的齐次部分，该渐近展开取自任意坐标图。此外，若 M 是紧黎曼流形，我们还定义 P 的（全局）留数:

$$Res^W(P) = \int_M Res_x^W(P)dx, \tag{1.4}$$

其中， dx 是由黎曼结构诱导的光滑测度。

请注意，紧致性假设是为了使 (1.4) 成立。在 (Res_x^W中的留数密度定义 (1.3) 对任意 M 都有意义。

一个重要的定理指出，这些量与坐标图的选择无关。本文拟为阶为 $-\dim(M)$ 的算子给出这一留数的另一种定义，并利用 [30] 的群胚演算自然地将其推广到滤过流形——也就是说，利用切群胚 $\mathbb{T}M, \mathbb{T}_H M$。因此，我们得以绕开坐标图方法。此外，我们的定义几乎无需改动即可推广，从而利用 [5],[29] 的滤过切群胚，得到任意滤过流形上伪微分算子的 Ponge [25] 和 Dave-Haller [10] 非交换留数。

事实上，我们在此定义的非交换留数可以通过将 [9] 的结果应用于 [10] 的命题 2 和推论 6，直接与 Dave-Haller 的非交换留数联系起来 [10] 。因此，本文可以被视为对 Ponge 和 Dave-Haller 的非交换留数的一种重新诠释，其方法是直接在滤过切群胚上开展研究。这使我们能够将非交换留数的基本性质，尤其是其关于坐标图的不变性和迹性质，作为滤过切群胚的代数几何结构的直接结果加以实现。

顺便指出，非交换留数已被证明与其他几何对象存在联系。例如:

1. 对于紧流形上的微分算子，这一留数与热算子 e^{-tP} 的迹的渐近展开之间存在联系，见 [1, 10]。2. Connes 于 1988 年证明——见 [7, 命题 5，第 313], [4, 节 2.6，第 17], [22, 节 7。6], [27, 命题 4.11，第 16] ——当 P 是一个阶为 $-\dim(M)$ 的伪微分算子且 M 是紧的时， P 的 Dixmier 迹与该留数相差一个常数因子。3. Ponge 在 [25, 命题 6.3，第 454] 中展示了紧流形 CR 上的 Kohn-Laplacian $\Box_b$ 的留数（见 [25, 方程（6.9）], ）与 M 的体积之间的联系，其中该体积定义于 [25, 方程（6.4）]。

下面简要回顾群胚方法在伪微分算子中的应用，该方法最早由 Debord-Skandalis 于 [13] 2014年[30]观察到，几年后由 van Erp 和第二作者加以发展。Connes 的切群胚为:

$$\mathbb{T}M = M \times M \times \mathbb{R}^* \bigcup TM \times \{0\}, \tag{1.5}$$

它被看作切丛 TM 与 $\mathbb{R}^*$上的一族对群胚$M \times M$之间的光滑粘合。在滤过情形下，切丛 TM的适当替代物是幂零密切群的一个丛 $\mathcal{T}_H M$ ，其纤维记为 $\mathcal{T}_H M_x$ ，我们将滤过切群胚定义为:

$$\mathbb{T}_H M = M \times M \times \mathbb{R}^* \bigcup \mathcal{T}_H M \times \{0\}. \tag{1.6}$$

密切群丛允许一族自同构 $(\delta_s)_{s>0}$，称为膨胀；在平凡滤过情形下，它推广了 $\mathbb{T}M$ 上的齐次变换。

利用这些膨胀，我们得到一个光滑的 $\mathbb{R}_+^*$-作用于 $\mathbb{T}_H M$，即 Debord-Skandalis 作用 [13], 另见 [30]，其中它被称为“缩放作用”以及 [9]:

定义 1.2. 设 M 是一个滤过流形。我们定义 $\mathbb{R}_+^*$ 在 $\mathbb{T}_H M$, $s \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \alpha_s \in Aut(\mathbb{T}_H M)$ 上的 Debord-Skandalis 作用如下:

$$\begin{cases} \alpha_s(y,x,t) = (y,x,s^{-1}t) & (x,y) \in M, \\ \alpha_s(x,\xi,0) = (x,\delta_s(\xi),0) & x \in M,\ \xi \in \mathcal{T}_H M_x. \end{cases} \tag{1.7}$$

伪微分算子群胚方法 [30] 的关键在于考虑切群胚 $\mathbb{T}_H M$ 上的分布集合，这些分布对于 Debord-Skandalis 作用在以下意义下基本齐次。r纤维分布是 $\mathbb{T}_H M$ 上的一个连续 $C^\infty(M\times\mathbb{R})$-线性映射 $\mathsf{k}: C^\infty(\mathbb{T}_H M) \to C^\infty(M\times\mathbb{R})$。根据此定义，这种分布的支集是 r-适当的，我们将它们记为 $\mathcal{E}'_r(\mathbb{T}_H M)$。Androulidakis-Skandalis [2] 和 Lescure-Manchon-Vassout [24] 最先在淹没的一般情形下研究了它们。借助 [24]中的一个结果，r-纤维分布可以视为从 $M\times\mathbb{R}$ 到 r纤维上紧支分布的光滑映射 $\mathsf{k}(x,t) \in \mathcal{E}'(r^{-1}(x,t))$，其支集是 r-适当的。如果一个 r-纤维分布的支集也满足 s-适当性，我们就称它为适当支撑的。

回顾一下，$C_p^\infty(\mathbb{T}_H M, \Omega r)$ 表示切于 r-纤维的 1-密度丛的适当光滑截面，参见 [9, 定义 5.9]。我们称一个适当支撑的 r-纤维化分布 $\mathbb{K}$ 对于 Debord-Skandalis 作用是阶为 m 的本质齐次分布，当且仅当:

$$s \in \mathbb{R}_+^* \mapsto s^{-m}\alpha_{s*}\mathbb{K} - \mathbb{K} \in C_p^\infty(\mathbb{T}_H M, \Omega_r). \tag{1.8}$$

我们将（1.8）中出现的函数称为$\mathbb{K}$的余循环。这类本质齐次分布的集合记为 $\mathbf{\Psi}^m_{\mathrm{vEY}}(\mathbb{T}_H M)$。我们将使用 [30] 和 [9, 第 5 节3]中的记号与概念。因此，van Erp 和第二作者将伪微分算子定义为元素 $\mathbb{K} \in \mathbf{\Psi}^m_{\mathrm{vEY}}(\mathbb{T}_H M)$在 $t=1$ 处的限制，参见 [30, 定理 2 p3]。这些元素是滤过流形 M上的 H-伪微分算子，记为 $\mathbf{\Psi}^m_H(M)$。

本文的一个主要定理是：在平凡滤过流形的情形下，群胚演算与 Kohn-Nirenberg 和 Hörmander 的经典演算相一致，即:

$$\mathbf{\Psi}^m_{\mathrm{Hör}}(M) = \mathbf{\Psi}^m_H(M). \tag{1.9}$$

本文首先有一个简单但重要的观察。全文中我们将考虑 $m \in \mathbb{Z}$。若 M 是一个滤过流形，我们用 d_H 表示 M 的齐次维数。注意，若在 M 上固定一个光滑测度 dx，则可在切纤维 $T_x M$ 上得到一个典范的光滑 1-密度族 $d\lambda_x$，进而在密切群 $\mathcal{T}_H M_x$ 上也得到这样的密度族。

引理 1.3. 设 M 是一个滤过流形，且 $\mathbb{K} \in \mathbf{\Psi}^{-d_H vEY}(\mathbb{T}_H M)$。对每个 $x \in M$，由下式定义的函数:

$$s \mapsto \left(s^{d_H}\alpha_{s*}\mathbb{K} - \mathbb{K}\right)|_{(x,0,0)}, \tag{1.10}$$

是从 $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ 到 $(\mathbb{C}, +)$ 的群同态。更准确地说，存在一个常数$r_x \in \mathbb{C}$，使得对所有 $s>0$:

$$\left(s^{d_H}\alpha_{s*}\mathbb{K} - \mathbb{K}\right)|_{(x,0,0)} = r_x \log(s) d\lambda_x. \tag{1.11}$$

我们将在下一节给出证明。

我们可以将量 $r_x dx$ 定义为具有核 $\mathbb{K}|_{t=1}$的伪微分算子的群胚留数；根据（1.9），它确实是一个多齐次伪微分算子。正如我们将在引理 2.1 中看到的， $r_x dx$ 不依赖于表示在 $t=1$ 处的伪微分算子 P 的 r- 纤维分布 $\mathbb{K}$。因此我们可以定义：

定义 1.4。设 M 是一个齐次维数为 d_H 的滤过流形，并且 $P \in \mathbf{\Psi}_H^m(M)$ 具有 $m \leq -d_H$。设 $\mathbb{K} \in \mathbf{\Psi}_{vEY}^{-d_H}(\mathbb{T}_H M)$ 是 vEY 群胚演算中的一个元素，使得 $\mathbb{K}|_{t=1}$是 P的施瓦茨核。我们将 P在 $x \in M$处的群胚留数密度记为 $Res_x(P)$，定义为：

$$Res_x(P) := \frac{1}{\log(s)} \Big(s^{d_H} \alpha_{s*} \mathbb{K} - \mathbb{K} \Big)|_{(x,0,0)}, \tag{1.12}$$

对于任意 $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$。

应将此定义与 [10, 推论 6(d)], 进行比较，在该推论中，他们证明了 ζ 函数的留数可表示为 P的渐近展开中 $-d_H$ 次项的系数。上述定义针对标量值算子。对于向量丛之间的算子，对于任意 $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$，我们应取：

$$Res_x(P) := \frac{1}{\log(s)} \mathrm{Tr} \Big(s^{d_H} \alpha_{s*} \mathbb{K} - \mathbb{K} \Big)|_{(x,0,0)}. \tag{1.13}$$

有关带向量丛系数的群胚演算的详细信息，请参见 [11]。为简便起见，我们将把注意力限制在标量值算子上。

下面给出本文的主要结果：

1. 我们将证明，见定理 2.3，与 Wodzicki 留数 Res_x^W 类似，定义 Res_x 1.4 中的群胚留数 $P \in \mathbf{\Psi}_H^m(M)$ 在适当阶的算子上定义了一个迹。其中，若 M是一个滤过流形，且$m \leq -d_H$， $Q \in \mathbf{\Psi}_H^0(M)$，则：

$$Res_x([P,Q]) = 0, \tag{1.14}$$

   其中 $[\ ,\ ]$表示算子的交换子。

2. 我们将证明，见定理 4.3，定义 1.4中的群胚留数，在平凡滤过流形的情形下与 Wodzicki 留数一致。

3. 我们将在第 5节证明，定义 1.4 中的留数密度，与 Raphaël Ponge 给出的非交换留数定义一致 [25]，该定义针对 $\mathcal{V}$- 接触流形或叶状流形上 BG 演算中的伪微分算子，[3, 第 § 10], ；更一般地，它也与 Dave-Haller 给出的任意滤过流形上滤过演算的留数定义一致。

定义1.4 仅适用于阶为 $\leq -d_H$的伪微分算子。应当可以将此定义扩展到任意阶的算子。对于经典无滤过演算，Higson、Sukochev 和 Zanin 将在即将发表的文章中探讨这一问题 [19]。我们在撰写本文时得知了他们的研究。详情请参阅该文。

致谢

我们谨向 Dominique Manchon 和 Sylvie Paycha 致谢，感谢他们对这项工作的评论和建议。

2 滤流流形上 Wodzicki 留数的基本性质。

沿用引言中的记号，我们先证明引理 1.3 和 2.1，它们表明我们的留数定义良好。对于滤过切群胚，我们采用如下约定：值域映射和源映射分别为：

$$\begin{cases} r(y,x,t) &= y,\ s(y,x,t)=x,\ t\neq 0 \\ r(x,v,0) &= x,\ s(x,v,0)=x. \end{cases} \tag{2.1}$$

引理 (1.3) 的证明。令：

$$F: s\in\mathbb{R}_+^* \mapsto F_s := \left(s^{d_H}\alpha_{s*}\mathbb{K} - \mathbb{K}\right) \in C_p^\infty(\mathbb{T}_H M,\Omega_r). \tag{2.2}$$

我们将证明，将其限制在 $(x, 0, 0)$ 上时，它是一个群态射。首先，读者可以很容易地验证：

$$F_{st} = s^{d_H}\alpha_{s*}F_t + F_s,\ s,t>0. \tag{2.3}$$

因此，我们需要证明：

$$s^{d_H}\alpha_{s*}F_t|_{(x,0,0)} = F_t|_{(x,0,0)}. \tag{2.4}$$

因此，我们将证明 (2.4)。在纤维 $(x,.,0)$ 中，我们可以写成：

$$F_s|_{(x,.,0)} = f_x d\lambda_x, \tag{2.5}$$

其中 $f_x\in C_c^\infty(\mathcal{T}_H M_x)$，且 $d\lambda_x$ 是幂零（分次）密切群 $\mathcal{T}_H M_x$ 上的 Haar 测度，使得 $\delta_{s*}(d\lambda_x) = s^{-d_H}d\lambda_x$。在$t=0$处的 Debord-Skandalis 作用通过膨胀 δ_s作用。因此，对于纤维 $(x,., 0)$，我们有：

$$\begin{aligned} \alpha_{s*}(F_s)|_{(x,.,0)} &= \delta_{s*}(F_s|_{(x,.,0)}) && (2.6)\\ &\underbrace{=}_{(2.5)} \left((\delta_s^{-1})^* f_x\right)\delta_{s*}(d\lambda_x) && (2.7)\\ &= s^{-d_H}\left((\delta_s^{-1})^* f_x\right)d\lambda_x. && (2.8) \end{aligned}$$

由于 Debord-Skandalis 作用 α_s 固定点 $(x、0、0)$，因此得到 $s^{d_H}\alpha_{s*}F_t|_{(x,0,0)} = F_t|_{(x,0,0)}$ 如所需。因此，$s\mapsto F_s|_{(x,0,0)}$ 是从 $(\mathbb{R}_+^*、\times)$ 到 $(\mathbb{C}、+)$的态射。此外，请注意，从 (2.2) 出发的映射是光滑的，见 [30, 引理 21]。 □

引理 2.1。设 M是一个滤过流形，且 $P\in\mathbf{\Psi}_H^m(M)$，其中 $m\leq -d_H$。群胚留数的定义 *1.4* 不依赖于表示 P 的 r-纤维分布 $\mathbb{K}$。

证明。设 $\mathbb{K}、\mathbb{K}'\in\mathbf{\Psi}_{vEY}^{-d_H}(\mathbb{T}_H M)$，使得：

$$\mathbb{K}|_{t=1} = P,\ \mathbb{K}'|_{t=1} = P. \tag{2.9}$$

令 $x\in M$ 为固定值。我们需要证明，与这些 r-纤维分布相关的两个余循环（1.12）在 x处给出相同的群胚留数。根据 [30, 推论 33]，我们有：

$$\mathbb{K}|_{t=0} - \mathbb{K}'|_{t=0} \in C_p^\infty(\mathcal{T}_H M,\Omega_r). \tag{2.10}$$

利用（2.10），存在 $f_x\in C_c^\infty(\mathcal{T}_H M_x)$ 使得：

$$(\mathbb{K} - \mathbb{K}')|_{(x,.,0)} = f_x d\lambda_x, \tag{2.11}$$

其中 $d\lambda_x$ 是幂零（分次）李群 $\mathcal{T}_H M_x$ 上的左 Haar 测度。最后，请记住 Debord-Skandalis 作用固定了 $(x, 0, 0)$。事实上，我们计算得：

$$\begin{aligned}\left(s^{d_H}\alpha_{s*}(\mathbb{K} - \mathbb{K}') - (\mathbb{K} - \mathbb{K}')\right)|_{(x,0,0)} &= s^{d_H}\alpha_{s*}(\mathbb{K} - \mathbb{K}')|_{(x,0,0)} - (\mathbb{K} - \mathbb{K}')|_{(x,0,0)} &(2.12)\\ &= s^{d_H}\delta_{s*}(f_x d\lambda_x) - f_x d\lambda_x &(2.13)\\ &= 0, &(2.14)\end{aligned}$$

如前一证明所示。 □

现在我们可以得出，群胚留数是良定义的。

现在我们回顾一下关于卷积李群的一个基本事实。在下面的引理中，交换子是在卷积乘积的意义下而言的。还要回顾，每个连通幂零李群都是单模的，见 [15, 命题 2。30] 或 [14, 命题 5.5.4 及推论 5.5。5]。

引理 2.2。设 G 为一个连通幂零李群 G。给定 $f \in C_c^\infty(G)$ 和 $g \in \mathcal{E}'(G)$，则 $[f, g](e) = 0$。

证明。回顾一下，李群上的卷积定义为：

$$\underbrace{u \star v}_{\in \mathcal{E}'(G)} = \underbrace{(u \otimes v)}_{\in \mathcal{E}'(G\times G)} \circ m^*, \tag{2.15}$$

其中 $u \in \mathcal{E}'(G)$ $v \in \mathcal{E}'(G)$，$(m^* f)(x, y) = f(xy)$。我们也可以取 $v \in \mathcal{D}'(G)$，在这种情况下 $u \star v \in \mathcal{D}'(G)$，见 [16, $\mathbb{R}^d$]上的定理 5.1.1，第 51 页。由于 $C_c^\infty(G)$ 是 $\mathcal{E}'(G)$ 中的一个双边理想，故该交换子是良定义的。受 [16, $\mathbb{R}^d$]上的定理 5.2.1，第 53 页的启发，可以证明，对于 $f \in C_c^\infty(G)$ 和 $g \in \mathcal{E}'(G)$：

$$f \star g(x) = \langle g(y), f(xy^{-1})\rangle, \tag{2.16}$$

and:

$$g \star f(x) = \langle g(y), f(y^{-1}x)\rangle. \tag{2.17}$$

注意，正是在前两个方程中我们用到了 G 的幺模性。于是我们证明了 $f \star g(e) = g \star f(e)$，即 $[f, g](e) = 0$。

□

定理 2.3。设 M 是一个齐次维数为 d_H 的滤过流形。设 $P \in \Psi_H^m(M)$ 和 $Q \in \Psi_H^{m'}(M)$ 是两个伪微分算子 M，且满足 $m + m' \leq -d_H$。那么，定义 *1.4* 中的群胚留数满足迹性质，即对所有 $x \in M$：

$$Res_x([P, Q]) = 0. \tag{2.18}$$

证明。我们用 $\mathbb{K}_P$ 和 $\mathbb{K}_Q$ 表示分别与它们对应的两个阶分别为 m 和 m' 的本质齐次 r-纤维化分布。根据定义，存在 $F, G \in C_p^\infty(\mathbb{T}_H M, \Omega_r)$，使得：

$$\begin{cases}\alpha_{s*}\mathbb{K}_P - s^m \mathbb{K}_P &= F\\ \alpha_{s*}\mathbb{K}_Q - s^{m'}\mathbb{K}_Q &= G.\end{cases} \tag{2.19}$$

我们接着计算：

$$Res_x([P,Q]) = Res_x(PQ) - Res_x(QP) \tag{2.20}$$

$$= \frac{s^{d_H}}{log(s)}\Big(\big(\alpha_{s*}({}_{\mathbb{K}^P}\star_{\mathbb{K}^Q}) - s^{-d_H}{}_{\mathbb{K}^P}\star_{\mathbb{K}^Q}\big)|_{(x,0,0)}$$

$$- \big(\alpha_{s*}({}_{\mathbb{K}^Q}\star_{\mathbb{K}^P}) - s^{-d_H}{}_{\mathbb{K}^Q}\star_{\mathbb{K}^P}\big)|_{(x,0,0)}\Big) \tag{2.21}$$

$$= \frac{s^{d_H}}{log(s)}\Big(\big((s^m{}_{\mathbb{K}^P} + F)\star(s^{m'}{}_{\mathbb{K}^Q} + G) - s^{-d_H}{}_{\mathbb{K}^P}\star_{\mathbb{K}^Q}\big)|_{(x,0,0)}$$

$$- \big((s^{m'}{}_{\mathbb{K}^Q} + G)\star(s^m{}_{\mathbb{K}^P} + F) - s^{-d_H}{}_{\mathbb{K}^Q}\star_{\mathbb{K}^P}\big)|_{(x,0,0)}\Big) \tag{2.22}$$

$$= \frac{s^{d_H}}{log(s)}\Big(s^m{}_{\mathbb{K}^P}\star G + s^{m'}F\star_{\mathbb{K}^Q} - s^{m'}{}_{\mathbb{K}^Q}\star F - s^m G\star_{\mathbb{K}^P} + F\star G - G\star F\Big)|_{(x,0,0)} \tag{2.23}$$

$$= \frac{s^{d_H}}{log(s)}\Big(s^m[{}_{\mathbb{K}^P}, G] + s^{m'}[{}_{\mathbb{K}^Q}, F] + [F,G]\Big)|_{(x,0,0)} \tag{2.24}$$

$$= 0. \tag{2.25}$$

方程（2.22）中的等式成立，是因为 ${}_{\mathbb{K}^P}$和 ${}_{\mathbb{K}^Q}$分别是本质齐次的 r-纤维分布，其阶分别为 m和 m'，并且 α_{s^*}：$\mathcal{E}'_r(\mathbb{T}_H M) \to \mathcal{E}'_r(\mathbb{T}_H M)$ 对所有 $s>0$ 都是群胚自同构，参见 [8, 命题 3.3.21，第 104] 页。最后一个等式由引理 2.2 逐纤维应用于密切群而成立；根据定义，这些密切群是连通的（分次）幂零李群。事实上，括号 $[{}_{\mathbb{K}^P}, g]$ 和 $[{}_{\mathbb{K}^Q}, f]$ 中的卷积都是逐纤维进行的。在 $(x, 0)$ 处的纤维中，卷积是在一个具有紧支撑的分布与 $\mathcal{T}_H M_x$ 上一个具有紧支撑的函数之间进行的。

□

注 *1.* 定理 *2.3* 特别适用于 $Q \in \Psi_H^{m'}(M)$ 与 $m'+m \leq -1-d_H$。在这种情况下，我们有 PQ 和 QP 属于空间 $\Psi_H^{m+m'-1}(M)$。因此，两个 r-纤维分布 $k_P \star k_Q$、$k_Q \star k_P$ 都是连续函数，这要归功于 *[30,* 定理 *52]*；于是 *(2.21)* 中的两个余循环为 *0*，因为 *Debord-Skandalis* 作用同样固定了 *(x, 0, 0)*。因此，唯一尚待证明的就是临界情形 $m+m' = -d_H$。更多详情请参见 *[8,* 第 *7.3* 节，第 *161]* 页。我们谨此感谢 *Sylvie Paycha* 教授指出，定理 *2.3* 对 $m+m' \leq -d_H$ 成立，而不仅仅对 $m \leq -d_H$ 和 $m'=0$ 成立。

3 伪齐次函数与核

众所周知，参见例如 [21],[3, p4], ，经典伪微分算子也允许用（伪）齐次函数来表示核展开，而这与符号的渐近展开有着精确的联系。下面回顾相关细节。

考虑配备单参数膨胀族 $(\delta_s)_{s>0}$ 的 $\mathbb{R}^d$。通常，这些膨胀族来自 $\mathbb{R}^d$ 上的一个分次，其中 δ_s 在分次度为 k 的子空间上作用为乘以 s^k。我们将特别关注平凡膨胀结构：

$$\delta_s(\xi_1, ..., \xi_d) = (s\xi_1, ..., s\xi_d), \tag{3.1}$$

我们还将遇到海森堡膨胀结构：

$$\delta_s(\xi_0, \xi_1, ..., \xi_d) = (s^2\xi_0, s\xi_1, ..., s\xi_d). \tag{3.2}$$

现在可以定义：

定义 3.1。 [21,定义 7.1.1 p353],[3, 定义 (15.19)]

设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 为一个开子集。我们将 $\mathcal{H}^m_G(U \times \mathbb{R}^d)$ 记为满足以下条件的函数空间 $f \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\})$，其为 m 阶齐次函数：

$$f(x, \delta_s(\xi)) = s^m f(x, \delta_s(\xi)), \ s > 0, \tag{3.3}$$

其中 δ_s 如（3.1）或（3.2）中所述。我们将第二变量中次数为 m 的光滑伪齐次函数集合定义如下。若 $m \notin \mathbb{N}$ 则：

$$\Psi\mathrm{hf}^m_G(U \times \mathbb{R}^d) = \mathcal{H}^m_G(U \times \mathbb{R}^d). \tag{3.4}$$

若 $m \in \mathbb{N}$，则 $\Psi\mathbf{hf}^m_G(U \times \mathbb{R}^d)$ 是形如以下形式的 $k \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ 的集合：

$$k(x, \xi) = f(x, \xi) + \log(|\xi|)p(x, \xi), \tag{3.5}$$

其中 p 是 ξ 中的 m 次齐次多项式，其 C^∞-系数属于 x，其中函数 $f \in \mathcal{H}^m_G(U \times \mathbb{R}^d)$ 且 $|\,|$ 是 $\mathbb{R}^d$上的齐次准范数，关于膨胀（3.1）或（3.2）而言。

我们还回顾如下内容，参见 [9]:

定义 3.2。 设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 是一个开子集。我们用 $\mathcal{HS}^m_G(U \times \mathbb{R}^d)$ 表示由 $f \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^d)$ 构成的函数空间，这些函数模施瓦茨类意义下是 m 次齐次的：

$$f(x, \delta_s(\xi)) - s^m f(x, \xi), \tag{3.6}$$

是 ξ 的施瓦茨类函数，并且关于 x 光滑依赖。

定义 3.3。 [21, 公式 (7.1.2) p354] [25, 定义 3.5 p414], [3, 公式 (15.40)-(15.41)]

如果分布核 $k \in \mathcal{D}'(U \times U)$ 具有次数为 $m \in \mathbb{R}$ 的伪齐次展开，则称其为：

$$k \sim \sum_j k_{m+j}, \tag{3.7}$$

其中 $k_{m+j} \in \Psi\mathbf{hf}^{m+j}_G(U \times \mathbb{R}^d)$，并且符号 $\sim$ 表示对于所有 $N \in \mathbb{N}$，存在 $J_N \in \mathbb{N}$:

$$k - \sum_{j \in J_N} k_{m+j} \in C^N(U \times U), \tag{3.8}$$

其中 $C^N(U \times U)$ 表示 C^N 类函数的空间。具有次数为 m 的伪齐次展开的核空间记为 $\Psi\mathbf{hk}^m_G(U)$。

注 2。 我们在上述定义中使用 $\mathcal{D}'(U \times U)$，遵循了大多数关于伪微分算子的著作中的标准做法。严格来说，当我们在群胚演算中将这些实现为核时，需要将其替换为 r-纤维分布：

$$k(x, y)dy \in \mathcal{D}'_r(U \times U), \tag{3.9}$$

见 *[24], [30]*。勒贝格测度 dy 相对于平凡膨胀 δ_s 是次数为 $-d$ 的齐次测度，因此这会导致核的阶发生次数偏移，见下一条定理。因此， U 上阶为 $m < 0$ 的伪微分算子的核将由 Ψhk^{-m-d}_G （U）中的一个元素给出。这是一个众所周知的技术细节，我们不再对此作进一步说明。

现在我们陈述一个重要定理，另见 [21, 定理 7.1.1、7.1.6、7.1.7、7.1.8]。

定理 3.4. ***Seeley*** *1969 [28, 定理 1 p 209]*

设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 为一个开子集，且 $m < 0$。那么 $P \in \mathbf{\Psi}^m_{Hör}(U)$ 当且仅当：

$$Pu(x) = \int_U k(x, x-y)u(y)dy,\ u \in C^\infty_c(U), \tag{3.10}$$

其施瓦茨核满足 $k \in \Psi\mathrm{hk}^{-m-d}_G(U)$。

此外，在平凡膨胀结构的情形下，符号的渐近展开：

$$a \sim \sum_{j=0}^{\infty} a_{m-j},\ a_{m-j} \in \mathcal{H}^{m-j}_G(U \times \mathbb{R}^d), \tag{3.11}$$

以及核：

$$k \sim \sum_{j=0}^{\infty} k_{m+j},\ k_{m+j} \in \Psi hf^{m+j}_G(U \times \mathbb{R}^d), \tag{3.12}$$

两者通过适配傅里叶变换如下相关，参见 [21, 公式 (7.1.81) 第 393] 页。取 $\psi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ 为满足以下条件的任意截断函数：

$$\psi(z) := \begin{cases} 1 & \text{if } |z| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{if } |z| > 1. \end{cases} \tag{3.13}$$

令 $\kappa = -m - d$。那么对于 $m - j < 0$：

$$a_{m-j}(x, \xi) = \lim_{t \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} k_{\kappa+j}(x, z)\psi(\frac{z}{t})e^{-i\xi.z}dz,\ x \in U. \tag{3.14}$$

4 Wodzicki 留数与群胚留数重合

本节将证明，当 $Res_x(P)$ 是平凡滤过流形上的$Res^W_x(P)$ 阶经典伪微分算子时，群胚留数 P 与 Wodzicki 留数相等，见定理 4.3。我们先回顾指数坐标 $\mathbb{E}\mathrm{xp}^{\overline{X}}$ 在 $\mathbb{T}M$ 上的定义，另见 [30]。

给定 M 上的向量场 X 和一点 $x \in M$，若时长为一的流有定义，则记 X沿 X 的流为 $\exp(X).x$。若 $\overline{X} = (X_1, ..., X_n)$ 是向量场的局部标架，且 $v \in \mathbb{R}^n$，则令 $v.\overline{X} = \sum_{k=1}^n v_k X_k$。另外请注意，在此情形下，$\mathbb{R}^d$ 上的膨胀 δ_s 由 $\delta_s(v) = sv$给出。下面的引理列出了$\mathbb{T}_H M$ 的指数坐标图的性质，这些性质将在后文中用到。

引理 4.1. *[30, 引理 27 页 14], [9, 命题 5.13], [8]*

设 M是一个维数为 d的光滑流形，且 $\mathbb{K} \in \mathbf{\Psi}^m_{vEY}(\mathbb{T}M)$。给定 $x_0 \in M$，(U_0, ϕ)是 x_0上的一个坐标图，且 $\overline{X} = (X_1, ..., X_d)$是 x_0上的一个局部标架，我们有：

1. 存在 $U_0 \times \{0\}$ 的一个开邻域 U，满足 $U \subset U_0 \times \mathbb{R}^d$，使得：

$$Exp^{\overline{X}} : U \to M \times M, (x, v) \mapsto (x, \exp(v.\overline{X}).x), \tag{4.1}$$

是一个从其定义域到其像的微分同胚。

2. $Exp^{\overline{X}}$ 在（x_0，0）处的导数为：

$$d_{(x,0)}Exp^{\overline{X}} : (w, v) \in T_x U_0 \times \mathbb{R}^d \mapsto (w, v.\overline{X}|_x). \tag{4.2}$$

3. 令 $\tilde{\mathbb{U}} := \{(x,\ v,\ t)\ \in U_0 \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R},\ \ (x,\ \delta_t(v))\ \in U\}$。则映射：

$$\mathbb{E}\mathrm{xp}^{\overline{X}} : \tilde{\mathbb{U}} \to \mathbb{T}M, (x,v,t) \mapsto \begin{cases} \mathbb{E}\mathrm{xp}^{\overline{X}}(x,v,t) = (Exp^{\overline{X}}(x,\delta_t(-v)),t), & t \neq 0 \\ \mathbb{E}\mathrm{xp}^{\overline{X}}(x,v,0) = (x, v.\overline{X}|_x, 0) & t = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

定义了切群胚的一个光滑坐标图 $\mathbb{T}M$ 的逆映射。

4. 令 $\mathbb{U} = \mathbb{E}\mathrm{xp}^{\overline{X}}(\tilde{\mathbb{U}}) \in \mathbb{T}M$ 为该坐标图的定义域。则：

$$\mathbb{U} = \Big(TM \times \{0\}\Big) \bigcup \Big(Exp^{\overline{X}}(U) \times \mathbb{R}^*\Big), \tag{4.4}$$

是 $\Big(TM \times \{0\}\Big) \bigcup \Big(\mathrm{diag}(U_0) \times \mathbb{R}^*\Big)$ 在 $\mathbb{T}M$ 中的一个开邻域，其中 $\mathrm{diag}(U_0) = \{(x,x)\ x \in U_0\}$。此外，$\mathbb{U}$ 对 ***Debord-Skandalis*** 作用 *1.2* 不变，并且该作用在 $\mathbb{E}\mathrm{xp}^{\overline{X}}$ 下的拉回为

$$\widetilde{\alpha}_s := (\mathbb{E}\mathrm{xp}^{\overline{X}})^{-1} \circ \alpha_s \circ \mathbb{E}\mathrm{xp}^{\overline{X}} : \tilde{\mathbb{U}} \to \tilde{\mathbb{U}}, \tag{4.5}$$

给出为：

$$\widetilde{\alpha}_s(x,v,t) = (x, \delta_s(v), s^{-1}t). \tag{4.6}$$

5. 存在一个 $\chi_{\mathbb{U}} \in C_c^\infty(\mathbb{T}M)$，其在 ***Debord-Skandalis*** 作用 α_s ***suc*** 下不变 h 使得：

$$\chi_{\mathbb{U}} = \begin{cases} 1 & \textit{in a neighbourhood of } \{(x_0,x_0)\} \times \mathbb{R}, \\ 0 & \textit{outside } \mathbb{U}. \end{cases} \tag{4.7}$$

6. ${}_{\mathbb{K}}\chi_{\mathbb{U}} \in \mathbf{\Psi}^m_{vEY}(\mathbb{T}M)$ 的支集在 $\mathbb{U}$ 中。此外，$\tilde{}_{\mathbb{K}} = (\mathbb{E}\mathrm{xp}^{\overline{X}})^{-1}_*({}_{\mathbb{K}}\chi_{\mathbb{U}})$ 的支集在 $\tilde{\mathbb{U}}$ 中，并且对于作用 $\tilde{\alpha}_s$ 本质上是齐次的。

引理 4.2. 设 $U \subset \mathbb{R}^d$ 是一个开子集。若 $k_0 \in \Psi\mathrm{hf}^0_G(U \times \mathbb{R}^d)$，则算子 $P \in \mathbf{\Psi}^{-d}{}_{H\ddot{o}r}(U)$ 满足 $Res_x(P) = Res^W_x(P)$，其施瓦茨核为 $\chi(x-y)k_0(x,x-y)$，其中 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 在 *0* 的邻域内为 1，在无穷远处为 *0*。

证明。根据 $\Psi\mathrm{hf}^0_G(U \times \mathbb{R}^d)$ 的定义，我们可以写成 $k_0(x,z) = f_0(x,z) + \log(|z|)p_0(x)$，其中 p_0 是 U 上的光滑函数，而 f_0 是关于 z 的 0 阶齐次光滑函数。设 χ 如陈述所述。于是我们令：

1. 令 $l(x,y) = \chi(x-y)\ln(|x-y|)p_0(x)dy$ 为算子 $P = Op(l)$ 的核，其核的渐近展开由 $l_0(x,z) = \ln(|z|)p_0(x)dz$ 以及 $l_j(x,z) = 0$（若 $j > 0$）给出。 2. 令 $r(x,y) = \chi(x-y)f_0(x,x-y)dy$ 为算子 $P = Op(r)$ 的核，其核的渐近展开由 $r_0(x,z) = f_0(x,z)dz$ 以及 $r_j(x,z) = 0$（若 $j > 0$）给出。

我们分别计算这些算子在 $x \in U$ 处的 Wodzicki 留数，所用定义为 1.3。在这两种情况下，请回想公式（3.14）给出了渐近符号展开与渐近核展开之间的联系。

1. 记 $\mathcal{F}_2$ 为关于第二变量的傅里叶变换，我们得到：

$$a_{-d}(x,\xi) \underbrace{=}_{(3.14)} \mathcal{F}_2\Big(p_0(x)\log(|.|)\Big)(\xi) \tag{4.8}$$

$$= p_0(x)\mathcal{F}_2(\log(|.|))(\xi), \tag{4.9}$$

其中，$\mathcal{F}_2(\log(|.|))$ 被解释为温和分布 $z \mapsto \log(|z|)$ 的傅里叶变换。现在，$\mathbb{R}^d$ 中对数的傅里叶变换是众所周知的，对于 $\xi \neq 0$，其形式为：

$$\mathcal{F}_2(\log(|.|))(\xi) = -\frac{1}{|\xi|^d}\frac{(2\pi)^d}{\omega_d}, \tag{4.10}$$

其中 $\omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\sqrt{\pi}^d \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} 2^{d-1}$ 表示单位 $(d-1)$-球的表面积 $\mathbb{S}^{d-1} := \{\xi \in \mathbb{R}^d,\ |\xi| = 1\} \subset \mathbb{R}^d$。于是，在（4.9）中现在可以写成：

$$a_{-d}(x,\xi) \underbrace{=}_{(4.10)} -\frac{p_0(x)}{|\xi|^d} \frac{(2\pi)^d}{\omega_d}. \tag{4.11}$$

因此，由（1.3）可得：

$$Res_x^W(Op(l)) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} -\frac{p_0(x)}{|\xi|^d} \frac{(2\pi)^d}{\omega_d} d\sigma(\xi) dx = -p_0(x) dx, \tag{4.12}$$

其中 $d\sigma$ 表示 $\mathbb{S}^{d-1}$上的通常曲面测度。

2. 由于 $f_0 \in \mathcal{H}^0(U \times \mathbb{R}^d)$，我们可以将其延拓为 $f_0 \in C^\infty(U) \otimes L^\infty(\mathbb{R}^d)$，方法是对所有 $x \in U$，在 $\xi = 0$ 处赋予任意值。所得结果是一个齐次次数为 0 的温和分布（广义函数）。

现在固定 $x \in U$ 继续讨论。根据 [17, 命题 2.4.7，第 140]，页或 [6,第 86]，页，存在 $b_x \in \mathbb{C}$ 和 Ω_x，它们是球面 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的光滑函数，且在 $\mathbb{S}^{d-1}$ 上的积分为 0，使得：

$$\mathcal{F}_2(f_0(x,.))(\xi) = b_x \delta_0 + W_{\Omega_x}(\xi), \tag{4.13}$$

其中 W_{Ω_x} 是主值分布，其在 $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 上的限制为：

$$\Omega_x\Big(\frac{\xi}{|\xi|}\Big) \frac{1}{|\xi|^d}, \tag{4.14}$$

参见 [17, 公式（2.4.12）]。当 $\xi \neq 0$ 时，我们有：

$$a_{-d}(x,\xi) \underbrace{=}_{(3.14)} \mathcal{F}_2(f_0(x,.))(\xi) \tag{4.15}$$

$$\underbrace{=}_{(4.13)} W_{\Omega_x}(\xi), \tag{4.16}$$

在 $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ 中光滑。因此：

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} a_{-d}(x,\xi) d\sigma(\xi) \underbrace{=}_{(4.16)} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} W_{\Omega_x}(\xi) d\sigma(\xi) \tag{4.17}$$

$$\underbrace{=}_{(4.14)} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \Omega_x(\xi) d\sigma(\xi) \tag{4.18}$$

$$= 0, \tag{4.19}$$

其中，最后一个等式根据关于 Ω_x 的假设成立。因此我们有：

$$Res_x^W(Op(r)) = 0. \tag{4.20}$$

现在我们考察与算子 x 所关联的 r-纤维分布上的本质齐次余循环 $Op(l)\ Op(r)$，并证明在 $(x,0,0)$ 处可恢复留数值 (4.12) 和 (4.20)。首先，我们可以分别在 $\mathbf{\Psi}^m_{\mathrm{vEY}}(\mathbb{T}M)$ 中定义两个元素，使它们在 $t = 1$ 上的限制给出核 l 和 r。

1. 设：

$$\begin{cases} \mathbb{I}(x,y,t) = \frac{1}{t^d}\chi(\frac{x-y}{t})\log(\frac{|x-y|}{t})p_0(x)dy & \text{if } t \neq 0 \\ \mathbb{I}(x,v,0) = \chi(v)\log(|v|)p_0(x)d\lambda_x(v) & \text{if } t = 0, \end{cases} \tag{4.21}$$

其中 $d\lambda_x$ 表示切空间 T_xM 在 x处的 Haar 测度。根据引理 4.1 ，相对于标准坐标标架 $\overline{X}$，对 $\mathbb{R}^d$使用指数坐标表示，可得：

$$\tilde{\mathbb{I}}(x,v,t) = \left(\mathbb{E}xp^{\overline{X}}\right)^{-1}_{*}\mathbb{I}(x,v,t) = \chi(v)\log(|v|)p_0(x)d\lambda_x(v). \tag{4.22}$$

回顾 $\tilde{\alpha}_s$ 引理 4.1 中的结果，并利用 $\delta_{s*}(d\lambda_x) = s^{-d}d\lambda_x$，可得：

$$\begin{aligned} s^d\tilde{\alpha}_{s*}\tilde{\mathbb{I}}(x,v,t) - \tilde{\mathbb{I}}(x,v,t) &= s^d\tilde{\mathbb{I}}\Big(x,\delta_{s^{-1}}(v),st\Big)\delta_{s*}(d\lambda_x(v)) - \tilde{\mathbb{I}}(x,v,t) && (4.23)\\ &= -\log(s)\chi(s^{-1}v)p_0(x)d\lambda_x(v) \\ &\quad + \Big(\chi(s^{-1}v) - \chi(v)\Big)\log(|v|)p_0(x)d\lambda_x(v). && (4.24) \end{aligned}$$

由此可得：

$$s^d\tilde{\alpha}_{s*}\tilde{\mathbb{I}} - \tilde{\mathbb{I}} \in C_p^\infty(\tilde{\mathbb{U}},\Omega_r). \tag{4.25}$$

2. 令：

$$\begin{cases} \mathbb{I}_{\mathbb{L}}(x,y,t) = \chi(\frac{x-y}{t})f_0(x,\frac{x-y}{t})dy & \text{if } t \neq 0 \\ \mathbb{I}_{\mathbb{L}}(x,v,0) = \chi(v)f_0(x,v)d\lambda_x(v) & \text{if } t = 0, \end{cases} \tag{4.26}$$

在相同的指数坐标下，我们得到：

$$\tilde{\mathbb{I}}_{\mathbb{L}}(x,v,t) = \left(\mathbb{E}xp^{\overline{X}}\right)^{-1}_{*}\mathbb{I}_{\mathbb{L}}(x,v,t) = \chi(v)f_0(x,v)d\lambda_x(v), \tag{4.27}$$

而 f_0 的齐次性给出：

$$s^d\tilde{\alpha}_{s*}\tilde{\mathbb{I}}_{\mathbb{L}} - \tilde{\mathbb{I}}_{\mathbb{L}} \in C_p^\infty(\tilde{\mathbb{U}},\Omega_r). \tag{4.28}$$

现在我们来计算限制在 $(x,0,0)$ 上的余循环。

1. 利用 (4.24)，对于所有 $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$：

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\alpha}_{s*}\tilde{\mathbb{I}} - s^{-d}\tilde{\mathbb{I}}\right)|_{(x,0,0)} &= -\frac{1}{s^d}\log(s)p_0(x)d\lambda_x && (4.29)\\ &= \frac{1}{s^d}log(s)Res_x^W(Op(l)), && (4.30) \end{aligned}$$

其中，我们使用光滑 1-密度族 $d\lambda_x$ 与 M 上光滑测度 dx 的典范识别。于是：

$$\frac{1}{\log(s)}\left(s^d\tilde{\alpha}_{s*}\tilde{\mathbb{I}} - \tilde{\mathbb{I}}\right)|_{(x,0,0)} = Res_x^W(Op(l)). \tag{4.31}$$

2. 利用 (4.27)，对于所有 $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$：

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\alpha}_{s*}\tilde{\mathbb{I}}_{\mathbb{L}} - s^{-d}\tilde{\mathbb{I}}_{\mathbb{L}}\right)|_{(x,0,0)} &= \left(f_0(x,v)[\chi(\frac{v}{s}) - \chi(v)]d\lambda_x(v)\right)|_{(x,0,0)} && (4.32)\\ &= 0 && (4.33)\\ &= \frac{1}{s^d}\log(s)Res_x^W(Op(r)). && (4.34) \end{aligned}$$

于是：

$$\frac{1}{\log(s)}\left(s^d\tilde{\alpha}_{s*}\tilde{\mathbb{I}}_{\mathbb{L}} - \tilde{\mathbb{I}}_{\mathbb{L}}\right)|_{(x,0,0)} = Res_x^W(Op(r)). \tag{4.35}$$

证明完毕。 □

定理 4.3。 设 M是一个（平凡地）滤过流形，其维数为 d，且 $P \in \mathbf{\Psi}_H^m$（M）是定义在 M上的阶为 m 的经典伪微分算子，满足 $m \leq -d$， $m \in \mathbb{Z}$。设 $_{\mathbb{K}}$ 是任意一个本质齐次的 r-纤维化分布，其阶为 $-d$，并且在 $t = 1$处延拓 P。则：

$$Res_x^W(P) = \frac{1}{\log(s)}\Big(s^d\alpha_{s*}{}_{\mathbb{K}} - {}_{\mathbb{K}}\Big)|_{(x,0,0)},\ \forall\ s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ \forall\ x \in M. \tag{4.36}$$

证明。 首先考虑 $m \leq -d-1$ 的情形。根据 [30, 定理 52]，我们已经知道：

$$_{\mathbb{K}} \in C^0(\mathbb{T}M, \Omega_r), \tag{4.37}$$

因为我们在此假设 $m \leq -d-1$。这意味着：

$$_{\mathbb{K}}(x,v,0) = {}_{\mathbb{I}^0}(x,v)d\lambda_x, \tag{4.38}$$

对于某个 $_{\mathbb{I}^0} \in C^0(TM)$，其中 $d\lambda_x$ 是 T_xM 上的 Haar 测度。

现在我们可以逐项计算余循环项。此外，点 (x, 0, 0) 在 Debord-Skandalis 作用下是不动点。因此，利用 $\delta_{s*}d\lambda_x = s^{-d}d\lambda_x$ 这一事实，我们得到：

$$\frac{1}{\log(s)}\Big(s^d\tilde{\alpha}_{s*}{}_{\mathbb{K}} - {}_{\mathbb{K}}\Big)|_{(x,0,0)} = \frac{1}{\log(s)}\Big({}_{\mathbb{I}^0}(x,0)d\lambda_x - {}_{\mathbb{I}^0}(x,0)d\lambda_x\Big) = 0. \tag{4.39}$$

在这种情况下，这与 Wodzicki 留数一致。事实上，对于这个阶的算子，其符号的渐近展开中出现的项 a_{-d} 总是为零。

若 $m = -d$ 且 $(U_0,\ \phi)$ 是 $x \in M$上的一个坐标图，则该核可渐近展开为$k \sim \sum_{j=0}^{+\infty} k_j$ 在 U_0中；根据 Seeley 定理 3.4，因此我们可以写成：

$$k(x, x-y) - \chi(x-y)k_0(x, x-y) \sim \sum_{j\geq 1} k_j(x, x-y), \tag{4.40}$$

其中 $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 满足： χ 在 0 的某个邻域内等于 1，在无穷远处等于 0。记 (4.40) 的左端为 $\overline{k}(x, x-y)$。于是 $\overline{P} = Op(\overline{k}) \in \mathbf{\Psi}^{m-1}$Hör (M)，并利用刚才的结果可得，对所有 $x \in M$，$Res_x^W(\overline{P}) = Res_x(\overline{P})$。只需将引理 4.2 应用于函数 $k_0 \in \Psi\mathrm{hf}_G^0$ 即可得出结论，因为我们有 $k(x,z) = \overline{k}(x,z) + \chi(z)k_0(x,z)$。 □

5 滤过流形上的非交换留数

在他的文章中 [25], , Ponge 定义了一种适用于 Heisenberg 流形情形的非交换留数。Dave 和 Haller 随后将其推广到任意滤过流形，见 [10]。本节将说明，他们的定义与定义1.4 中的群胚留数一致，适用于阶为 $\leq -d_H$的伪微分算子。为简化记号，我们仍将讨论范围限定为标量值算子，不过利用（1.13）很容易将其推广到向量丛情形。

我们从 Ponge 针对 Heisenberg 流形定义的非交换留数开始。设 M 是一个维数为 $d+1$、超平面丛为 $\mathcal{V} \leq TM$的 Heisenberg 流形。BG [3] 上的 Heisenberg 伪微分算子代数记为 $\mathbf{\Psi}_{\mathcal{V}}^\bullet(M)$。文献[9] 证明，当 $M = \mathbb{H}_n \times \mathbb{R}^m$、 $\mathbb{H}_n$ 为$2n+1$ 维 Heisenberg 群，或 M 为接触流形或余维一叶层时，该代数与群胚演算一致。也就是说：

$$\mathbf{\Psi}_{\mathcal{V}}^m(M) = \mathbf{\Psi}_H^m(M), \tag{5.1}$$

for M 在这些情形下，尽管我们也预期这对一般的 Heisenberg 流形成立 .

Ponge 的非交换留数定义如下。设 $\left(X_j\right)_{j\in\{0,\dots,d\}}$ 是开子集 $U\subset M$ 上的一个局部 H 向量场标架，并设 $\Psi_x: U\to\mathbb{R}^{d+1}$ 是以 x为中心的特权坐标变换，参见 [25, 第 415 页及定义 2.3、2.4]。后一断言意味着，如果 $\left(X_j\right)_{j\in\{0,\dots,d\}}$ 是一个局部 H向量场标架，那么有$\Psi_x(x)=0$ 且 $(\Psi_x)_*X_j(x)=\partial_j|_{x^\circ}$ 在此背景下，Ponge 对 Heisenberg 伪微分算子 $P\in\mathbf{\Psi}_{\mathcal{V}}^{-d_H}(U)$在 U上的 $-d_H$ 阶非交换留数定义如下。

令 p_{-d-2} 为 $P\in\mathbf{\Psi}_{\mathcal{V}}^{-d_H}(U)$ 的符号渐近展开中次数为 $-d_H=-(d+2)$ 的项，参见 [25, 2.7 p409]。于是定义 P 在 x 处的非交换留数：

$$c_P(x)=\frac{|d\Psi_x|}{(2\pi)^{d+1}}\int_{\mathbb{S}^d}p_{-(d+2)}(x,\xi)d\xi, \tag{5.2}$$

其中 $|d\Psi_x|$ 是 Ψ_x的雅可比行列式，参见 [25, 引理 3。9]。读者可以将此定义与“非分次”的非交换留数（1.3）进行比较。

我们先直接证明接触流形或叶状结构上的群胚留数与 Ponge 留数相等。注意，之后我们将利用 Dave-Haller 的结果 [10]，在定理 5.3 中给出一个更一般的结果。

我们先考虑模型群 $M=\mathbb{H}_n\times\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^{d+1}$ 的情形，其中 $d=2n+m$。若 $n=0$，则按约定 $\mathbb{H}_0=\mathbb{R}$。我们用第 1 章 p12-13], 中的模型向量场 $\overline{X}=(X_0,X_1,\dots,X_d)$ 装备 M；另见 [9, 第 5 节。1], 使得 $(X_0,\dots,X_{2n})$ 生成 $\mathbb{H}_n$，X_0 是中心元，而 $(X_{2n+1},\dots,X_d)$ 是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 上通常的向量场。回顾一下，$\mathcal{E}'_r(M\times M)$ 表示对偶群胚 $M\times M$ 上的 r-纤维分布集合。

定理 5.1。设模型流形 $M=\mathbb{H}_n\times\mathbb{R}^m$ 的齐次维数为 $d_H=d+2$，$2n+m=d$其标准模型结构如 *[9]* 和 $P\in\mathbf{\Psi}_{\mathcal{V}}^m(M)$ 所述，且 $m\leq -d_H$，则 *Ponge* 在 x 处的留数与定义 *1.4* 中的留数一致：

$$Res_x(P)=c_P(x). \tag{5.3}$$

证明。我们将大量依赖 [3] 和 [9]。我们用 $k\in\mathcal{E}'_r(M\times M)$ 表示 P 的核。由于 Heisenberg 演算与群胚演算一致（见 [9, 定理 5.16],），存在 $\mathsf{k}\in\mathbf{\Psi}_{vEY}^{-d_H}(\mathbb{T}_HM)$，使得 $\mathsf{k}|_{t=1}=k$。此外，我们可以假设（见 [30, 命题 42]），k 在 $t\in[-1,1]$之外严格为 $-d_H$ 阶齐次。我们按照 [9, 第 5], 节所述，通过指数坐标将其拉回，得到 $\tilde{\mathsf{k}}\in\mathcal{E}'_r($ $M\times\mathbb{R}^{d+1}\times\mathbb{R})$，且等式 $\mathsf{k}=\mathbb{E}\mathrm{xp}_*^{\overline{X}}\left(\tilde{\mathsf{k}}\right)$ 成立。注意，对于模型流形，指数坐标图是全局定义的。

接下来我们必须考虑 P 的符号。根据 Heisenberg 演算的定义，[3, 第 3 章，§ 10], P 的定义以分次多齐次函数 $f\in S_{phg}^{-d_H}$，$G(M\times\mathbb{R}^{d+1})$ 为起点。令 $\overline{\sigma}(x,\xi)=(x,\sigma_0(x,\xi)\dots,\sigma_d(x,\xi))$ 为由模型向量场 $(X_0,\dots,X_d)$ 的符号得到的坐标变换 [3, 公式 (10.14)、(10.15)]，Beals 和 Greiner 将与 f 相关联的 $\mathcal{V}$-符号定义为：

$$q(x,\xi)=\overline{\sigma}^*f(x,\xi). \tag{5.4}$$

另请参见[9, 定义 5.5]。在上述坐标变换之后，符号和核通过纤维傅里叶变换相关联。具体而言，有：

$$f=\mathcal{F}_2(\tilde{\mathbb{k}})|_{t=1}, \tag{5.5}$$

其中， $\mathcal{F}_2$ 是关于第二变量的纤维傅里叶变换。将该纤维傅里叶变换延拓到所有 $t \in \mathbb{R}$，令：

$$u = \mathcal{F}_2(\tilde{\mathbb{K}}) \in C^\infty(M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}). \tag{5.6}$$

注意，Debord-Skandalis 作用在傅里叶变换下变换为：

$$\mathcal{F}_2 \circ \tilde{\alpha}_{s*} \circ \mathcal{F}_2^{-1} = \beta_s^*, \tag{5.7}$$

其中 β_s： $M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R}$ 是膨胀：

$$\beta_s(x, v, t) = (x, \delta_s(v), st), \tag{5.8}$$

见 [9, 命题 .13]。$\tilde{\mathbb{K}}$ 的本质齐次性以及因此 $\tilde{\mathbb{K}} = (\mathbb{E}\mathrm{xp}_*^{\overline{X}})^{-1}(\mathbb{K})$ 的本质齐次性，意味着 $u \in \mathcal{HS}_G^m(M \times \mathbb{R}^{d+1} \times \mathbb{R})$，其中模施瓦茨意义下的齐次性是相对于膨胀 β_s 而言的（感谢关于 $\mathbb{K}$ 在 $t \in [-1, 1]$之外的齐次性假设），见[9, 定理 5.16]的证明。

令 $u_0 = u|_{t=0}$。根据 [9, 命题 3.2]，我们有 $u_0 \in \mathcal{HS}_G^{-d_H}(M \times \mathbb{R}^{d+1})$。因此，根据一个众所周知的引理，例如 [9, 定理 2.1], ，在包含 0 的紧邻域 ξ 之外，我们可以写成：

$$u_0 = u_0' + u_0'', \tag{5.9}$$

其中 $u_0' \in \mathcal{H}_G^{-d_H}(M \times \mathbb{R}^{d+1})$ 且 $u_0'' \in S_G(M \times \mathbb{R}^{d+1})$。

我们可以将齐次函数 u_0' 延拓为一个温和分布（不一定是齐次的），仍记作 u_0'。事实上，我们可以先将 u_0' 延拓为如[3, 节 § 15], [26, 引理 3.1], 或 [20, 定理 3.2.4], 中的分布；由于它在无穷远处具有多项式增长，因此是温和的。因此，我们可以找到 $u_0''' \in C^\infty(M, \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{d+1})) = C^\infty(M) \otimes \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{d+1})$，使得以下等式处处成立：

$$u_0 = u_0' + u_0'' + u_0'''. \tag{5.10}$$

对于所有 $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$，我们可以计算：

$$\begin{aligned} Res_x(P) &= \frac{1}{\log(s)} \left(s^{d_H} \alpha_{s*} \tilde{\mathbb{K}} - \tilde{\mathbb{K}} \right)|_{(x,0,0)} && (5.11) \\ &= \frac{1}{\log(s)} \left(s^{d_H} \alpha_{s*} \mathbb{E}\mathrm{xp}_*^{\overline{X}}\left(\tilde{\mathbb{K}}\right) - \mathbb{E}\mathrm{xp}_*^{\overline{X}}\left(\tilde{\mathbb{K}}\right) \right)|_{(x,0,0)} && (5.12) \\ &= \frac{1}{\log(s)} \left(s^{d_H} \tilde{\alpha}_{s*} \tilde{\mathbb{K}} - \tilde{\mathbb{K}} \right) \circ \left(\mathbb{E}\mathrm{xp}^{\overline{X}} \right)^{-1}|_{(x,0,0)}, && (5.13) \end{aligned}$$

其中在（5.12）中我们使用了等式 $\tilde{\alpha}_s = \left(\mathbb{E}\mathrm{xp}^{\overline{X}} \right)^{-1} \circ \alpha_s \circ \mathbb{E}\mathrm{xp}^{\overline{X}}$，见（4.5）。还要注意 $\mathbb{E}\mathrm{xp}^{\overline{X}}|_{M \times \{0\} \times \{0\}} = id_{M \times \{0\} \times \{0\}}$。接下来我们继续计算（5.13）：

$$\begin{aligned} Res_x(P) &= \frac{1}{\log(s)} \left(s^{d_H} \tilde{\alpha}_{s*} \mathcal{F}_2^{-1}(u) - \mathcal{F}_2^{-1}(u) \right)|_{(x,0,0)} && (5.14) \\ &= \frac{1}{\log(s)} \mathcal{F}_2^{-1} \left(s^{d_H} \beta_s^* u - u \right)|_{(x,0,0)}, && (5.15) \end{aligned}$$

其中我们使用了 $\mathcal{F}_2 \circ \tilde{\alpha}_{s*} \mathcal{F}_2^{-1} = \beta_s^*$ 之前回顾过的等式。现在我们使用（5.10）：

$$\begin{aligned} Res_x(P) &= \frac{1}{\log(s)} \mathcal{F}_2^{-1} \left(s^{d_H} \beta_s^*(u_0' + u_0'' + u_0''') - (u_0' + u_0'' + u_0''') \right)|_{(x,0,0)} && (5.16) \\ &= \frac{1}{\log(s)} \mathcal{F}_2^{-1} \left(s^{d_H} \beta_s^* u_0' - u_0' + s^{d_H} \beta_s^*(u_0'' + u_0''') - (u_0'' + u_0''') \right)|_{(x,0,0)}. && (5.17) \end{aligned}$$

由于 u_0'' 在 ξ 中属于施瓦茨类，而 u_0'''在 ξ中具有紧支集，它们的纤维傅里叶变换是光滑的。

因此，$\mathcal{F}_2^{-1}(u_0'')$和 $\mathcal{F}_2^{-1}(u_0''')$可以在 $(x,\ 0,\ 0)$处求值，并按照定理 4.3的证明，对于所有 $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$，我们得到：

$$\frac{1}{\log(s)}\mathcal{F}_2^{-1}\Big(s^{d_H}\beta_s^*(u_0''+u_0''')-(u_0''+u_0''')\Big)|_{(x,0,0)}=0. \tag{5.18}$$

因此：

$$Res_x(P)=\frac{1}{\log(s)}\mathcal{F}_2^{-1}\Big(s^{d_H}\beta_s^*u_0'-u_0'\Big)|_{(x,0,0)}. \tag{5.19}$$

最后，我们使用 [25, 引理 3.1 p 414 和公式 (3.2)] ，它们断言对于所有$s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$，我们都有：

$$\beta_s^*u_0' = s^{-d_H}u_0' + s^{-d_H}\log(s)c_0(u_0')\delta_0, \tag{5.20}$$

其中：

$$c_0(u_0') = \int_{|\xi|=1} u_0'(x,\xi)d\sigma(\xi). \tag{5.21}$$

那么，利用（5.20），公式（5.19）变为：

$$Res_x(P)=\frac{1}{\log(s)}\mathcal{F}_2^{-1}\Big(\log(s)c_0(u_0')\delta_0\Big)|_{(x,0,0)} \tag{5.22}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}\int_{|\xi|=1}u_0'(x,\xi)d\sigma(\xi), \tag{5.23}$$

其中，常数 $\frac{1}{(2\pi)^{d+1}}$ 出现在傅里叶逆变换公式中。现在，利用 [3, 公式 (3.25) p 27] ，我们看到：

$$^t\Big(d\Psi_x\Big)\xi=\sigma(x,\xi), \tag{5.24}$$

其中，σ 定义于 [9, 方程（5.12）]中。读者可以计算 Ψ_x的雅可比行列式，并可见它是三角形且幺幂的，因此行列式等于一，另见[8]。

根据 [9, 定理 1.12], 的证明 p8，u_0 的纯齐次分量 u_0' 是多齐次函数 $f=u|_{t=1}$渐近展开的首项，见[9, 方程（3.16）] 及其后的注释。因此：

$$u_0'(x,\xi)=p_{-(d+2)}(x,\xi), \tag{5.25}$$

其中，$p_{-(d+2)}$ 是 $f=u|_{t=1}$渐近展开中次数为 $-(d+2)$ 的项。我们已经证明：

$$Res_x(P)=\frac{|d\Psi_x|}{(2\pi)^{d+1}}\int_{|\xi|=1}p_{-(d+2)}(x,\xi)d\sigma(\xi). \tag{5.26}$$

□

推论 5.2. 若 M 是接触流形或余维一叶层，则定义*1.4* 中的群胚留数与算子 $P \in \mathbf{\Psi}_{\mathcal{V}}^{-d_H}(M)$的 *Ponge* 非交换留数一致，(5.3) 仍然成立。

证明。 接触流形上的达布定理，或余维为一的叶状结构上的弗罗贝尼乌斯定理表明，对于任意 $x \in M$，其周围都存在一个局部坐标系，将 M 与模型空间 $\mathbb{H}_n$、 $d=2n$或 $\mathbb{H}_0 \times \mathbb{R}^d$对应起来。由于 Ponge 留数和群胚留数都与（优选）坐标无关，结论得证。

□

最后，我们证明群胚留数等于 Dave 和 Haller 的非交换留数。设 M 是一个闭滤过流形。回顾一下，在此背景下，椭圆算子的恰当类比是 Rockland 算子，定义如下。在每个点 $x \in M$，滤过阶为 m 的微分算子 D 有一个主部 $\sigma_x^m(D)$，它是密切群 $\mathcal{T}_H M_x$ 上的左不变齐次微分算子，因此是包络代数 $\mathcal{U}(\mathfrak{t}_H M_x)$的一个元素。若对于每个$x \in M$ 以及 $\mathcal{T}_H M_x$ 的每个非平凡不可约酉表示，算子$\pi(\sigma_x^m(D))$均可逆，则该算子称为 Rockland 算子。

固定一个严格正的 Rockland 微分算子 D，作用于 M，其相对于滤过的阶为偶数 $r > 0$。若 $P \in \Psi_H^m(M)$ 是 [30], 上的群胚演算中的伪微分算子，那么 Dave 和 Haller [10] 证明了 ζ 函数

$$\zeta_P(z) = \mathrm{Tr}(PD^{-z})$$

在 $\Re(z) > (n+k)/r$ 上定义良好，并且可亚纯延拓，至多在 $(d_H + m - j)/r$ 处有简单极点，其中 $j \in \mathbb{N}$。随后，他们定义非交换留数 τ 如下：

$$\tau(P) = r.\mathrm{res}_{z=0}(\zeta_P(z)). \tag{5.27}$$

定理 5.3。 设 M是一个闭滤过流形，且 $P \in \Psi_H^m(M)$。若 P的阶为$m \leq -d_H$，则 *Dave-Haller* 的非交换留数 (5.27) 等于定义*1.4*中的群胚留数的积分，

$$\tau(P) = \int_M Res_x(P).$$

证明。设 $k \in \mathcal{E}_r'(M \times M)$ 是 P 的核。只需考虑 $m = -d_H$ 的情形，因为否则两个留数都为 0。因此，存在 $\mathsf{k} \in \mathcal{E}_r'(\mathbb{T}_H M)$，它相对于 Debord-Skandalis 作用本质上是 $m = -d_H$ 阶齐次的，并且 $\mathsf{k}|_{t=1} = k$。限制 $k_0 := \mathsf{k}|_{t=0} \in \mathcal{E}_r'(\mathcal{T}_H M)$ 是一个纤维分布；相对于分次膨胀δ_s对分布的推前，它模去 C^∞ 后为 $-d_H$ 阶齐次。具体而言，它是核 k 的伪齐次展开中的首项，参见例如 [12, 注 3.4]。将 k_0 视为广义函数，它是一个 0 次伪齐次函数，其中 d_H 的阶移位如注 2 所述。具体来说，这意味着

$$k_0(x, \xi) = f_0(x, \xi) + \log(|\xi|)p_0(x)$$

对于某些 f_0 0 阶齐次的 以及 $p_0 \in C^\infty(M)$，参见 (3.5)。

现在，根据 Dave-Haller [10, 推论 6(d)],

$$\tau(P) = \int_M p_0(x)\, dx.$$

另一方面，对余循环 (1.8) 的直接计算表明，点 $x \in M$ 处的群胚留数由下式给出

$$Res_x P = \frac{1}{\log(s)} \left(\log|\delta_s(\xi)|\, p_0(x) - \log|\xi|\, p_0(x)\right)|_{\xi=0} = p_0(x),$$

以类似于引理 4.2的证明的方式，参见公式（4.21）及其后内容。结论随即得出。

□

参考文献

[1] Thomas Ackermann。《关于 Wodzicki 留数的注记》。《几何与物理学杂志》，20(4)：404–406，1996年。[2] Iakovos Androulidakis 和 Georges Skandalis。《奇异叶状结构上的伪微分演算》。《非交换几何杂志》，5(1)：125–152，2010年。[3] Richard Beals 和 Peter Charles Greiner。《海森堡流形上的演算》。（AM-119），第119卷。普林斯顿大学出版社，1988年。[4] Duván Cardona、César del Corral 和 Vishvesh Kumar。《离散伪微分算子的 Dixmier 迹》。《伪微分算子与应用杂志》，11(2)：647–656，2020年。[5]Woocheol Choi 和 Raphael Ponge。《Carnot 流形的切映射与切群胚》。《微分几何及其应用》，62：136–183，2019年。https://doi.org/10.1016/j.difgeo.2018.11.002。[6] Ronald R Coifman 和 Yves Meyer。《超越伪微分算子》。1978年。[7] Alain Connes。《非交换几何》。海湾专业出版公司，1994年。[8] Nathan Couchet。《一种群胚方法：海森堡流形上的伪微分演算与 Wodzicki 留数》。博士学位论文，克莱蒙-奥弗涅大学，LMBP。2023年准备中。[9] Nathan Couchet 和 Robert Yuncken。《关于齐次多项式符号与海森堡伪微分演算》。2022年。https://arxiv.org/abs/2210.15391。[10] Shantanu Dave 和 Stefan Haller。《滤过流形上的热渐近展开》。《几何分析杂志》，30(1)：337–389，2020年。[11] Shantanu Dave 和 Stefan Haller。《BGG 序列的分次亚椭圆性》。《全球分析与几何年刊》，62(4)：721–789，2022年。[12] Shantanu Dave 和 Stefan Haller。《BGG 序列的分次亚椭圆性》。《全球分析与几何年刊》，62(4)：721–789，2022年。[13] Claire Debord 和 Georges Skandalis。《绝热群胚、叉积与$\mathbb{R}_+^*$ 伪微分演算》。《数学进展》，257：66–91，2014年。https://doi.org/10.1016/j.aim.2014.02.012。[14] Jacques Faraut。《李群上的分析》，第110卷。2008年。[15] Gerald B Folland。《抽象调和分析教程》，第29卷。CRC出版社，2016年。[16] Friedrich Gerard Friedlander、Mark Suresh Joshi 和 M Joshi。《分布理论导论》。剑桥大学出版社，1998年。[17] Loukas Grafakos。《经典傅里叶分析》，第2卷。施普林格，2008年。[18] Victor Guillemin。《关于特征值渐近分布的 Weyl 公式的新证明》。《数学进展》，55(2)：131–160，1985年。[19] Nigel Higson、Fedor Sukochev 和 Dmitriy Zanin。《准备中》。[20] Lars Hörmander。《偏微分算子的分析》。施普林格，第2版，1983年。[21] George C Hsiao 和 Wolfgang L Wendland。《边界积分方程》。施普林格，2008年。

[22] H. Figueroa J. Varilly, J. Gracia Bondia。《非交换几何要义》。Springer，第7章：251-318，2001年。[23] Christian Kassel。《非交换留数》。Bourbaki 讨论班，708：199–229，1989年。http://www.numdam.org/article/SB_1988-1989__31__199_0.pdf。[24] Jean-Marie Lescure、Dominique Manchon 和 Stéphane Vassout。《群胚上分布的卷积》。《非交换几何杂志》，11(2)：757–789，2017年。https://doi.org/10.4171/JNCG/11-2-10。[25] Raphaël Ponge。《海森堡流形上的非交换留数：在 CR 几何与接触几何中的应用》。《泛函分析杂志》，252(2)：399–463，2007年。https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022123607002753。[26]Raphaël Ponge。《海森堡演算与海森堡流形上次椭圆算子的谱理论》。美国数学学会，2008年。https://doi.org/10.1090/memo/0906。[27] Raphael Ponge。《Connes积分与Weyl定律》。arXiv 预印本 arXiv:2107.01242，2021年。[28] Robert Seeley。《伪微分算子专题》。Springer，2011年。[29]Erik van Erp 和 Robert Yuncken。《滤过流形的切群胚》。Bull. Lond. Math. Soc.，49(6)：1000–1012，2017年。https://doi.org/10.1112/blms.12096。[30] Erik Van Erp 和 Robert Yuncken。《伪微分演算的群胚方法》。Journal für die reine und angewandte Mathematik（Crelles Journal），2019(756)：151–182，2019年。https://doi.org/10.1515/crelle-2017-0035。[31] Stéphane Vassout。《叶状结构与纵向非交换留数》。博士学位论文，巴黎第六大学，2001年。[32]Hermann Weyl。《关于特征值的渐近分布》。哥廷根科学学会会刊，数学-物理类，1911：110–117，1911年。[33] Mariusz Wodzicki。《谱不对称性的局部不变量》。Inventiones mathematicae，75(1)：143–177，1984年。[34] Mariusz Wodzicki。《谱不对称性与非交换留数》。博士学位论文，Stekhlov数学研究所，莫斯科，1984年。