arXiv:2303.15906v1 [math.AG] 28 Mar 2023

移动引理与同伦 coniveau 塔

´ ´ ´FREDERIC DEGLISE、NIELS FELD 和 FANGZHOU JIN

摘要。本文通过底概形上的移动引理，研究动机同伦理论中 coniveau 过滤的函子性，并将 Levine 和 Bachmann-Yakerson 先前的工作加以推广。主要结果是，动机稳定同伦范畴可以由一个更小的位点——光滑-光滑位点——来建模。证明基于一种利用特化映射研究 Morel-Voevodsky 纯性~~定理的新方法；事实~~证明，即使缺少 $\mathbb{A}^1$-同伦不变性，该方法仍然成立。本文还给出了该结果在同伦 coniveau 塔和高阶 Chow-Witt 群方面的应用。

目录

1. 引言 1 1.1. 动机同伦理论中的 Gysin 态射 1 1.2. perverse 同伦心与 Milnor-Witt 循环模 3 1.3. 同伦 coniveau 塔 3 2. Artin 逼近 5 3. 纯性与特化 6 4. 通过光滑-光滑位点实现的移动引理 13 参考文献 14

1. 引言

1.1. 动机同伦理论中的 Gysin 态射。20 世纪 90 年代末，Voevodsky 开始尝试统一代数方法与拓扑方法。Morel 和 Voevodsky 将代数几何与同伦论相结合，发展出了如今所称的动机同伦理论。其核心思想是将经典代数拓扑中的技术应用于概形的研究，以由 $[0,1]$ 参数化的拓扑变形取代由仿射直线 $\mathbb{A}^1$ 参数化的代数变形。[1] 动机同伦最初作为 Voevodsky 混合动机理论的背景登上舞台，随后成为他证明 Milnor 猜想和 Bloch-Kato 猜想的重要工具。它催生了许多新

日期：29-3-2023。[1]请注意，与拓扑学中一样，既有符合直观概念的“强”（代数）$\mathbb{A}^1$-同伦，也有以非平凡方式将强同伦与 Nisnevich 拓扑结合起来的“弱”$\mathbb{A}^1$-同伦。后者解释了动机同伦的微妙之处。

概念，其中包括动机 Steenrod 代数、代数配边，以及（混合）动机复形范畴；如今，这些内容已被纳入更一般的动机稳定同伦范畴。

动机同伦的一个主要基本结果是 Morel 和 Voevodsky 的以下定理 [MV99，定理 2.23，第 3] 节：

定理 1.1.1（Morel-Voevodsky 纯性同构）。设 S 是有限维诺特图式。对于 S 上光滑概形之间的每个闭浸入 $Z \to X$，存在一个自然同构

$$X/(X-Z) \simeq \mathrm{Th}(N_Z X)$$

在动机带基点不稳定同伦范畴中 $\mathscr{H}_S$，其中 Th($N_Z X$) $= N_Z X/(N_Z X - Z)$ 是 X 中 Z 的法丛 $N_Z X$ 的 Thom 空间。

定理 1.1.1 可视为闭光滑流形浸入的管状邻域理论的代数类比。同样，它还带来了许多有趣的推论，例如向量丛的 Gysin 正合列的存在，或 Gysin 态射的存在。

在本文中，我们考虑光滑-光滑位点 Sm_S^{sm}，即由光滑 S-概形及其光滑态射构成的范畴上的 Nisnevich 位点，并将先前的定理推广如下：

定理 1.1.2（一般纯性定理）。（见定理 3.0.7）设 S 是一个优良诺特图式。设 i：$Z \to X$ 是光滑概形之间的闭浸入，且它们定义在 S 上。存在一个弱等价

$$\mathfrak{p}_{X,Z} : X/(X-Z) \simeq \mathrm{Th}(N_Z X)$$

在光滑-光滑位点 Sm_S^{sm} 上的 Nisnevich 层的 ∞-范畴中。

我们强调，定理 1.1.2 一般成立，无需假设 $\mathbf{A}^1$-同伦不变性。此结果用于证明我们的主要结果：

定理 1.1.3（一般动机移动引理）。对于任意优良诺特图式 S，令 $\nu : \mathrm{Sm}_S^{sm} \to \mathrm{Sm}_S$ 为 Nisnevich 位点的典范包含。限制函子：

$$\nu^* : \mathrm{SH}(Sm_S) \to \mathrm{SH}(Sm_S^{sm})$$

是单oidal ∞范畴之间的等价。

换言之，只要一个 Nisnevich 层满足 $\mathbf{A}^1$-局部化性质并具有无限 $\mathbb{G}_m$-圈空间的结构，我们只需考察沿光滑态射的拉回，就能重构其完整的函子性。作为一个具体例子，可以考虑混合 Weil 理论[2]，见 [CD12]：只需在光滑仿射图式上给出这样一个仅涉及光滑态射的函子，就足以重构完整的上同调理论，特别是关于光滑（事实上甚至是奇异）S-概形之间任意态射的拉回。

[2]回顾一下，例子包括 de Rham、（几何）´etale 以及刚性上同调

1.2. Perverse 同伦心与 Milnor-Witt 循环模。Milnor-Witt 循环模的概念由第二位署名作者在 [Fel20] 中引入，定义在完美域上，并在 [Fel21b、Fel21c、Fel21d] 中进行了研究。Milnor-Witt 循环模推广了 Rost 理论[Ros96]，为发展二次交理论问题 [Fel21a] 及其在双有理几何中的应用 [Fel22]提供了一个实用框架。

稍作修改后，Milnor-Witt 循环模理论可以推广到正则基概形（见 [BHP22]）。对于奇异概形，这一理论则更为复杂，相关问题已在 [DFJ22] 中得到处理。

我们关注 Milnor-Witt 循环模，是因为它们可用于计算动机同伦范畴的心，如下文所述。

Voevodsky 在完美域 k 上的动机复形范畴 DM(k) 中定义了一种 t-结构，即同伦 t-结构，其心可识别为带转移的同伦不变层这一阿贝尔范畴。在第一作者的论文中，这个心又被识别为 k 上的 Rost 的循环模范畴（见 [D´eg11，命题 5.6]）；这是对 Voevodsky 所证明的带转移同伦层的 Gersten 分解的一种相当宽泛的推广。尽管这种 t-结构并非猜想中的动机 t-结构的候选者（后者的心给出混合动机的阿贝尔范畴），Voevodsky 仍期望能以这种结构为基础定义后者。

Morel 也在 SH(k) 上定义了同伦 t-结构，事实证明它是代数拓扑中 Postnikov 塔的一个类似物。Ayoub 在 [Ayo07]中将这些构造进一步推广到底概形：所谓的 perverse 同伦 t-结构具有一个显著特征，即它是按照 Beilinson-Bernstein-Deligne-Gabber 的意义通过粘合得到的。Ayoub 对 perverse 同伦 t-结构的心提出了以下猜想:

猜想。设 S 是一个特征为 0 的诺特优良有限维基概形。那么，DM(S) 上 perverse 同伦 t-结构的心等价于 S上的 Rost 循环模范畴。

在我们的论文 [DFJ22] 中，我们证明了这一猜想，并且在若干方面对其进行了加强。一个关键步骤来自 [BD17], 的工作，该工作将 Ayoub 的构造推广到了赋有维数函数的概形：perverse 同伦 t-结构在等特征 p 且系数为 $\mathbb{Z}[1/p]$时是非退化的，在混合特征下则对有理系数是非退化的。其次，借助 [Fel21c], 关于 Milnor-Witt 模的基础工作，我们可以在以稳定动机同伦范畴 SH 替代动机复形范畴 DM 时表述并证明这一猜想。

证明中的一个主要技术难点，是将 SH(S) 中对象上的 coniveau 过滤的函子性（该过滤与 S 上给定的维数函数相关联）扩展到光滑 S-概形之间的所有态射（这些态射总是局部完全交），而除非该态射是平坦的，否则这一点并不显然。我们的主定理定理 1.1.3 使我们能够绕过这一问题，并直接推论出所需的增强函子性。

1.3. 同伦 coniveau 塔。设 B 是一个有限克鲁尔维数的诺特分离概形。对于从有限型光滑 B-概形到 $_B \to$ Spt 的函子 E

谱，Levine 在 [Lev06] 中构造了同伦 coniveau 塔

$$\cdots \to E^{(p+1)}(X,-) \to E^{(p)}(X,-) \to \cdots \to E^{(0)}(X,-).$$

$E^{(p)}(X,-)$ 是单纯谱，其 n-单形是具有支撑 $E^W(X\times\Delta_n)$ 的谱的极限，其中 W 遍历 $X\times\Delta_n$ 的闭子集，并满足对于代数 n-单形 Δ_n 的所有面，$\mathrm{codim}_{XF}(W\cap(X\times F)) \geq p$。

令 $E^{(p/p+1)}(X,-)$ 表示映射 $E^{(p+1)}(X,-) \to E^{(p)}(X,-)$ 的同伦余纤维。同伦 coniveau 塔的一个直接推论是谱序列

$$E_1^{p,q} := \pi_{-p-q}(E^{(p/p+1)}(X,-)) \Rightarrow \pi_{-p-q}(E^{(0)}(X,-)),$$

在 K 理论谱的情形下，它给出了从动机上同调到 K 理论的 Bloch-Lichtenbaum 谱序列（见 [FS02]）。

[Lev06] 的主要结果给出了上述谱序列关于 Sm_B 的函子性，其中 B 是一个 Dedekind 概形。为实现这一点，Levine 首先在 X 的 Nisnevich 位点 X_{Nis} 上，构造预层 S^1-谱 $U \mapsto E^{(p)}(U,-)$ 的函子模型，并记为 $E^{(p)}(X_{Nis},-)$。该构造使用了经典方法的推广，这种经典方法用于证明关于有理等价的循环的 Chow 移动引理。这为一个类似谱序列的函子性提供了保证，其中 $E^{(p)}(X,-)$ 被 $E^{(p)}(X_{Nis},-)$ 的纤维化模型所替代。随后，谱序列的函子性由 $E^{(p)}(X,-)$ 的局部化性质推出；这些性质在 [Lev01] 中得到了发展。

我们的主要定理 1.1.3 可用于替代 Levine 的移动引理，代价是必须在 $\mathbb{G}_m$-稳定范畴中工作。此外，只要使用（余）维数函数来定义 coniveau 过滤，我们便能得到一个对任意优良诺特底概形都成立的结果。例如，这或许可用于将 Bloch 高阶 Chow 群理论推广到任意底概形上。不过需要注意的是，即便采用这一新方法，局部化性质仍然是一个未解决的问题。

[Lev06] 的主要构造后来被 [BY20] 用于研究完美底域上的动机保守性猜想。该猜想的特例也已在 [Bac20] 中得到证明，并在 [Fel21c] 中得到改进。我们希望利用目前的结果来一般性地研究这些问题。

记号与约定。

- 所有概形均假设为诺特且有限维。
- 我们固定一个优良底概形 S 和一个系数环 R。除非另有说明，所有概形及概形之间的态射均定义在 S 上。
- 对于概形 T，T 的一个点（分别地，特征、奇异特征）是一个本质有限型的概形态射，其从域的谱（分别地，离散赋值环的谱、一维局部环的谱）指向 T。它们之间的态射是 T-概形的态射。

致谢。作者衷心感谢 Aravind Asok、Joseph Ayoub、Mikhail Bon- darko、Baptiste Calm`es、Jean Fasel、Marc Levine、Johannes Nagel、Paul Arne Østvær 和 Bertrand To¨en，感谢他们的交流、讨论和构想，这些共同促成了本文的诞生。

第一作者和第二作者的工作得到 ANR HQDIAG 项目（编号 ANR-21-CE40-0015）的资助。第二作者的工作得到法国国家计划“Investissement d’Avenir”框架下 ANR LabEx CIMI 的资助。第三作者的工作得到中国国家重点研发计划（编号 2021-YFA1001400）、国家自然科学基金委员会（编号 12101455）以及中央高校基本科研业务费的资助。

2. Artin 逼近

2.0.1. 回顾一下，若 X 是一个概形，$Z \subset X$ 是一个子概形，且 $x \in Z$ 是 X 中 x 的一个 Nisnevich 邻域，则它是一个带基点概形 (W, w) 到 (X, x) 的 ´étale 态射，并配有一个截面 (Z, x) 到 (W, w)。~~Artin 逼近性质蕴含以下~~结果：

定理 2.0.2（[Pop86，定理 1.3], [Art69，推论 2.6]）。设 (S, s) 是一个带基点的优良诺特图式。设 (X, x) 和 (Y, y) 是两个本质上有限型的 (S, s)-概形。$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$若完备局部环之间存在一个 $\mathcal{O}_S$-线性同构 $\mathcal{O}_{X,\,x} \simeq \mathcal{O}_{Y,\,y}$，那么点 x 和 y 有一个共同的 Nisnevich 邻域，也就是说，存在一个 S-概形的图表

$$(X, x) \xleftarrow{f} (W, w) \xrightarrow{g} (Y, y) \tag{2.0.2.a}$$

使得 (W, w) 成为 x 和 y二者的 Nisnevich 邻域。

2.0.3. 现在回顾 [D´eg19 中定理 1.4.6] 的一个构造。设 S 是一个优良诺特概形，并且

$$X \leftarrow Z \rightarrow Y \tag{2.0.3.a}$$

be a S-概形的交换图，其中两个态射都是闭浸入。我们假设 at

- 对于每个点 $z \in Z$，都存在一个 $\mathcal{O}_S$-线性同构，将完备局部环

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,z} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{Y,z}. \tag{2.0.3.b}$$

- 闭浸入 $Z \to Y$ 具有一个回缩 $Y \to Z$，因此我们可以通过复合 $Y \to Z \to X$将 Y 视为一个在 X 上的概形。

2.0.4. 在 2.0.3 的情形下，我们将形如以下交换图的全体对象所成的范畴记为 $\Gamma($ $X \leftarrow Z \rightarrow Y)$

$$\Gamma: \quad \begin{array}{ccccc} & & \mathcal{W} & & \\ & \swarrow^{f} & \uparrow & \searrow^{g} & \\ \mathcal{X} & \leftarrow & \mathcal{Z} & \rightarrow & \mathcal{Y} \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X & \leftarrow & Z & \rightarrow & Y \end{array} \tag{2.0.4.a}$$

其中

- $\mathcal{X}$ 是 X的 Zariski 超覆盖，并且两个方块都是笛卡尔的。

• $\mathcal{W}$ 是一个单纯 S-概形，使得在每个次数 $n \geqslant 0$上， $\mathcal{W}_n$ 都是 $\mathcal{X}_n$ 中 $\mathcal{Z}_n$ 与 $\mathcal{Y}_n$的公共 Nisnevich 邻域。

$\Gamma(X \leftarrow Z \rightarrow Y)$ 中的态射是交换图表的态射，它们由 Zariski 超覆盖的态射 $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ 和 Nisnevich 邻域的态射 $\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}'$ 诱导。

引理 2.0.5。范畴 $\Gamma(X \leftarrow Z \rightarrow Y)$ 非空且余滤。

证明。对于每个点 $z \in Z$，将定理 2.0.2 应用于带点的局部 S-概形 $(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,z}) z)$ 和 $(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,z}) z)$，可知 z 在这两个概形中有一个共同的 Nisnevich 邻域 $W_{(z)}$ ；这一性质可以提升到 z 的某个 Zariski 邻域，即存在一个 S-概形的交换图

(2.0.5.a)
$$\begin{array}{ccccc} & & W_z & & \\ & \swarrow^{f_z} & \uparrow & \searrow^{g_z} & \\ X_z & \leftarrow & Z_z & \rightarrow & Y_z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X & \leftarrow & Z & \rightarrow & Y \end{array}$$

其中 X_z、Y_z、Z_z 是 z 在 X、Y、Z 中的 Zariski 开邻域，两个方块都是笛卡尔的，而态射 f_z 和 g_z 是 Z_z 的 Nisnevich 邻域。

对于所有点 $z \in Z$，图 (2.0.5.a) 都可以通过取 Čech 神经组装成形式为 (2.0.4.a) 的交换图，从而得到 $\Gamma(X \leftarrow Z \rightarrow Y)$ 中的一个元素。因此，范畴 $\Gamma(X \leftarrow Z \rightarrow Y)$ 非空。

接下来只需证明这个范畴是余滤的。通过在 Zariski 局部进行论证，我们可以假设 X 和 Y 是具有共同闭点 $Z = z$ 的局部对象。如果 $X \leftarrow W \rightarrow Y$ 和 $X \leftarrow W' \rightarrow Y$ 是 z 的两个共同 Nisnevich 邻域，那么存在一个 $\mathcal{O}_S$-线性$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$同构，将完备局部环 $\mathcal{O}_{W,z} \simeq \mathcal{O}_{W',z}$ 对应起来；根据定理 2.0.2，W 和 W' 均可由第三个 Nisnevich 邻域 $W \leftarrow W'' \rightarrow W'$ 加以细化。由与上述相同的论证可知，范畴 $\Gamma(X \leftarrow Z \rightarrow Y)$ 是余滤的。□

3. 纯性与特化

3.0.1. 假设 1

设 X 是 S 上的光滑概形， $t\colon X \rightarrow \mathbf{A}^1_S$ 是一个 S-概形之间的态射，使得$Z := V(t) := t^{-1}(0)$ 在 S 上是光滑的。

3.0.2. 假设 2

设 X 是 S 上的光滑概形， $t\colon X \rightarrow \mathbf{A}^1_S$ 是一个 S-概形之间的态射，使得$Z := V(t) := t^{-1}(0)$ 在 S 上是光滑的，并配有一个回缩 $r_X\colon X \rightarrow Z$。

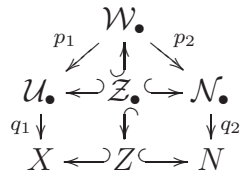
引理 3.0.3. 设 X 是 S 上的光滑概形， $t\colon X \rightarrow \mathbf{A}^1$ 是一个 S-概形之间的态射，使得 $Z := V(t) := t^{-1}(0)$ 在 S 上是光滑的。

存在一个回缩 $\rho\colon \widehat{X_Z} \rightarrow Z$ 对于诱导浸入 $Z \rightarrow \widehat{X_Z}$。记 $\psi_t\colon N_Z X \rightarrow \mathbf{A}^1_Z$ 为概形的同构。我们得到诱导的同构

$$\widehat{X}_Z \xrightarrow{\simeq} \widehat{\mathbf{A}^1_Z} \xrightarrow[\psi_t^{-1}]{\simeq} \widehat{\mathbf{N}_Z X}$$

$\mathbf{A}^1_S$-概形的同构。

定义 3.0.4. 设 (X, Z) 如 3.0.1 所述（相应地，(X, Z, r_X) 如 3.0.2 所述），并令 $N := N_Z X$（相应地，配备典范投影 $r_N\colon N \to Z$）。我们将 $\mathscr{I}(X, Z)$（相应地，$\mathscr{I}(X, Z, r_X)$）定义为由以下 $\mathrm{Sm}^{sm}{}_{\mathbf{A}^1_S}$ 中的数据构成的范畴：



其中，且

- $\mathcal{Z}_\bullet = Z \times_X \mathcal{U}_\bullet$,
- q_1（因此 q_2）是一个 Zariski 超覆盖,
- 对于每个整数 $n \geq 0$，$(\mathcal{W}_n, \mathcal{Z}_n) \to (\mathcal{U}_n, \mathcal{Z}_n)$ 和 $(\mathcal{W}_n, \mathcal{Z}_n) \to (\mathcal{N}_n, \mathcal{Z}_n)$ 是光滑闭 S-对之间的切除态射。
- （相应地，我们有与先前数据相容的回缩 $\mathcal{U}_\bullet \to \mathcal{Z}_\bullet$、$\mathcal{N}_\bullet \to \mathcal{Z}_\bullet$、$\mathcal{U}_\bullet \to \mathcal{W}_\bullet$、$\mathcal{N}_\bullet \to \mathcal{W}_\bullet$）。

引理 3.0.5。设 (X, Z) 如 3.0.1 中所述（相应地，(X, Z, r_X) 如 3.0.2 中所述）。范畴 $\mathscr{I}(X, Z)$（相应地，$\mathscr{I}(X, Z, r_X)$）非空且余滤。

证明。这是引理 2.0.5 的一个特例。 □

3.0.6。• 记 $\mathcal{C}$ 为在 Sm^{sm}_S 上的单纯 Nisnevich 层的 pro-对象的 ∞-范畴。

• 对于如 3.0.1 中所述的 (X, Z)（相应地，对于如 3.0.2 中所述的 (X, Z, r_X)），我们记

$$\wp(X, Z) = \varprojlim_{\mathcal{W}_\bullet \in \mathscr{I}(X,Z)} \mathcal{W}_\bullet / (\mathcal{W}_\bullet - \mathcal{Z}_\bullet),$$
$$\text{resp. } \wp(X, Z, r_X) = \varprojlim_{\mathcal{W}_\bullet \in \mathscr{I}(X,Z,r_X)} \mathcal{W}_\bullet / (\mathcal{W}_\bullet - \mathcal{Z}_\bullet)$$

视为 $\mathcal{C}$中的一个对象。

固定 $\mathscr{I}(X,Z)$（分别为 $\mathscr{I}(X,Z,r_X)$）中的图（$\mathcal{U}_\bullet,\mathcal{W}_\bullet,\mathcal{N}_\bullet$）。我们在 $\mathcal{C}$中有如下图：

$$\begin{array}{ccccc} X/(X-Z) & \xrightarrow{\text{(HR)}} & \mathcal{U}_\bullet/(\mathcal{U}_\bullet-\mathcal{Z}_\bullet) & = & X/(X-Z)\times\mathcal{U}_\bullet \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{p}_{X,Z}} & & & & \Big\uparrow{\scriptstyle p_1}\simeq \\ \mathrm{Th}(N_ZX) & \longleftarrow & \mathcal{N}_\bullet/(\mathcal{N}_\bullet-\mathcal{Z}_\bullet) & \xleftarrow[\simeq]{p_2} & \wp(X,Z) \end{array}$$

$$\text{resp.}\quad \begin{array}{ccccc} X/(X-Z) & \xrightarrow{\text{(HR)}} & \mathcal{U}_\bullet/(\mathcal{U}_\bullet-\mathcal{Z}_\bullet) & = & X/(X-Z)\times\mathcal{U}_\bullet \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathfrak{p}_{X,Z,r_X}} & & & & \Big\uparrow{\scriptstyle p_1}\simeq \\ \mathrm{Th}(N_ZX) & \longleftarrow & \mathcal{N}_\bullet/(\mathcal{N}_\bullet-\mathcal{Z}_\bullet) & \xleftarrow[\simeq]{p_2} & \wp(X,Z,r_X) \end{array}$$

其中，超覆盖映射 (HR) 是 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 中的弱等价，映射 p_1 和 p_2 是 $\mathcal{C}$ 中 pro-对象的同构，而 $\mathfrak{p}_{X,\,Z}$（分别地，$\mathfrak{p}_{X,\,Z,\,r_X}$）是使图交换的诱导映射。

记 $\Delta^{op}\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{Sm}_S^{sm})$ 为 Sm_S^{sm} 上的单纯 Nisnevich 层 ∞-范畴。由于从 $\Delta^{op}\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{Sm}_S^{sm})$ 到 $\mathcal{C}$ 的典范函子是全忠实的，因此我们得到以下定理，它推广了 Morel-Voevodsky 纯性定理。

定理 3.0.7（一般纯性定理）。设 (X,Z) 如 3.0.1 中所述（分别地，(X,Z,r_X)），则存在一个弱等价

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}_{X,Z} &: X/(X-Z)\simeq \mathrm{Th}(N_ZX) \\ \textit{resp. } \mathfrak{p}_{X,Z,r_X} &: X/(X-Z)\simeq \mathrm{Th}(N_ZX) \end{aligned}$$

在 ∞-范畴 $\Delta^{op}\mathrm{Sh}_{Nis}(\mathrm{Sm}_S^{sm})$ 中。

注 3.0.8。(1) 更一般地，对于任意 $i:\ Z\to X$，在 S 上的光滑图式之间的正则闭浸入，都存在映射 $\mathfrak{p}_{X,\,Z}$。(2) 我们强调，迄今为止尚未使用任何 $\mathbf{A}^1$-同伦不变性性质。(3) 在另一项工作中，我们希望将此定理推广到非光滑概形 X/S。

定义 3.0.9. 设 (X,Z) 如 3.0.1 中所述（分别地，(X,Z,r_X) 如 3.0.2 中所述）。我们将满足下图交换的唯一映射定义为特化映射 $\mathrm{sp}_{X,\,Z}$（分别地，$\mathrm{sp}_{X,\,Z,\,r_X}$）

交换

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Th}(\mathbf{A}^1_Z) & \xrightarrow{\psi_t^{-1}} & \mathrm{Th}(N_Z X) & \xleftarrow[\mathfrak{p}_{X,Z}]{\simeq} & X/(X-Z) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{sp}_{X,Z}} & & & & \Big\downarrow \\
\mathrm{Th}(\mathbf{A}^1_Z)\wedge(X-Z)_+ & \xleftarrow[\simeq]{} & S^1\wedge(\mathbb{G}_m\wedge(X-Z))_+ & \xleftarrow{\gamma_t} & S^1\wedge(X-Z)_+
\end{array}$$

resp.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Th}(\mathbf{A}^1_Z) & \xrightarrow{\psi_t^{-1}} & \mathrm{Th}(N_Z X) & \xleftarrow[\mathfrak{p}_{X,Z,r_X}]{\simeq} & X/(X-Z) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{sp}_{X,Z,r_X}} & & & & \Big\downarrow \\
\mathrm{Th}(\mathbf{A}^1_Z)\wedge(X-Z)_+ & \xleftarrow[\simeq]{} & S^1\wedge(\mathbb{G}_m\wedge(X-Z))_+ & \xleftarrow{\gamma_t} & S^1\wedge(X-Z)_+
\end{array}$$

3.0.10. 记 $\mathcal{H}$ 为超覆盖的拉回的集合，并记 $\mathrm{Span}_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ 为一个范畴，其对象是 $\mathcal{C}$ 的对象，态射则是跨度

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ {\scriptstyle p}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle q} \\ P & & Q \end{array}$$

其中 $p\in\mathcal{H}_\circ$

3.0.11. 我们有如下交换的 ∞-范畴图

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathrm{Span}_H(\mathcal{C}) & \\
{\scriptstyle L_{\mathbf{HR}}}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle L_{\mathbf{HR},\mathbf{A}^1}} \\
L_{\mathbf{HR}}\text{张成}_H(\mathcal{C}) & \xrightarrow{L_{\mathbf{A}^1}} & L_{\mathbf{HR},\,\mathbf{A}^1}\text{张成}_H(\mathcal{C}) \\
\simeq\uparrow & & \simeq\uparrow \\
L_{\mathbf{HR}}\mathcal{C} & \longrightarrow & L_{\mathbf{HR},\mathbf{A}^1}\mathcal{C}
\end{array}$$

其中，$L_{\mathbf{HR}}$（分别地，$L_{\mathbf{A}^1}$）表示关于 Zariski 超覆盖（分别地，投影映射 $\mathbf{A}^1_X\to X$）的局部化，而垂直映射是典范包含。

注 3.0.12. 态射 $\mathfrak{p}_{X,\,Z}$ 和 $\mathrm{sp}_{X,\,Z}$ 属于 $\mathrm{Span}_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$。

定义 3.0.13. 我们定义并记作 Sm^{sp}_S（分别地，Sm^{spr}）自由范畴，其对象为光滑 S-概形，态射集合由以下元素生成：

(Dsp1) 对每个光滑 S-概形之间的光滑态射 $f\colon Y\to X$，一个符号 $[f]\colon Y\to X$，

(Dsp2) 对于 3.0.1 中的二元组 (X,Z)（分别地，3.0.2 中的三元组 (X,Z,r_X)），一个符号 $[\mathrm{sp}_{X,\,Z}]\colon Z\to X-Z$（分别地，$[\mathrm{sp}_{X,\,Z,\,r_X}]\colon Z\to X-Z$），

模掉以下关系：

（Rsp1）对于任意可复合的光滑 f、g 态射，其中对象为光滑 S概形，我们有

$$[f \circ g] = [f] \circ [g],$$

并且，对于任意光滑 S概形 X，我们有 $[\mathrm{Id}_X] = \mathrm{Id}_X$。

（Rsp2）设 (X, Z) 如 3.0.1 中所述（相应地，设 (X, Z, r_X) 如 3.0.2 中所述），并设 $f\colon Y \to X$ 是光滑 S-概形之间的光滑态射。记 $t' = t \circ f$（因此 $T := V(t')$ 在 S 上光滑），并设 $g\colon T \to Z$ 和 $h\colon Y - T \to X - Z$ 为诱导的态射。（相应地，记 r_Y 为沿 f 对 r_X 的拉回。）我们有关系式

$$[\mathrm{sp}_{X,Z}] \circ [g] = [h] \circ [\mathrm{sp}_{Y,T}]$$
$$\text{resp. } [\mathrm{sp}_{X,Z,r_X}] \circ [g] = [h] \circ [\mathrm{sp}_{Y,T,r_Y}].$$

（Rsp3）对于如 3.0.2 中所述的 (X, Z, r_X)。设 $r_{X-Z}\colon (X - Z) \to Z$ 为 r_X 的限制。我们也将 Z 视为 $\mathbf{A}^1_Z$ 的闭子概形，并考虑典范投影$^{r_{\mathbf{A}^1_Z}}\colon \mathbf{A}^1_Z \to Z$ 及其限制 $r_{\mathbb{G}_{m}Z}\colon \mathbb{G}_{m}Z \to Z$。我们补充关系式：

$$[r_{X-Z}] \circ [\mathrm{sp}_{X,Z}] = [r_{\mathbf{A}^1_Z}] \circ [\mathrm{sp}_{\mathbf{A}^1_Z,Z}]$$
$$\text{resp. } [r_{X-Z}] \circ [\mathrm{sp}_{X,Z,r_X}] = [r_{\mathbf{A}^1_Z}] \circ [\mathrm{sp}_{\mathbf{A}^1_Z,Z,r_{\mathbb{G}_{m}Z}}]$$

注 3.0.14. 在关系 (Dsp2) 中，除子 Z 可以为空。此外，我们假设，数据对 (X, Z)（分别地，(X, Z, r)）是给定态射 $[\mathrm{sp}_{X,Z}]$（分别地，$[\mathrm{sp}_{X,Z,r}]$）的一部分。

注 3.0.15. 定义 3.0.13 的一个直接推论是存在一个典范函子

$$\iota^{sp}_{spr} : Sm^{spr}_S \to Sm^{sp}_S$$

它遗忘回缩。

3.0.16. 我们定义一个典范函子

$$\Theta_{sp} : Sm^{sp}_S \to L_{\mathbf{HR},\mathbf{A}^1}\mathbf{Span}_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$$
$$\text{resp. } \Theta_{spr} : Sm^{spr}_S \to L_{\mathbf{HR},\mathbf{A}^1}\mathbf{Span}_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$$

如下：

(Dsp1) 符号 $[f]\colon Y \to X$（来自光滑 S-概形之间的一个光滑态射$f\colon Y \to X$）被映为（由 f 定义的平凡跨度），

(Dsp2) 符号 $[\mathrm{sp}_{X,Z}]\colon Z \to X - Z$（对于 (X, Z)，如 3.0.1 中所述）被发送到 3.0.9 中定义的特化映射 $\mathrm{sp}_{X,Z}$。（相应地，符号 $[\mathrm{sp}_{X,Z,r_X}]\colon Z \to X - Z$（对于 (X, Z, r_X)，如 3.0.2 中所述）被发送到 3.0.9 中定义的特化映射 sp_{X,Z,r_X}。）(Rsp1) 这一关系显然成立。

(Rsp2) 令 (X, Z) 如 3.0.1 中所示，并令 $f\colon Y \to X$ 为光滑 S-概形之间的光滑态射。记 $t' = t \circ f$（因此 $T := V(t')$ 在 S 上光滑），并令$g\colon T \to Z$和 $h\colon Y - T \to X - Z$为诱导态射。为了证明

$$\mathrm{sp}_{X,Z} \circ g = h \circ \mathrm{sp}_{Y,T}$$

在 $L_{\mathbf{HR},\mathbf{A}^1}\mathrm{Span}_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ 中，只需在 $\mathrm{Span}_{\mathcal{H}}(\mathcal{C})$ 中进行讨论。考虑 $\mathscr{I}(X,Z)$ 中由下图给出的一个对象

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{W}_\bullet & & \\ & \overset{p_1}{\swarrow} & \uparrow & \overset{p_2}{\searrow} & \\ \mathcal{U}_\bullet & \hookleftarrow & \mathcal{Z}_\bullet & \hookrightarrow & \mathcal{N}_\bullet \\ {\scriptstyle q_1}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q_2} \\ X & \hookleftarrow & Z & \hookrightarrow & N \end{array}$$

并考虑沿 $Y \to X$ 的拉回，它是 $\mathscr{I}(Y,T)$ 中的一个对象，记作

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{W}'_\bullet & & \\ & \overset{p'_1}{\swarrow} & \uparrow & \overset{p'_2}{\searrow} & \\ \mathcal{U}'_\bullet & \hookleftarrow & \mathcal{Z}'_\bullet & \hookrightarrow & \mathcal{N}'_\bullet \\ {\scriptstyle q'_1}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q'_2} \\ Y & \hookleftarrow & T & \hookrightarrow & N' \end{array}$$

其中，根据假设，我们有 $T \simeq Y \times_X Z$，并且

$$N' \simeq N_T Y \simeq N_Z X \times_Z T \simeq N_Z X \times_X Y.$$

以下图表

$$\begin{array}{ccc} (Y,T) & \longrightarrow & (X,Z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{U}'_\bullet, \mathcal{Z}'_\bullet) & \longrightarrow & (\mathcal{U}_\bullet, \mathcal{Z}_\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{W}'_\bullet, \mathcal{Z}'_\bullet) & \longrightarrow & (\mathcal{W}_\bullet, \mathcal{Z}_\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\mathcal{N}'_\bullet, \mathcal{Z}'_\bullet) & \longrightarrow & (\mathcal{N}_\bullet, \mathcal{Z}'_\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (N',T) & \longrightarrow & (N,Z) \end{array}$$

是交换的。

因此，以下图表

$$\begin{array}{ccc} Y/(Y-T) & \longrightarrow & X/(X-Z) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{W}'_\bullet/(\mathcal{W}'_\bullet - \mathcal{Z}'_\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{W}_\bullet/(\mathcal{W}_\bullet - \mathcal{Z}_\bullet) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Th}(N') & \longrightarrow & \mathrm{Th}(N) \end{array}$$

也是交换的，并且我们可以定义以下复合映射

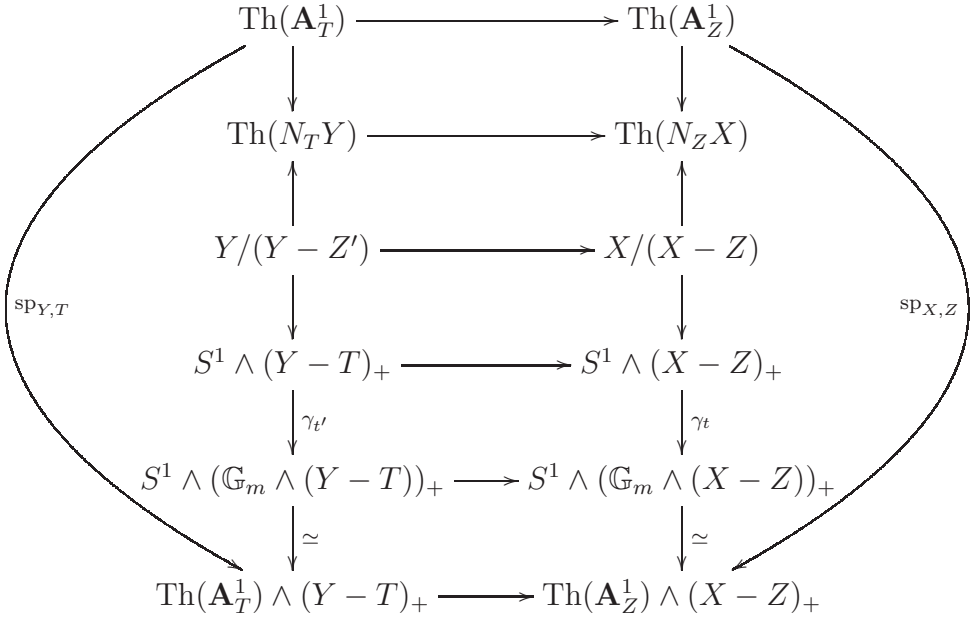
$$\begin{array}{ccc} \varprojlim_{\mathcal{W}'_\bullet \in \mathscr{I}(Y,T)} \mathcal{W}'_\bullet/(\mathcal{W}'_\bullet - \mathcal{Z}'_\bullet) & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \varprojlim_{\mathcal{W}'_\bullet \in \mathscr{I}(Y,T)} \Phi(\mathcal{W}_\bullet)/(\Phi(\mathcal{W}_\bullet) - \Phi(\mathcal{Z}_\bullet)) & \xrightarrow{\alpha_f} & \\ \downarrow & \swarrow & \\ \varprojlim_{\mathcal{W}_\bullet \in \mathscr{I}(X,Z)} \mathcal{W}_\bullet/(\mathcal{W}_\bullet - \mathcal{Z}_\bullet) & & \end{array}$$

其中我们用.....表示

$$\Phi : \mathscr{I}(X,Z) \to \mathscr{I}(Y,T)$$

由沿着 $Y \to X$的拉回诱导的典范函子。

根据定义 3.0.9，以下图表



是交换的，其中水平态射由 f（以及 α_f）诱导。

综合以上各点，我们得出：

$$\mathrm{sp}_{X,Z} \circ g = h \circ \mathrm{sp}_{Y,T}.$$

对于 Sm_S^{spr}，我们同样可以逐字证明

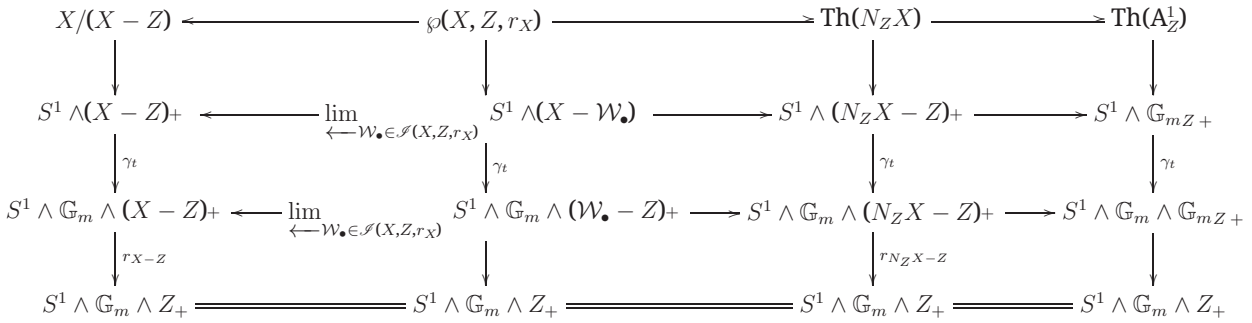
$$\mathrm{sp}_{X,Z,r_X} \circ g = h \circ \mathrm{sp}_{Y,T,r_Y}$$

其中我们使用 (Rsp2) 的记号。

(Rsp3) 对于这一关系，我们需要 $\mathbf{A}^1$ 局部化性质。我们先处理 Sm_S^{spr} 的情形，也就是说，我们证明：

$$[r_{X-Z}] \circ [\mathrm{sp}_{X,Z,r_X}] = [r_{\mathbf{A}^1_Z}] \circ [\mathrm{sp}_{\mathbf{A}^1_Z,Z,r_{\mathbb{G}_m Z}}]$$

其中我们采用（Rsp3）中的记号。该关系源于下图



是交换的。

现在我们讨论 Sm_S^{sp} 的情形。为了证明

$$[r_{X-Z}] \circ [\mathrm{sp}_{X,Z}] = [r_{\mathbf{A}^1_Z}] \circ [\mathrm{sp}_{\mathbf{A}^1_Z,Z}],$$

我们可以像上面那样画出类似的图，但需要注意，在这种情形下，中下方方块可能不交换。解决方法是考虑以下交换图，将问题归结到前一种情形：

$$\begin{array}{ccccccc} X/(X-Z) & \longleftarrow & \wp(X,Z,r_X) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(N_ZX) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\mathbf{A}^1_Z) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ X/(X-Z) & \longleftarrow & \wp(X,Z) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(N_ZX) & \longrightarrow & \mathrm{Th}(\mathbf{A}^1_Z) \end{array}$$

其中，垂直映射由典范函子 $\mathscr{I}(X,Z,r_X) \to \mathscr{I}(X,Z)$ 是全忠实函子这一事实所诱导，因此根据 $\mathbf{A}^1$-局部化性质，它们是同构。

4. Moving lemma via the smooth-smooth site

4.0.1. 综合 3.0.11 和 3.0.16，我们得到一个 ∞-函子

$$\mathscr{M} : Sm_S^{sp} \to \mathrm{SH}(Sm_S^{sm})$$

其中 $\mathrm{SH}(\mathrm{Sm}_S^{sm})$ 是定义在光滑位点 Sm_S^{sm} 上的稳定动机同伦 ∞-范畴。

4.0.2. 现在我们可以证明主要定理 1.1.3。我们将通过构造函子的一个拟逆

$$\nu^* : \mathrm{SH}(Sm_S) \to \mathrm{SH}(Sm_S^{sm})$$

来选取模型。令 $\mathbb{E} \in \mathrm{SH}(\mathrm{Sm}_S)$ 为一个动机谱，它可以看作函子族

$$\mathbb{E}_n : (Sm_S^{sm})^{op} \to \mathscr{S}$$

其中 $\mathscr{S}$ 是空间的 ∞-范畴。

我们可以将 $\mathbb{E}_n$ 扩展为一个函子

$$\widehat{\mathbb{E}}_n : \mathrm{SH}(Sm_S^{sm}) \to \mathscr{S}$$

通过取余极限并将其与

$$\mathscr{M} : Sm_S^{sp} \to \mathrm{SH}(Sm_S^{sm})$$

以获得一个 ∞-函子

$$\widehat{\mathbb{E}}_n : Sm_S^{sp} \to \mathscr{S}$$

对于每个自然数 n。

^取一个仍记为 $\mathbb{E}_*$ 的模型，并通过如下设定将其刚化

$$\tilde{\mathbb{E}}_*(X) = \lim_{r\in\mathbf{N}} \widehat{\mathbb{E}}(\mathbf{A}^r_S \times_S X)$$

~对于任意光滑概形 X/S。完全如 [DFJ22，第 2 节中所述，2], 我们可以证明, $\mathbb{E}_*$可以配备针对局部完全交映射的 Gysin 态射。由于我们~不失一般性地可以处理仿射概形，这意味着 $\mathbb{E}_*$ 可以扩张到整个位点 Sm_S。将此新对象记为 $\Psi(\mathbb{E}_*) \in \mathrm{SH}(\mathrm{Sm}_S)$。由构造可知， $\Psi(\mathbb{E}_*)$ 在光滑-光滑位点 Sm_S^{sm} 上的限制恰好是 $\mathbb{E}_*$。

反之，若 $\mathbb{E}'$ 是 $\mathrm{SH}(\mathrm{Sm}_S)$ 中的一个元素，则我们可以考虑其在光滑-光滑位点上的限制 $\nu^*(\mathbb{E}')$。在此情形下，对于如 3.0.1 中的 (X, Z)，我们可以看到纯性态射

$$\mathfrak{p}^*_{X,Z} : \nu^*(\mathbb{E}')(\mathrm{Th}(N_Z X)) \to \nu^*(\mathbb{E}')(X/(X - Z))$$

在 3.0.7 中定义的态射与 Morel-Voevodsky纯性态射一致。因此，在 $\Psi(\nu^*(\mathbb{E}'))$ 上构造的拉回对应于 $\mathbb{E}'$ 上的拉回，于是

$$\Psi(\nu^*(\mathbb{E}')) \simeq \mathbb{E}'$$

由此完成定理 1.1.3 的证明。

参考文献

{Art69] M. Artin，完备局部环上结构的代数逼近，Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.（1969），第 36 期，23–58。MR 268188 5[Ayo07] J. Ayoub，Grothendieck 的六种运算与动机世界中的消失循环形式体系。I

，

第314卷，巴黎：法国数学会，2007年。3[Bac20] Tom Bachmann，《动机空间的零阶 - 稳定同伦层》，《Jussieu 数学研究所期刊》（2020）。4[BD17] M. Bondarko 和 F. D´eglise，《动机同伦理论中的维数同伦t-结构》，《Adv. Math.》311（2017），91–189。MR 3628213 3[BHP22] C. Balwe、A. Hogadi 和 R. Pawar，《优良离散赋值环上的 Milnor-Witt 循环模》，arXiv:2203.07801，2022。3[BY20] Tom Bachmann 和 Maria Yakerson，《迈向 $\mathbb{G}_m$-稳定化的保守性》，《Geom. Topol.》24（2020），第4期，1969–2034（英文）。4[CD12] D.-C. Cisinski 和 F. D´eglise，《混合Weil上同调》，《Adv. in Math.》230（2012），第1期，55–130。2[D´eg11] F. D´eglise，《同伦模》，《Doc. Math.》16（2011），411–455。3[D´eg19] Fr´ed´eric D´eglise，《算术几何中的定向理论》，K-理论。国际研讨会论文集，孟买，2016年，新德里：Hindustan Book Agency；孟买：塔塔基础研究院，2019年，第239–347页（英文）。5[DFJ22] F. D´eglise、N. Feld 和 F. Jin，《Perverse 同伦心与 mw-模》，arXiv:2210.14832[math.AG], 2022。3，14[Fel20] N. Feld，《Milnor-Witt 循环模》，《J. Pure Appl. Algebra》224（2020），第7期，44，文章编号 106298。3

[Fel21a] ———,《二次交数的消失定理》，arXiv:2112.05200v1[math.AG], 2021。3[Fel21b] N. Feld,《Morel 同伦模与 Milnor-Witt 循环模》,《Doc. Math.》26（2021），617–660。3[Fel21c] N. Feld,《MW 同伦层与 Morel 广义迁移》,《Adv. Math.》393，文章编号 108094，共46页，2021年。3，4[Fel21d] ———, Milnor-Witt K-理论上的迁移，arXiv:2011.01311 [math.AG], 即将在《Tohoku Mathmatical Journal》发表，2021年。3[Fel22] ———,《零次 Chow-Witt 群的双有理不变性》，arXiv:2210.03995v1[math.AG], 2022。3[FS02] Eric M. Friedlander 和 Andrei Suslin,《联系代数 KK 理论与动机´上同调的谱序列》,《Ann. Sci. Ec. Norm. Sup´er.》（第4辑）35（2002），第6期，773–875（英文）。4[Lev01] Marc Levine,《代数循环理论中的局部化技巧》,《J. Algebr. Geom.》10（2001），第2期，299–363（英文）。4[Lev06] M. Levine,《Chow 移动引理与同伦 coniveau 塔》，2006年,《K-Theory》37，第1–2期，129–209。MR 2274672（2007m:19001）。4[MV99] Fabien Morel 和 Vladimir Voevodsky,《概形的^1-同伦论》,《Inst. Hautes ´Etudes Sci. Publ. Math.》（1999），第90期，45–143（2001）。MR 1813224 2[Pop86] Dorin Popescu,《一般 N´eron 消解与逼近》,《Nagoya Math. J.》104（1986），85–115。MR 868439 5[Ros96] M. Rost,《带系数的 Chow 群》,《Doc. Math.》1（1996），319–393（英文）。3